1812 R 1-4

1967 JUL 1 1

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC

DIN IAŞI

SERIE NOUĂ

Tomul XII (XVI)

FASC. 1—2

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA BUDAPEST

1966

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC

DIN IAŞI

SERIE NOUĂ

Tomul XII (XVI)

FASC. 1—2

1966

1989

F 1812

COLEGIUL DE REDACȚIE

Prof. emerit dr. doc. GH. ALEXA, prof. ing. D. ATANASIU, prof. ing. C. CALISTRU, prof. ing. T. GOLGOȚIU, prof. dr. doc. D. MANGERON (secretar), conf. ing. A. MARCHIȘ, prof. dr. doc. D. RUSU, prof. ing. A. ȘESAN, acad. prof. dr. doc. CRISTOFOR SIMIONESCU (președinte)

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
58 | 1968

COMITETELE DE REDACȚIE ALE SECȚIILOR

MATEMATICI, MECANICĂ TEORETICĂ, FIZICĂ

Prof. dr. doc. Al. Climescu
Prof. Gh. Ciobanu
Prof. dr. doc. V. Petrescu

CHIMIE INDUSTRIALĂ

Prof. dr. doc. M. Dima
Conf. dr. ing. Gh. Chiriță
Conf. ing. Gh. Botez

ELECTROTEHNICĂ

Conf. dr. ing. D. Bărbulescu
Prof. dr. doc. N. Boțan
Conf. dr. ing. L. Sebastian

MECANICĂ

Prof. dr. doc. T. Fărcaș
Prof. ing. G. d'Albon
Conf. ing. Cr. Linde

CONSTRUCȚII

Prof. emerit ing. A. Cernătescu
Conf. ing. Vl. Boghian
Conf. ing. C. Ciobanu
Lector ing. A. Radu

INDUSTRIE UȘOARĂ

Prof. ing. I. Ștefănescu
Conf. ing. V. Copilu
Conf. ing. V. Cociu

MŰSZAKI EGYETEM * BUDAPEST KÖNYVTÁRA

REDACȚIA

Prof. dr. doc. D. MANGERON (redactor responsabil)
Lector ing. H. ROSMAN (secretar)
Lector ing. A. BRAIER (secretar)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Tomul XII (XVI), fasc. 1—2 1966

SUMAR

	Pag.
REDACŢIONALE	XV
MATEMATICĂ. MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ	
AL. CLIMESCU, Asupra ecuaţiei funcţionale a distributivităţii unilaterale (I) (franc.; rez. rom.)	1
I. ROZENBERG (R. S. Cehoslovacă), Asupra problemei suprapunerii funcţiilor de mai multe variabile (germ.; rez. rom.)	7
I. ENESCU, Asupra algebrelor polinomiale (II) (rom.; rez. franc.)	17
L. M. YOUNG (S.U.A.), Soluţia unei ecuaţii cvintice ciclice generale (engl.; rez. rom.)	21
M. PICONE (Italia), Criterii suficiente pentru mulţimi funcţionale convexe relative la probleme generale de calculul variaţiilor, privitoare la integrale multidimensionale de ordin oarecare în vectorul minimant cu mai multe componente (ital.; rez. rom.)	27
M. M. CLARK (Anglia), Tratarea ecuaţiilor cu derivate parţiale prin metoda diferenţelor finite (engl.; rez. rom.)	31
S. PICCARD (Elveţia), Dependenţă şi independenţă liniară modulo k a vectorilor (franc.; rez. rom.)	39
N. APOSTOLATOS (R.F.G.), Asupra punctelor singulare ale soluţiilor unor ecuaţii de tip Riccati sau ale unor ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul al doilea (germ.; rez. rom.)	47
H. KNAPP (Austria), Un spectru de procedee iterative în calculul numeric al ecuaţiilor diferenţiale (germ.; rez. rom.)	55
W. GREUB şi E. STAMM (Canada), Asupra înmulţirii cîmpurilor de tensori (engl.; rez. rom.)	65
F. MARCUS, Asupra sistemelor triple de curbe în spaţiul proiectiv (franc.; rez. rom.)	71
C. TALABĂ, Asupra congruenţelor Bianchi (rom.; rez. rus.)	85
D. MANGERON, GH. SILAŞ şi L. BRÎNDEU, Metodă de aproximare poligonală pentru sistemele cu caracteristică neliniară (rusă; rez. rom.)	89
M. BERCOVICI, A. OPREA şi F. POTERAŞU, Forme integrale ale restului în aproximarea polinomială tayloriană în mai multe dimensiuni (ital.; rez. rom.)	97

Pag.

J. DELPORTE (Franța), Tehnica prelungirii prin continuitate. Aplicații la studiul continuității funcțiilor aleatoare normale (franc.; rez. rom.) 101
I. D. CERKASOV (U.R.S.S.), Teoremă relativă la limita speranței matematice condiționate și aplicațiile ei în teoria interpolării (rusă; rez. rom.) 107
GH. I. IONESCU, Nomograme cu transparent orientat pentru sisteme de două ecuații cu opt, nouă, zece și unsprezece variabile (rom.; rez. germ.) 111
N. CH. P. RAMACHARYULU (India), Asupra rotației plane a unui lichid conductor izotropic (engl.; rez. rom.) 119
A. BRAIER, Studiul direct al mișcării sub acțiunea forțelor newtoniene (franc.; rez. rom.) 123
I. DEUTSCH și E. DÎMBOIU, Asupra teoremei reciprocității stărilor fizice liniare (rom.; rez. franc.) 129
C. RUSCIOR, GH. TACU, M. MOISE și C. CIOBANU, Dozarea spectrală a indiului în minereuri (rom.; rez. franc.) 135

CHIMIE

GH. BURLACU și C. IOAN, Asupra reducerii Sb^{3+} pe picătura de mercur, în mediu apos și în amestec de solvenți (rom.; rez. franc.) 139
A. I. BUSEV și V. M. IVANOV (U.R.S.S.), Determinarea extractiv-fotometrică a paladiului cu ajutorul 1-(2-piridilazo)-rezorcinei (rusă; rez. rom.) 147
I. ROȘCA și S. APOSTOL, Asupra existenței ionilor complecși de Co (II) în soluții apoase (rom.; rez. franc.) 157
EL. DIACONESCU și FL. CHIRIAC, Schimbători de ioni din cărbuni românești (III) (rom.; rez. germ.) 163
I. MATEI și T. LIXANDRU, Condensarea acenaftenchinonei cu amine aromatice și diamine (rom.; rez. franc.) 171
GH. BOTEZ, C. ONISCU, E. MERICĂ și C. GOREA, Sulfamidele acizilor fenoxipropionici (I) (rom.; rez. franc.) 179
I. MATEI și E. COMANIȚĂ, Sinteze de noi acil-tiosemicarbazide și semicarbazide (I) (rom.; rez. franc.) 189
GH. LUPUȘOR și V. SECURE, Coloranți azoici obținuți din acidul dianisidin-N(2-nitrofenil-4-sulfonic) cu diverse componente de cuplare (rom.; rez. engl.) 199
GH. ALEXA, GH. CHIRIȚĂ, A. AGRATINA, I. BOTEZAN, A. CHIRIȚĂ și E. BOȚI, Studii asupra tăbăcirii combinate formol-crom-tanin (rom.; rez. franc.) 209
GH. CHIRIȚĂ, M. MANCIU și E. BOȚI, Contribuție la studiul tăbăcirii vegetale în soluție de solvenți organici (rom.; rez. franc.) . . 221

ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

I. LUCA, E. OSADEȚ și E. LUCA, Contribuții la studiul electreților rom.; rez. franc.) 229
GH. SAVIN, N. RADU și S. MITREA, Determinarea parametrilor circuitelor cuplate magnetic prin utilizarea indicatoarelor sensibile la fază (rom.; rez. franc.) 235
I. BEJAN, Asupra fenomenului de histerezis în modulatoarele magnetice (rom.; rez. engl.) 243
I. S. EREMEEV (U.R.S.S.), Comparator analogic-cifric (rusă; rez. rom.) . 251
D. CRISTESCU, Despre posibilitatea înregistrării oscilografice a proceselor de undă direct funcție de distanță (rom.; rez. franc.) . . 257

Pag.

I. D. BOIANOV, D. D. BAINOV, I. P. MARINOV și N. A. PARTINOVA, (R. P. Bulgaria), Asupra teoriei generatorilor *LC* tranzistorizați cu *n* rețele oscilante (rusă; rez. rom.) 269
E. BALABAN și N. V. BOȚAN, Aspecte noi privind extinderea aplicării algebrei logicii la proiectarea schemelor de acționare electrică (rom.; rez. rusă) 275
L. PREDA, M. NICOLAE și GH. POPA, Organizarea în flux a lucrărilor la execuția liniilor electrice aeriene de 15 kV de electrificări rurale (rom.; rez. rusă) 283
H. ROSMAN, Domeniile de existență ale coeficienților de transfer ai unui cuadripol diport liniar, pasiv și reciproc, alimentînd un receptor pasiv (rom.; rez. franc.) 293

MECANICĂ TEHNICĂ

CHR. PELECUDI, Accelerații compuse-reduse de ordine superioare (franc.; rez. rom.) 311
A. BRAIER și H. ROSMAN, Mișcarea forțată a oscilatorului liniar supus la perturbații modulate armonic în amplitudine (rom.; rez. franc.) 315
V. T. GLUȘKO și M. I. ROZOVSKI (U.R.S.S.), Determinarea tensiunilor într-o placă elastică cu elasticitate remanentă și cu anizotropie cilindrică (rusă; rez. rom.) 327
J. S. BEGGS (S.U.A.), Cinematica unui simulator de întîlnire în cosmos (engl.; rez. rom.) 339
I. SZEKELY și V. HANDRALUCA, Sinteza mecanismului patrulater cu patină oscilantă (rom.; rez. franc.) 349
N. N. KOCINA și N. S. MELNIKOVA (U.R.S.S.), Studiul cîmpurilor de curbe integrale relative la ecuațiile ce se referă la mișcările automodelate ale gazelor (rusă; rez. rom.) 357
A. K. DIUNIN (U.R.S.S.), Factor de suspensie într-un curent bifazat (rusă; rez. rom.) 367
C. PICOȘ, Asupra formelor generalizate de rezolvare a lanțului de dimensiuni prin asamblare selectivă și reglare, utilizînd valorile limită ale elementului de închidere (rom.; rez. germ.) . . . 379
A. RĂILEANU, D. NICOLESCU și I. CONDREA, Determinarea parametrilor forței principale de așchiere în procesul de strunjire longitudinală la oțelurile românești (VIII) (rom.; rez. franc.) . . 385
V. BELOUS, I. CONDREA și B. PLAHTEANU, Cercetări privind influența unghiului de degajare asupra forței principale de așchiere (rom.; rez. rusă) 389
T. GOLGOȚIU, T. FĂRCAȘ, GH. AILINCĂI, C. PICOȘ, C. CIOCHINĂ, E. ANDREI, C. BOHOSIEVICI și I. MĂLUREANU, Comportarea la coroziune a oțelurilor aliate de construcție, standardizate (rom.; rez. franc.) 397
C. CIOCHINĂ, Cementarea unor oțeluri carbon și aliate standardizate, cu amestec pe bază de Na_2O_2 (rom.; rez. franc.) 405
I. L. KARTVELIȘVILI, T. T. KIPIANI, N. A. KIKNADZE, G. A. GOZALIȘVILI și S. V. KOBAHIDZE (U.R.S.S.), Încercarea la șoc a lamei buldozerului (rusă; rez. rom.) 413

CONSTRUCȚII. HIDROTEHNICĂ

A. ȘESAN, GH. POPESCU și D. VASILESCU, Proiectare optimizată a structurilor, în domeniul plastic, cu ajutorul analogiei electronice (rom.; rez. engl.) 421

Pag.

V. FOCȘA, A. RADU, AL. VEREȘ, L. BIBOROSCH și C. LUPAȘCU, Izolarea acustică la clădiri de locuit din beton armat (rom.; rez. franc.) 427
N. ORLOVSCHI, AL. DUMITRAȘ, C. AMARIEI, N. UNGUREANU și L. TANASACHI, Studiul în domeniul plastic al cadrelor metalice pe modele la scară redusă (rom.; rez. franc.) 435
A. MIHUL, Studii asupra posibilităților de utilizare a tensiunilor artificial introduse în elementele din beton în vederea folosirii optime a proprietăților mecanice ale betonului și armăturii (rom.; rez. engl.) 443
T. SILION, Un criteriu pentru stabilirea prin calcul a sistemului de fundație adecvat la fundarea în suprafață (rom.; rez. germ.) . . 453
C. APREUTESEI, GH. GAVRILOV, E. POPA, V. TARASOV și GH. NISTOR, Compensarea semiriguroasă a coordonatelor punctelor de triangulație, determinate prin metoda punctelor duble și triple (rom.; rez. franc.) 459
E. M. GHENDEL (U.R.S.S.), Deplasarea clădirilor (rusă; rez. rom.) . 467
A. N. GRACIAN și A. P. ZUBEHIN (U.R.S.S.), Principii în alegerea mineralizatorilor de ciment Portland alb (rusă; rez. rom.) . . 475
C. BRANIȘTE și FL. VASILESCU, Influența adaosului de baritină asupra proprietăților cimentului Portland (rom.; rez. germ.) . . . 479
L. GUȘTIUC, E. GHEORGHIU și M. POENESCU, Dinamica umidității și sărurilor solubile la solul aluvial glomerular, profund argilo-lutos, slab salinizat și gleizat (rom.; rez. rusă) 489

INDUSTRIE UȘOARĂ

M. BERCOVICI, A. TRIANDAF și C. STANCIUC, Contribuție la studiul unor probleme de programare liniară interesînd industria textilă (rom.; rez. franc.) 497
M. GRINDEA și S. IFRIM, Influența soluțiilor diluate de acid sulfuric asupra lînei (rom.; rez. franc.) 501
S. IFRIM și M. GRINDEA, Despre modificările chimice ale fibrei de lînă tratată cu carbonat de sodiu (rom.; rez. franc.) . . . 509
R. S. URUDJEV și G. I. KUTEANIN (U.R.S.S.), Asupra comportării pieilor tăbăcite cu săruri de crom sau cu tanide în cazul încălzirii uscate (rusă; rez. rom.) 515
A. CHIRIȚĂ și GH. CHIRIȚĂ, Contribuții la studiul comportării pieilor de fețe prelucrate în Republica Socialistă România, la confecționarea încălțămintei (rom.; rez. franc.) 523

RECENZII 533

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Vol. XII (XVI), fasc. 1—2 1966

CONTENTS

	Pag.
EDITORSHIP'S ANNOUNCEMENTS	XV
MATHEMATICS. THEORETICAL MECHANICS. PHYSICS	
AL. CLIMESCU, Sur l'équation fonctionnelle de la distributivité unilatérale (I) (French ; Rumanian Summary)	1
I. ROZENBERG (Tschechoslowakei), Zu einigen fragen der Superposition von Funktionen mehrerer Veränderlicher (German ; Rumanian Summary)	7
I. ENESCU, On Polynomial Algebrae (II) (Rumanian ; French Summary)	17
L. M. YOUNG (U.S.A.), A Solution of the General Cyclic Quintic (English ; Rumanian Summary)	21
M. PICONE (Italia), Criteri sufficienti per insiemi funzionali convessi concernenti generali problemi di calcolo delle variazioni riguardanti integrali pluridimensionali d'ordine qualsivoglia nel vettore minimante a più componenti (Italian ; Rumanian Summary)	27
M. M. CLARK (England), Finite-difference Representation of Partial Differential Equations (English ; Rumanian Summary)	31
S. PICCARD (Suisse), Dépendance et indépendance linéaire modulo k de vecteurs (French ; Rumanian Summary)	39
N. APOSTOLATOS (Deutsche Bundesrepublik), Über die ausgezeichneten Punkte der Lösungen einer Riccatischen bzw. einer linearen Differentiagleichung 2. Ordnung (German ; Rumanian Summary)	47
H. KNAPP (Österreich), Ein Spektrum von Iterrationsvorschriften zur numerischen Behandlung von Differentialgleichungen (German ; Rumanian Summary)	55
W. GREUB and E. STAMM (Canada), On the multiplication of tensor fields (English ; Rumanian Summary)	65
F. MARCUS, Sur les systèmes triples de courbes dans l'espace projectif (French ; Rumanian Summary)	71
C. TALABĂ, On the Bianchi's Congruences (Rumanian ; Russian Summary)	85
D. MANGERON, GH. SILAŞ and L. BRÎNDEU, Poligonal Approximation Method by Studying System with Nonlinear Characteristics (Russian ; Rumanian Summary)	89

Pag.

M. BERCOVICI, A. OPREA and F. POTERAȘU, Forme integrali del resto nell'approssimazione polinomiale tayloriana pluridimensionale (Italian ; Rumanian Summary) 97
J. DELPORTE (France), Techniques de prolongement par continuité. Application à l'étude de la continuité des fonctions aléatoires normales (French ; Rumanian Summary) 101
I. D. CZERKASOV (U.S.S.R.), Generalized Integral Limit Theorem and its Application in the Interpolation Theory (Russian ; Rumanian Summary) 107
GH. D. IONESCU, Nomogramme mit gerichtetem Transparent für Doppelgleichungsysteme mit acht, neun, zehn und elf veränderlichen Grössen (Rumanian ; German Summary) 111
N. CH. P. RAMACHARYULU (India), A Note on the Rotation of an Isotropic Conducting Liquid in Plane Motion (English ; Rumanian Summary) 119
A. BRAIER, Étude par voie directe du mouvement sous l'action des forces newtoniennes (French ; Rumanian Summary) . . . 123
I. DEUTSCH and E. DÎMBOIU, Sur le théorème de la réciprocité des états physiques linéaires (Rumanian ; French Summary) . . 129
C. RUSCIOR, GH. TACU, M. MOISE and C. CIOBANU, Dosage spectral de l'indium dans les minérais (Rumanian ; French Summary) . 135

CHEMISTRY

GH. BURLACU and C. IOAN, Réduction du Sb^{3+} sur la goutte de mercure dans une solution aqueuse et dans un mélange de solvants (Rumanian ; French Summary) 139
A. I. BUSEV and V. M. IVANOV (U.R.S.S.), Détermination par voie extractive-photométrique du palladium à l'aide de 1-(2-piridilaso)-résorcine (Russian ; Rumanian Summary) 147
I. ROȘCA and S. APOSTOL, Sur l'existence des ions complexes de Co (II) dans les solution aqueuses (Rumanian ; French Summary) . 157
EL. DIACONESCU and FL. CHIRIAC, Ionenaustauscher aus rumänischen Kohlen (III) (Rumanian ; German Summary) 163
I. MATEI and T. LIXANDRU, La condénsation de l'acénaphtenquinone avec des amines et diamines aromatiques (Rumanian ; French Summary) 171
GH. BOTEZ, C. ONISCU, E. MERICĂ and C. GOREA, Sulfamides des acides phénoxipropioniques (I) (Rumanian ; French Summary) . . 179
I. MATEI and E. COMANIȚĂ, Nouvelles synthèses d'acyl-thiosemicarbazides et semicarbazides (I) (Rumanian ; French Summary) . . 189
GH. LUPUȘOR and V. SECURE, Azoic Dyes obtained from Dianisidin-N (2-nitrophenil-4-sulphonic) Acid coupled with Different Coupling Components (Rumanian ; English Summary) 199
GH. ALEXA, GH. CHIRIȚĂ, A. AGRATINA, I. BOTEZAN, A. CHIRIȚĂ and E. BOȚI, Etudes concernant le tannage combiné formole-chrôme-tanin (Rumanian ; French Summary) 209
GH. CHIRIȚĂ, M. MANCIU and E. BOȚI, Contributions à l'étude du tannage végétal dans les solution des solvants organiques (Rumanian ; French Summary) 221

ELECTRICAL ENGINEERING. ELECTRONICS

I. LUCA, E. OSADEȚ and E. LUCA, Contributions à l'étude des électrets (Rumanian ; French Summary) 229

Pag.

GH. SAVIN, N. RADU and S. MITREA, Détermination des paramètres des circuits à couplage magnétiques à l'aide des indicateurs de phase (Rumanian ; French Summary) 235

I. BEJAN, About Hysteresis in Magnetic Modulators (Rumanian ; Englich Summary) 243

I. S. EREMEEV (U.S.S.R.), Analog-digital Comparator (Russian ; Rumanian Summary) 251

D. CRISTESCU, Sur la possibilité d'enregistrement oscillographique des processus d'onde, directement en fonction de distance (Rumanian ; French Summary) 257

I. D. BOIANOV, D. D. BAINOV, I. P. MARINOV and N. A. PARTINOVA (Bulgarie), Sur la théorie des générateurs *LC* transistorisés à *n* réseaux oscillants (Russian ; Rumanian Summary) . . . 269

E. BALABAN and N. V. BOȚAN, Aspects nouveaux concernant l'extension de l'application de l'algèbre logique au calcul des schémas de commande électrique (Rumanian ; Russian Summary) . . . 275

L. PREDA, M. NICOLAE and GH. POPA, Sur l'organisation en fluxe des travaux à l'exécution des lignes électriques aériennes de 15 kV d'électrifications rurales (Rumanian ; Russian Summary) . . 283

H. ROSMAN, Domaines d'existence des coefficients de transfert d'un quadripôle diporte linéaire, passif et réciproque, alimentant un récepteur passif (Rumanian ; French Summary) 293

MECHANICAL ENGINEERING

CHR. PELECUDI, Accélérations composées-réduites d'ordres supérieurs (French ; Rumanian Summary) 311

A. BRAIER and H. ROSMAN, Mouvement forcé de l'oscillateur linéaire sous l'action des perturbations à modulation harmonique de l'amplitude (Rumanian ; French Summary) 315

V. T. GLUSHKO and M. I. ROZOVSKII (U.S.S.R.), Détermination des tensions dans une plaque élastique à élasticité remanente et anisotropie cylindrique (Russian ; Rumanian Summary) 327

J. S. BEGGS (S.U.A.), Rendevous Simulator Kinematics (English ; Rumanian Summary) 339

I. SZEKELY and V. HANDRALUCA, Synthèse des mécanismes quadrilatères à patin oscillant (Rumanian ; French Summary) . . . 349

N. N. KOCZINA and N. S. MELNIKOVA (U.R.S.S.), Étude des champs de courbes intégrales relatives aux équations des mouvements automodélés des gaz (Russian ; Rumanian Summary) . . . 357

A. K. DIUNIN (U.S.S.R.), Facteur de suspension dans un courant biphasé (Russian ; Rumanian Summary) 367

C. PICOȘ, Über die veralgemeintern Lösungsformen der Dimensionierungsketten durch Selektive Aufstellung und Regelung, die Grenzwerte des Schliesselementes verwendend (Rumanian ; German Summary) 379

A. RĂILEANU, D. NICOLESCU and I. CONDREA, Détermination des paramètres des forces de coupe concernant les aciers roumains soumis au tournage longitudinal (VIII) (Rumanian ; French Summary) . 385

V. BELOUS, I. CONDREA and B. PLAHTEANU, Recherches concernant l'influence de l'angle de dégagement sur la force principale de perçage (Rumanian ; Russian Summary) 389

T. GOLGOȚIU, T. FARCĂȘ, GH. AILINCĂI, C. PICOȘ, C. CIOCHINĂ, E. ANDREI, C. BOHOSIEVICI and I. MĂLUREANU, Comportement à la corrosion des aciers alliés de construction, standardisés (Rumanian ; French Summary) 397

Pag.

C. CIOCHINĂ, Cémentation des aciers carbon et spéciaux standardisés, avec un mélange à base de Na_2O_2 (Rumanian ; French Summary) . 405
I. L. KARTVELISHVILI, T. T. KIPIANI, N. A. KIKNADZE, G. A. ROZALISHVILI and S. V. KOBAKHIDZE (U.S.S.R.), Essai au choc de la lame du buldozzer (Russian ; Rumanian Summary) . . . 413

CONSTRUCTIONS. HYDROTECHNICS

A. ŞESAN, GH. POPESCU and D. VASILESCU, Optimised Structural Design in Plastic Range by Means of Electronic Analogy (Rumanian ; English Summary) 421
V. FOCŞA, A. RADU, AL. VEREŞ, L. BIBOROSCH and C. LUPAŞCU, Isolation acoustique des immeubles d'habitation en béton armé (Rumanian ; French Summary) 427
N. ORLOVSCHI, AL. DUMITRAŞ, C. AMARIEI, N. UNGUREANU and L. TANASACHI, Étude sur modèle, à l'échelle réduite, des cadres métalliques en domaine plastique (Rumanian ; French Summary) . 435
A. MIHUL, Study on the Possibilities of Utilisation of the Artificially Introduced Tensions in Reinforced Concret Elements in View of the Most Favorable Utilisation of the Mechanical Properties of the Concrete and Reinforcement (Rumanian ; English Summary) . . 443
T. SILION, Ein Kriterium zur Wahl der geeignesten Art von Flächengründungens (Rumanian ; German Summary) 453
C. APREUTESEI, GH. GAVRILOV, E. POPA, V. TARASOV and GH. NISTOR, Compensation demi-rigoureuse des coordonnées des points de triangulation, déterminés par la méthode des points doubles et triples (Rumanian ; French Summary) 459
E. M. GUENDEL (U.R.S.S.), Déplacement des immeubles (Russian, Rumanian Summary) 467
A. N. GRACZIAN and A. P. ZUBEKHIN (U.S.S.R.), Principes concernant le choix des minéralisateurs du cément Portland (Russian ; Rumanian Summary) 475
C. BRANIŞTE and FL. VASILESCU, Einfluss des Schwerspatzusatzes auf den Portlandzementeigenschaften (Rumanian ; German Summary) . 479
L. GUŞTIUC, E. GHEORGHIU and M. POENESCU, Dynamique de l'humidité et des sels solubles au sol aluvial gruméleux, profond argiloloessoide, faible salifère et glayzé (Rumanian ; Russian Summary) 489

LIGHT INDUSTRY ENGINEERING

A. TRIANDAF, M. BERCOVICI and C. STANCIUC, Contribution à l'étude d'un problème de programmation linéaire intéressant l'industrie textile (Rumanian ; French Summary) 497
M. GRINDEA and S. IFRIM, Influence des solutions diluées d'acide sulphurique sur la laine (Rumanian ; French Summary) . . . 501
S. IFRIM and M. GRINDEA, Sur les modifications chimiques de la fibre de laine traitée au carbonate de sodium (Rumanian ; French Summary) 509
R. C. URUDJEV and G. I. KUTIANIN (U.S.S.R.), Sur le comportement des peaux tannés avec des sels de chrome ou des tannides, lors de l'echauffement sec (Russian ; Rumanian Summary) . . . 515
A. CHIRIŢĂ and GH. CHIRIŢĂ, Contributions à l'étude du comportement des cuirs pour empeignes, fabriqués en Roumanie, à la confection des chaussures (Rumanian ; French Summary) 523
BOOKS REVIEWS 533

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ

Том XII (XVI), вып. 1—2 1966 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр

ОТ РЕДАКЦИИ XV

МАТЕМАТИКА. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ФИЗИКА

АЛ. КЛИМЕСКУ, О функциональном уравнении односторонней дистрибутивности (I) (франц.; рез. рум.) 1
И. РОЗЕНБЕРГ (Чехословакия), О задаче наложения функций с несколькими переменными (нем.; рез. рум.) 7
И. ЕНЕСКУ, О полиномиальных алгебрах (II) (рум.; рез. франц.) . 17
Л. М. ЮНГ (США), Решение общего циклического уравнения пятой степени (англ.; рез. рум.) 21
М. ПИКОНЕ (Италия), Достаточные критерии для выпуклых функциональных множеств относящихся к общим задачам вариационного исчисления имеющим отношение к многоразмерным интегралам любого порядка в минимирующем векторе со многими составляющими (итал.; рез. рум.) 27
М. М. КЛАРК (Англия), Применение метода конечных разностей в решении уравнений с частными производными (англ.; рез. рум.) . . 31
С. ПИККАР (Швейцария), Зависимость и линейная независимость модуло k векторов (франц.; рез. рум.) 39
Н. АПОСТОЛАТОС (ГФР), О сингулярных точках решений некоторых уравнений типа Риккати или некоторых линейных дифференциальных уравнений второго порядка (нем.; рез. рум.) 47
Г. КНАПП (Австрия), Спектр метода итераций в численном решении дифференциальных уравнений (нем.; рез. рум.) 55
В. ГРОЙБ и Е. ШТАММ (Канада), Об умножении тензорных полей (англ.; рез. рум.) 65
Ф. МАРКУС, О тройных системах кривых в проективном пространстве (франц.; рез. рум.) 71
К. ТАЛАБЭ, О конгруенциях Бианки (рум.; рез. русск.) 85
Д. МАНЖЕРОН, Г. СИЛАШ и Л. БРЫНДЕУ, Метод многоугольного приближения в исследовании систем с нелинейными характеристиками (русск.; рез. рум.) 89

Стр.

М. БЕРКОВИЧ, А. ОПРЯ и Ф. ПОТЕРАШУ, Интегральные формы остаточного члена в тейлоровом многоразмерном полиномиальном приближении (итал.; рез. рум.) 97
Ж. ДЕЛЬПОРТ (Франция), Методы непрерывного продолжения. Приложение к исследованию непрерывности нормальных случайных функций (франц.; рез. рум.) 101
И. Д. ЧЕРКАСОВ (СССР), Обобщенная интегральная предельная теорема и ее применение к теории интерполяции (русск.; рез. рум.) . . 107
Г. И. ИОНЕСКУ, Номограммы с ориентированным транспарентом для систем с двумя уравнениями с восемью, девятью, десятью и одинадцатью переменными (рум.; рез. нем.) 111
Н. Х. П. РАМАХАРИУЛУ (Индия), О плоскостном вращении изотропно-проводниковой жидкости (англ.; рез. рум.) 119
А. БРАЙЕР, Прямое исследование движения под действием ньютоновых сил (франц.; рез. рум.) 123
И. ДОЙЧ и Э. ДЫМБОЮ, О теореме взаимности линейных состояний (рум.; рез. франц.) 129
К. РУСЧОР, Г. ТАКУ, М. МОЙСЕ и К. ЧОБАНУ, Спектральная дозировка индия в руде (рум.; рез. франц.) 135

ХИМИЯ

Г. БУРЛАКУ и К. ИОАН, О ртутно-капельном восстановлении Sb^{3+} в водной среде и в смеси растворителей (рум.; рез. франц.) . . 139
А. И. БУСЕВ и В. М. ИВАНОВ (СССР), Экстракционно-фотометрическое определение палладия с помощью 1-(2-пиридилазо)-резорцина (русск.; рез. рум.) 147
И. РОШКА и С. АПОСТОЛ, О существования сложных ионов Co (II) в водных растворах (рум.; рез. франц.) 157
Е. ДИАКОНЕСКУ и Ф. КИРЬЯК, Ионнообменники румынского угля (III) (рум.; рез. нем.) 163
И. МАТЕЙ и Т. ЛИКСАНДРУ, Реакции конденсации аценафтенхинона ароматических аминов и диаминов (рум.; рез. франц.) . . 171
Г. БОТЕЗ, К. ОНИСКУ, Е. МЕРИКЭ и К. ГОРЯ, Сульфамиды феноксипропионовых кислот (I) (рум.; рез. франц.) 179
И. МАТЕЙ и Е. КОМАНИЦЭ, Синтезы новых ацил-тиосемикарбазидов и семикарбазидов (I) (рум.; рез. франц.) 189
Г. ЛУПУШОР и В. СЕКУРЕ, Азокрасители из дианизидин-(2-нитрофенил-4-сульфоновой) кислоты с различными азосоставляющими (рум.; рез. англ.) 199
Г. АЛЕКСА, Г. КИРИЦЭ, А. АГРАТИНА, И. БОТЕЗАН, А. КИРИЦЭ и Е. БОЦИ, Изучение комбинированного дубления, формол-хромтаннин (рум.; рез. франц.) 209
Г. КИРИЦЭ, М. МАНЧУ и Е. БОЦИ, К изучению растительного дубления в растворе органических растворителей (рум.; рез. франц.) . . 221

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА. ЭЛЕКТРОНИКА

И. ЛУКА, Э. ОСАДЕЦ и Э. ЛУКА, К изучению электретов (рум.; рез. франц.) 229
Г. САВИН, Н. РАДУ и С. МИТРЯ, Определение параметров магнитно-связанных цепей использованием фазочувствительных индикаторов (рум. рез. франц.) 235

Стр.

И. БЕЖАН, О гистерезисном явлении в магнитных модуляторах (рум.; рез. англ.) 243
И. С. ЕРЕМЕЕВ (СССР), Аналого-цифровой компаратор (русск.; рез. рум.) 251
Д. КРИСТЕСКУ, О возможности осциллографической записи волновых процессов в прямой зависимости от расстояния (рум.; рез. франц.) . 257
И. Д. БОЯНОВ, Д. Д. БАЙНОВ, Ю. П. МАРИНОВ и Н. А. ПАРТИНОВА (Болгария), О теории транзисторных *LC*-генераторов с *n* колебательными контурами (русск.; рез. рум.) 269
Е. БАЛАБАН и Н. В. БОЦАН, Новые виды применения алгебры логики при проектировании схем электропривода (рум.; рез. русск.) . 275
Л. ПРЕДА, М. НИКОЛАЕ и Г. ПОПА, Поточный метод работ по постройке воздушных электрических 15 *кв* сетей сельскохозяйственной электрификации (рум.; рез. русск.) 283
Г. РОСМАН, Область существования коэффициентов передач линейного, пассивного и взаимного четырехполюсника, питающего пассивный приемник (рум.; рез. франц.) 293

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

КР. ПЕЛЕКУДИ, Сложно-приведенные ускорения высшего порядка (франц.; рез. рум.) 311
А. БРАЙЕР и Г. РОСМАН, Принужденное движение линейного осциллатора подверженного гармоническим модулированным в амплитуде воз у-щениям (рум.; рез. франц.) 315
В. Т. ГЛУШКО и М. И. РОЗОВСКИЙ (СССР), Распределение напряжений в кольцеобразной упругонаследственной пластинке с цилиндрической анизотропией (русск.; рез. рум.) 327
Ж. С. БЕГГС (США), Кинематика симулатора встречи в космосе (англ.; рез. рум.) 339
И. СЕКЕЙ и В. ГАНДРАЛУКА, Синтез четырехзвенника с колеблющимся ползуном (рум.; рез. франц.) 349
Н. Н. КОЧИНА и Н. С. МЕЛЬНИКОВА (СССР), Исследование полей интегральных кривых для уравнений, описывающих автомодельные движения газа (русск.; рез. рум.) 357
А. К. ДЮНИН (СССР), Фактор взвешивания в двухфазном потоке (русск.; рез. рум.) 367
К. ПИКОШ, Об обобщенных формах решения размерной цепи способом селективной сборки к регулирования, пользуя предельные величины замыкающего элемента (рум.; рез. нем.) 379
А. РЭИЛЯНУ, Д. НИКОЛЕСКУ и И. КОНДРЯ, Определение главной силы резания в процессе продольной обточки румынской стали (рум.; рез. франц.) 385
В. БЕЛОУС, И. КОНДРЯ и Б. ПЛАХТЕАНУ, Исследование влияния угла выточки на главную силу резания (рум.; рез. русск.) 389
Т. ГОЛГОЦИУ, Т. ФЭРКАШ, Г. АИЛИНКЭЙ, К. ПИКОШ, К. ЧИОКИНЭ, Е. АНДРЕЙ, К. БОГОСИЕВИЧ и И. МЭЛУРЕАНУ, Коррозионная характеристика легированных конструкционных штандартизованных сталей (рум.; рез. франц.) 397
К. ЧИОКИНЭ, Цементация некоторых углеродистых и легированных штандартизованных сталей со смесью на основани Na_2O_2 (рум.; рез. франц.) 405

Стр.

Ю. Л. КАРТВЕЛИШВИЛИ, Т. Т. КИПИАНИ, Н. А. КИКНАДЗЕ, Г. А. ГОЗАЛИШВИЛИ и Ш. В. КОБАХИДЗЕ (СССР), Ударные испытания отвала бульдозера (русск.; рез. рум.) 413

СТРОИТЕЛЬСТВО. ГИДРОТЕХНИКА

А. ШЕСАН, Г. ПОПЕСКУ, и Д. ВАСИЛЕСКУ, Оптимизированное проектирование строений, по пластичности, при помощи электронной аналогии (рум.; рез. англ.) 421

В. ФОКША, А. РАДУ, А. ВЕРЕШ, Л. БИБОРОШ и К. ЛУПАШКУ, Акустическая изоляция в жилых постройках из железобетона (рум.; рез. франц.) 427

Н. ОРЛОВСКИЙ, АЛ. ДУМИТРАШ, К. АМАРИЕЙ, Н. УНГУРЯНУ и Л. ТАНАСАКИ, Исследование за пределами упругости металлических рам на моделях (рум.; рез. франц.) 435

А. МИХУЛ, Исследование возможности использования искусственных напряжений введенных в бетонные элементы для оптимального использования механических свойств бетона и арматуры (рум.; рез. англ.) . . 443

Т. СИЛИОН, Численный критерий для выбора наилучшей системы для фундаментов мелкого заложения (рум.; рез. нем.) 453

К. АПРЕУТЕСЕЙ, Г. ГАВРИЛОВ, Е. РОРА, В. ТАРАСОВ и Г. НИСТОР, Полустрогое компенсирование координат триангуляционных точек определяемых методом двойных и тройных точек (рум.; рез. франц.) 459

Э. М. ГЕНДЕЛЬ (СССР), Передвижка зданий (русск.; рез. рум.) . . 467

А. Н. ГРАЧЬЯН и А. П. ЗУБЕХИН (СССР), Принципы подбора эффективных минерализаторов для обжига клинкера белого портландцемента (русск.; рез. рум.) 475

К. БРАНИШТЕ и Ф. ВАСИЛЕСКУ, Влияние добавки барита на свойства портландцемента (рум.; рез. нем.) 479

Л. ГУЦУК, Е. ГЕОРГИУ и М. ПОПЕСКУ, Динамика влажности и растворимых солей в аллювиальной зернистой почве, глубоко илистой, слабо засоленной и оглеенной, из поймы реки Бахлуй, в условиях 1963 и 1964 годов (рум.; рез. русск.) 489

ЛЕГКАЯ ПРОМЫШЛЕННОСТЬ

М. БЕРКОВИЧ, А. ТРИАНДАФ и К. СТАНЧУК, К исследованию некоторых задачи линейного программирования в текстильной промышленности (рум.; рез. франц.) 497

М. ГРИНДЯ и С. ИФРИМ, Влияние слабого раствора серной кислоты на качество шерсти (рум.; рез. франц.) 501

С. ИФРИМ и М. ГРИНДЯ, О химических изменениях шерстяных волокон под влиянием углекислого натрия (рум.; рез. франц.) 509

Р. С. УРУДЖЕВ и Г. И. КУТЯНИН (СССР), Об отношении кож хромового и таннидного дубления к сухому нагреву (русск.; рез. рум.) . 515

А. КИРИЦЭ и Г. КИРИЦЭ, Исследование поведения в массовом производстве кож для верха обуви, обработанных в румынской промышленности (рум.; рез. франц.) 523

РЕЦЕНЗИИ 533

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

REDACŢIONALE
EDITORSHIP'S ANNOUNCEMENTS
ОТ РЕДАКЦИИ

Articole ale colaboratorilor externi primite la redacţia revistei *Buletinul Institutului politehnic din Iaşi*

Papers received from the external collaborators by the Editorial Staff of the *Bulletin of the Polytechnic Institute of Jassy*

Статьи внеинститутских сотрудников полученные редакцией журнала *Известия Ясского политехнического института*

IONESCU D. V., (Universitatea „Babeş-Bolyai", Cluj), *Formule de cubatură cu un număr mic de noduri.*

BĂDESCU R. şi CRISTIAN L., (Institutul de construcţii, Bucureşti), *Asupra unor mişcări plane cu frecare.*

BUBELEV E. G., (Joint Institute for Nuclear Research, Moscow, USSR), Preliminary Results on the Analysis of Some high Energy Jets by the Lobachevsky's Velocity-plot.

ARABAGIAN K., (Institutul de cercetări în telecomunicaţii, Sofia, R. P. Bulgaria), *Unele probleme în legătură cu utilizarea capacităţii de barieră a unei joncţiuni pn pentru obţinerea modulaţiei de frecvenţă .*

BLAQUIÈRE A., (Faculty of Sciences, University of Paris, France) and LEITMANN G. (Engineering Science, University of California, Berkeley), *Some Geometric Aspects of Optimal Processes. I. Problems with Control Constraints.*

СТЕЛЬМАЩУК Н. Т., (**Ивановский энергетический институт, Иваново, СССР**), *Об одном исследовании системы Максвелла с помощью F моногенных функций.*

БАРАТАЛИЕВ К. Б., (**Киргизский государственный университет, Фрунзе, СССР**), *Приближенное решение краевой задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.*

ДУНДУЧЕНКО Л. А., (**Межвузовский семинар по теории аналитических и обобщенных аналитических функций, Киев, СССР**), *Асимптотическое решение одной вариационной задачи для звездных и выпуклых в кольце функций.*

ЭРИСТАВИ Д. И., БРОУЧЕК Ф. И. и ЭРИСТАВИ В. Д., (**Грузинский политехнический институт, Тбилиси, СССР**), *Метод определения бериллия в природных водах.*

PELECUDI CHR., (Institut de Mécanique Appliquée „Traian Vuia", Académie de la République Socialiste de Roumanie), *Accélérations composées-réduites d'ordres supérieurs.*

NICOLAIDE A., (Institutul politehnic, Braşov), *Cupluri parazite şi pierderi suplimentare în sarcină la maşinile asincrone.*

KELMER I., (Institutul de științe economice „V. I. Lenin", București), *Despre comportarea unor sisteme coloidale în condițiile zborului cosmic.*

MAROȘ D., ANTAL A., ORLANDEA N. și NEGRESCU L., (Institutul politehnic Cluj), *Contribuții la determinarea exactă a grosimii spirei sau a lățimii golului la melcii cilindrici.*

STAN C., (Institutul pedagogic, Bacău), *Asupra existenței curbelor integrale ale unui sistem de ecuații diferențiale în vecinătatea originii.*

SIRCAR R., (University College of Science, Calcutta, India), *Torsion of a Composite Large Thick Plate with Modulus of Rigidity varying exponentially with Depth.*

RAMACHARYULU N. CH. P., (Regional Engineering College, Warangal (A. P.) India), *Slow Steady Flow of an Idealized Elastico-viscous Liquid between Parallel Plates in Linear Movement.*

BISWAS A., (Indian Institute of Technology, Kharagpour, India), *The Transmission of Waves through a Layared Voigt Solid sandwiched between Isotropic Homogeneous Elastic Media of same Nature.*

CHANNABASAPPA M. N., (Indian Institute of Technology, Hauz Khas, New Delhi, India), *Heat Transfer by Laminar Flow in an Annulus of Porous Walls with Variable Circumferential Heat Flux.*

KISS EL. și FĂRCAȘ GH., (Institutul pedagogic, Tîrgu Mureș), *Rădăcini comune ale unui număr oarecare de ecuații algebrice de grad superior.*

GRINDEI I., (Universitatea „Al. I. Cuza", Iași), *Tensiuni termice în corpuri cilindrice izotrope plasate într-un cîmp de temperatură discontinuu.*

KRALL M., (The Pennsylvania State University, University Park, Penna, U.S.A.), *On the Eigenvalues of Singular Nonself-adjoint Differential Operator of Second Order.*

STAN I. and POP I., (University „Babeș-Bolyai", Cluj), *Concerning the Rotation of an Electrically Conducting Liquid.*

MUNTEANU G., ORLANDEA N., ORĂNESCU A., ORĂNESCU H., DELIU G., GOIA J. and BĂLAN B., (Polytechnical Institutes of Brașov, Cluj and Galați), *Linear Enveloping Curves belonging to Plane Mechanisms with more Motive Elements Equations Formation Algorithm using Mangeron's Tangential Method and Applications. (I).*

IONESCU I. GH., COSTESCU D., SCOROBEȚIU L., (Institutul politehnic, Brașov), *Normalizarea cu flacără gaz-metan a oțelurilor sudate de tip Cr-Mo-V.*

PICONE M., (Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, Italia), *Criteri sufficienti per insiemi funzionali convessi concernenti generali problemi di calcolo delle variazioni riguardanti integrali pluridimensionali d'ordine qualsivoglia nel vettore minimante a piu componenti.*

DEUTSCH I. și DÎMBOIU E., (Institutul politehnic, Brașov), *Asupra teoremei reciprocității stărilor fizice liniare.*

HURST C. A., (University of Adelaide, South Australia), *The Relation between the Onsager and Pfaffian Methods for Solving the Ising Problem. I. The Rectangular Lattice.*

MERMET J. ,(Institut Polytechnique, Grenoble, France), *Synthèse de fonctions booléennes par des opérateurs en ligne.*

SZÉKELY I. și HANDRALUCA V., (Institutul politehnic, Cluj), *Sinteza mecanismului patrulater cu patină oscilantă.*

MÖLLER K., (Mitweida, Deutsche Bundersrepublik), *Über Summen gleichhoher Potenzen.*

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1—2, 1966

Matematici, Mecanică teoretică, Fizică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XII (XVI), вып. 1—2, 1966

Математика, Теоретическая механика, Физика

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XII (XVI), 1—2, 1966

Mathematics, Theoretical Mechanics, Physics

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. D. 517.948

SUR L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DE LA DISTRIBUTIVITÉ UNILATÉRALE (I)

PAR

AL. CLIMESCU

Hommage à M. le professeur O. MAYER, à l'occasion de son 70-ième anniversaire

1. Soit M un ensemble non-vide quelconque et f, g deux applications de $M \times M \to M$. Si

$$f(x, g(y, z)) = g(f(x, y), f(x, z)) \tag{1}$$

on dit que l'équation de la distributivité (unilatérale) est satisfaite.

On sait [1] que jusqu'ici l'équation (1) n'a pas été complètement résolue et de nouvelles recherches sont encore nécessaires.

Il est commode d'employer aussi la notation traditionnelle (somme et produit), donc

$$x(y + z) = xy + xz \tag{1'}$$

et d'appeler le triple $<M, f, g>$, respectivement $<M, ., +>$ une solution de l'équation.

2. Proposition I. $<M, y, g>$ *avec* g *arbitraire est une solution.* La vérification est immédiate.

Proposition II. $<M, f, x>$ *avec* f *arbitraire est une solution.* Vérification immédiate.

Proposition III. *La relation binaire*

$$x \mathrm{R} y \Longleftrightarrow f(a, x) = f(a, y) \tag{2}$$

est pour chaque $a \in M$ *et chaque solution* $<M, f, g>$ *une congruence de* g *considérée comme une opération binaire.*

R est évidemment une équivalence et $x \mathrm{R} u$, $y \mathrm{R} v$ entraînent

$$f(a, g(x, y)) = g(f(a, x), f(a, y)) = g(f(a, u), f(a, v)) = f(a, g(u, v)),$$

c'est-à-dire

$$g(x, y) \mathrm{R}\, g(u, v).$$

Proposition IV. *Si g est donnée, on obtient la solution générale de* (1) *en prenant*

$$f(a, x) = \varphi_a(x), \tag{3}$$

où a parcourt M et $\varphi_a(x)$ est un endomorphisme quelconque de g.

D'après III, R induit un homomorphisme et (1) montre que $\varphi_a(x)$ est un endomorphisme. Évidemment le choix de $\varphi_a(x)$ n'influe en rien sur le choix de $\varphi_b(x)$ et justement cette liberté du choix jointe à la difficulté de la détermination des endomorphismes de g montre qu'il est peu probable d'obtenir la solution de (1) en termes finis ou même (dans le cas dénombrable) par un procédé récursif.

Observations: 1° La proposition I correspond au cas où $\varphi_a(x) = x$ pour chaque a.

2° Le rôle des propositions I et II est d'ailleurs de montrer que quel que soit M il y a des solutions qu'on peut appeler banales malgré le libre choix de f ou de g.

3° Les propriétés des solutions de l'équation (1) mettent en évidence le fait que toute théorie plus ou moins générale des équations fonctionnelles doit accepter un nombre en principe illimité de choix de fonctions arbitraires ou assujeties à des restrictions dépendant de l'équation étudiée.

3. D'après IV, l'obtention concrète de toutes les solutions de (1) est à peu près illusoire, donc la recherche de classes de solutions plus nettement délimitées reste encore un problème intéressant. On peut attaquer ce problème soit en cherchant de nouvelles solutions à partir de solutions données — ce que nous ferons dans ce paragraphe — soit en imposant des conditions supplémentaires, ce que nous espérons faire dans un travail ultérieur.

Proposition V. *On trouve de nouvelles solutions en partant de solutions données, par les opérations suivantes:*

a) *Restriction à un sous-ensemble stable pour f et g* (sous-algèbre, dans la terminologie algébrique);

b) *Homomorphisme*;

c) *Union directe* (même à une infinité de termes);

d) *Union sous-directe.*

Le résultat est obtenu en tenant compte de la définition des différentes opérations impliquées. Contentons-nous de vérifier c) pour deux termes (en notation classique):

$$(x, y)[(z, t) + (u, v)] = (x, y)(z + u, t + v) = (x(z + u), y(t + v)) =$$

$$= (xz + xu, yt + yv) = (xz, yt) + (xv, yv) = (x, y)(z, t) + (x, y)(u, v).$$

Proposition VI. *Soit $\langle M_i, f_i, g_i \rangle$ une famille de solutions, les M_i étant deux à deux disjoints. Si $M = \bigcup M_i$ et*

$$F(x, y) = \begin{cases} f_i(x, y) & \text{si } x, y \in M_i, \\ y & \text{si } x \in M_i,\ y \in M_j,\quad (i \neq j), \end{cases}$$

$$G(x, y) = \begin{cases} g_i(x, y) & \text{si } x, y \in M_i, \\ x & \text{si } x \in M_i,\ y \in M_j,\quad (i \neq j), \end{cases}$$

alors $< M, F, G >$ *est une solution* (qu'on peut appeler somme directe de la famille donnée de solutions).

Il y a cinq cas à considérer :

1° $x, y, z \in M_i$; alors $F(x, g(y, z)) = F(x, g_i(y, z)) = f_i(x, g_i(y, z))$ et $G(F(x, y), F(x, z)) = G(f_i(x, y), f_i(x, z)) = g_i(f_i(x, y), f_i(x, z))$, donc (1) est vérifiée.

2° $x, y \in M_i$, $z \in M_j$, $(i \neq j)$; alors $F(x, G(y, z)) = F(x, y) = f_i(x, y)$ et $G(F x, y), F(x, z)) = g(f_i(x, y), z)) = f_i(x, y)$.

3° $x \in M_i$, $y \in M_j$, $z \in M_i$, $(i \neq j)$; alors $F(x, G(y, z)) = F(x, y) = y$ et $G(F(x, y), F(x, z)) = G(y, f_i(x, z)) = y$.

4° $x \in M_i$, $y, z \in M_j$, $(i \neq j)$; alors $F(x, G(y, z)) = F(x, g_j(y, z)) = g_j(y, z)$ et $G(F(x, y), F(x, z)) = G(y, z) = g_j(y, z)$.

5° $x \in M_i$, $y \in M_j$, $z \in M_k$, $(i \neq j,\ i \neq k,\ j \neq k)$; alors $F(x, G(y, z)) = F(x, y) = y$ et $G(F(x, y), F(x, z)) = G(y, z) = y$.

Proposition VII. *Posons*

$f(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2)$, $f_3(x_1, x_2, x_3) = f_2(x_1, f(x_2, x_3)), \ldots, f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-2}, f(x_{n-1}, x_n))$ pour $n \geqslant 3$ (les fonctions f_n sont donc définies par récurrence).

Soit $I = (1, 2, \ldots, n-1)$ *et* $I = \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$, *où* $\mathcal{J}_1$ *et* $\mathcal{J}_2$ *sont disjoints et* $\mathcal{J}_1$ *n'est pas vide.*

Posons $x_i = x$ *si* $i \in \mathcal{J}_1$ *et* $x_j = a_j$ *si* $j \in \mathcal{J}_2$ *avec* a_j *arbitraire mais fixé. Formons* $F(x, y)$ *en remplaçant dans* $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *la variable* x_n *par* y *et les autres variables* x_i *comme il vient d'être indiqué ci-dessus. Alors si* $< M, f, g >$ *est une solution,* $< M, F, g >$ *sera encore une solution.*

Pour $n = 3$, on peut avoir les cas suivants :

1° $F(x, y) = f(x, f(x, y)$ et alors $F(x, g(y, z)) = f(x, f(x, g(y, z))) = f(x, g(f(x, y), f(x, z))) = g(f(x, f(x, y)), f(x, f(x, z))) = g(F(x, y), F(x, z))$.

2° $F(x, y) = f(a, f(x, y))$ et alors $F(x, g(y, z)) = f(x, f(x, g(y, z))) = f(a, g(f(x, y), f(x, z))) = g(f(a, f(x, y)), f(a, f(x, z))) = g(F(x, y), F(x, z))$.

3° $F(x, y) = f(x, f(a, y))$ et alors $F(x, g(y, z)) = f(x, f(a, g(y, z)) = f(x, g(f(a, y), f(a, z))) = g(f(x, f(a, y)), f(x, f(a, z))) = g(F(x, y), F(x, z))$, donc le théorème est démontré pour $n = 3$.

On a ensuite $f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_3(x_1, x_2, f_2(x_3, x_4)) = f_2(x_1, f_3(x_2, x_3, x_4))$ et, en général

$$f_n(x_1,\ldots,x_n)=f_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-2},f_2(x_{n-1},x_n))=$$
$$=f_{n-2}(x_1,\ldots,x_{n-3},f_3(x_{n-2},x_{n-1},x_n))=\cdots=f_2(x_1,f_{n-1}(x_2,\ldots,x_n)).$$

Deux cas peuvent se présenter :

1° Il y a au moins un $i>1$ pour lequel $x_i=x$ et $x_1=x$, $F(x,y)=f(x,f_{n-1}(\ldots,y))$.

En supposant le théorème vrai pour l'indice $n-1$, on a

$F(x,g(y,z))=f(x,f_{n-1}(\ldots,g(y,z)))=f(x,g(f_{n-1}(\ldots,y),f_{n-1}(\ldots,z)))=$
$=g(f(x,f_{n-1}(\ldots,y)),f(x,f_{n-1}(\ldots,z)))=g(F(x,y),F(x,z))$.

Même conclusion si $x_1=a_1$.

2° $x_1=x$, $x_2=a_2,\ldots,x_{n-1}=a_{n-1}$. Alors

$$f(x,f_{n-1}(a_2,\ldots,a_{n-1},y))=F(x,y) \text{ et}$$

$$F(x,g(y,z))=f(x,f_{n-1}(a_2,\ldots,a_{n-1},g(y,z)))=$$

$$f(x,g(f_{n-1}(a_2,\ldots,a_{n-1},y),f_{n-1}(a_2,\ldots,a_{n-1},z)))=$$

$$=g(f(x,f(a_2,\ldots,a_{n-1},y)),f(x,f(a_2,\ldots,a_{n-1},z)))=g(F(x,y),F(y,z)).$$

Le théorème est donc démontre par voie inductive.

Remarque. Un changement très léger de la démonstration montre qu'on a

$$f_n(x_1,\ldots,x_{n-1},g(y,z))=g(f_n(x_1\ldots,x_{n-1},y),f_n(x_1,\ldots,x_{n-1},z)).$$

À cause des difficultés de notation nous nous abstiendrons d'énoncer la proposition suivante dans toute sa généralité.

Proposition VIII. *Soit* $<M,f,g>$ *une solution de* (1). *Alors* $<M,f,g_i>$ *sera encore une solution pour toutes les fonctions* g_i *ci-dessous indiquées :*

a) $g_1(x,y)=g(a,g(x,y))$ si $f(x,a)=a$, b) $g_2(x,y)=g(x,g(a,y))$ si $f(x,a)=a$,
c) $g_3(x,y)=g(x,g(y,a))$ si $f(x,a)=a$, d) $g_4(x,y)=g(g(a,x),y)$ si $f(x,a)=a$,
e) $g_5(x,y)=g(g(x,a)y))$ si $f(x,a)=a$, f) $g_6(x,y)=g(g(x,y),a)$ si $f(x,a)=a$,
g) $g_7(x,y)=g(x,g(x,y))$, h) $g_8(x,y)=g(g(x,x),y)$, i) $g_9(x,y)=g(y,x)$,
j) $g_{10}(x,y)=g(x,g(y,x))$, k) $g_{11}(x,y)=g(g(x,y),x)$,
l) $g_{12}(x,y)=g(y,g(x,x))$, m) $g_{13}(x,y)=g(g(y,x),x)$,

a) $f(x,g_1(y,z))=f(x,g(a,g(y,z)))=g(f(x,a),f(x,g(y,z)))=$
$=g(a,g(f(x,y),f(x,z)))$ et $g_1(f(x,y),f(x,z))=g(a,g(f(x,y),f(x,z)))$.

b) $f(x,g_2(y,z))=f(x,g(y,g(a,z)))=g(f(x,y),f(x,g(a,z)))=$
$=g(f(x,y),g(f(x,a),f(x,z)))=g(f(x,y),g(a,f(x,z)))$ et $g_2(f(x,y),f(x,z))=$
$=g(f(x,y),g(a,f(x,z)))$.

c) ... f) Vérification similaire.

g) $f(x, g_7(y,z)) = f(x, g(y, g(y,z))) = g(f(x,y), f(x, g(y,z))) =$
$= g(f(x,y), g(f(x,y), f(x,z))) = g_7(f(x,y), f(x,z))$.

h) $f(x, g_8(y,z)) = f(x, g(g(y,y), z)) = g(f(x, g(y,y)), f(x,z)) =$
$= g(g(f(x,y), f(z,y)), f(x,z)) = g_8(f(x,y), f(x,z))$.

i) $f(x, g_9(y,z)) = f(x, g(z,y)) = g(f(x,z), f(x,y)) = g_9(f(x,y) f(x,z))$.

j) $f(x, g_{10}(y,z)) = f(x, g(y, g(z,y))) = g(f(x,y), f(x, g(z,y))) =$
$= g(f(x,y), g(f(x,z), f(x,y))) = g_{10}(f(x,y), f(x,z))$.

k) $f(x, g_{11}(y,z)) = f(x, g(g(y,z), y)) = g(f(x, g(y,z)), f(x,y)) =$
$= g(g(f(x,y), f(x,z)), f(x,y)) = g_{11}(f(x,y), f(x,z))$.

l) $f(x, g_{12}(y,z)) = f(x, g(z, g(y,y))) = g(f(x,z), f(x, g(y,y))) =$
$= g(f(x,z), g(f(x,y), f(x,z))) = g_{12}(f(x,y), f(x,z))$.

m) $f(x, g_{13}(y,z)) = f(x, g(g(z,y), y)) = g(f(x, g(z,y)), f(x,y)) =$
$= g(g(f(x,z), f(x,y)), f(x,y)) = g_{13}(f(x,y), f(x,z))$.

4. Terminons par quelques remarques.

1° Si $g(x,y)$ est associative et commutative, le procédé par lequel en théorie des anneaux on définit les algèbres sur un anneau peut être appliqué dans le cas présent sans changement appréciable.

2° En combinant les résultats déjà obtenus on peut obtenir d'autres solutions. Par ex. (proposition VIII) en appliquant à $g_7(x,y)$ le procédé i) suivi du procédé l) on obtient, en partant de $g(x,y)$, $g(x,y) \to g(x, g(x,y)) \to$ $\to g(y, g(y,x)) \to g(y, g(y, g(x, g(x,x))))$, (la flèche indiquant le passage d'une fonction à l'autre).

3° Pour les fonctions numériques $f(x,y) = xy$, $g(x,y) = x + y$ on obtient par application systématique des propositions VII et VIII, comme nouvelle solution $F(x,y) = x^m y$, $g(x,y) = px + qy$, avec m, p, q entiers positifs, mais on peut prendre par ex. pour p et q des nombres quelconques sans changer le résultat. Il semble qu'on a ici une application immédiate et spontanée d'un principe qui n'est pas sans analogie avec le principe d'induction algébrique tel qu'il est formulé par ex. dans [2, p. 65].

Reçu le 20 VI 1966

Institut Polytehnique, Jassy,
Chaire de Mathématiques I

BIBLIOGRAPHIE

1. Aczél J., *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und einige ihre Anwendungen.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1961.
2. Diener K. H., Coll. Math., 1966, **XIV**, pp. 63–72.

ASUPRA ECUAȚIEI FUNCȚIONALE A DISTRIBUTIVITĂȚII UNILATERALE (I)

(Rezumat)

Ecuația (1) din text n-a fost pînă acum complet rezolvată, din care cauză noi cercetări sînt necesare. În Notă se demonstrează opt propoziții dintre care propoziția IV pune în evidență de ce soluția generală în termeni finiți (sau printr-un procedeu recursiv, în cazul numărabil) este puțin probabil să poată fi găsită.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

D. K. 519.56

ZU EINIGEN FRAGEN DER SUPERPOSITION VON FUNKTIONEN MEHRERER VERÄNDERLICHER

VON

IVO ROSENBERG

1. Diese Bemerkung schliesst an die Arbeit Jablonski's [2] über funktionale Konstruktionen in den k-wertigen Logiken an. Sie befasst sich mit Klassen von Funktionen mehrerer Veränderlicher, wobei die Klassen in Bezug auf die Bildung von Superpositionen abgeschlossen sind.

Der § **2** enthält grundsätzliche Definitionen und Behauptungen. Diese Begriffe aus [2] führen wir aber in allgemeinerer Fassung an (d. h., wir beschränken uns nicht nur auf endliche Mengen). In § **3** führen wir den Begriff der redundanten Funktionen ein, leiten einige einfache Sätze über redundante Funktionen ab und besonders den Satz 5 über redundante Funktionen in der Menge aller Funktionen in der k-wertigen Logik. In § **4** zeigen wir an einigen Beispielen, dass der Verband aller geschlossenen Teilklassen einer geschlossenen Klasse allgemein nicht modular und komplementär ist.

2. Zuerst wollen wir eine einfache Verallgemeinerung der in [2] eingeführten Definition angeben. Mit N bezeichnen wir die Menge aller ganzen positiven Zahlen, mit E_k die Menge $\{0,1,...,k-1\}$. Mit $\subseteq$ bezeichnen wir die Mengeninklusion, ($A \subset B$ bedeutet: A ist eine Teilmenge von B, $A \neq B$,), mit $\cap$ und $\cup$ den mengentheoretischen Durchschnitt und die Vereinigung, mit $\wedge$ und $\vee$ das verbandstheoretische Infimum und Supremum. M sei eine Menge, $\operatorname{card} M \geqslant 2$. Mit P_M bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $(n \in N)$, welche die Produktmenge $M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$, $(M_1 = M_2 = ... = M_n = M)$, in der Menge M abbilden. Wenn $M = E_k$ ist, bezeichnen wir P_M mit dem Symbol P_k. Die Funktionen von P_k nennen wir Funktionen der k-wertigen Logik. Offenbar ist P_k eine abzählbare Menge und für M unendlich ist die Mächtigkeit von P_M grösser oder gleich der Mächtigkeit des Kontinuums. Wir sagen, dass die Funktion $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in P_M$ tatsächlich von der Veränderlichen x_i, $(1 \leqslant i \leqslant n)$, abhängig ist, wenn $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n, \alpha, \alpha' \in M$ exis-

tieren, für welche $f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{i-1}, \alpha, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{i-1}, \alpha', \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$ ist. Im anderen Falle nennen wir x_i die fiktive Veränderliche der Funktion f.

Es sei $A \subseteq P_M$. Die Superpositionen der Menge A definieren wir rekursiv wie folgt:

1. $f(x_1, x_2, ..., x_M) \in A$ ist eine Superposition von A.

2. Wenn $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ eine Superposition von A ist, dann ist eine Superposition von A jede Funktion, die aus f durch Zugabe oder Wegnahme einer beliebigen Anzahl von fiktiven Veränderlichen entsteht.

3. Wenn $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ eine Superposition von A ist und wenn $g_i(x_1, x_2, ..., x_m)$, $(i = 1, 2, ..., n)$, eine Superposition von A ist, oder wenn $g_i(x_1, x_2, ..., x_m) = x_j$, $(i \leqslant j \leqslant m)$, ist, dann ist die zusammengesetzte Funktion

$$h(x_1, x_2, ..., x_m) = f(g_1(x_1, x_2, ..., x_m), g_2(x_1, x_2, ..., x_m), ..., g_n(x_1, x_2, ..., x_m))$$

eine Superposition von A.

Es sei f eine Superposition von A. Wenn wir einige Veränderliche gleich setzen oder untereinander austauschen, dann erhalten wir wieder eine Superposition von A. Die Menge aller Superpositionen von A bezeichnen wir mit $\bar{A}$[1]). Offenbar ist $A \subseteq \bar{A} \subseteq P_M$. Wenn $\bar{A} = A$ ist, nennen wir A eine abgeschlossene Klasse. Es ist dann $\bar{A} = A$, allgemein $\overline{A \cup B} \neq \bar{A} \cup \bar{B}$. Die leere Menge betrachten wir ebenfalls als eine abgeschlossene Klasse. Es sei $B \subseteq P_M$ eine abgeschlossene Klasse. Die Zuordnung $A \to \bar{A}$ ist eine Hüllenoperation im Verband aller Teilmengen von B, deshalb bilden nach [9, Satz 15] die abgeschlossenen Klassen von B, einen vollständigen Verband, den wir als S_B bezeichnen. Dabei ist für die abgeschlossenen Mengen $M_i, (i \in I)$, das Infimum $\bigwedge_{i \in I} M_i$ im S_B der mengentheoretische Durchschnit $\bigcap_{i \in I} M_i$, das Supremum $\bigvee_{i \in I} M_i$ im Verband S_B ist $\overline{\bigcup_{i \in I} M_i}$.

Es sei bemerkt, dass wir die abgeschlossene Klasse $\bar{A} \subseteq P_M$ als allgemeine, von Birkhoff (siehe z. B. [9]) eingeführte Algebra, welche mit Hilfe von Funktionen aus der Menge A auf M definiert ist, verstehen können.

Follgender Satz ist eine Analogie eines bekannten Satzes der Algebra:

Satz 1. *Es seien $A \neq 0$, C zwei disjunkte Teilmengen einer abgeschlossenen Klasse $B \subseteq P_M$. Das System $\mathfrak{M}$ aller abgeschlossenen, C enthaltenden und mit A disjunkten Teilklassen B sei nichtleer. Dann enthält $\mathfrak{M}$ eine maximale Klasse, d. h. eine Klasse $D \in \mathfrak{M}$, für welche $E \in \mathfrak{M}$, $E \supseteq D \Rightarrow E = D$ gilt.*

---

[1]) Ebenso wird gewöhnlich die Negation mit $\bar{x} \in P_2$ bezeichnet. Wir werden hier aber die Negation nicht verwenden, sodass ein Missverständnis ausgeschlossen ist.

Beweis. Es sei $\mathfrak{N} \subseteq S_B$ eine Kette im Verband S_B. In gewohnter Weise lässt sich aus der Definition der Superposition leicht ableiten, dass die mengentheoretische Vereinigung aller Mengen der Kette $\mathfrak{N}$ wieder eine abgeschlossene Teilklasse von B ist. Die Behauptung des Satzes ergibt sich direkt aus dem Lemma von Kuratowski-Zorn.

Wir nennen das System $A \subseteq B$ vollständig in B wenn $\overline{A} = B$. Ein vollständiges System $A \subseteq B$ nennen wir eine Basis von B, wenn keine eigene Teilmenge von A vollständing in B ist. Wenn B eine endliche Basis hat, enthält jedes vollständige System in B eine vollständige Basis B [2]. Es ist klar, dass eine unabzählbare Menge B keine endliche Basis haben kann. Als Shefferscher Funktion in B, bezeichnen wir eine Funktion von B, die selbst ein vollständiges System in B ist. Die Funktion $\max(x, y) + 1$, (mod k), ist eine Shefferscher Funktion in P_k. Sie besitzt als P_k eine endliche Basis [2]. Der Verband S_B hat offenbar das kleinste Element $\varnothing$ und das grösste Element B. Die Dualatome von S_B bezeichnen wir als maximale Teilklassen von B. Die Behauptung des Satzes aus [2, § **13**] lässt sich unmittelbar verallgemeinern. Wenn S_B dual atomar ist, d. h. wenn jede eigene abgeschlossene Teilklasse von B wenigstens in einer maximalen Teilklasse enthalten ist, dann die Bestimmung aller maximalen Teilklassen äquivalent mit der Auffindung des Kriteriums der Vollständigkeit in B ist. Tatsächlich ist A ein vollständiges System in B gerade dann, wenn A keine einige Teilklasse von B bildet, was gerade dann eintrifft, wenn es keinen Teil der maximalen Klasse B bildet. Ebenso wie in [2] lässt sich auch im allgemeinen beweisen: Wenn B eine endliche Basis hat, dann S_B dual atomar ist. Daraus geht hervor, dass P_k dual atomar ist. Alle fünf maximalen Teilklassen von P_2 hat Post und alle maximalen Teilklassen hat Jablonski [2] aufgestellt.

Es existieren auch B, die keine einzige maximale Teilklasse haben.

Beispiel 1. Es sei R das Intervall (0,1). Die Menge der auf R definierten reellen Funktionen einer Veränderlichen

$$B = \{f(x) = ax \mid a \in R\}$$

bildet offenbar eine abgeschlossene Klasse. Es sei $D \in S_B$, $D \neq B$. Setzen wir $\Lambda = \{a \in R \mid ax \mid \overline{\in} D\}$ Offenbar ist $\varnothing \neq \Lambda \subseteq R$. Deshalb hat die Zahlenmenge Λ das Infimum i. Wir zeigen, dass ein $b \in \Lambda$, $i < b < 1$, existiert. Wenn nämlich kein solches b existierte, wäre $i \in \Lambda$ und es gäbe kein $x \in \Lambda$ mit $i < x < 1$. Es wäre dann $(i+1)/2 \overline{\in} \Lambda$, $2i/(i+1) \overline{\in} \Lambda$, d. h. die Funktionen $f(x) = (i+1)x/2$, $g(x) = 2ix/(i+1)$ gehörten dann in die Menge D und folglich wäre $f(g(x)) = ix \in D$, was nicht möglich ist ($i \in \Lambda$). Es existiert also mindestens ein solches b. Nehmen wir $C = D \cup \{bx\}$ an. Für $cx \in C$ gilt offenbar $c \leqslant b$, denn bei der Bildung von Superpositionen bekommen wir neue Koefizienten dadurch dass wir die ursprünglichen Koeffizienten mit den Potenzen von b, die kleiner als 1 sind, multiplizieren. Es ist also $C \subset B$.

Daraus ergibt sich, dass B keine maximale Teilklasse hat.

3. Wir sagen, dass $f \in B$ redundant in B ist, wenn für jedes System $A \subseteq B$

$$\overline{A \cup \{f\}} = B \Rightarrow \bar{A} = B$$

gilt [2]). Die Menge aller in B redundanten Funktionen bezeichnen wir als R_B.

Es gilt folgende Behauptung:

Satz 2. *R_B ist der mengentheoretische Durchschnit von B und aller maximalen Teilklassen von B.*

Beweis. Bezeichnen wir mit H den genannten Durchschnitt. Wir beweisen, dass $f \in H \Leftrightarrow f \in R_B$.

1. Es sei $f \in H$, dann existiert mindestens eine in B maximale Teilklasse A, die f nicht enthält. Dann ist $\overline{A \cup \{f\}} = B$ und weil $\bar{A} \neq B$ ist $f \in R_B$.

2. Es sei $f \in R_B$. Dann existiert $\emptyset \neq A \subset B$ so, dass $\overline{A \cup \{f\}} = B, \bar{A} \subset B$ gilt. Mit $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir die Menge der abgeschlossenen Teilklassen von B, die A enthalten und f nicht enthalten. Offenbar ist $\bar{A} \in \mathfrak{M}$; nach Satz 1 enthält $\mathfrak{M}$ mindestens ein maximales Element D. Wir überzeugen uns leicht davon, dass D eine maximale Teilklasse in B ist, denn jede abgeschlossene Klasse E mit $D \subset E \subseteq B$ enthält D und F, d. h. A und f. Deshalb ist $E \supseteq \overline{A \cup \{f\}} = B$ und darum ist $f \in D$ und also $f \in H$.

Korollar. *R_B ist eine abgeschlossene Klasse.*

Beweis. R_B ist ein Durchschnitt der abgeschlossenen Klassen und darum selbst eine abgeschlossene Klasse [4]).

Wir sagen dass $C \subseteq B$ redundant in B ist, wenn für jede Menge $A \subseteq B$ $\overline{A \cup C} = B \Rightarrow \bar{A} = B$ gilt.

Offenbar ist jedes Element einer redundanten Menge C in B eine in B redundante Funktion. Ebenso ist jede endliche Menge der in B redundanten Elemente redundant in B. Wenn aber z. B. B keine einzige maximale Teilklasse hat (wie B in dem oben angeführten Beispiele), ist $R_B = B$ eine Menge, die offenbar in B nicht redundant ist.

Es gilt der

Satz 3. *Wenn S_B ein dual atomarer Verband ist, dann ist R_B redundant in B.*

Beweis. Es sei $\overline{A \cup R_B} = B$. Wenn $\bar{A} \subset B$ wäre, gäbe es eine in B maximale Teilklasse D, die A enthielte. Aus der Behauptung des Satzes 2 ergibt sich aber, dass $R_B \subseteq D$, d. h. $A \cup R_B \subseteq D$ und $B = \overline{A \cup R_B} \subseteq D$' was einen Widerspruch bedeutet.

Mit C_0 bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_j$, $(n \in N,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$, aus P_M.

Es gilt folgende einfache Beauptung:

---

[2]) Diesen Begriff kann man auch als Analogie der Fratinischen Unterstruktur aus der Algebra ansehn (siehe z. B. [6]).

[3]) d. h. wenn B keine maximalen Teilklassen hat, ist $R_B = B$. Sonst ist R_B der Durchschnitt aller maximalen Teilklassen von B.

[4]) Diese Behauptung lässt sich auch direkt aus der Definition beweisen.

Satz 4. *Wenn* $C_0 \subseteq B$, $\overline{B \setminus C_0} = B$, *dann ist* $C_0 \subseteq R_B$.

Beweis. Es sei $\overline{A \cup C_0} = B$. Dann ist auch jede Funktion $f \in B \setminus C_0$ eine Superposition von $D = A \cup C_0$. Nach der Definition der Superposition bei der Konstruktion von $f \in \overline{C_0}$, ist es gar nicht notweding, dass D die Funktionen aus C_0 enthält. Deshalb ist $B \setminus C_0 \subseteq \overline{A}$ und daher ist $B = \overline{B \setminus C_0} \subseteq \overline{\overline{A}} = \overline{A}$ d. h. $\overline{A} = B$.

Für den speziellen Fall $B = P_k$ gilt daher folgender

Satz 5. $R_{P_k} = C_0$.

Beweis. Die Voraussetzungen des Satzes 4 sind erfüllt. Es genügt also zu beweisen, dass $R_{P_k} \subseteq C_0$ ist.

1. Es sei $k \geqslant 3$. Nach [2] nennen wir eine Funktion $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in P_k$ monoton, wenn

$$\alpha_i \leqslant \alpha_i', (i = 1, 2, ..., n) \Rightarrow f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \leqslant f(\alpha_1', \alpha_2', ..., \alpha_n').$$

Es sei $r(x)$ eine beliebige Permutation der Menge E_k. Wir sagen, dass eine Funktion $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ monoton in Bezug auf $r(x)$ ist, wenn die zusammengesetzte Funktion $\varphi(x_1, ..., x_n) = r(f(r(x_1), r(x_2), ..., r(x_n)))$ eine monotone Funktion ist. Bezeichnen wir mit M_1^k die Klasse aller monotonen Funktionen in P_k und mit M_r^k die Klasse aller Funktionen, die in Bezug auf $r(x)$ monoton sind. In [2] wurde bewiesen, dass M_1^k und alle M_r^k maximale Teilklassen in P sind. Nach Satz 2 ist R_{P_k} eine Teilmenge jeder maximalen Klasse, also auch eine Teilmenge von M_1^k und von allen M_r^k; es ist daher jede Funktion $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in R_{P_k}$ monoton in Bezug auf jede Permutation $r(x)$. Wir zeigen dass eine solche Funktion entweder der Veränderlichen oder der Konstanten gleich ist.

Es sei $1 \leqslant i \leqslant n$ und $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n \in E_k$. Wir setzen $g(x_i) = f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{i-1}, x_i, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$. f ist eine monotone Funktion und deshalb ist $g(0) \leqslant g(1) \leqslant ... \leqslant g(k-1)$. Nehmen wir an, dass $g(x_i)$ weder der Konstanten noch x_i gleich ist. Dann ist weder $g(0) < g(1) < ... < g(k-1)$, noch $g(0) = g(1) = ... = g(k-1)$, es existiert also $0 \leqslant j \leqslant k-3$, für welches entweder $g(j) < g(j+1) = g(j+2)$ oder $g(j) = g(j+1) < g(j+2)$ gilt.

Wir wollen uns mit dem ersten Fall befassen. Wählen wir eine Permutation $r(x)$, die wie folgt definiert ist: $r(j) = j+1$, $r(j+1) = j$, $r(x) = x$ für die übrigen $x \in E_k$, d. i. die Transposition $(j, j+1)$. Setzen wir weiter $\alpha_l' = r^{-1}(\alpha_l)$, $(l = 1, ..., i-1, i+1 ..., n)$, und $g(x_i) = r^{-1}(f(r(\alpha_1'), r(\alpha_2'), ..., r(\alpha_{i-1}'), r(x_i), r(\alpha_{i+1}'), ..., r(\alpha_n'))) = r^{-1}(f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{i-1}, r(x_i), \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)) = r^{-1}(g(r(x_i)))$. Der Voraussetzung gemäss ist f bezüglich $r(x)$ monoton, deshalb ist $g'(x_i)$ monoton. Aber es ist $g'(j) = r^{-1}(g(j+1))$, $g'(j+1) = r^{-1}(g(j))$, $g'(j+2) = r^{-1}(g(j+2)) = r^{-1}(g(j+1))$. Wir erhalten also

$g'(j) = g(j+2) \neq g'(j+1)$ und gelangen daher zum Widerspruch mit der Monotonie der Funktion $g'(x_i)$.

Im zweiten Falle ist der Beweis ganz analog. So haben wir festgestellt, dass $g(x_i)$ gleich x_i oder einer Konstante ist.

Wir zeigen nun, dass f gleich einer seiner Veränderlichen oder einer Konstante ist. Wenn die oben eingeführte Funktion $g(x_i)$ für jedes i, $(1 \leqslant i \leqslant n)$, und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n \in E_k$ einer Konstante C_1 gleich ist, hat f nur fiktive Veränderliche und ist einer Konstante C gleich.

Nehmen wir also die Existenz von $1 \leqslant i \leqslant n$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n \in E_k$ an, für welche die zugehörige $g(x_i) = g(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, x_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = x_i$ ist. Es sei $1 \leqslant p \leqslant n$, $p \neq i$. Für $u \in E_k$ setzen wir $h_u(z) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, z, \alpha_{p+1}, \ldots \alpha_{i-1}, u, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$. Zuerst beweisen wir an, dass für jedes $u, z \in E_k$ gilt, dass $h_u(z) = u$ ist.

a) Wählen wir zuerst $u \neq \alpha_p$. Nehmen wir an, dass die zweite Alternative $h_u(z) = z$ für alle $z \in E_k$ gilt. Dann ist $\alpha_p = h_u(\alpha_p) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_{i-1}, u, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = g(u) = u$. Das steht jedoch im Widerspruch zu der Annahme $u \neq \alpha_p$ und deshalb ergibt sich die erste Alternative, d. h. $h_u(z)$ ist eine konstante Funktion von z und für jedes $z \in E_k$ gilt $h_u(z) = h_u(\alpha_p) = u$.

b) Betrachten wir nun $h_{\alpha_p}(z)$ und setzen wir voraus, dass sie nicht konstant ist, d. h. es ist $h_{\alpha_p}(z) = z$ für jedes $z \in E_k$. Wählen wir $v \in E_k$, $v \neq \alpha_p$. Es sei $c(u) = h_u(v)$. Offenbar ist $c(\alpha_p) = h_{\alpha_p}(v) = v$. Wie wir oben bewiesen haben, ist auch $c(v) = h_v(v) = v$. Die Funktion $c(u)$ nimmt zwei gleiche Werte an, ist also konstant, d. h. $c(u) = v$ für jedes $u \in E_k$. Da $k \geqslant 3$ ist, existiert $t \in E_k$, $t \neq \alpha_p, t \neq v$. Nach dem, was wir oben bewiesen haben, ist $v = c(t) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, v, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_{i-1}, t, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = h_t(v) = t$. Damit sind wir aber zum Widerspruch mit $t \neq v$ gelangt. Wir haben also festgestellt, dass unter diesen Voraussetzungen $h_u(z) = u$ für jedes $u, z \in E_k$ ist.

Es sei nun $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_n \in E_k$. Wenn wir die eben abgeleitete Behauptung $(p = 1)$ benützen, erhalten wir $f(\gamma_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, x_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = x_i$. Mit gleicher Überlegung (für $p = 2, 3, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$) schreiten wir fort, bis wir feststellen dass $f(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{i-1}, x_i, \gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_n) = x_i$.

Nun zeigen wir, dass R_B keine konstante Funktion enthält. In [2] wurde bewiesen, dass die Menge $T_{\{c\},N}$ aller Funktionen $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, welche die Konstante $c \in E_k$ bewahren (d. i. $f(c, c, \ldots, c) = c$), eine maximale Teilklasse in P_k ist. Der Durchschnitt dieser Klassen enthält keine konstante Funktion und damit ist der Beweis für $k \geqslant 3$ beendet.

2. Es sei $k = 2$. Laut [2] haben wir unter fünf maximalen Teilklassen in P_2 folgende vier maximalen Klassen: Die Klasse L aller linearen Funk-

tionen (d. h. aller Funktionen der Form $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \pmod 2$), die Klasse T_0 aller 0 bewahrenden Funktionen, die Klasse T_1 aller 1 bewahrenden Funktionen und die Klasse M aller monotonen Funktionen. Offenbar ist $\{0\} \subseteq M \cap L$. Wenn $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \pmod 2 \in M \cap L$, ist f die konstante Funktion 1, denn sonst bekämen wir nach Einsetzen der Null für einige Veränderliche die Funktion $x + 1 \pmod 2 \in M \cap L$. Wenn $f(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \pmod 2 \in M \cap L$ ist, dann ist $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, denn sonst bekämen wir nach Einsetzen der Null für einige Veränderliche $x_i + x_j \pmod 2 \in M \cap L$. Es ist also $M \cap L = C_0 \cup \{0\} \cup \{1\}$. Offenbar ist $R_{P_2} \subseteq (M \cap L) \cap T_0 \cap T_1 = C_0$ und nach dem Satz 4 ist $R_{P_2} = C_0$. Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Es ist die Frage, ob $R_B = C_0$ immer gilt. Wir zeigen, dass dies keineswegs der Fall ist.

Es sei card $M > 2$. In P_m konstruieren wir eine Klasse B wie folgt. Da card $M > 2$ ist, existiert $h(x) \in P_M$ so, dass für $M' = \{h(x) \mid x \in M\}$, $M'' = \{h(h(x)) \mid x \in M\}$ folgende Inklusion $M'' \subset M' \subset M$ gilt. Es sei $a \in M''$ und $g(x_1, x_2)$ wie folgt definiert: $g(x, x) = h(x)$ für jedes $x \in M$; $g(x_1, x_2) = a$ für jedes $x_1, x_2 \in M$, $x_1 \neq x_2$. Setzen wir $B = \{\bar{g}\}$. B enthält z. B. die Funktion $h(x) = g(x, x)$ und z. B. alle Funktionen $g(x_1, g(x_2, g(\ldots, g(x_{n-1}, x_n)) \ldots)$.

Bezeichnen wir mit G die Menge aller Funktionen, die tatsächlich von zwei Veränderlichen abhängen, und die sich von $g(x_1, x_2)$ nur durch die Bezeichnung der Veränderlichen unterscheiden. Die Funktionen aus $B \setminus G$, die tatsächlich wenigstens von zwei Veränderlichen abhängen, sind zusammengesetzte Funktionen, in deren Aufzeichnung das Symbol g wenigstens zweimal vorkommt. Nach der Definition von g kann eine solche Funktion ihren funktionalen Wert nur aus M'' bekommen. B enthält aber die Funktionen aus G, die alle Werte aus M' annehmen. Wenn also ein System vollständing in B ist, dann enthält es mindestens eine Funktion aus G. Wenn also $\overline{A \cup (B \setminus G)} = B$, dann ist $A \cap G \neq 0$, d. h. $g \in \bar{A}$ und $B = \{\bar{g}\} \subseteq \bar{A}B$. Damit haben wir gezeigt, dass $B \setminus G$ redundant ist und haben festgestellt, dass B ein umfassendes System von redundanten Funktionen hat. In B liegen alle redundanten Funktionen ausser g und jenen Funktionen, die wir aus g durch Änderung der Bezeichnung der Veränderlichen bekommen und die sich von g also nur wenig unterscheiden.

Nach Satz 2 ist R_B der Durchschnitt der Menge B und der in B maximalen Teilklassen. Stellen wir nun eine andere Frage. Wie sieht die mengentheoretische Vereinigung aller maximalen Teilklassen (soweit und falls sie existieren) aus? Eine einfache Verallgemeinerung eines Satzes aus [2] ist folgende Behauptung: Wenn S_B ein dual atomarer Verband ist, dann ist jede Funktion, die in keiner maximalen Teilklasse B liegt, eine Shessersche Funktion in B (d. h. $\{f\} = B$). Wenn also der Verband S_B dual atomar und die Menge B unabzählbar ist, dann ist B die Verei-

nigung aller maximalen Teilklassen in B, den B enthält keine Shefferssche Funktion.

4. Beachten wir noch abschliessend, ob der Verband S_B einige Verbandseigenschaften hat [5]).

Es sei $A \in S_B$. Als $A^{(1)}$ bezeichnen wir die Klasse aller Funktionen einer Veränderlichen aus der Menge A. Offenbar ist $A^{(1)}$ eine abgeschlossene Klasse, $A^{(1)} \subseteq B^{(1)}$. (Es ist dies eine Unterhalbgruppe der Halbgruppe $B^{(1)}$, in welcher die Multiplikation durch $fg(x) = f(g(x))$ definiert ist). Offenbar ist S_B dann und nur dann atomar, wenn $S_B^{(1)}$ atomar ist. Im Besonderen gilt: Falls M eine endliche Menge ist, dann ist für jede Menge $B \subseteq P_M$ der Verband S_B atomar.

Stellen wir die Frage, ob S_B modular ist. Allgemein, wie nachstehende Beispiele zeigen, ist die Antwort negativ.

Beispiel 2. Nehmen wir an, dass es paarweise verschiednen Elemente $a, b, c \in M$ und die Funktion $f \in B \subseteq P_M$ gibt, für die

$$f(a,a) = a, \quad f(b,b) = b, \quad f(a,b) = a, \quad f(b,c) \neq b$$

gelten. Weiter nehmen wir an, dass es in B eine Funktion $h(x)$ gibt, für die $h(a) = b, h(b) = c, h(c) = c$ gilt. Dann ist S_B kein modularer Verband.

Mit D bezeichnen wir die Klasse aller Funktionen aus der Menge B, die a bewahren (d. h. $g(a, a, ..., a) = a$) und mit C die Klasse aller Funktionen aus B, die sowohl a wie b bewahren. Offenbar ist C nicht leer ($f \in C$), $C \subseteq D$ und C, D sind abgeschlossene Klassen. Setzen wir $E = \{h\}$. Es lässt sich leicht beweisen, dass für $l \geqslant 2$, $h^l(a) = h(h(\ldots(h(a))\ldots) = c$ ist. Es ist also $E \cap D = \emptyset$. Setzen wir: $r(\xi) = f(x, h(x))$. Wir haben dann $r(a) = f(a,b) = a$, $r(b) = f(b,c) \neq b$, d. i. $r \in \overline{C \cup E} \cap D$, $r \notin C$. Deshalb ist $C = C \cup (E \cap D) \neq \overline{C \cup E} \cap D$; d. h. im Verband S_B ist $C \vee (E \wedge D) \neq (C \vee E) \wedge D$ und das bedeutet, dass S_B kein modularer Verband ist.

Im verband P_M, (card $M \geqslant 3$), finden sich ebenfalls immer derartige Funktionen, daher ist P_M kein modularer Verband.

Beispiel 3. Im Beweis des Satzes 5 haben wir die Klassen $M, L, T_0 \in P_2$ betrachtet und gezeigt, dass $L \cap M = C_0 \cup \{0\} \cup \{1\}$. Setzen wir $C = \{x\} \cup \{x+1\} \cup \{0\} \cup \{1\}$, $D = L$, $E = M \cap T_0 \cap T_1$. Dann ist $C \subseteq D$, $E \cap D = L \cap M \cap T_0 \cap T_1 = (C_0 \cup \{0\} \cup \cup \{1\}) \cap T_0 \cap T_1 = C_0$. Also $C \vee (E \wedge D) = \overline{C \cup (E \cap D)} = \overline{C \cup C_0} = C$. Weiter ist $\{0\} \cup \{1\} \cup E = M$ und a so ist $\overline{C \cup E} \supset (x+1) \cup M$. Aber M ist maximal in P_2 und $x+1 \in M$. Also ist $\overline{C \cup E} = P_2$ und de halb $(C \vee E) \wedge D = \overline{C \cup E} \cap D = P_2 \cap D = D = L$. Es ist $C \vee (E \wedge D) = C \subsetneq L = (C \vee E) \wedge D$ und daher ist der Verband S_{P_2} nicht modular.

Es lässt sich zeigen, dass z. B. P_2 die Nachbarbedingung nicht erfüllt.

An zwei Beispielen zeigen wir, dass der Verband S_B allgemein nicht komplementar ist.

---

[5]) Betreffs der Terminologie siehe z. B. [9].

Beispiel 4. Nach [2] ist für $k \geqslant 3$ die Klasse $T_{0,\,k-1}$ aller Funktionen einer Veränderlicher von P_k und aller Funktionen mehrer Veränderlicher von P_k die nicht alle Werte von E_k annehmen, eine maximale Teilklasse in P_k. Offenbar ist jede andere abgeschlossene Klasse inzident mit $T_{0,\,k-1}$ (sie haben wenigstens eine gemeinsame Funktion einer Veränderlichen). Deshalb ist P_k nicht komplementar.

Beispiel 4. In P_2 enthält L alle Funktionen einer Veränderlichen. Es ist also auch P_2 nicht komplementar.

Eingegangen am 27 VII 1964

Technische Hochschule,
Brno, Tschechoslowakei

LITERATURVERZEICHNIS

1. Гнеденко В. М., Проблемы кибернетики. Москва, 1962, *8*.
2. Яблонский С. Б., Тр. мат. инст. им. В. А. Стеклова, 1958, **LI**, стр. 5—142.
3. Янов Ю. И., Мучник А. А., ДАН СССР, 1959, **127**, *1*, стр. 44—46.
4. Мартыныок В. В., Проблемы кибернетики, Москва, 1960, *3*.
5. Post E., Amer. J. Math., 1921, **43**, pp. 163—185.
6. Redei L., *Algebra*. Akad. Verlagsges., Leipzig, 1959.
7. Salomaa A., J. of Symbolic Logic, 1960, p. 25; Ibid., 1962, pp. 203—208.
8. — Turun yliopiston Julkaisuja, 1962, Ser. **A. I**, *52*, 4 pp.
9. Szasz G., *Einführung in die Verbandstheorie*. Teubner, Leipzig, 1962.

ASUPRA PROBLEMEI SUPRAPUNERII FUNCŢIILOR DE MAI MULTE VARIABILE

(Rezumat)

Autorul, luînd ca punct de plecare o lucrare a lui S. V. Iablonski [2], relativă la structuri funcţionale în logicile k-valente, introduce noţiunea de funcţii redundente într-o anume mulţime B şi demonstrează că în ansamblul tuturor funcţiilor pe mulţime finită, orice funcţie redundentă este egală cu una din variabilele sale.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 512.9

ASUPRA ALGEBRELOR POLINOMIALE

NOTA II

ALGEBRE CU POLINOM GENERATOR DE FORMA $(\lambda^2+1)^p$ ŞI RESPECTIV $\Pi\,(\lambda-\lambda_i)^{h_i}\,(\lambda^2+b_j\lambda+c_j)^{k_j}$ cu $b_j^2-4c_j<0$

DE

I. ENESCU

1. În Nota de faţă ne propunem studiul algebrelor polinomiale pe cîmpul real, în cazul unui polinom generator de forma $(\lambda^2+b\lambda+c)^p$ cu rădăcini complexe $(b^2-4c<0)$ precum şi a cazului general $\Pi\,(\lambda-\lambda_i)^{h_i}\times$ $\times(\lambda^2+b_j\lambda+c_j)^{k_j}$ cu $b_j^2-4c_j<0$.

Se observă imediat că, în cazul $b^2-4c<0$, polinomul $\lambda^2+b\lambda+c$ poate fi scris sub forma α^2+a^2, unde am notat:

$$\alpha=\lambda+b/2 \text{ şi } a^2=(4c-b^2)/4.$$

Considerăm deci algebra polinomială generată de polinomul

$$\varphi(\lambda)=(\lambda^2+a^2)^p. \tag{1}$$

Fie $e^0=1,\ e,e^2,\ldots,e^{2p-1}$ baza de puteri a algebrei generate de polinomul (1) şi să considerăm algebra polinomială generată de $\psi(\lambda)=(\lambda^2+1)^p$, cu baza de puteri $u^0=1,u,u^2,\ldots,u^{2p-1}$. Corespondenţa:

$$u^0\to e^0;\quad u\to\frac{1}{a}e;\quad u^2\to\frac{1}{a^2}e^2;\ldots;u^{2p-1}\to\frac{1}{a^{2p-1}}e^{2p-1}$$

arată că cele două algebre sînt izomorfe, aşa încît studiul propus poate fi efectuat pentru algebra generată de $\Phi(\lambda)=(\lambda^2+1)^p$, pe care, pentru uşurinţa scrierii, o notăm cu H_{2p}.

2. Începem prin a observa că algebra considerată nu conţine idempotenţi diferiţi de zero şi de unitatea ei principală. Într-adevăr, fie $\psi(\lambda)=\xi_1+\xi_2\lambda+\cdots+\xi_{2p}\lambda^{2p-1}$ polinomul care corespunde unui element oarecare din H_{2p}. Notînd prin $q(\lambda)$ cîtul împărţirii lui $\psi^2(\lambda)$ prin $(\lambda^2+1)^p$ să considerăm identitatea:

$$\psi^2(\lambda)\equiv q(\lambda)(\lambda^2+1)^p+\psi(\lambda)$$

sau, încă:

MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA 1848

(2) $$\psi(\lambda)[\psi(\lambda)-1] \equiv q(\lambda)(\lambda^2+1)^p.$$

Folosind un raţionament utilizat în [1], se observă că identitatea (2) nu este posibilă decît pentru $\psi(\lambda) \equiv 1$ sau $\psi(\lambda) \equiv 0$, ceea ce dovedeşte afirmaţia.

Atunci [2], algebra H_{2p} este suma dintre un cîmp K şi radicalul R al ei. Or [3], cîmpul este generat de polinomul λ^2+1, fiind deci cîmpul complex:

$$H_{2p} = K + R.$$

Afirmăm acum că orice element nilpotent din H_{2p} este şi propriu nilpotent. Fie x un element din H_{2p}, cu proprietatea că $x^a = 0$. Atunci, produsul $x\xi = \xi x$, unde ξ este un element oarecare din H_{2p}, este nilpotent. Într-adevăr $(x\xi)^a = x^a \xi^a = 0$. Urmează atunci că toate elementele nilpotente din H_{2p} se găsesc în R, ceea ce arată că singurul element comun lui K şi R este elementul zero. Am demonstrat astfel

Teorema 1. *Orice algebră polinomială generată de un polinom de forma* $\Phi(\lambda) = (\lambda^2+1)^p$ *este suma dintre algebra numerelor complexe şi radicalul său.*

Din cele de mai sus rezultă imediat şi următorul

Corolar. *Ordinul radicalului algebrei* H_{2p} *este egal cu* $2p-2$ *unde, evident,* $2p$ *este ordinul algebrei* H_{2p}.

3. Să considerăm acum cazul general, cînd polinomul generator al algebrei este de forma:

(3) $$\varphi(\lambda) = \Pi(\lambda-\lambda_i)^{h_i}(\lambda^2+b_j\lambda+c_j)^{k_j}, \quad i=1,2,\ldots,r;\ j=1,2,\ldots,s,$$

factorii $\lambda-\lambda_i$ şi $\lambda^2+b_j\lambda+c_j$ fiind ireductibili peste cîmpul real. Atunci [3], algebra în chestiune este suma directă a algebrelor generate de polinoamele $(\lambda-\lambda_i)^{h_i}$ şi $(\lambda^2+b_j\lambda+c_j)^{k_j}$. Dar, fiecare componentă are una din formele studiate în [1], respectiv în prezenta Notă, şi deci, radicalul algebrei este suma directă a radicalilor fiecărei componente. Cum în total sînt $r+s$ componente, urmează că ordinul radicalului va fi dat de suma ordinelor radicalilor fiecărei componente în parte.

Componentele generate de factorii $(\lambda-\lambda_i)^{h_i}$ au radical de ordin h_i-1 [1] iar acelea generate de $(\lambda^2+b_j\lambda+c_j)^{k_j}$ au radical de ordin $2k_j-2$, aşa cum rezultă din corolarul stabilit mai sus.

Calculînd sumele acestor ordine, obţinem:

$$\sum_{i=1}^{r}(h_i-1)+\sum_{j=1}^{s}(2k_j-2) = \sum_{i=1}^{r}(h_i-1)2-\sum_{j=1}^{s}(k_j-1) =$$

$$= (h_1+h_2+\cdots+h_r)-r+2(k_1+k_2+\cdots+k_s)-2s.$$

Dar, $(h_1+h_2+\cdots+h_r)+2(k_1+k_2+\cdots+k_s)$ este tocmai gradul polinomului (3), adică tocmai ordinul, n, al algebrei generate de acesta.

Urmează atunci că ordinul radicalului, fie el ϱ, este dat de

$$\varrho = n - (r + 2s), \tag{4}$$

ceea ce demonstrează

Teorema 2. *Ordinul radicalului algebrei generate de polinomul* (3) *este dat de relaţia* (4), *unde r este numărul factorilor ireductibili liniari, iar s acela al factorilor ireductibili pătratici, din descompunerea polinomului generator.*

Am regăsit, astfel, un rezultat stabilit în [4], pe o altă cale decît cea utilizată acolo.

4. În aplicaţii este utilă scrierea algebrei într-o bază care să pună în evidenţă cîmpul şi radicalul ei, în cazul unui polinom generator de forma $(\lambda - \lambda_0)^i$ sau $(\lambda^2 + a^2)^i$, iar pentru un polinom de forma (3), componentele sumei directe corespunzătoare.

Trebuie deci găsite, pentru un caz dat, acele elemente independente care, fiind în număr maxim, să poată forma o bază pentru întreaga algebră şi, în acelaşi timp, cîte un număr din ele să formeze o bază pentru respectiv fiecare componentă din suma directă.

Singurul caz în care baza de puteri a algebrei polinomiale satisface acest deziderat, este acela în care polinomul generator are forma $(\lambda - \lambda_0)^n$. Aşa cum s-a arătat în [1], radicalul are o bază de puteri care, împreună cu baza cîmpului real, ce poate fi luată tocmai unitatea principală, formează o bază, cu proprietatea cerută, pentru întreaga algebră. Atunci însă, cînd polinomul generator are altă formă decît $(\lambda - \lambda_0)^i$, baza de puteri a algebrei polinomiale nu satisface cerinţei de mai sus.

În cazul polinomului generator de forma $(\lambda^2 + 1)^p$, baza căutată este formată cu elementele 1, i şi acelea ce corespund polinoamelor de forma:

$$(\lambda^2 + 1)^i \text{ şi } \lambda(\lambda^2 + 1)^i, \quad i = 1, 2, \ldots, p - 1. \tag{5}$$

Într-adevăr, se observă că elementele ce corespund lui $(\lambda^2 + 1)^i$ şi $\lambda(\lambda^2 + 1)^i$, $i = 1, 2, \ldots, p - 1$, sînt independente între ele (polinoamele corespunzătoare avînd această proprietate), iar numărul lor este egal cu $(p - 1) + (p - 1) = 2p - 2 = \varrho$.

Cum aceste elemente aparţin evident lui R, urmează că mulţimea $1, i, u_1, u_2, \ldots, u_{2p-2}$ formează o bază cu proprietatea căutată. (Prin u_1, $u_2, \ldots, u_{2p-2}$ am notat elementele ce corespund polinoamelor (5)).

Rămîne în discuţie cazul polinomului de forma (3).

Întrucît atunci algebra este sumă directă de algebre de tip deja studiat, baza căutată este formată cu toate elementele ce alcătuiesc baze pentru respectiv fiecare componentă a sumei directe, satisfăcînd desigur condiţia în chestiune.

Vom da, în această ordine de idei, un exemplu pentru algebre cu polinom generator de forma $(\lambda^2 + 1)^p$, anume algebra lui Sobrero, deci $\varphi(\lambda) = (\lambda^2 + 1)^2$.

Tabela de înmulţire în baza de puteri, este dată de [5]:

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	e_3	e_4	$-2e_3-e_1$
e_3	e_3	e_4	$-2e_3-e_1$	$-2e_4-e_2$
e_4	e_4	$-2e_3-e_1$	$-2e_4-e_2$	$3e_3+2e_1$

unde $\varphi(e_2)=0$.

Aici, polinoamele (5) sînt λ^2+1 şi $\lambda(\lambda^2+1)$ şi lor le corespund respectiv elementele e_1+e_3 şi e_2+e_4.

Un calcul simplu arată apoi că elementul ce corespunde lui i este $(3e/2+e_4)_2$. Se verifică într-adevăr imediat, că:

$$\left[\frac{1}{2}(3e_2+e_4)\right]^2=-e_1.$$

Să facem schimbarea de bază:

$$u_1=e_1,\ u_2=\frac{3}{2}e_2+\frac{1}{2}e_4,\ u_3=e_1+e_3,\ u_4=e_2+e_4.$$

În noua bază, tabela de înmulţire este:

	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	u_1	u_2	u_3	u_4
u_2	u_2	$-u_1$	u_4	$-u_3$
u_3	u_3	u_4	0	0
u_4	u_4	$-u_3$	0	0

şi se constată că ea satisface condiţia cerută.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra matematici II

Primit la 10 I 1966

BIBLIOGRAFIE

1. Enescu I., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *3–4*, pp. 25—28.
2. Deuring M., *Algebren*. Berlin, 1935, S. 23.
3. Rinehart R. F., Duke Math. J., 1938, **4**, pp. 725—736.
4. — Trans. Amer. Math. Soc., 1939, **46**, p. 327.
5. Enescu I., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *1–2*, pp. 39—42.

SUR LES ALGÈBRES POLYNÔMIALES

Note II

Algèbres à polynôme générateur de la forme $(\lambda^2+1)^p$ et respectivement

$$\Pi(\lambda-\lambda_i)^{h_i}(\lambda^2+b_j\lambda+c_j)^{k_j} \text{ avec } i_j^2-4c_j<0$$

(Résumé)

On étudie les algèbres sur le corps réel, engendrées par des polynômes ayant la forme $(\lambda^2+a^2)^p$ ou $\Pi(\lambda-\lambda_i)^{h_i}(\lambda^2+a_j^2)^{k_j}$. On trouve la base qui met en évidence les composantes de la somme directe dans laquelle se décompose une algèbre polynômiale quelconque.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

D. C. 512.41

A SOLUTION OF THE GENERAL CYCLIC QUINTIC

BY

LAEL M. YOUNG

1. In this paper, an explicit solution by radicals is found of the most general cyclic equation of degree five over the field of rational numbers.

The author is indebted to Prof. E. G. Straus of UCLA for the information that the roots of a cyclic equation of prime degree over the rationals form a basis of the splitting field, provided their sum does not vanish.

2. *Notation.* The field of rational numbers will be denoted by Q, and the root of unity, $\exp(2\pi i/5)$, by ζ. The complex conjugate of z will be denoted by z^*. Throughout this paper, subscripts are to be taken modulo 5. To shorten formulas, we abbreviate certain combinations of the four parameters A, B, C, D as follows:

$$a = A^2 + B^2 + C^2 + D^2, \quad b = AD + BC, \quad c = (A + D)(B + C),$$

$$\alpha = A^2 - B^2 - C^2 + D^2, \quad \beta = AD - BC, \quad \gamma = (A - D)(B - C),$$

$$R = (2a - b - c)/2, \text{ and } \quad S = (\gamma - \beta)/2.$$

Finally, σ_r will denote $+1$ if r is 1 or 4; and, -1 if r is 2 or 3.

3. The main result is the following:

Theorem. *Let* $f(z) \equiv Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4$, *where the coefficients are arbitrary rational numbers. Let* $\eta_r, (r = 1, 2, 3, 4)$, *satisfy*

$$\eta_r^5 = [f(\zeta^r)]^6 [f(\zeta^{4r})]^4 [f(\zeta^{2r})]^3 [f(\zeta^{3r})]^2, \tag{1}$$

and the relations

$$[f(\zeta)]^2 [f(\zeta^4)] \eta_2 = \eta_1^2, \tag{2_1}$$

$$\eta_3 = \eta_2^*, \tag{2_2}$$

$$\eta_4 = \eta_1^*. \tag{2_3}$$

(The choice of one fifth root is arbitrary.) *Finally, let*

$$\xi_i = \sum_{r=1}^{4} \zeta^{ri} \eta_r, \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4). \tag{3}$$

Then, the ξ_i *are the roots of*

$$F(\xi) \equiv \xi^5 + c_1 \xi^4 + c_2 \xi^3 + c_3 \xi^2 + c_4 \xi + c_5 = 0, \tag{4}$$

where

$$c_1 = 0, \tag{5_1}$$

$$c_2 = -10R(R^2 - 5S^2), \tag{5_2}$$

$$c_3 = 5(A + B + C + D)(R^2 - 5S^2)^2, \tag{5_3}$$

$$c_4 = \frac{5}{2}[(4a + 3b - 7c)R + 5(2\alpha - 7\beta + \gamma)S](R^2 - 5S^2)^2, \tag{5_4}$$

$$\begin{aligned} c_5 = \frac{1}{2}\{&5(A - B - C + D)[(\alpha - 9\beta + 6\gamma)R^2 + 2(a + 2b - 3c)RS + \\ &+ 5(\alpha + 9\beta - 12\gamma)S^2] - (A + B + C + D)[(3a + b - 4c)R^2 + \\ &+ 5(2\alpha - 7\beta + \gamma)RS + 5(a + 2b - 3c)S^2]\}(R^2 - 5S^2)^2. \end{aligned} \tag{5_5}$$

(If A, B, C, D are integers, the c_i are, also.)

An equation $F(\xi) = 0$ is cyclic of degree five over Q unless its roots are all rational. Conversely, any cyclic equation $G(\theta) = 0$ of degree five over Q can be converted to the form (4) by a substitution of the form $\xi = \lambda\theta + \mu$, with rational λ and μ; moreover, the associated numbers, A, B, C, D can be chosen to be relatively prime integers.

4. Let $G(\theta) = 0$ be any cyclic equation of degree five over Q. Let $\theta_i, (i = 0, 1, 2, 3, 4)$, be its roots, numbered so that there is an automorphism of its splitting field which maps θ_i into θ_{i+1}. Now, for some rational ϱ, $\sum \theta_i = \varrho$.

In order to apply results obtained previously, we let $x_i = \theta_{2i} - (\varrho + 1)/5$, $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$. Then, $\sum x_i = -1$, the x_i form a basis of $Q(\theta_0)$ over Q, and there is an automorphism of $Q(\theta_0)$ which maps x_i into x_{i+1}. These conditions imply that there are rational numbers A, B, C, D such that

$$\begin{aligned} x_i x_{i+1} = \frac{1}{25R^2}\{&[(3A + 3B - 7C - 2D - 4)R^2 - 5(A + B - C)RS]x_i + \\ &+ [(-2A - 7B + 3C + 3D - 4)R^2 - 5(-B + C + D)RS]x_{i+1} + \end{aligned}$$

$$+[(-2A+3B+3C-2D+1)R^2-5(3B-C-2D)RS]x_{i+2}+$$
$$+[(3A-2B-2C+3D+1)R^2-5(A-2B-2C+D)RS]x_{i+3}+$$
$$+[(-2A+3B+3C-2D+1)R^2-5(-2A-B+3C)RS]x_{i+4}-$$
$$-(R+5S)(R^2+5S^2)\}$$

and

$$x_i x_{i+2}=\frac{1}{25R^2}\{[(-7A+3B-2C+3D-4)R^2-5(A-B-D)RS]x_i+$$
$$+[(-2A+3B+3C-2D+1)R^2-5(2A-B-C+2D)RS]x_{i+1}+$$
$$+[(3A-2B+3C-7D-4)R^2-5(-A-C+D)RS]x_{i+2}+$$
$$+[(3A-2B-2C+3D+1)R^2-5(-3A+2B+D)RS]x_{i+3}+$$
$$+[(3A-2B-2C+3D+1)R^2-5(A+2C-3D)RS]x_{i+4}-$$
$$-(R-5S)(R^2-5S^2)\}.$$

This is proved in the author's doctoral dissertation [1]. (The multiplication formulas are there expressed in terms of rational numbers α, β, γ, δ. The present formulas have been obtained by the substitution $A=(-\alpha+\beta+2\gamma)/4$, $B=(-\alpha-\beta+2\delta)/4$, $C=(-\alpha-\beta-2\delta)/4$, $D=(-\alpha+\beta-2\gamma)/4)$.

Let $\xi_i=-R(5x_{3i}+1)=-R(5\theta_i-\varrho)$. The significant information is:

$$\xi_i=\lambda\theta_i+\mu,\ (i=0,1,2,3,4), \tag{6}$$

where λ and μ are rational, and,

$$\sum\xi_i=0. \tag{7}$$

The multiplication formulas become:

$$\xi_i\xi_{i+1}=[(B+2D)R+(-A-C+D)S]\xi_i+$$
$$+[(2A+C)R+(A-B-D)S]\xi_{i+1}+ \tag{8_1}$$
$$+[(B+C)R+(-3A+2B+D)S]\xi_{i+2}+[(A+D)R+(2A-B-C+2D)S]\xi_{i+3}+$$
$$+[(B+C)R+(A+2C-3D)S]\xi_{i+4}-(R-5S)(R^2-5S^2)$$

and

$$\xi_i\xi_{i+2}=[(2C+D)R+(A+B-C)S]\xi_i+$$
$$+[(B+C)R+(A-2B-2C+D)S]\xi_{i+1}+ \tag{8_2}$$
$$+[(A+2B)R+(-B+C+D)S]\xi_{i+2}+[(A+D)R+(-2A-B+3C)S]\xi_{i+3}+$$
$$+[(A+D)R+(3B-C-2D)S]\xi_{i+4}-(R+5S)(R^2-5S^2).$$

Formulas (7), (8_1), and (8_2) imply that the ξ_i are the roots of (4).

We can replace the numbers A, B, C, D (obtained by the process described) by any four rational numbers having the same rations; we merely adjust λ and μ in (6). This completes the proof of the last statement of the theorem.

5. Now let A, B, C, D be arbitrary rational numbers. We seek numbers $\xi_i, (i = 0, 1, 3, 4)$, which satisfy (7), (8_1), and (8_2); such ξ_i must be the roots of (4).

We consider the Lagrange resolvents, defined by:

$$5\eta_r = \sum_{i=0}^{4} \zeta^{-ri}\xi_i, \quad (r = 1, 2, 3, 4). \tag{9}$$

These equations and (7) are equivalent to equations (3). Theoretically, we could raise these expressions to the fifth power and then eliminate the ξ_i by repeated use of (7), (8_1), and (8_2). However, this does not appear to be practicable. (The author discovered formulas (1) and (2_i), $(i = 1, 2, 3)$, by study of special cases.)

Let the numbers η_r, $(r = 1, 2, 3, 4)$, satisfy (1) and (2_i), $(i = 1, 2, 3)$. We proceed to verify that these numbers are the Lagrange resolvents. We find first, for $r = 1, 2, 3, 4$:

$$\eta_r^2 = (R + \sigma_r S\sqrt{5})\, f(\zeta^r)\, \eta_{2r}, \tag{10_1}$$

$$\eta_r \eta_{2r} = (R + \sigma_r S\sqrt{5})\, f(\zeta^{2r})\, \eta_{3r}, \tag{10_2}$$

$$\eta_r \eta_{3r} = (R - \sigma_r S\sqrt{5})\, f(\zeta^r)\, \eta_{4r}, \tag{10_3}$$

$$\eta_r \eta_{4r} = (R + \sigma_r S\sqrt{5})\,(R^2 - 5S^2). \tag{10_4}$$

Using (3), we have:

$$\xi_i \xi_{i+1} = \left(\sum_{r=1}^{4} \zeta^{ri}\eta_r\right)\left(\sum_{s=1}^{4} \zeta^{s(i+1)}\eta_s\right) = \sum_{s=1}^{4}\sum_{r=1}^{4} \zeta^{ri+s(i+1)}\eta_r\eta_s =$$

$$= \sum_{s=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} \zeta^{ksi+s(i+1)}\eta_{ks}\eta_s = \sum_{k=1}^{4}\sum_{s=1}^{4} \zeta^{(k+1)si+s}\eta_s\eta_{ks} =$$

$$= \sum_{s=1}^{4} \zeta^{2si+s}(R + \sigma_s S\sqrt{5})\, f(\zeta^s)\, \eta_{2s} + \sum_{s=1}^{4} \zeta^{3si+s}(R + \sigma_s S\sqrt{5}) f(\zeta^{2s})\, \eta_{3s} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{4} \zeta^{4si+s}(R - \sigma_s S\sqrt{5}) f(\zeta^s)\, \eta_{4s} + \sum_{s=1}^{4} \zeta^{s}(R + \sigma_s S\sqrt{5})\,(R^2 - 5S^2) =$$

$$= \sum_{r=1}^{4} \zeta^{ri+3r}(R - \sigma_r S\sqrt{5}) f(\zeta^{3r})\, \eta_r +$$

$$+\sum_{r=1}^{4}\zeta^{ri+2r}(R-\sigma_r S\sqrt{5})f(\zeta^{4r})\eta_r+\sum_{r=1}^{4}\zeta^{ri+4r}(R-\sigma_r S\sqrt{5})f(\zeta^{4r})\eta_r+$$

$$+R(\zeta+\zeta^4+\zeta^2+\zeta^3)+S\sqrt{5}(\zeta+\zeta^4-\zeta^2-\zeta^3)(R^2-5S^2)=$$

$$=\sum_{r=1}^{4}[R-S(\zeta^r+\zeta^{4r}-\zeta^{2r}-\zeta^{3r})][\zeta^{3r}f(\zeta^{3r})+\zeta^{2r}f(\zeta^{4r})+\zeta^{4r}f(\zeta^{4r})]\zeta^{ri}\eta_r-$$

$$-(R-5S)(R^2-5S^2)=\sum_{r=1}^{4}\{[B+2D+(2A+C)\zeta^r+(B+C)\zeta^{2r}+$$

$$+(A+D)\zeta^{3r}+(B+C)\zeta^{4r}]R-[A+C+D+(-A+B+D)\zeta^r+$$

$$+(3A-2B-D)\zeta^{2r}+(-2A+B+C-2D)\zeta^{3r}+$$

$$+(-A-2C+3D)\zeta^{4r}]S\}\zeta^{ri}\eta_r-(R-5S)(R^2-5S^2)=$$

$$=[(B+2D)R+(-A-C+D)S]\xi_i+[(2A+C)R+(A-B-D)S]\xi_{i+1}+$$

$$+[(B+C)R+(-3A+2B+D)S]\xi_{i+2}+[(A+D)R+(2A-B-C+2D)S]\xi_{i+3}+$$

$$+[(B+C)R+(A+2C-3D)S]\xi_{i+4}-(R-5S)(R^2-5S^2).$$

Thus, the ξ_i satisfy (8_1); (8_2) can be checked similarly. Equation (7) also follows form (3). Consequently, the ξ_i are the roots of (4), and the η_r are the Lagrange resolvents.

Now assume that A, B, C and D are integers. It is clear from (1) that the η_r are algebraic integers; hence, by (3), the ξ_i are also. Therefore, (4) has integral coefficients.

6. There remains to be proved only that $F(\xi)=0$ is cyclic of degree five over Q unless its roots are all rational. We shall denote the splitting field of $F(\xi)$ by E.

Suppose first that $F(\xi)$ is irreducible over Q; then, $[E:Q]\geqslant 5$. By repeated use of (7), (8_1), and (8_2), we can express any element of E as a linear combination of 1, ξ_0, ξ_1, ξ_2, and ξ_3 with rational coefficients. Therefore, $[E:Q]=5$. Since the Galois group of E over Q is of order five, it must be cyclic.

Suppose now that $F(\xi)$ is reducible over Q; then, $5\nmid[E:Q]$. Since $[E(\zeta):E]\leq 4$, $5\nmid[E(\zeta):Q]$; and so, $5\nmid[E(\zeta):Q(\zeta)]$. Let r be any one of 1, 2, 3, or 4. By (9), $\eta_r\in E(\zeta)$; so, $[E(\zeta):Q(\zeta)]=[E(\zeta):Q(\zeta,\eta_r)][Q(\zeta,\eta_r):Q(\zeta)]$. Therefore, $5\nmid[Q(\zeta,\eta_r):Q(\zeta)]$. By (1) $\eta_r^5\in Q(\zeta)$; so $\eta_r\in Q(\zeta)$.

It is clear from (1) that the numbers η_r^5, $(r=1, 2, 3, 4)$, are conjugates in $Q(\zeta)$. That the η_r are themselves conjugates in $Q(\zeta)$ follows from equations (2_i), $(i=1, 2, 3)$. Assuming this for the moment, (3) implies that $\xi_i\in Q$, $(i=0, 1, 2, 3, 4)$; i. e., $F(\xi)=0$ has five rational roots.

In proving that the η_r are conjugates in $Q(\zeta)$, we may exclude the trivial case $f(\zeta) = 0$. Each rational prime $p_k \equiv 1 \pmod 5$ splits into four nonassociate conjugate prime factors in the ring of algebraic integers in $Q(\zeta)$, $p_k = \prod_{r=1}^{4} f_k(\zeta^r)$, where $f_k(z)$ is a polynomial of the same form as $f(z)$ and with rational integral coefficients. $f(\zeta)$ can be expressed in the form

$$f(\zeta) = \zeta^m(\varrho + \sigma\sqrt{5})(\zeta - \zeta^4)^n \prod_k [f(\zeta)]^{a_k}[f_k(\zeta^2)]^{\beta_k},$$

where ϱ and σ are rational and the exponents are integers. In order that the η_r be in $Q(\zeta)$, (1) implies that, for some λ_1 and λ_2,

$$\eta_1 = \zeta^{\lambda_1}(\varrho + \sigma\sqrt{5})^2(\varrho - \sigma\sqrt{5})(\zeta - \zeta^4)^{2n}(\zeta^2 - \zeta^3)^n \times$$

$$\times \prod_k \{[f_k(\zeta)]^{(6a_k+2\beta_k)/5}[f_k(\zeta^2)]^{(3a_k+2\beta_k)/5}[f_k(\zeta^3)]^{(2a_k+4\beta_k)/5}[f_k(\zeta^4)]^{(4a_k+3\beta_k)/5}\}$$

and

$$\eta_2 = \zeta^{\lambda_2}(\varrho + \sigma\sqrt{5})(\varrho - \sigma\sqrt{5})^2(\zeta^4 - \zeta)^n(\zeta^2 - \zeta^3)^{2n} \times$$

$$\times \prod_k \{[f_k(\zeta)]^{(2a_k+4\beta_k)/5}[f_k(\zeta^2)]^{(6a_k+2\beta_k)/5} f_k[(\zeta^3)]^{(4an+3\beta_k)/5}[f_k(\zeta^4)]^{(3a_k+6\beta_k)/5}\},$$

where the exponents are all integers. It follows that

$$\eta_1^2/\eta_2 = \zeta^{2\lambda_1-\lambda_2}[f(\zeta)]^2[f(\zeta^4)]. \text{ (Note that } \zeta^m = 1).$$

Comparison with (2_1) gives $\zeta^{\lambda_2} = (\zeta^2)^{\lambda_1}$. Therefore, η_2 is a conjugate of η_1 in $Q(\zeta)$. That η_3 and η_4 are the other two conjugates is now clear from (2_2) and (2_3).

The proof of the theorem is now complete.

Received the 28 I 1964

San Fernando Valley State College,
Northridge, California, USA

REFERENCES

1. Young L. M., *On Certain Cyclic Extensions of the Field of Rational Numbers.* Stanford, 1961.

SOLUȚIA UNEI ECUAȚII CVINTICE CICLICE GENERALE

(Rezumat)

Autorul determină soluția explicită, exprimată prin radicali, a celei mai generale ecuații ciclice de gradul cinci în cîmpul numerelor raționale.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

Ç. D. 519.33 ; 519.56

CRITERI SUFFICIENTI PER INSIEMI FUNZIONALI CONVESSI CONCERNENTI GENERALI PROBLEMI DI CALCOLO DELLE VARIAZIONI RIGUARDANTI INTEGRALI PLURIDIMENSIONALI D'ORDINE QUALSIVOGLIA NEL VETTORE MINIMANTE A PIÙ COMPONENTI

DI

MAURO PICONE

1. In una serie delle nostre Note precedenti inserite in questo *Bollettino* ed aventi alla base la serie di risultati del tutto recenti pubblicati nell'ambito di alcune memorie inserite nei *Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei* [1]...[3], sono stati indicati vari criteri sufficienti e le funzioni di invarianza concernenti generali problemi di calcolo delle variazioni riguardanti integrali pluridimensionali d'ordine qualsivoglia nel vettore minimante a più componenti. Nella presente, conservando le notazioni e le definizioni ivi introdotte e rimandando il lettore per vari applicazioni ed alcuni dettagli algoritmici alle nostre Note [4], [5], si esporranno criteri sufficienti per insiemi funzionali convessi.

2. All'ottenimento di ulteriori criteri sufficienti, nell'ipotesi che l'insieme $E^{(\nu)}$ sia convesso, conviene premettere, come vada a fare, alcuni concetti riguardanti forme quadratiche.

Le funzioni $\Phi_{ih\,jk}(x, y, p)$, $\Phi_{ihj}(x, y, p)$, $\Phi_{ij}(x, y, p)$, $(i, j = 1, 2, \ldots, n;$ $h, k = 1, 2, \ldots, (\mu, r))$, siano definite nell'insieme $B \times C$ dello spazio $X \times Y \times P$, vi siano continue e verifichino le identità :

$$\Phi_{ih\,jk} \equiv \Phi_{jk\,ih}, \quad \Phi_{ji} \equiv \Phi_{ij}.$$

Indicando, anche, con z un punto dello spazio Y e con q un punto dello spazio P, considereremo, per ogni punto (x, y, p) di $B \times C$, la forma quadratica

$$\Phi(x, y, p, z, q), \tag{1}$$

nelle variabili reali $z_1, z_2, \ldots, z_n$; $q_{11}, q_{12}, \ldots, q_{n,\mu-r}$ il cui numero è

$$n + n(\mu, r) = n\frac{(r+\mu)!}{r!\,\mu!},$$

definita dall'identità

$$\Phi(x, y, p, z, q) \equiv$$

$$(1) \qquad \equiv \sum_{ij}^{n} \left[\sum_{hk}^{(\mu,r)} \Phi_{ih\,jk}(x, y, p)\, q_{ih}\, q_{jk} + 2 \sum_{h=1}^{(\mu,r)} \Phi_{ihj}(x, y, p)\, q_{ih}\, z_j + \Phi_{ij}(x, y, p)\, z_i\, z_j \right].$$

Sia H un insieme di vettori $\eta(x)$, ad componenti reali $\eta_1(x)$, $\eta_2(x), \ldots, \eta_n(x)$, funzioni di x, di classe μ in A. La forma quadratica (1) si dirà *integralmente semidefinita positiva (negativa)* nell'insieme $E^{(\nu)} \times H$ se, per ogni vettore $[y(x), \eta(x)]$ di tale insieme, risulta

$$(2) \qquad \int_A \Phi(x, y(x), Dy(x), \eta(x), D\eta(x))\, dx \geqslant 0 \quad (\leqslant 0),$$

integralmente definita positiva (negativa) se è integralmente semidefinita positiva (negativa) e nella (2) vale il segno eguale soltanto quando sia $\eta(x) \equiv 0$ per $x \in A$.

La forma quadratica (1) si dirà, *in $B \times C$, puntualmente semidefinita positiva (negativa) o puntualmente definita positiva (negativa)* se tale riesce per ogni punto (x, y, p) di $B \times C$. Si dirà, in $B \times C$, *puntualmente quasi ovunque definita positiva (negativa)*, se esiste, nello spazio X, un insieme A', contenuto in A e avente la misura di A, tale che, detto B' l'insieme dei punti di B aventi in A' la loro proiezione ortogonale sullo spazio X, la forma (1) risulta definita positiva (negativa) comunque si assuma il punto (x, y, p) in $B' \times C$. Si dirà, nell'insieme $E^{(\nu)}$, *puntualmente quasi ovunque definita positiva (negativa)*, in A, se, comunque si assuma un vettore $y(x)$ di $E^{(\nu)}$, la forma quadratica, nelle variabili z_i e q_{ih}, $\Phi(x, y(x), Dy(x), z, q)$ risulta definita positiva (negativa) in un insieme $A'(y(x))$ di punti di A, avente la misura di A.

Sussistono i teoremi seguenti:

Teorema I. *Se la forma quadratica* (1) *è, nell'insieme $B \times C$, puntualmente quasi ovunque definita positiva (negativa) essa è, per qualsivoglia insieme $E^{(\nu)}$, puntualmente quasi ovunque definita positiva (negativa) in A.*

Teorema II. *Se la forma quadratica* (1) *è puntualmente positiva (negativa) in $B \times C$ essa è integralmente semidefinita positiva (negativa) nell'interno $E^{(\nu)} \times H$, quali si siano gl'insiemi $E^{(\nu)}$ e H.*

Teorema III. *Se la forma quadratica* (1) *è puntualmente definita positiva (negativa) in $B \times C$, essa è integralmente definita positiva (negativa) nell'insieme $E^{(\nu)} \times H$, quali si siano gl'insiemi $E^{(\nu)}$ e H.*

Teorema IV. *Se la forma quadratica* (1) *è nell'insieme* $E^{(\nu)}$, *puntualmente quasi ovunque definita positiva (negativa) in* A, *essa è integralmente definita positiva (negativa) nell'insieme* $E^{(\nu)} \times H$, *per qualsivoglia insieme* H.

3. All'uopo di enunciare vari criteri sufficienti, per una funzione $f(x, y, p)$, di classe due in $B \times C$, rispetto alle variabili y_i e p_{ih}, introdurremo la relativa *forma quadratica hessiana, rispetto alle due variabili* dipendente dalle variabili reali z_i e q_{ih}, definita dell'identità

$$H_f(x, y, p, z, q) \equiv$$

$$\sum_1^n{}_i \left[\sum_1^{(\mu, r)}{}_{hk} f_{p_{ih} p_{jk}}(x, y, p)\, q_{ih} q_{jk} + 2 \sum_{h=1}^{(\mu, r)} f_{y_j p_{ih}}(x, y, p)\, q_{ih} z_j + f_{y_i y_j}(x, y, p)\, z_i z_j \right].$$

Teorema V. *L'insieme* $E^{(\nu)}$ *sia convesso e la funzione* $f(x, y, p)$ *di classe due, in* $B \times C$, *rispetto alle variabili* y_i *e* p_{ih}. *Sia possibile definire una funzione* $v(x, y, p)$, *di invarianza per l'integrale* $I_\nu(y)$, *nell'insieme* $E^{(\nu)}$, *pur essa, in* $B \times C$, *di classe due, rispetto a quelle variabili, in modo che l'hessiana della funzione* $f - v$, *rispetto alle variabili* y_i *e* p_{ih}:

$$H_{f-v}(x, y, p, z, q) \equiv$$

$$(3) \qquad \sum_1^n{}_{ij} \left[\sum_1^{(\mu, r)}{}_{hk} (f_{p_{ih} p_{jk}} - v_{p_{ih} p_{jk}})\, q_{ih} q_{jk} + 2 \sum_{h=1}^{(\mu, r)} (f_{y_j p_{ih}} - v_{y_j p_{ih}})\, q_{ih} z_j - \right.$$

$$\left. - (f_{y_i y_j} - v_{y_i y_j})\, z_i z_j \right],$$

risulti, nell'insieme $E^{(\nu)} \times H$ *ove* H *è la totalità dei vettori* $\eta(x)$ *di classe* ν *in* A, *integralmente semidefinita positiva (negativa). In tale ipotesi, una funzione* $y(x)$ *di* $E^{(\nu)}$, *che sia quasi minimante (quasi massimante)* $I_f(y)$ *di* $E^{(\nu)}$ — *per la quale, cioè, ogni funzione* $y(x)$ *di* $E^{(\nu)}$ *verifichi*

$$(4) \qquad \int_A \sum_{i=1}^n \left[\mathring{f}_{y_i} (y_i - \mathring{y}_i) + \sum_{h=1}^{(\mu, r)} \mathring{f}_{p_{ih}} . D_h (y_i - y_j) \right] dx \geqslant 0 \ (\leqslant 0)$$

— *minimizza (massimizza)* $I_f(y)$ *in* $E^{(\nu)}$, *e propriamente se ha luogo la integrale definitezza positiva (negativa) in* $E^{(\nu)} \times H$ *della detta forma* (3).

Teorema VI. *Nelle ipotesi del teorema precedente, se la funzione* $\mathring{y}(x)$ *di* $E^{(\nu)}$, *è un'estremale, verifica, cioè in* A, *il sistema di equazioni di Eulero-Lagrange,*

$$(5) \qquad \mathcal{E}_f(y) = 0,$$

e sulla frontiera di A *è tale da risultare, per ogni funzioni* $y(x)$ *di* $E^{(\nu)}$,

$$(6) \quad \sum_{t=1}^r \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^{(\mu, r)} \sum_{\mu_{h'} + \mu_{h''} = \mu_h - 1}^{(t)} (-1)^{\mu_{h'}} \int_{FA} D_{h'} \mathring{f}_{p_{ih}} . D_{h''} (y_i - \mathring{y}_i) \cos(x_t, N)\, d\sigma \geqslant 0 \ (\leqslant 0),$$

essa minimizza (massimiza) $I_f(y)$ *in* $E^{(v)}$ *e propriamente se si ha la integrale definitezza positiva (negativa), in* $E^{(v)} \times H$, *della forma* H_{f-v}.

In una Nota susseguente daremo teoremi di unicità per le soluzioni di talune equazioni funzionali e separazione degli autovalori di un parametro da qui quelle dipendono, insistendo, in particolar modo sulle equazioni polivibranti, detti „equazioni di Mangeron" [6], [7].

Ricevuta il 26 X 1965

Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, Italia

BIBLIOGRAFIA

1. Picone M., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *1—2*, pp. 7—10.
2. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X (XIV)**, *3—4*, pp. 21—26.
3. — Atti Accad. Naz. dei Lincei, Memorie, Cl. Sci. fis., mat. e nat., s. VIII, 1963, **VII**, Sez. I, *3*, pp. 33—58.
4. — Atti del Simposio Lagrangiano, Accad. Sci. Torino, 1964, pp. 1—20.
5. — Ann. Pol. Math., 1964, **XV**, pp. 153—158.
6. Mangeron D., Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Sci. Cl. fis., mat. e nat., s. VIII, 1965, **XXXIX**, *1—2*, pp. 22—28.
7. Favard J., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *1—2*, pp. 17—20.

CRITERII SUFICIENTE PENTRU MULŢIMI FUNCŢIONALE CONVEXE RELATIVE LA PROBLEME GENERALE DE CALCULUL VARIAŢIILOR, PRIVITOARE LA INTEGRALE MULTIDIMENSIONALE DE ORDIN OARECARE ÎN VECTORUL MINIMANT CU MAI MULTE COMPONENTE

(Rezumat)

Autorul, păstrînd notaţiile şi noţiunile introduse într-o serie de lucrări anterioare proprii [1]...[5], enunţă un număr de teoreme referitoare la mulţimi funcţionale convexe, de importanţă deosebită în teoria şi practica calculului variaţiilor.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

D. C. 517.946 ; 517.949 ; 539.37

FINITE-DIFFERENCE REPRESENTATION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

BY

M. M. CLARK

1. Introduction

In a recent paper A l l e n [1] has discussed a general finite-difference representation and its application to the solution of differential equations such as

$$[D^2 + a(x)\,D + b(x)]\,w = 0 \tag{1}$$

and

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + a(x)\frac{\partial\theta}{\partial x} + b(x)\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0\,. \tag{2}$$

The representation considered was of the three-point form

$$\theta = Af(x) + BF(x) + Cg(x) \tag{3}$$

with three disposable constants A, B and C, whose values are determined by the requirement that θ should take the values θ_3, θ_0 and θ_1 at the points 3, 0 and 1 respectively, as shown in Fig. 1. These denote three typically adjacent points, at equal intervals h, along the range of integration. In equation (3) the $f(x)$, $F(x)$ and $g(x)$ are chosen functions of x and the standard three-point approximation arising from polynomial representation takes f, F and g to be 1, x and x^2 respectively.

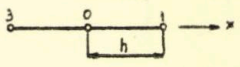


Fig. 1

The restrictions necessary for the successful application of finite-difference formulae based on polynomial representation have been examined by S o u t h w e l l [2], and by F o x [3] who uses equation (1) to illustrate his argument. Allen points out that the three-point formula applied to equation (1) is unable to take into account the functional variation of $a(x)$ and $b(x)$ and suggests that the general solution to (1)

$$w = Ae^{-a_0x/2}\sin x\nu\left(b_0 - \frac{a_0^2}{4}\right) + Be^{-a_0x/2}\cos x\nu\left(b - \frac{a_0^2}{4}\right), \tag{4}$$

where it is assumed that $b_0 > a_0^2/4$, be taken as the representation for w at a typical point 0

Applied to equation (1) when the functional variation of $a(x)$ and $b(x)$ is not great, both this and the polynomial representation give solutions of high accuracy. The merit of this new representation is that it will give accurate solutions in problems where $a(x)$ and $b(x)$ have considerable functional variation and the polynomial representation proves to be inadequate.

2. Finite-Difference Representations

The purpose of this paper is to consider the solution of simultaneous partial-differential equations of the form

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x)\dfrac{\partial u}{\partial x} + b(x)\,u + \dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c(x)\dfrac{\partial v}{\partial x} + d(x)\,v + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0. \end{cases}$$

The standard relaxation treatment, using a square mesh of side h, with points numbered as in Fig. 2, is to replace the derivatives at 0 by their finite-difference equivalents given by Southwell [4] so that equations (5) reduce to the equations

$$(6)\qquad \begin{cases} \left(1+\dfrac{a_0 h}{2}\right)u_1 + \left(1-\dfrac{a_0 h}{2}\right)u_3 - (2-b_0 h^2)u_0 + \dfrac{1}{4}(v_5 - v_6 + v_7 - v_8) = 0, \\ \left(1+\dfrac{c_0 h}{2}\right)v_1 + \left(1-\dfrac{c_0 h}{2}\right)v_3 - (2-d_0 h^2)\,v_0 + \dfrac{1}{4}(u_5 - u_6 + u_7 - u_8) = 0 \end{cases}$$

As Allen points out, difficulties arise when either $a_0 h/2 > 1$ and/or $c_0 h/2 > 1$, since the coefficients of u_3 and/or v_3 become negative and a value of either variable at a typical point 0 induces a residual of negative sign at the neighbouring node 3. In an extreme case it is possible that in the x-direction values of either variable will assume alternate positive and negative values at adjacent nodes and that if $a_0 h/2 \gg 1$ the coefficients of u_1 and u_3 become larger than the coefficient of u_0 and cause the solution to diverge. By using a fine mesh it is possible to make $a_0 h/2 < 1$, but this is balanced by the increase in the number of nodes and hence of the labour involved in obtaining the solution. The increase in the number of nodes also involves the possibility of an accumulation of rounding-off errors.

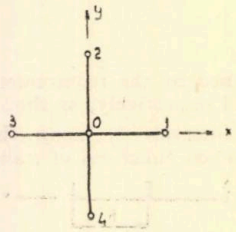


Fig. 2

The application of finite-difference methods to the solution of partial-differential equations requires the splitting of the equations. This may be quite arbitrary and as a result there is no unique representation to equations (2) and (5). However, reference to equations (1) and (4) suggests that the first of equation (5) may be separated into

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x)u = \alpha(x, y), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = -\alpha(x, y), \tag{7}$$

where α is some function of x and y. At a typical point 0 in the (x, y) plane, equations (7) become

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_0\frac{\partial u}{\partial x} + b_0 u = \alpha_0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = -\alpha_0. \tag{8}$$

For the representation of u as a function of x we consider the general solution of the first of equations (9), i. e.

$$u = Ae^{-lx} + Be^{-mx} + \frac{\alpha_0}{b_0}, \tag{9}$$

where $l = \alpha_0/2 + \nu(a_0^2/4 - b_0)$, $m = a_0/2 - \nu(a_0^2/4 - b_0)$ and A and B are constants. By using (9) as an expression along the x-line 301 we have that

$$u_0 = A + B + \frac{\alpha_0}{b_0}, \quad u_1 = Ae^{-lh} + Be^{-mh} + \frac{\alpha_0}{b_0}, \quad u_3 = Ae^{lh} + Be^{mh} + \frac{\alpha_0}{b_0},$$

which on elimination of A and B gives the three-point approximation to the first of (8):

$$b_0\frac{u_1 e^{a_0 h/2} + u_3 e^{-a_0 h/2} - 2u_0 \cosh h\,\nu(a_0^2/4 - b_0)}{2[\cosh a_0 h/2 - \cosh \nu(a_0^2/4 - b_0)]} = \alpha_0. \tag{10}$$

The second of equations (8) may be written in the form

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\alpha_0, \tag{11}$$

which gives that

$$\frac{\partial v}{\partial x} = E - \alpha_0 y, \tag{12}$$

where E is an arbitrary constant. By using (12) as an expression along the y-line 402 to eliminate E, we have that

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_4 = -2h\alpha_0. \tag{13}$$

Now the separation of the second equation of (5) in the manner of equations (7) and (8) leads to the representation of v in the x-directions

$$v = Pe^{-sx} + Qe^{-tx} - \frac{\beta_0}{d_0}, \tag{14}$$

where $s = c_0/2 + \nu(c_0^2/4 - d_0)$, $t = c_0/2 - \nu(c_0^2/4 - d_0)$ and β is a function of x and y. Differentiating (14) with respect the x we shall have at the point 0

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 = -sP - tQ$$

and by using (14) along the x-line 301 to eliminate the constants we have that

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 = -\{v_1[s(e^{th}-1) - t(e^{sh}-1)] + v_3[s(1-e^{-th}) - t(1-e^{-sh})] - 2v_0(s\sinh th - t\sinh sh)\} \times \times \frac{1}{4\sinh h\nu(c_0^2/4 - d_0)[\cosh c_0 h/2 - \cosh h\nu(c_0^2/4 - d_0)]}. \tag{15}$$

Substituting into equation (13) we obtain the representation for the second of (8) as

$$\{(v_5 - v_6)[s(e^{th}-1) - t(e^{sh}-1)] + (v_7 - v_8)[s(1-e^{-th}) - t(1-e^{-sh})] - 2(v_1 - v_3)(s\sinh th - t\sinh sh)\} \times \times \frac{1}{8h\sinh h\nu(c_0^2/4 - d_0)[\cosh c_0 h/2 - \cosh h\nu(c_0^2/4 - d_0)]} = \alpha_0 \tag{16}$$

and the elimination of α_0 from the equations (10) and (16) will give the finite-difference approximation to the first equation of (5).

3. Applications

As an example we shall consider the determination of the components of displacements within a solid wheel mounted on a rigid axle and loaded at a point on the rim as illustrated in Fig. 3.

A two-dimensional polar system of coordinates is adopted with the r-axis taken radially from the central axis, the θ-axis tangentially to the centre of an element and the displacements denoted by u (radially) and w (tangentially). Under conditions of plane strain the governing equations are

$$\begin{cases} (1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}\right) + \frac{1-2\sigma}{2}\frac{\partial^2 u}{r^2\partial\theta^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{r\partial r\partial\theta} - \frac{3-4\sigma}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial w}{r\partial\theta} + \\ \quad + \frac{1}{t}\frac{\partial t}{\partial r}\left[(1-\sigma)\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\sigma u}{r} + \sigma\frac{\partial w}{r\partial\theta}\right] = 0, \\ (1-2\sigma)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r^2}\right) + (1-\sigma)\frac{\partial^2 w}{r^2\partial\theta^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{r\partial r\partial\theta} + \frac{3-4\sigma}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{r\partial\theta} + \\ \quad + \frac{1-2\sigma}{2}\frac{1}{t}\frac{\partial t}{\partial r}\left(\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} + \frac{\partial u}{r\partial\theta}\right) = 0 \end{cases} \tag{17}$$

where σ is Poissons ratio, t the thickness of the wheel and $\partial t/\partial r$ the rate of change of the thickness with respect to the radius. The wheel has an external radius R, is mounted on a rigid axle of radius R_A and is subjected to a single radial load W.

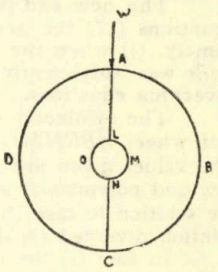


Fig. 3

The solution in terms of u and w is calculated at the nodes of a relaxation net with mesh lengths h (radially) and H (tangentially). The mesh length h is constant and is obtained by the division of the radial distance of the wheel into n equal intervals so that $nh = R - R_A$, but the tangential mesh length H varies directly as the distance R_0 from the central axis, since $H = 2\pi R_0/d$, where d is the number of radial mesh lines.

It is necessary to determine the approximations to equations (17). The first of these equations implies that

$$(18)\quad \begin{cases} (1-\sigma)\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a\dfrac{\partial u}{\partial r} + bu\right) = \alpha(r,\theta), \\ c\dfrac{\partial^2 u}{r^2\partial\theta^2} = \beta(r,\theta),\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 w}{r\partial r\partial\theta} = \gamma(r,\theta),\ d\dfrac{\partial w}{r\partial\theta} = \delta(r,\theta), \end{cases}$$

where α, β, γ and δ are functions of r and θ such that

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0,\ a = \frac{1}{r} + \frac{1}{t}\frac{\partial t}{\partial r} \text{ and } b = \frac{1}{r}\left(\frac{\sigma}{1-\sigma}\frac{1}{t}\frac{\partial t}{\partial r} - \frac{1}{r}\right).$$

The first and third equations of (18) may be approximated to in the form of (10) and (16) respectively and the other two in the standard finite-difference form.

The approximation to the second equation is obtained in a similar manner.

The coefficients of the approximations are not constant and vary according to the radial distance from the axis. At a typical internal node of the mesh the simultaneous finite-difference equations take the form

$$(19)\quad \begin{cases} 0.7870\,u_2 + 0.6129\,u_4 + 0.1824\,(u_1 + u_3) - 1.8085\,u_0 - 0.0878\,(w_1 - w_3) + \\ \quad + 0.1280\,(w_5 - w_6) + 0.1083\,(w_7 - w_8) = 0, \\ 0.2249\,w_2 + 0.1751\,w_4 + 0.6883(w_1 + w_3) - 1.6891 w_0 + 0.0878\,(u_1 - u_3) + \\ \quad + 0.1280\,(u_5 - u_6) + 0.1083\,(u_7 - u_8) = 0. \end{cases}$$

The left-hand sides of (19) define residuals at the typical node and the relaxation patterns can be constructed in the usual manner.

Since it is assumed that the axle is a rigid body, the displacements on the interface $LMNO$ can be taken as zero. On the rim $ABCD$ there are two boundary conditions

$$(20)\quad \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} + \frac{\partial u}{r\partial\theta} = 0,\quad (1-\sigma)\frac{\partial u}{\partial r} + \sigma\left(\frac{u}{r} + \frac{\partial w}{r\partial\theta}\right) = 0,$$

except that at the particular point A, the second condition becomes

$$(21)\quad (1-\sigma)\frac{\partial u}{\partial r} + \sigma\left(\frac{u}{r} + \frac{\partial w}{r\partial\theta}\right) = -\frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E}\frac{W}{tH},$$

where the load W is taken as acting over a range of one tangential mesh lenght and E is Young's Modulus.

On substitution these conditions give that

$$w_2 = 0.8751 w_4 + 0.5024\,w_0 - 0.721\,(u_1 - u_8)$$

and

$$u_2 = 0.8751 u_4 - 0.0369\,u_0 - 0.309\,(w_1 - w_3) + \left(-1.0712\frac{W}{tE}\right),$$

where the brackets enclose the extra term at the point A, and make it possible to eliminate the fictitious values on the boundary $ABCD$.

The new and polynomial approximations have been used to compute solutions to equations (17) for several values of $\partial t/\partial r$. Two of these solutions are recorded here, namely, (i) when the wheel was of constant thickness and $\partial t/\partial r = 0$, and (ii) when $\partial t/\partial r$ was sufficiently large and positive to cause the coefficient a to dominate the governing equations.

The symmetry of the problem made it possible to compute the solutions on the half wheel $ABCNML$, which for convenience of working was distorted into a rectangle. The values given are in multiples of $1\,000W/tE$ with the solutions to case (i) using the new and polymomial approximations recorded in Fig. 4 and 5 respectively. Fig. 6 records the solution to case (ii) using the new approximation. In this latter case the polynomial solution diverged rapidly and is not recorded.

In case (i) the errors between the solutions appear to be large, but no real significance should be placed on the comparison since both solutions are of considerable accuracy with small absolute errors. The inadequacy of the polynomial approximation is

W ↓												u → / v ↑
−1 243	−410	−90	−13	16	32	38	39	37	36	36	38	44
0	− 14	91	165	189	186	169	146	119	90	60	30	0
−781	−373	−104	−12	19	31	34	33	31	29	29	31	38
0	203	222	203	184	164	142	119	95	72	49	25	0
−406	−261	−108	−27	8	22	26	26	24	22	21	22	24
0	171	216	200	172	144	118	95	74	55	37	19	0
−139	−121	−70	−28	−4	8	13	13	13	12	11	11	10
0	84	125	131	118	100	81	63	48	35	23	11	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Fig. 4

W ↓												
−1 304	−474	−145	−39	17	50	66	71	70	67	64	64	67
0	− 4	118	203	235	235	217	189	155	118	79	40	0
−848	−440	−153	−34	22	50	63	66	64	60	56	55	59
0	221	257	251	236	214	187	157	125	94	63	32	0
−456	−320	−149	−44	13	41	52	54	52	48	44	41	37
0	192	255	251	225	192	159	127	98	71	47	24	0
−162	−156	− 95	−39	0	21	30	32	31	29	26	22	15
0	99	157	172	161	138	112	87	64	45	28	13	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Fig. 5

−2 626	−1 294	−289	55	78	35	11	7	10	13	14	11	8
0	−326	−319	−191	−89	−38	−18	−10	−5	−2	1	1	0
−2 399	−1400	−348	57	98	50	19	12	13	16	16	13	9
0	106	43	−18	−34	−26	−14	−6	−1	0	1	1	0
−1 234	−951	−361	−24	72	66	44	30	23	20	17	13	7
0	392	463	341	204	116	70	46	31	20	11	5	0
−423	−432	−241	−75	8	32	31	25	19	15	12	9	4
0	228	341	322	247	171	114	76	49	30	17	7	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Fig, 6

amply demonstrated in case (ii), where it does not yield a solution. Indeed, for all the values of $\partial t/\partial r$ considered, it is only wehen $|a|$ is relatively small that it becomes possible to obtain a distribution of values which fairly represent the form of the solution. On the other hand, the new aproximation yields a solution of considerable accuracy for any value of the coefficient a.

Received the 1 IX 1965

University of Surrey,
Dept. of Mathematics,
London, England

REFERENCES

1. de G. Allen D. N., Quart. J. of Mech. a Apppl. Math., 1962, **15**, pp. 11—33.
2. Southwell R. V., *Numerical Methods of Analysis in Engineering.* Macmillan, 1949.
3. Fox L., Math. Tables and Other aids to Computation, 1953, **7**, pp. 14—18.
4. Southwell R. V., *Relaxation Methods in Theoretical Physics.* Oxford, 1946.

TRATAREA ECUAŢIILOR CU DERIVATE PARŢIALE PRIN METODA DIFERENŢELOR FINITE

(Rezumat)

Autorul foloseşte metoda diferenţelor finite în studiul sistemului de ecuaţii cu derivate parţiale (5). Metoda este ilustrată prin aplicaţii numerice relative la studiul mişcării unui disc solid montat pe o axă rigidă şi supus la acţiunea unei sarcini concentrate situată pe bandaj (fig. 3).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. D. 519.44

DÉPENDANCE ET INDÉPENDANCE LINÉAIRE MODULO k DE VECTEURS

PAR

SOPHIE PICCARD

1. Soit E un espace vectoriel de dimension quelconque, défini sur un corps K de scalaires de caractéristique nulle, par exemple sur le corps des rationnels, ou sur celui des réels ou encore sur celui des nombres complexes. Supposons l'espace E rapporté à une base donnée B. Soit $\mathfrak{B}$ un ensemble de vecteurs de E, à composantes entières dans la base B. L'ensemble des vecteurs de E qui s'obtiennent à partir de ceux de $\mathfrak{B}$ en formant toutes les combinaisons linéaires possibles de ces vecteurs, dont les coefficients sont des entiers du corps K, constitue un module (c'est-à-dire un groupe abélien par rapport à la loi interne de composition des éléments de E). Soit M ce module. Il contient, avec tout couple de vecteurs de E, leur somme et leur différence. Comme il ressort des travaux d'Hermite, tout module possède une base, c'est-à-dire un ensemble de vecteurs linéairement indépendants et tels que tout vecteur de M peut s'exprimer de façon unique par une combinaison linéaire à coefficients entiers d'éléments de cette base.

Soit M un module de vecteurs à composantes entières d'un espace vectoriel E de dimension quelconque, défini sur le corps K et rapporté à une base donnée B, et soit k un entier fixe $\geqslant 2$. Désignons par M_k l'ensemble des vecteurs de E obtenu en réduisant modulo k toutes les composantes de chaque vecteur de M. Appelons somme de deux vecteurs a et b de M_k et désignons par le symbole $a+b$ le vecteur de M_k dont toute composante est la somme réduite modulo k des composantes de même nom a et de b. Avec cette loi de composition, M_k est à son tour un module (groupe abélien), dit module réduit.

2. Définition 1. Deux vecteurs a de composantes (a^λ) et b, de composantes (b^λ), dans la base donnée B de l'espace E sont dits congrus modulo k et on écrit $a \equiv b \pmod{k}$ si tout couple de composantes de même nom a^λ et b^λ (qui sont toujours des entiers du corps K) de ces deux vecteurs sont liées par la relation $a^\lambda \equiv b^\lambda \pmod{k}$.

En particulier, un vecteur a de composantes entières (a^λ) est congru à zéro modulo k si l'on a $a^\lambda \equiv 0 \pmod{k}$, quel que soit l'indice λ.

Définition 2. Soit $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_h\}$ un système fini de vecteurs d'un module réduit M_k. On dit que ces vecteurs sont linéairement indépendants modulo k si la relation

$$\text{(I)} \qquad \sum_{i=1}^{h} \alpha_i v_i \equiv 0 \pmod{k},$$

où α_i sont des entiers du corps K, implique que $\alpha_i \equiv 0 \pmod{k}$ quel que soit $i = 1, 2, \ldots, h$. Par contre, les vecteurs du système S sont dits liés linéairement modulo k s'il existe au moins un système d'entiers du corps K: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$, dont l'un au moins est $\not\equiv 0 \pmod{k}$ et pour lesquels la congruence vectorielle (I) a lieu.

Si la dimension de l'espace E est finie et égale à n, le module réduit M_k contient seulement un nombre fini d'éléments, notamment k^n. Mais si la dimension de l'espace vectoriel E est infinie, le module réduit M_k comprend lui aussi une infinité d'éléments. Supposons que tel est le cas et soit $\mathfrak{V}$ un ensemble infini de vecteurs de M_k. On dit que ces vecteurs sont linéairement indépendants modulo k si tout sous-ensemble fini de $\mathfrak{V}$ est linéairement indépendant modulo k au sens de la définition précédente et nous disons, par contre, que les vecteurs de $\mathfrak{V}$ sont liés linéairement modulo k s'il existe au moins un système fini de vecteurs de $\mathfrak{V}$ qui sont liés linéairement modulo k au sens de la définition précédente.

Il est à noter qu'un seul vecteur à composantes entières peut-être lié linéairement modulo k au cas où k est un nombre composé. Il suffit pour cela que le p. g. c. d. de toutes les composantes de ce vecteur et de k soit supérieur à 1. Alors, si v est un tel vecteur, $(k/d)\, v \equiv 0 \pmod{k}$, $k/d \not\equiv 0 \pmod{k}$ et par suite le vecteur v à lui seul est lié linéairement modulo k au sens de la définition précédente. Par contre si k est un nombre premier, un vecteur unique ne saurait être lié linéairement modulo k. En effet, soit v un vecteur à composantes entières incongruant à zéro modulo k. Donc l'une au moins de ses composantes réduite modulo k est un nombre h de la suite $1, 2, \ldots, k-1$, premier avec k, puisque k est un nombre premier. Donc la congruence $\alpha v \equiv 0 \pmod{k}$, où α désigne un entier, implique que $\alpha \equiv 0 \pmod{k}$ et par conséquent le vecteur v est bien libre modulo k, c. q. f. d.

Soient k, s, t trois entiers tels que $k \geqslant 2$, $s \geqslant t \geqslant 1$ et soient v_i, $i = 1, 2, \ldots, t$, t vecteurs d'un module réduit M_k de vecteurs d'un espace vectoriel à s dimensions rapporté à une base donnée $e_1, e_2, \ldots, e_s$. Soient $a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^s$ les composantes du vecteur v_i dans cette base, soit A la matrice $A = (a_i^j)$. Tous les nombres a_i^j sont des entiers réduits modulo k.

Proposition 1. *Pour que les t vecteurs v_i soient linéairement indépendants modulo k, il faut et il suffit que la matrice A soit de rang t et*

que le p.g.c.d. de k et de tous les déterminants mineurs d'ordre t de A soit égal à 1.

La démonstration de cette proposition se fait en deux étapes.

Soit r le rang de la matrice A. Montrons d'abord que si $r < t$, les t vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_t$ sont liés linéairement et que, s'il sont linéairement indépendants, $r = t$. Si les t vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_t$ sont linéairement indépendants modulo k, la congruence

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_t v_t \equiv 0 \pmod{k} \tag{II}$$

implique que $\alpha_i \equiv 0 \pmod{k}$, $i = 1, 2, \ldots, t$. On ne saurait avoir $r < t$. En effet, supposons le contraire. La congruence vectorielle (II) implique les s congruences numériques

$$\alpha_1 a_1^i + \alpha_2 a_2^i + \cdots + \alpha_t a_t^i \equiv 0 \pmod{k},\ i = 1, 2, \ldots, s. \tag{III}$$

Or le système de congruences (III) équivaut au système d'équations linéaires

$$\alpha_1 a_1^i + \alpha_2 a_2^i + \cdots + \alpha_t a_t^i = v_i,\quad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{IV}$$

où les entiers v_i sont arbitraires. On peut donc poser $v_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, s$, ce qui donne le système homogène d'équations

$$\alpha_1 a_1^i + \alpha_2 a_2^i + \cdots + \alpha_t a_t^i = 0 \tag{IV'}$$

dans lesquelles les inconnues sont $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$. Le rang r de ce système est par hypothèse $< t$. Il est, d'autre part, $\geqslant 1$, puisque le vecteur nul ne figure pas parmi des vecteurs indépendants et par conséquent qu'aucun des vecteurs v_i n'est nul. Donc A contient des éléments non nuls. Soit δ le déterminant mineur principal de A, déterminant que nous supposérons formé des éléments communs aux r premières lignes et aux r premières colonnes de A. (Le raisonnement est analogue quelles que soient les rangées de A qui contribuent à former δ). Pour résoudre le système (IV') il suffit alors de résoudre les r premières équations de ce système par rapport à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$. Cette solution peut se mettre sous la forme

$$\alpha_i = -\frac{\alpha_{r+1}\delta_{i,r+1} + \cdots + \alpha_t \delta_{it}}{\delta}, \tag{V}$$

où $\delta_{i,r+j}$ désigne le déterminant qui se déduit de δ en y remplaçant la i-me colonne par celle des coefficients de α_{i+j} pris dans les r premières équations (IV'), $j = 1, 2, \ldots, t - r$.

Si $\delta \not\equiv 0 \pmod{k}$, posons $\alpha_{r+1} = \alpha_{r+2} = \cdots = \alpha_t = \delta$. Comme aucun de ces nombres n'est un multiple de k, on trouve ainsi un système de valeurs entières de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ qui ne sont pas toutes $\equiv 0 \pmod{k}$ et qui satisfont la congruence vectorielle (I), ce qui est contradictoire. Et si $\delta \equiv 0$

(mod k), soit k^m, $m \geqslant 1$, la plus grande puissance de k qui est diviseur de δ, soit d^* le p. g. c. d. de tous les nombres $\delta_{i,r+j}$, $i = 1, 2, \ldots, r$; $j = 1, 2, \ldots, t-r$. Si d^* est un multiple de k^m, posons dans les formules (V) $\alpha_{r+1} = \alpha_{r+2} = \ldots = \alpha_t = \delta'$, où $\delta' = \delta/k^m \not\equiv 0 \pmod{k}$. Ces formules fournissent des valeurs entières de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ est une solution entière de (I), ou les α_i ne sont pas tous multiples de k, ce qui de nouveau est contradictoire. Et si d^* n'est pas un multiple de k^m, soit $k^{m'}$, $m' < m$, la plus grande puissance de k qui est un diviseur de d^*, soit $d^* = d' k^{m'}$, $d' \not\equiv 0 \pmod{k}$, $0 \leqslant m' < m$. Il existe dans ce cas un couple d'indices i et j, tels que $\delta_{i,r+j} = hk^{m'}$, où $h \not\equiv 0 \pmod{k}$. Posons dans ce cas $\alpha_{i,r+j} = k^{m-m'}\delta'$ et $\alpha_{i+j'} = 0$, quel que soit l'indice $j' \neq j$ de la suite $1, 2, \ldots, t-r$. Les formules (V) fournissent alors des valeurs entières de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ et l'ensemble des entiers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$, dont l'un au moins $\alpha_i = h \not\equiv 0 \pmod{k}$ satisfait la congruence vectorielle (II), ce qui est contradictoire. On voit donc que si $r < t$, les t vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_t$ sont liés linéairement modulo k. Donc si $v_1, v_2, \ldots, v_t$ sont indépendants et par conséquent $t \geqslant s$ vecteurs de M_k sont toujours liés linéairement modulo k.

Seconde étape de la démonstration. Supposons maintenant que $r = t$ et montrons que si les t vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_t$ sont linéairement indépendants modulo k, on a $d = 1$ et, réciproquement, si $d = 1$, les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_t$ sont linéairement indépendants modulo k. Supposons d'abord que les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_t$ sont linéairement indépendants modulo k et supposons contrairement à ce qu'il s'agit de démontrer que le p. g. c. d. d de k et de tous les mineurs d'ordre t que l'on peut déduire de la matrice A est > 1. Soit p un diviseur premier quelconque de d. Soit p^m la plus grande puissance de p, diviseur de tout mineur d'ordre t de A et soit δ un mineur d'ordre t de A, tel que $\delta = \delta' p^m$, $\delta' \not\equiv 0 \pmod{p}$. Prenons δ pour déterminant principal du système d'équations (IV) équivalent à la congruence vectorielle (II) (où $r = t$). Comme les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_t$ sont par hypothèse linéairement indépendants modulo k, les seules valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ qui satisfont l'ensemble des équations (IV) sont celles où chacun des α_i est un multiple de k. Supposons, pour fixer les idées, que δ est formé des éléments communs aux t premières lignes et aux t premières colonnes de A. Le raisonnement est analogue dans les autres cas.

Résolvons les équations principales du système (IV) par la règle de Cramer. Il vient $\alpha_i = k\delta_i/\delta$, où δ_i est le déterminant qui se déduit de δ en y remplaçant la i-me colonne par $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_t \end{pmatrix}$ quel qui soit $i = 1, 2, \ldots, t$. Développons δ_i suivant les éléments de sa i-me colonne. Il vient $\delta_i = v_1 A_i^1 + \ldots + v_t A_i^t$, où A_i^j désigne le coefficient de a_i^j dans le développement de δ, quel que soit $i, j = 1, 2, \ldots, t$. On ne saurait avoir $A_i^j \equiv 0 \pmod{p^m}$ quel

que soit $i, j = 1, 2, \ldots, t$, car dans le cas contraire, le déterminant Δ, adjoint de δ, serait un multiple de p^{mt}. Mais $\Delta = \delta^{t-1}$ et comme p est premier, que $\delta = \delta' p^m$ et que $\delta' \not\equiv 0 \pmod{p}$, il s'ensuit que δ^{t-1} est multiple de $p^{m(t-1)}$, mais non d'une puissance plus élevée de p, ce qui contredit l'égalité $\Delta = \delta^{t-1}$ puisque Δ est multiple de p^{mt}. On voit donc bien que tous les éléments de Δ ne sauraient être des multiples de p^m. Soit i_0, j_0, un couple d'indices de la suite $1, 2, \ldots, t$, tels que $A_{i_0}^{j_0} = hp^{m'}$, $0 \leqslant m' < m, h \not\equiv 0 \pmod{p}$ et supposons que pour tout couple d'indices $i, j = 1, 2, \ldots, t$, $A_i^j \not\equiv 0 \pmod{p^{m'}}$. Posons $v_{j_0} = \delta' p^{m-m'-1}$, $v_j = 0$ pour tout $j \neq j_0$ de la suite $1, 2, \ldots, t$. On obtiendra un système de valeurs entières de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$, dont l'une au moins $\alpha_{i_0} = kh/p$ n'est pas un multiple de k. On démontre sans peine qu'il est toujours possible de choisir $v_{t+1}, v_{t+2}, \ldots, v_s$ de façon à annuler tous les déterminants caractéristiques du système (IV).

En effet, si on associe aux équations principales du système (IV) l'équation $\alpha_1 a_1^{t+j} + \alpha_2 a_2^{t+j} + \cdots + \alpha_t a_t^{t+j} = v_{t+j} k$, avec les valeurs choisies plus haut de $v_1, v_2, \ldots, v_t$, le déterminant caractéristique relatif à cette équation a pour valeur $k(v_{t+j}\delta \pm v_{j_0}\delta_1)$, où δ_1 est un mineur d'ordre t de A, donc $\delta_1 \equiv 0 \pmod{p^m}$ d'après nos hypothèses ; et comme $\delta = \delta' p^m$ et $v_{j_0} = \delta' p^{m-m'-1}$, il s'ensuit qu'il existe des valeurs entières de v_{t+j} qui annulent ce déterminant caractéristique. Notamment $v_{t+j} = \pm v_{j_0}\delta_1/\delta = \pm p^{-m'-1}\delta_1$ et c'est un entier, puisque $m' + 1 \leqslant m$ et que δ_1 est un multiple de p^m. Cela étant quel que soit $j = 1, 2, \ldots, n - t$, on voit donc que, si $d > 1$, il existe un système de valeurs entières de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$, dont l'une au moins n'est pas un multiple de k et qui satisfont la congruence vectorielle (II), ce qui est contradictoire puisque $v_1, v_2, \ldots, v_t$ sont par hypothèse linéairement indépendants modulo k. La condition est donc bien nécessaire. *Elle est ausi suffisante.* En effet, supposons que $r = t$ et que le p. g. c. d. de k et de tous les mineurs d'ordre t de A (dont l'un au moins est $\neq 0$) est égal à 1. Il s'agit de montrer que les t vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_t$ sont linéairement indépendants modulo k. Décomposons k en facteurs premiers. Soit $k = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_n^{m_n}$ cette décomposition. Comme $d = 1$, il existe pour tout $i = 1, 2, \ldots, h$, un déterminant mineur δ_i d'ordre t, non nul, déduit de A, qui n'est pas divisible par p_i. Prenons successivement chacun des déterminants $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_h$ pour déterminant principal du système d'équations (v. (IV)) $\alpha_1 a_1^i + \alpha_2 a_2^i + \cdots + \alpha_t a_t^i = v_i k$, $i = 1, 2, \ldots, s$, et résolvons successivement les t équations principales par la règle de Cramer. On trouve

$$\alpha_j = k\delta_{ij}/\delta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, h ; \; j = 1, 2, \ldots, t, \tag{VI}$$

et comme pour tout i donné, le déterminant δ_i n'est pas divisible par p, donc à plus forte raison pas par $p_i^{m_i}$, si $m_i > 1$, il s'ensuit que α_j défini

par la formule (VI) est un multiple de $p_i^{m_i}$, qui est un diviseur de k. Cela étant, quel que soit $i = 1, 2, \ldots, h$, on voit bien que les entiers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ qui satisfont le système d'équations (IV), sont tous des multiples de k. Or le système d'équations (IV) équivaut à la congruence vectorielle (II). Si donc $d=1$, la congruence (II) implique que $\alpha_j \equiv 0 \pmod{k}$, $j = 1, 2, \ldots, t$, et par suite les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_t$ sont linéairement indépendants. La condition énoncée est donc aussi suffisante et notre assertion est démontrée.

3. Soit maintenant E un espace vectoriel de dimension infinie, défini sur un corps K de scalaires, rapporté à une base donnée $\{e_\lambda\}$, $\lambda \in \Lambda$. Soit S un ensemble fini ou infini de vecteurs de l'espace E, à composantes entières et soit k un entier $\geqslant 2$.

Quel que soit l'entier $t \geqslant 1$ et quels que soient t vecteurs de S, associons à ces vecteurs une matrice, dite de composantes associées, de la façon suivante. Chacun des t vecteurs considérés s'obtient par composition finie, à coefficients entiers, d'un nombre fini de vecteurs de la base donnée de E. Il existe donc un système fini $e_{\lambda_1}, e_{\lambda_2}, \ldots, e_{\lambda_h}$ de vecteurs de la base $\{e_\lambda\}$ dont les t vecteurs considérés de S sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers du corps K. Nous appelons matrice des composantes associées aux t vecteurs considérés de S la matrice de dimension finie, formée de t colonnes et de h lignes, et dont la i-me colonne est formée de composantes du vecteur v_i relatives aux vecteurs de base $e_{\lambda_1}, e_{\lambda_2}, \ldots, e_{\lambda_h}$, $i = 1, 2, \ldots, t$, réduit modulo k.

Proposition 2. *La condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs de l'ensemble S soient linéairement indépendants modulo k c'est que, quel que soit l'entier $t \neq 1$ et quels que soient t vecteurs prélevés dans l'ensemble S, la matrice μ des composantes associées à ces vecteurs soit de rang t et que le p. g. c. d. de k et de tous les déterminants mineurs d'ordre t que l'on peut déduire de la matrice μ soit égal à 1.*

Remarque. Soit E_h le sous-espace de dimension finie h de E engendré par les vecteurs de base $e_{\lambda_1}, \ldots, e_{\lambda_h}$ qui engendrent les t vecteurs considérés de l'ensemble S et soit v_i' le vecteur de ce sous-espace ayant les mêmes composantes que v_i par rapport aux h vecteurs de base $e_{\lambda_1}, \ldots, e_{\lambda_h}$. La condition nécessaire et suffisante pour que les t vecteurs $v_1', \ldots, v$ de l'ensemble S_h soient linéairement indépendants modulo k est aussi nécessaire et suffisante pour que les t vecteurs $v_1, \ldots, v_t$ de l'espace E soient linéairement indépendants modulo k.

4. *Réductibilité selon un module donné $k \geqslant 2$ d'un ensemble de vecteurs à composantes entières d'un espace vectoriel de dimension quelconque.*

Systèmes réductibles et irréductibles de vecteurs d'un espace vectoriel. Soit E un espace vectoriel, soit $\mathfrak{V}$ un ensemble de vecteurs de E (pas

nécessairement à composantes entières), qui engendrent un sous-espace E^* de E. L'ensemble $\mathfrak{V}$ est dit *réductible* s'il existe au moins un sous-ensemble fini $\mathfrak{N} = \{v_1, v_2, ..., v_l\}$, formé de $l \geqslant 2$ vecteurs de $\mathfrak{V}$ et un système $\mathfrak{L} = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$, $1 \leqslant m < l$, de vecteurs de E^*, tels que l'ensemble $\mathfrak{N} - \mathfrak{V} \cup \mathfrak{L}$ est générateur de $\mathfrak{V}$. L'ensemble $\mathfrak{V}$ est dit *irréductible* dans le cas contraire. On a les résultats suivants. Tout ensemble de vecteurs à composantes entières d'un espace vectoriel est réductible, si ces vecteurs sont liés linéairement. Par contre, un ensemble de vecteurs à composantes entières qui sont liés linéairement selon un module $k = 2$ peut ne pas être réductible, au cas où k est un nombre composé. C'est ainsi par exemple, que dans M_{20} l'ensemble formé des deux vecteurs v_1 de composantes 4 et 5 et v_2 de composantes 2 et 0 du plan euclidien liés linéairement modulo 20 par la relation $4v_1 + 2v_2 \equiv 0 \pmod{20}$ n'est pas réductible. On notera que le même couple de vecteurs est aussi lié linéairement modulo 10 et qu'il est réductible dans M_{10} puisque $8v_2 \equiv v_1 \pmod{10}$.

Les modules réduits de vecteurs jouent un rôle important dans la théorie des groupes libres et quasilibres modulo k.

Reçu le 15 XII 1965

Faculté des Sciences,
Université de Neuchâtel,
Suisse

DEPENDENȚĂ ȘI INDEPENDENȚĂ LINIARĂ MODULO k A VECTORILOR

(Rezumat)

Autoarea, avînd în vedere o serie de aplicații de seamă a modulelor reduse de vectori în teoria grupurilor libere și cvasilibere modulo k, introduce noțiunile de dependență și independență liniară modulo k a vectorilor și demonstrează două teoreme în această ordine de idei.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

D. K. 517.934 ; 517.941.91 ; 517.53

ÜBER DIE AUSGEZEICHNETEN PUNKTE DER LÖSUNGEN EINER RICCATISCHEN BZW. EINER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNG 2. ORDNUNG

VON

NIKOLAOS APOSTOLATOS

1. Für die Untersuchung der ausgezeichneten Punkte der Lösungen einer Riccatischen bzw. einer linearen Diff. Gl. 2. Ordnung ist das Auffinden der Nullstellen der Lösungen einer linearen Diff. Gl. 2. Ordnung von grossen Bedeutung. In dieser Arbeit geben wir eine obere Schranke für die maximale Anzahl der Nullstellen einer beliebigen Lösung der Diff. Gl. $w'' - p(z)\,w = 0$, die innerhalb des Kreises $|z| = R$ liegen. Weiter betrachten wir die ausgezeichneten Punkte der Lösungen der speziellen Riccatischen Diff. Gl. $w' = -w^2 + az^\lambda$.

2. Über die Art und die Lage der festen bzw. beweglichen singulären Stellen der Integrale einer Diff. Gl. gelten die folgenden Tatsachen: Die Integrale einer linearen Diff. Gl. besitzen keine beweglichen Singularitäten [3, S. 29]. Und als feste Singularitäten können nur die singulären Stellen ihrer Koeffizienten sowie die Stelle $z = \infty$ auftretten [1, S. 20].

Die Riccatischen Diff. Gl. haben Integrale mit beweglichen Polen 1. Ordnung. Insbesondere haben die Integrale der speziellen Riccatischen Diff. Gl. $w' = -w^2 + q(z)$ bewegliche Pole 1. Ordnung mit der Entwicklung [3, S. 43]

$$w = \frac{1}{z - z_0} + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

Nun soll der folgende Satz bewiesen werden:

Satz. *Die Differential Gleichung*

$$w' = f_n(z)\,w^n + f_{n-1}(z)\,w^{n-1} + \cdots + f_0(z), \tag{2.1}$$

mit in einem Gebiet G analytischen Funktionen $f_k(z)$, *besitzt Integrale mit beweglichen nicht kritischen Polen und zwar* 1. *Ordnung dann und nur dann wenn* $n = 2$ *ist.*

Beweis. Nach dem obigen ist schon bekannt, dass eine Riccatische Diff. Gl. Integrale mit beweglichen Polen 1. Ordnung besitzt. Zunächst beweisen wir, dass die Integrale von (2.1) für $n \neq 2$ keine beweglichen Pole 1. Ordnung besitzen.

Setzen wir $w(z) = 1/w_1(z)$ in (2.1) ein, so erhalten wir für w_1 die Gleichung

$$\frac{dw_1}{dz} = -\frac{f_n(z) + f_{n-1}(z) w_1 + \cdots + f_0(z) w_1^n}{w_1^{n-2}}. \tag{2.2}$$

Die Gleichung (2.1) besitzt Integrale mit beweglichen Polen 1. Ordnung, wenn die entsprechenden Lösungen der Diff. Gl. (2.2) die beweglichen Pole der Lösungen der Diff. Gl. (2.1) als einfache Nullstellen haben. Wenn der Punkt $z = z_0 \in G$ eine einfache bewegliche Nullstelle der Funktion $w_1(z)$ ist, dann muss $w_1(z_0) = 0$, $[dw_1/dz]_{z=z_0} \neq 0, \infty$ sein. Das kann aber nur der Fall sein, wenn $f_n(z_0) = f_{n-1}(z_0) = \cdots = f_3(z_0) = 0$ und $f_2(z_0) \neq 0$ ist. Da es aber in jeder Umgebung $\mathfrak{U}$ von z_0, mit $\mathfrak{U} \subseteq G$ unendlich, viele bewegliche Nullstellen gibt, muss wegen des Identitätssatzes der analytischen Funktionen im Gebiet G, $f_k(z) \equiv 0$ für alle $k = n, n-1, \ldots, 3$ und $f_2(z) \not\equiv 0$ sein, also $n = 2$, was zu beweisen war.

Nun kann man zeigen, dass die Integrale von (2.1) für jedes n (auch für $n = 2$) keine beweglichen Pole k-ter Ordnung mit $k \geqq 2$ besitzen. Die Diff. Gl. (2.1) hat Integrale mit beweglichen Polen mindestens 2. Ordnung, wenn die entsprechenden Lösungen der Diff. Gl. (2.2) diese Punkte mindestens als zweifache Nullstelle haben. Wenn der Punkt $z_0 \in G$ mindestens eine zweifache Nullstelle der Funktion $w_1(z)$ ist, dann muss $w_1(z_0) = [dw_1/dz]_{z=z_0} = 0$ sein. Das kann nur der Fall sein, wenn im Gebiet G, $f_k(z) \equiv 0$ für alle $k = n, n-1, \ldots, 2$ ist. Dann nimmt die Diff. Gl. (2.1) die Gestalt $w' = f_1(z) w + f_0(z)$ an, d. h. sie wird eine lineare Diff. Gl. 1. Ordnung und sie besitzt, wie schon bekannt ist, keine beweglichen Singularitäten, wodurch die Richtigkeit des Satzes bewiesen ist.

Weil jede echte Riccatische Diff. Gl.

$$w' = f(z) w^2 + g(z) w + h(z), \tag{2.3}$$

wobei $f(z)$, $g(z)$ und $h(z)$ in Gebiet G analytische Funktionen mit $f(z) h(z) \not\equiv 0$ sind, durch die Transformation

$$w = \frac{1}{w_1} \tag{2.4}$$

in die Riccatische Diff. Gl.

$$w_1' = -f(z) - g(z) w_1 - h(z) w_1^2 \tag{2.5}$$

übergeführt werden kann, haben wir die folgenden Ergebnisse:

I. Echte Riccatische Diff. Gl. haben immer Integrale mit beweglichen und zwar einfachen Nullstellen.

II. Die beweglichen Pole bzw. die beweglichen Nullstellen der Diff. Gl. (2.3) sind bewegliche Nullstellen bzw. bewegliche Pole der Diff. Gl. (2.5). Bekanntlich gelten die folgende zwei Aussagen:

a) Jede Riccatische Diff. Gl. lässt sich durch eine geeignete Transformation auf die Form bringen

$$w' + w^2 = p(z).$$

b) Jede Lösung $w(z)$ der Riccatischen Diff. Gl. (2.3) wird durch die Substitution $w(z) = -\theta'(z)/f(z)\theta(z)$ in eine von Null verschiedene Lösung $\theta(z)$ der linearen Diff. Gl.

$$f\theta'' - (f' + fg)\theta' + f^2 h\theta = 0$$

übergeführt, falls $f(z) \neq 0$ ist.

Daraus folgern wir:

III. Die beweglichen Pole bzw. die beweglichen Nullstellen der Integrale der Riccatischen Diff. Gl. (2.3) sind Nullstellen bzw. Kreuzungspunkte der Integrale der entsprechenden linearen Diff. Gl.

Also, aus II und III kann gefolgert werden, dass die Auffindung der einfachen beweglichen Pole oder der einfachen beweglichen Nullstellen der Integrale einer Riccatischen Diff. Gl. gleichwertig ist mit der Auffindung der Nullstellen der Lösungen einer linearen Diff. Gl. 2. Ordnung.

3. Wie schon oben gesehen haben entsprechen die beweglichen Pole der Riccatischen Diff. Gl.

$$w' + w^2 = p(z) \tag{3.1}$$

den beweglichen Nullstellen der linearen Diff. Gl. 2. Ordnung

$$w'' - p(z)w = 0. \tag{3.2}$$

Z. Nehari hat bewiesen [4], dass für jedes beliebige Paar beweglicher Nullstellen a und b einer Lösung der Diff. Gl. (3.2) innerhalb des Kreises $|z| = R$ die Ungleichung

$$\frac{2}{|a-b|} < \oint_{|z|=R} |p(z)|\,|dz| = R\int_0^{2\pi} |p(Re^{i\theta})|\,d\theta \tag{3.3}$$

gilt, wenn $p(z)$ innerhalb des Kreises $|z| = R$ eine holomorphe Funktion ist und das Integral $\int_0^{2\pi} |p(Re^{i\theta})|\,R\,d\theta$ existiert.

In derselben Arbeit ist weiterhin vermerkt, dass die Ungleichung (3.3) auch dann gilt, wenn in Zähler der linken Seite der Ungleichung (3.3) 4 an Stelle von 2 gesetzt wird. Im folgenden soll zuerst diese allgemeinere Ungleichung bewiesen werden, mit der dann eine Schranke für die maximale Anzahl der beweglichen Nullstellen der Diff. Gl. (3.2) innerhalb des Kreises $|z| = R$ gefunden wird.

Es sei $w(z)$ diejenige Lösung der Diff. Gl. (3.2), welche innerhalb des Gebietes $T \equiv \{z: |z| < R\}$ die Punkte a und b als Nullstellen hat. Dann erhält man diese Funktion, wie in [4] gezeigt wird, als Lösung der folgenden Integralgleichung

$$w(z) = -\oint_C g(z,t)\,p(t)\,w(t)\,dt. \tag{2.4}$$

Dabei ist C ein Jordansches Kurvenstück, das durch die Punkte a und b geht und innerhalb des Gebietes T liegt, mit $z \in G$, und

$$g(z,t) = \begin{cases} \dfrac{(b-z)(t-a)}{b-a}, & t \in C_1, \\ \dfrac{(b-t)(z-a)}{b-a}, & t \in C_2, \end{cases} \tag{3.5}$$

wobei C_1 unde C_2 die Teilkurvenstücke zwischen den Punkten a und z bzw. z und b sind.

Wenn ζ der Punkt (oder einer von den Punkten) ist, für den die Funktion $w(z)$ ihren maximalen Vert auf C annimmt, so erhalten wir aus (2.4)

$$1 \leqq \oint_C |g(\zeta,t)|\,|p(t)|\,|dt|. \tag{3.6}$$

Nun soll als Kurvenstück C der Teil desjenigen Kreises innerhalb des Kreises $|z| = R$ betrachtet werden, der durch die Punkte a und b geht und den Kreis $|z| = R$ orthogonal schneidet. Aus der Gleichung (3.5) bekommt man dann

$$|g(\zeta,t)| \leqq |g(\zeta,\zeta)| = \frac{|b-\zeta|\,|\zeta-a|}{|b-a|}. \tag{3.7}$$

Das Produkt $|\zeta-a|\,|b-\zeta|$ nimmt dann seinen maximalen Wert an, wenn $\zeta = \zeta^*$ der Mittelpunkt des Kurvenstückes C ist. Wir haben also

$$|b-\zeta|\,|\zeta-a| \leqq |b-\zeta^*|\,|\zeta^*-a| = |\zeta^*-a|^2 = \\ = |\zeta^*-d|^2 + |a-d|^2.$$

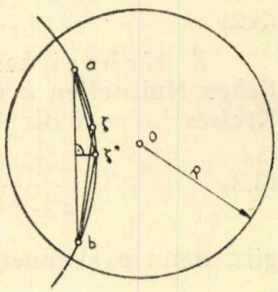


Abb. 1

Da aber die Hälfte der Länge der Kurvenstückes C immer kleiner oder gleich 1/4 des entsprechenden Kreisumfanges ist, haben wir $\mathrm{Arg}\,[(d-a)/(\zeta^*-a)] \leqq \pi/4$ und folglich $|b-\zeta|\,|\zeta-a| \leqq 2\,|a-d|^2 = |a-b|^2/2$. Und wegen der Gleichung (3.7) nimmt die Gleichung (3.6) die Gestalt

an.

$$1 \leqq \frac{|a-b|}{2} \oint_C |p(t)|\,|dt|$$

In der Arbeit [4] ist weiterhin die Ungleichung bewiesen

$$\oint_C |p(t)|\,|\mathrm{d}t| < \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R\,|p(Re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Aus den letzten zwei Beziehungen erhält man schliesslich

$$\frac{4}{|a-b|} < R\int_0^{2\pi} |p(Re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta\,. \tag{3.8}$$

Es sei jetzt $\sigma(R) = R\int_0^{2\pi} |p(Re^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta$, dann bekommt man aus (3.8) $|a-b| > 4/\sigma(R)$. Daraus folgern wir:

I. Der Abstand zwischen zwei beliebigen verschiedenen Nullstellen einer Lösung der Diff. Gl. (3.2) innerhalb des Kreises $|z| = R$ muss grösser als der Wert $4/\sigma(R)$ sein. Dieser Wert ist offensichtlich eine Funktion des Radius R.

II. Die maximale Anzahl der Nullstellen einer beliebigen Lösung $w(z)$ der Diff. Gl. (3.2) innerhalb des Kreises $|z| = R$ ist kleiner oder gleich der maximalen Anzahl der Punkte, die innerhalb des Kreises $|z| = R$ liegen können, so dass der kürzeste Abstand zwischen zwei solchen Punkten grösser als der Wert $4/\sigma(R)$ ist. Die maximale Anzahl der Nullstellen einer Lösung ist also kleiner oder gleich der maximalen Anzahl der Kreise mit Radius $2/\sigma(R)$, die innerhalb des Kreises mit Radius $R + 2/\sigma(R)$ ohne gegenseitige Überdeckung liegen können. Wenn $R < 2/\sigma(R)$ ist, dann gibt es höchstens einen solchen Kreis. Wenn aber $R \geqq 2/\sigma(R)$ ist, dann gibt es N solche Kreise mit $N \geqq 2$ und gemäss des Satzes, „sind in einem konvexen Gebiet vom Flächeninhalt T wenigstens zwei kongruente Kreise eingelagert, so ist ihre Inhaltsumme [2, S. 67]

$$S < \frac{\pi}{\sqrt{12}}\,T\text{“}\,, \tag{3.9}$$

erhält man

$$N\pi\left(\frac{2}{\sigma(R)}\right)^2 < \frac{\pi}{\sqrt{12}}\,\pi\left(R + \frac{2}{\sigma(R)}\right)^2,$$

oder

$$N < \frac{\pi}{\sqrt{12}}\,\frac{(\sigma(R)\,R + 2)^2}{4}\,. \tag{3.10}$$

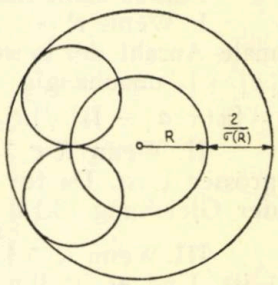


Abb. 2.

Aus dieser Ungleichung ergibt sich:

Die maximale Anzahl der beweglichen Nullstellen einer beliebigen Lösung $w(z)$ der Diff. Gl. (3.2) innerhalb oder auf dem Rande des Kreises $|z| = R$ ist höchstens N mit

$$N = \begin{cases} 1, \text{ wenn } \sigma(R)\,R < 2, \\ \left[\dfrac{\pi}{\sqrt{12}}\,\dfrac{(\sigma(R)\,R+2)^2}{4}\right], \text{ wenn } \sigma(R)\,R \geqq 2. \end{cases} \tag{3.11}$$

Der Ausdruck $[x]$ soll dabei eine ganze Zahl x_0 darstellen, so dass $x_0 \leqq x < x_0 + 1$ ist.

3.1. Nun wollen wir die Formel (3.11) auf die spezielle Riccatische Diff. Gl.

$$w' = -w^2 + az^\lambda, \tag{3.12}$$

wobei a eine beliebige komplexe Zahl und λ eine ganze positive Zahl ist, anwenden.

Die Funktion az^λ ist offenbar für jedes $R > 0$ in dem Gebiet $|z| \leqq R$ eine analytische Funktion. Es ist also

$$\sigma(R) = R\int_0^{2\pi} |a|\,R^\lambda\,d\theta = 2\pi\,|a|\,R^{\lambda+1}. \tag{3.13}$$

Aus (3.11) und (3.13) findet man, dass für die maximale Anzahl N^* der beweglichen Pole der Diff. Gl. (3.12) innerhalb des Kreises $|z| = R$ die Ungleichung gilt:

$$N^* \leqq N = \begin{cases} 1, \text{ wenn } R^{\lambda+2} < \dfrac{1}{\pi\,|a|}, \\ \left[\dfrac{\pi}{\sqrt{12}}\,(\pi\,|a|\,R^{\lambda+2}+1)^2\right], \text{ wenn } R^{\lambda+2} \geqq \dfrac{1}{\pi\,|a|}. \end{cases} \tag{3.14}$$

Daraus kann man folgern:

I. Wenn $R = 1$ ist, dann ist diese obere Schranke N für die maximale Anzahl der beweglichen Pole der Diff. Gl. (3.12) innerhalb des Kreises $|z| = 1$ unabhängig von λ und zwar gleich 1, wenn $\pi\,|a| < 1$ und $N = [\pi(\pi\,|a| + 1)^2/\sqrt{12}]$, wenn $\pi\,|a| \geqq 1$ ist.

II. Wenn $R < 1$ ist, dann ist diese Schranke N um so kleiner, je grösser λ ist. Da für genügend grosse λ, $R^{\lambda+2} < 1/\pi\,|a|$ ist, muss gemäss der Gleichung (3.14) $\lim_{\lambda \to +\infty} N = 1$ sein.

III. Wenn $R > 1$ ist, dann ist diese Schranke N um so grösser, je grösser λ ist. Und es ist $\lim_{\lambda \to +\infty} N = +\infty$.

IV. Für jedes λ gibt es immer genau ein Kreis mit Radius $R_0 = (1/\pi\,|\,a\,|)^{1/(\lambda+2)}$ so dass jede Lösung von (2.12) innerhalb des Kreises $|\,z\,| = R_0$ höchstens einen Pol hat. Offensichtlich ist $\lim_{\lambda \to +\infty} R_0 = 1$.

4. Jetzt betrachten wir die ausgezeichneten Punkte der Lösungen der Riccatischen Diff. Gl.

$$w' = -w^2 + az^\lambda, \tag{4.1}$$

wobei a eine beliebige komplexe Zahl und λ eine rationale Zahl ist. In der Diff. Gl. (4.1) können als feste Singularitäten nur die Punkte $z = 0$ und ∞ auftreten. Für die verschiedenen Werte von λ können wir genau, von welcher Art die Punkte $z = 0$ und $z = \infty$ für die Lösungen der Diff. Gl. (4.1) sind. Wir werden also im folgenden nur mit den beweglichen Polen der Diff. Gl. (4.1) beschäftigen.

Die Diff. Gl. (4.1) nimmt durch die Substitution

$$\begin{cases} z = \dfrac{1}{t}, \\ w(z) = -t^2 w^*(t) + t, \end{cases} \tag{4.2}$$

die gestalt

$$w^{*\prime} = -w^{*2} - at^{-\lambda-4} \tag{4.3}$$

an. Wenn $t = t_0 \neq 0, \infty$ ein beweglicher Pol 1. Ordnung einer Lösung $w^*(t)$ der Diff. Gl. (4.3) ist, dann kann man in einer geeigneten Umgebung des Punktes t die entsprechende Lösung der Diff. Gl. (4.1) in der Form

$$w(z) = w\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{-t^2 w_1^*(t)}{t - t_0} + t = \frac{-t\,[t w_1^*(t) - t + t_0]}{t - t_0} \equiv \frac{w_2^*(t)}{t - t_0}$$

schreiben. Weil aber $w_2^*(t_0) = -t_0^2 w_1^*(t_0) \neq 0, \infty$ ist, muss der Punkt t_0, d. h. der Punkt $z_0 = 1/t_0$, ein beweglicher Pol 1. Ordnung für die Funktion $w(z)$ sein.

Also sind die beweglichen Pole der Diff. Gl. (4.1) und (4.3) zueinander reziproke Zahlen. Weiter bekommt man die Ergebnisse:

a) Wenn wir mit A bzw. A^* die Menge der Lösungen der Diff. Gl. (4.1) bzw. (4.3) bezeichnen, dann haben wir eine eineindeutige Abbildung der Menge A auf die Menge A^*, so dass die Pole der Funktionen w und w^* zueinander reziproke Zahlen sind.

b) Die Gleichungen (4.1) und (4.3) stimmen für $\lambda = -2$ überein. Wenn man mit A die Menge der Lösungen der Diff. Gl. $w' = -w^2 + az^{-2}$ bezeichnet, dann haben wir eine eineindeutige Abbildung der Menge A auf sich selbst, so dass die Pole der Funktionen w und w^* zueinander reziproke Zahlen sind.

Eingegangen am 30 VII 1965

Technische Hochschule, München,
Institut für Angewandte Mathematik,
Deutsche Bundesrepublik

LITERATURVERZEICHNIS

1. Bierberbach L., *Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.* Springer-Verlag, Berlin, 1953.
2. Fejes Toth, *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum.* Springer-Verlag, Berlin, 1953.
3. Golubew W., *Vorlesungen über Differentialgleichungen im Komplexen.* DVW, Berlin, 1958.
4. Nehari Z., Amer. J. Math., 1954, **76**, pp. 689–697.

ASUPRA PUNCTELOR SINGULARE ALE SOLUȚIILOR UNOR ECUAȚII DE TIP RICCATI SAU ALE UNOR ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE DE ORDINUL AL DOILEA

(Rezumat)

Se stabilește o margine superioară pentru numărul maxim de zerouri ale unei soluții arbitrare a ecuației diferențiale $w'' - p(z)\, w = 0$, situate în interiorul cercului $|z| = R$. Se consideră apoi punctele singulare ale soluțiilor ecuației lui Riccati $w' = -w^2 + az^\lambda$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

D. K. 517.941.92 ; 518.1

EIN SPEKTRUM VON ITERATIONSVORSCHRIFTEN ZUR NUMERISCHEN BEHANDLUNG VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN [1])

VON

HANS KNAPP

Zu berechnen seien die Lösungen

$$x_1(t),\ldots,x_n(t) \tag{1}$$

des Differentialgleichungssystems

$$x_i(t) = f_i(x_1(t),\ldots,x_n(t),t), \quad (i=1,\ldots,n), \tag{2}$$

zu den Anfangswerten

$$x_i(t_0) = a_i, \quad (i=1,\ldots,n). \tag{3}$$

Dazu denkt man sich ein weiteres Differentialgleichungssystem als gegeben,

$$\dot{\hat{x}}_i(t) = g_i(\hat{x}_1(t),\ldots,\hat{x}_n(t),t), \quad (i=1,\ldots,n), \tag{$\hat{2}$}$$

dessen Lösungen

$$\hat{x}_1(t),\ldots,x_n(t) \tag{$\hat{1}$}$$

zu denselben Anfangswerten

$$\hat{x}_i(t_0) = a_i, \quad (i=1,\ldots,n), \tag{$\hat{3}$}$$

bekannte Funktionen sind [2]).

---

[1]) Dieser Arbeit liegt das Manuskript eines Kurzvortrages auf dem VI. Österreichischen Mathematiker Kongress in Graz zugrunde. Sie stellt — abgesehen von einigen ergänzenden Bemerkungen — einen Auszug aus schon veröffentlichten Aufsätzen dar.

[2]) Es ist immer leicht, ein solches System ($\hat{2}$) anzugeben: man braucht dazu nur n differenzierbare Funktionen ($\hat{1}$) zu wählen; durch Differenzieren erhält man dann ($\hat{2}$).

Wenn beide Systeme, (2) und ($\hat{2}$), regulär sind, gelten die Formeln ([2, § 12], oder [3])

$$(4) \qquad x_i(t) = \hat{x}_i(t) + \sum_{\alpha=0}^{\infty} \int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^\alpha}{\alpha!} [D_2 D^\alpha x_i]_{\hat{x}(\tau),\tau} \, d\tau, \quad (i = 1,\ldots,n).$$

Sie geben an, wie die bekannten Funktionen ($\hat{1}$) abzuändern sind, damit die gesuchten Lösungen entstehen.

Die mehrmalige Anwendung des Differentialoperators

$$(5) \qquad D = \sum_{k=1}^{n} f_k(x_1,\ldots,x_n,t) \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial t}$$

auf eine entsprechend oft differenzierbare Funktion $F(x_1,\ldots,x_n,t)$ wird dabei in der üblichen Weise erklärt durch

$$D^0 F = F, \; D^1 F = DF = \sum_{k=1}^{n} f_k \frac{\partial F}{\partial x_k} + \frac{\partial F}{\partial t}, \; D^\alpha F = D(D^{\alpha-1} F), \quad (\alpha = 1,2,\ldots).$$

Zur Berechnung der Ausdrücke

$$(6) \qquad [D_2 D^\alpha x_i]_{\hat{x}(\tau),\tau}, \quad (i = 1,\ldots,n; \alpha = 0,1,2,\ldots),$$

fasst man deshalb $x_1,\ldots,x_n,t$ vorübergehend als unabhängige Variable auf, bildet $D^\alpha x_i$, wendet darauf den Operator

$$(7) \qquad D_2 = \sum_{k=1}^{n} [f_k(x_1,\ldots,x_n,t) - g_k(x_1,\ldots,x_n,t)] \frac{\partial}{\partial x_k}$$

— welcher dem Unterschied der beiden Systeme gerecht wird — an und setzt schliesslich noch die gegebenen Funktionen $\hat{x}_k(\tau)$ anstelle der Variablen x_k, $(k = 1,\ldots,n)$, und τ statt t ein. Die Integranden in (4) sind damit bekannte Funktionen von τ und die Integrale können mit Hilfe von Quadraturformeln berechnet werden.

Bei der numerischen Auswertung der Formeln (4) ist man dann aber gezwungen, die Reihen abzubrechen und mit Ausdrücken von der Gestalt

$$(8) \qquad \hat{x}_i(t) + \sum_{\alpha=0}^{m} \int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^\alpha}{\alpha!} [D_2 D^\alpha x_i]_{\hat{x}(\tau),\tau} \, d\tau, \quad (i = 1,\ldots,n),$$

zu rechnen. Man bekommt so natürlich nur Näherungen für die Lösungen von (2), aber es liegt der Gedanke nahe, die gewonnenen Näherungen als

neue Ausgangsfunktionen zu verwenden und mit diesen wiederum Formeln der Gestalt (8) anzuschreiben, in der Hoffnung, dass die Abweichungen von den gesuchten Funktionen dabei kleiner werden.

Ausgehend etwa von $(m+1)$-mal differenzierbaren Funktionen

$$(9) \qquad {}_0\hat{x}_1(t),\ldots,{}_0\hat{x}_n(t) \text{ mit } {}_0\hat{x}_i(t_0) = a_i, \quad (i = 1,\ldots,n),$$

und deren Ableitungen (wir schreiben gleich einen allgemeinen Index ν)

$$(10) \qquad {}_\nu g_i(t) = {}_\nu\dot{\hat{x}}_i(t), \quad (i = 1,\ldots,n),$$

bildet man also

$$(11) \qquad {}_\nu D_2 = \sum_{k=1}^{n} [f_k(x_1,\ldots,x_n,t) - {}_\nu g_k(t)] \frac{\partial}{\partial x_k}$$

und berechnet ${}_{\nu+1}\hat{x}_i(t)$, $(i = 1,\ldots,n)$, nach der Formel

$$(12) \qquad \mathfrak{G}_m: \; {}_{\nu+1}\hat{x}_i(t) = {}_\nu\hat{x}_i(t) + \sum_{\alpha=0}^{m} \int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^\alpha}{\alpha!} [{}_\nu D_2 D^\alpha x_i]_{{}_\nu\hat{x}(\tau),\tau} \, d\tau.$$

Diesen Vorgang (10), (11) und (12) wiederholt man allgemein für $\nu = 0, 1, 2,\ldots$

Mit Rücksicht darauf, dass in den Anwendungen alle Funktionen meist nur numerisch gegeben sind, ist es aber besser, die Iterationsvorschrift bereits so zu formulieren, dass ein numerisches Differenzieren bei (10) unterbleibt. Man beginnt daher mit m-mal differenzierbaren Fuktionen

$$(13) \qquad {}_0g_1(t),\ldots,{}_0g_n(t),$$

bildet wieder (11) und mit

$$(14) \qquad {}_\nu\hat{x}_i(t) = a_i + \int_{t_0}^{t} {}_\nu g_i(\tau) \, d\tau, \quad (i = 1,\ldots,n),$$

berechnet man dann ${}_{\nu+1}g_i(t)$, $(i = 1,\ldots,n)$, nach der Formel (entstanden durch Differenzieren von (12) nach t)

$$(15) \qquad \mathfrak{G}_m: \; {}_{\nu+1}g_i(t) = f_i({}_\nu\hat{x}_1(t),\ldots,{}_\nu\hat{x}_n(t),t) + \sum_{\alpha=1}^{m} \int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} [{}_\nu D_2 D^\alpha x_i]_{{}_\nu\hat{x}(\tau),\tau} \, d\tau,$$

für $\nu = 0, 1, 2,\ldots$

Die Formeln (11), (14), (15), zusammen mit dem Anfang (13) sind nur eine andere Formulierung der bereits durch (10), (11), (12) zusammen mit (9) definierten Iterationsvorschrift, die wir der Kürze wegen mit dem Symbol $\mathfrak{G}_m$ bezeichnen werden. Die formale Gestalt der Ausdrücke

(16) $$ {}_{\nu}D_2 D^{\alpha} x_i, \quad (i = 1,...,n;\ \alpha = 0,...,m), $$

kann man ein für allemal vorher angeben, was sich ändert, sind ja nur die einzusetzenden Funktionen. Man braucht also im Verlauf der weiteren Rechnung nie mehr zu differenzieren [3]).

Es gilt [3], [14], der

Satz. *Sind im abgeschlossenen Bereich*

$$ \mathfrak{Q} = \{(x,...,x,t) \mid |x_i - a_i| \leqslant b,\ (i = 1,...,n),\ |t - t_0| \leqslant T\}, $$

alle partiellen Ableitungen der eindeutigen Funktionen $f_1(x_1,...,x_n,t),...,$ $...,f_n(x_1,...,x_n,t)$ *bis einschliesslich zur Ordnung* m $(\geqslant 0)$ *vorhanden und genügen die mit dem Operator D gebildeten, in allen Argumenten stetigen Funktionen* $D^m f_1,...,D^m f_n$ *in* $\mathfrak{Q}$ *ausserdem noch einer Lipschitzbedingung*

(17) $$ |[D^m f_i]_{x'',t} - [D^m f_i]_{x',t}| \leqslant K \sum_{k=1}^{n} |x_k'' - x_k'|, $$

so konvergieren alle durch den Iterationsprozess $\mathfrak{G}_m$ *definierten Funktionenfolgen* ${}_{\nu}\hat{x}_1(t),...,{}_{\nu}\hat{x}_n(t)$ *in einem Intervall* $|t - t_0| \leqslant c$ [4]) *für* $\nu \to \infty$ *gegen die Lösungen* $x_1(t),...,x_n(t)$ *des Differentialgleichungssystems* (2) *zu den Anfangswerten* (3).

Folgerung. Für jedes $\mathfrak{G}_{\tilde{m}}$ mit $0 \leqslant \tilde{m} \leqslant m$ gilt natürlich der Satz ebenso, weil dann für $D^{\tilde{m}} f_i$, $(i = 1,...,n)$, von selbst eine Lipschitzbedingung erfüllt ist, da ja noch weitere Ableitungen existieren! Insbesondere ist der Fall $\tilde{m} = 0$, das gewöhnliche Verfahren der sukzessiven Approximation nach Picard als einfachster Sonderfall $\mathfrak{G}_0$ in diesem Spektrum $\mathfrak{G}_0,...,\mathfrak{G}_m$ von Iterationsvorschriften immer mitenthalten [5]).

Wenn dann im Intervall $|t - t_0| \leqslant c$

$$ |x_i(t) - {}_{0}\hat{x}_i(t)| \leqslant 2\bar{b}, \quad (\bar{b} \leqslant b,\ i = 1,...,n), $$

ist, gilt für die Abweichungen der ν-ten Iterierten von den gesuchten Lösungen (1) die (grobe) Abschätzung [3], [4]

---

[3]) Diese Bemerkung soll dem Missverständnis, dass man hier etwa numerisch gegebene Funktionen zu differenzieren hätte, die Methode also wenig praktischen Wert besässe, entgegenwirken!

[4]) Über die Bestimmung eines zulässigen — wegen der groben Abschätzung allerdings stark eingeschränkten — Intervalls vergleiche man etwa [4].

[5]) Man kann übrigens ohneweiters überall m_i statt m schreiben, wobei die m_i, $(0 \leqslant m_i \leqslant m)$, nicht einander gleich zu sein brauchen. Für ein derartiges noch allgemeineres Iterationsverfahren $\mathfrak{G}_{m_1,...,m_n}$ gilt ebenfalls eine zu (18) analoge grobe Abschätzung wobei nur m durch $\min m_k$ und K durch eine andere Konstante zu ersetzen sind.

$$(18)\quad |x_i(t) - {}_\nu\hat{x}_i(t)| \leqslant 2\bar{b}\,\frac{(Kn\,|t-t_0|^{m+1})^\nu}{[(m+1)\nu]!}, \quad (i=1,\ldots,n;\ \nu=0,1,2,\ldots),$$

welche zeigt, dass das Verfahren $\mathfrak{G}_m$ für grösseres m (z. B. $m=3$) sehr rasch konvergiert.

Werden die Ausgangsnäherungen so gewählt, dass für $|t-t_0| \leqslant c$ die Abschätzung

$$(19)\quad |x_i(t) - {}_0\hat{x}_i(t)| \leqslant M\,\frac{|t-t_0|^{\bar{m}+1}}{(\bar{m}+1)!}, \quad (i=1,\ldots,n),$$

gilt, so bekommt man anstelle von (18) sogar

$$(20)\quad |x_i(t) - {}_\nu\hat{x}_i(t)| \leqslant M\,\frac{|t-t_0|^{\bar{m}+1}\,(Kn\,|t-t_0|^{m+1})^\nu}{[\bar{m}+1+(m+1)\nu]!},$$
$$(i=1,\ldots,n;\ \nu=0,1,2,\ldots).$$

In Falle des besonders einfachen Systems

$$(2')\quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \cdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = f(x_1,\ldots,x_n,t), \end{cases}$$

(welches zufolge der Transformation $y^{(i)} = x_{i+1}$, $x=t$ der Differentialgleichung

$$y^{(n)} = f(y, y', \ldots, y^{(n-1)}, x)$$

entspricht), entstehen — unter Berücksichtigung von

$$[{}_\nu D_2^{\sim} D^\alpha x_i]_{{}_\nu\hat{x}(\tau),\tau} = {}_\nu\hat{x}_{i+\alpha+1}(\tau) - {}_\nu g_{i+\alpha}(\tau), \quad (\alpha=0,\ldots,n-i-1),$$

$$[{}_\nu D_2\, D^{n-i} x_i]_{{}_\nu\hat{x}(\tau),\tau} = f({}_\nu\hat{x}_1(\tau),\ldots,{}_\nu\hat{x}_n(\tau),\tau) - {}_\nu g_n(\tau)$$

und

$$(21)\quad \begin{aligned} &\int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^\alpha}{\alpha!}\,{}_\nu g_{i+\alpha}(\tau)\,d\tau = \int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \int_{t_0}^{\tau} {}_\nu g_{i+\alpha}(\sigma)\,d\sigma\,d\tau = \\ &= \int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\,[{}_\nu\hat{x}_{i+\alpha}(\tau) - a_i]\,d\tau, \quad (\alpha=1,\ldots,n-i), \end{aligned}$$

durch Ausrechnen der ersten $n-i$ Integrale von (12) — die Iterationsvorschriften

$$_{\nu+1}\hat{x}_i(t) = \sum_{\alpha=0}^{n-i} a_{i+\alpha}\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha!} + \int_{t_0}^{t}\frac{(t-\tau)^{n-i}}{(n-i)!} f(_\nu\hat{x}_1(\tau),\ldots,{}_\nu\hat{x}_n(\tau),\tau)\,d\tau +$$

(12′)

$$+\sum_{\alpha=n+1-i}^{\tilde{m}+1-i}\int_{t_0}^{t}\frac{(t-\tau)^\alpha}{\alpha!}[{}_\nu D_2 D^\alpha x_i]_{\nu\hat{x}(\tau),\tau}\,d\tau.$$

Für $\tilde{m} = n-1$ entsteht [1, S. 162]

$$_{\nu+1}\hat{x}_i(t) = \sum_{\alpha=0}^{n-i} a_{i+\alpha}\frac{(t-t_0)^\alpha}{\alpha!} + \int_{t_0}^{t}\frac{(t-\tau)^{n-i}}{(n-i)!} f(_\nu\hat{x}_1(\tau),\ldots,{}_\nu\hat{x}_n(\tau),\tau)\,d\tau$$

und mit frei gewählten Zahlen m_i, $(0 \leqslant m_i \leqslant n-1)$; man rechnet dazu mit Hilfe von (21) jeweils nur die ersten m_i Integrale von (12) aus) bekommt man auch die weiteren in [1, S. 162] noch angeführten Möglichkeiten als Spezialfälle der allgemeinen Iterationsvorschrift (12).

In den Anwendungen kommt es darauf an, bei geringem Aufwand Resultate vorgeschriebener Genauigkeit zu erzielen. Nach (18) bzw. (20) bestehen hierfür folgende Anpassungsmöglichkeiten:

Wahl a) einer zweckmässigen Ausgangsnäherung (9) bzw. (13); b) der Schrittweite $|t-t_0|$; c) der Ordnung m des Verfahrens (wobei noch zu bedenken ist, dass damit auch din Lipschitzkonstante K in (17) zusammenhängt!); d) der Anzahl ν der Iterationen.

Man kann also für die numeriche Auswertung — und das ist eine bemerkenswerte Tatsache — die Vorteile eines Iterationsverfahrens mit denen eines Reihenansatzes, der die Differenzierbarkeitseigenschaften der gegebenen Differentialgleichungen auszunutzen gestattet, kombinieren. Beide Verfahrensweisen für sich allein, sowohl $\nu \to \infty$ bei festem m als auch $m \to \infty$ (nur im Falle regulärer Differentialgleichungen erlaubt) ohne Iteration, liefern nämlich theoretisch die Lösungen.

Die Entscheidung, bis zu welcher *Ordnung m* man (16) entwickeln soll, hängt stark von den Differentialgleichungen ab. Die Ausdrücke (16) werden für grösseres α meist sehr kompliziert, sodass man aus praktischen Gründen auch im Falle regulärer Differentialgleichungen oft nur bis $m=3$ oder 4 gehen kann. Dies reicht aber bei einer einigermassen zweckmassigen *Wahl der Ausgangsfunktionen*, etwa

$$_0\hat{x}_i(t) = \sum_{\mu=0}^{\bar{m}}\frac{(t-t_0)^\mu}{\mu!}[D^\mu x_i]_{a,t_0}, \quad (i=1,\ldots,n), \tag{22}$$

— dann gilt (19)! — und entsprechender *Wahl der Schrittweite* fast immer aus, um bei *einmaligem Einsetzen* in die Formel

$$_{\nu+1}\hat{x}_i(t) = {}_\nu\hat{x}_i(t) + \sum_{\alpha=0}^{m}\int_{t_0}^{t}\frac{(t-\tau)^\alpha}{\alpha!}[{}_\nu D_2 D^\alpha x_i]_{\nu\hat{x}(\tau),\tau}\,d\tau \tag{23}$$

die gestellten Genauigkeitsforderungen erfüllen zu können. Notfalls muss man diese eventuell einmal iterieren. Die *Integrale* in (23) können mit Hilfe von Quadraturformeln immer so genau berechnet werden, wie man es wünscht; bequem geht dies etwa nach [5, S. 27].

Werden nun die so nach (23) aus (22) errechneten *ersten Iterierten* ${}_1\hat{x}_1(t),\ldots,{}_1\hat{x}_n(t)$ als Ersatz für die Lösungen angesehen, so liegen noch *Abbrechfehler* vor. (20) liefert die *Schranke*

$$|x_i(t) - {}_1\hat{x}_i(t)| \leqslant M \frac{Kn\,|t-t_0|^{\bar{m}+m+2}}{(\bar{m}+m+2)!}, \quad (i=1,\ldots,n).$$

Aus den „Richtungsfehlern"

$$q_i(t) = f_i({}_1\hat{x}_1(t),\ldots,{}_1\hat{x}_n(t),t) - f_i({}_0\hat{x}_1(t),\ldots,{}_0\hat{x}_n(t),t) -$$

$$- \sum_{\alpha=1}^{m} \int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} [{}_0D_2\, D^{\alpha} x_i]_{\,{}_0\hat{x}(\tau),\tau}\, d\tau$$

lassen sich durch Integration sogar *ungefähre Zahlen* für diese Reste gewinnen, die man bei kleiner Schrittweite $|t-t_0|$ als Korrekturen verwenden kann:

$$x_i(t) - {}_1\hat{x}_i(t) \approx \int_{t_0}^{t} q_i(\tau)\, d\tau, \quad (i=1,\ldots,n),$$

weil sie wegen der raschen Konvergenz des Iterationsprozesses ziemlich genau die am Ergebnis noch anzubringenden Verbesserungen darstellen; man kann dafür mit guter Annäherung auch

$$x_i(t) - {}_1\hat{x}_i(t) \approx \frac{t-t_0}{\bar{m}+m+2}\, q_i(t), \quad (i=1,\ldots,n), \tag{24}$$

setzen [6]) und diese Ausdrücke auch zur sinnvollen *automatischen Steuerung der Schrittweite* heranziehen, wodurch die Methode sehr unterschiedlichen Situationen bei der Verfolgung der Lösungskurven gerecht zu werden vermag.

Interessiert man sich jetzt für die Werte $x_i(t_1)$, $(i=1,\ldots,n)$, so ist es für die numerische Rechnung meistens notwendig, das Parameterintervall $[t_0, t_1]$ zu unterteilen

$$t_0 = t_{1,0} < t_{1,1} < \ldots < t_{1,N} = t_1$$

und in mehreren (N) Schritten zu rechnen. In Formel (23) hat man sich beim j-ten Rechenschritt nur t_0 durch $t_{1,j-1}$ und t durch $t_{1,j}$ ersetzt zu denken und die zuletzt errechneten Werte $x_i(t_{1,j-1})$ der Lösungsfunktionen als Ausgangswerte für die Näherungen $\hat{x}_i(t)$ zu verwenden. Der Rechenvorgang geht also jedesmal genau so wie beim ersten Rechenschritt, aber mit geänderten Anfangswerten, vor sich (Fortsetzung der Lösungen!). Mit der Abkürzung

---

[6]) Vgl. dazu [5], wo den Betrachtungen der ungünstigste Fall $\bar{m}=0$ zugrunde liegt, der bei einer beliebigen — dem Problem nicht angepassten — Ausgangsnäherung normalerweise eintritt.

$$\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial x_1}{\partial a_n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial x_n}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial a_n} \end{pmatrix}$$

gilt für die Ableitungsmatrix der Lösungen nach den Anfangswerten die Formel

$$\left(\frac{\partial x(t)}{\partial a}\right) = \left(\frac{\partial \hat{x}(t)}{\partial a}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial a} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^\alpha}{\alpha!} [D_2 D^\alpha x]_{\hat{x}(\tau),\tau} \, d\tau\right) \tag{25}$$

(bzw., ausreichend genau, wenn man die Summe nur bis $\alpha = m$ erstreckt), und es ist einzusehen, dass die Matrizen

$$C(t_{1,j}) = \left(\frac{\partial x(t_{1,j})}{\partial x(t_{1,j-1})}\right),$$

die sich mit diesen Formeln rechnen lassen, die Fortpflanzung der Fehler $r_i(t_{1,j-1})$ der Anfangswerte des j-ten Rechenschrittes im wesentlichen zu beschreiben gestatten. Es gilt

$$r(t_{1,j}) = p(t_{1,j}) + C(t_{1,j})\, r(t_{1,j-1}) + \left\{\begin{matrix}\text{Glieder höherer Ordnung} \\ \text{in den Komponenten von} \\ r(t_{1,j-1})\end{matrix}\right\}, \tag{26}$$

wobei $p(t_{1,j})$ der Vektor der Abbrechfehler des j-ten Rechenschrittes ist [7]. Ersetzt man in (26) die Komponenten der Vektoren r und p durch deren Absolutbeträge und die Elemente der Matrix C durch die Maxima ihrer Absolutbeträge im Intervall $[t_{1,j-1}, t_{1,j}]$, so bekommt man wegen des Taylorschen Satzes eine Rekursionsformel für die ungünstigste Fortpflanzung bereits vorhandener Fehler $\bar{r}(t_{1,j-1})$ beim j-ten Rechenschritt

$$\bar{r}(t_{1,i}) \leqslant \bar{C}(t_{1,j})\, \bar{r}(t_{1,j-1}) + \bar{p}(t_{1,j}),$$

die es schliesslich gestattet, die Endresultate mit Fehlerschranken anzugeben.

Weil es möglich ist, ohne grossen Aufwand die Ableitungsmatrix (25) genau genug zu berechnen, liegt es nahe, für die Behandlung von *Randwertproblemen* unsere Methode zur Lösung des Anfangswertproblems zu kombinieren mit dem Newtonschen Verfahren zum Aufsuchen von Nullstellen (vgl. [6]).

Bei Vergleichsrechnungen mit anderen Methoden [8]) zur numerischen Integration von Differentialgleichungen hat sich dieses Verfahren bewährt; in allen bisher so behandelten Anfangs- und Randwertproblemen (Beispiele aus der Himmelsmechanik und die van der Pol Differentialgleichung)

---

[7]) Auch die Rundungsfehler könnte man hier additiv berücksichtigen, man führt aber die numerischen Rechnungen gewöhnlich mit soviel Schutzstellen durch, dass diesse Fehler beim Einzelschritt nicht ins Gewicht fallen können.

[8]) Es wäre wünschenswert diese Methode mit die Methoden von D. Mangeron u. R. Chaléat oder D. Mangeron u. L. E. Krivoschein vergleichen zu konnen [7], [8].

konnten nämlich mit jeweils einmaligem Einsetzen in die Formel (23) bei erträglichem Aufwand sehr genaue Resultate erzielt werden (vgl. etwa [5] und [6]).

Eingegangen am 9 VII 1965

Mathematischen Institut,
Universität Innsbruck,
Österreich

LITERATURVERZEICHNIS

1. Collatz L., *Funktionalanalysis und numerische Mathematik.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. **120,** Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1964.
2. Gröbner W., *Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960.
3. Knapp H., Monatshefte für Mathematik, 1964, **68,** *1.*
4. — *Die Gröbner methode und ihre Anwendung auf die numerische Bahnberechnung in der Himmelsmechanik.* Erscheint als Beitrag zum Buch über die Tagung *Matematische Methoden der Himmelsmechanik und Astronautik und damit zusammenhängende Fragen der numerischen Mathematik,* März 1964, Oberwolfach.
5. Reutter F., Knapp H., *Untersuchungen über die numerische Behandlung von Anfangswertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme mit Hilfe von Lie-Reihen und Anwendungen auf die Berechnung von Mehrkörperproblemen.* Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen, 1964.
6. Wanner H., *Ein Beitrag zur numerischen Behandlung von Randwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen nach der Lie-Reihenmethode.* Monatshefte für Mathematik, 1965.
7. Mangeron D., Chaléat R., Revue Roumaine Sci. techn., Série Méc. appl., 1965, **10,** *4,* pp. 791—825.
8. Mangeron D., Krivoschein L. E., Revue Roumaine Sci. techn., Série Méc. appl., 1964, **9,** *6,* pp. 1195-1222.

UN SPECTRU DE PROCEDEE ITERATIVE IN CALCULUL NUMERIC AL ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE

(Rezumat)

Punctul de plecare al lucrării îl constituie o formulă a lui W. Gröbner, care permite reprezentarea soluţiilor căutate ale unui sistem diferenţial prin intermediul unor funcţii cunoscute alese arbitrar (teoria perturbaţiilor). Secvenţe finite ale acestei formule pot fi folosite ca procedee iterative pentru calculul soluţiilor. În acest mod se parvine la un vast spectru de procedee iterative ce se includ între cazul cel mai simplu dat de metoda aproximaţiilor succesive a lui Picard şi formula rizolutivă iniţială a lui W. Gröbner.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

D. C. 513.82

ON THE MULTIPLICATION OF TENSOR FIELDS

BY

W. GREUB and E. STAMM *)

Let M be a paracompact n-dimensional manifold of class C^{k+1}, $(k \geqq 0)$, $T(x)$ the tangent space of the point $x \in M$ and $T(x)^*$ the dual space. A real valued $(p+r)$-linear function $\Phi(x)$ with p arguments in $T(x)$ and r arguments in $T(x)^*$ is called a *tensor of type* (p, r) at the point x. The tensors of type (p, r) at x form a linear space $T_p^r(x)$. The product of two tensors $\Phi \in T_p^r(x)$ and $\Psi \in T_q^s(x)$ is defined by

$$(\Phi\Psi)(x; \xi_1 \dots \xi_{p+q}, \xi^{*1} \dots \xi^{*r+s}) =$$

$$= \Phi(x; \xi_1 \dots \xi_p, \xi^{*1} \dots \xi^{*r}) \cdot \Psi(x; \xi_{p+1} \dots \xi_{p+q}, \xi^{*r+1} \dots \xi^{*r+s}),$$

where $\xi_\nu \in T(x)$ and $\xi^{*\mu} \in T(x)^*$.

A *tensor field* of type (p, r) and class C^k on M is an assignment of tensors of type (p, r) to the points of M such that the components with respect to a local coordinate system are C^k-functions. The set of all tensor fields of type (p, r) and class C^k is a module T_r^p over the ring F of C^r-functions on M. The multiplication of tensor induces a multiplication of tensor fields in an obvious way. Now consider the F-bilinear mapping $T_p^r \times T_q^s \to T_{p+q}^{r+s}$, which is defined by the multiplication. This bilinear mapping induces a F-linear mapping

$$h: T_p^r \otimes T_q^s \to T_{p+q}^{r+s},$$

such that

$$h(\Phi \otimes \Psi) = \Phi \cdot \Psi.$$

It will be shown in the present paper that h is an isomorphism onto T_{p+q}^{r+s}. For the sake of simplicity we restrict ourselves to covariant tensor

*) The second author holds a fellowship of the National Research Council of Canada.

fields i.e. tensor fields of type $(0,p)$ and write T_p instead of T_p^0. However, the argument can be carried over word by word to the general case.

Lemma I. *Let U_α be a system of coordinate neighborhoods on M such that*

$$U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset \text{ if } \alpha \neq \beta,$$

and A_α be a compact subset of U_α. Then there exists a system of n tensor fields $\omega^i \in T_1$ such that the n tensors $\omega^i(x)$ are linearly independent for every $x \in \bigcup_\alpha A_\alpha$.

Proof. In each U_α there exists a system of n tensor fields $\tilde{\omega}_\alpha^i$ of order 1 such that the tensors $\tilde{\omega}_\alpha^i(x)$, $(i = 1,\ldots,n)$, are linearly independent at every point $x \in U_\alpha$. Now let h_α be a C^k-function on M such that the carrier of h_α is compact and contained in U_α and that $h^\alpha = 1$ in A_α.

Define ω_α^i by

$$\omega_\alpha^i = \begin{cases} h_\alpha \tilde{\omega}_\alpha^i & \text{in } U_\alpha, \\ 0 & \text{in } M - U_\alpha \end{cases}$$

and ω^i by

$$\omega^i = \sum_\alpha \omega_\alpha^i.$$

Then ω^i is a tensor field of order 1 on M. Now let $x \in \bigcup_\alpha A_\alpha$ be an arbitrary point. Since the compact sets A_α are mutually disjoint the point x belongs to precisely one of them, say to A_α. This implies that

$$\omega^i(x) = h_\alpha(x)\, \tilde{\omega}_\alpha^i(x) = \tilde{\omega}_\alpha^i(x),$$

i. e., the tensors $\omega^i(x)$ are linearly independent.

Lemma II. *Consider the sets U_α and A_α given in lemma* I. *Then there exists a system of n tensor fields $\omega^i \in T_1$ with the following property: Every tensor field $\Phi \in T_p$ whose carrier is contained in A can be written in the form*

$$\Phi = \sum_\nu \lambda_{\nu_1 \ldots \nu_p}\, \omega^{\nu_1} \ldots \omega^{\nu_p}$$

where the $\lambda_{\nu_1 \ldots \nu_p}$ are scalar functions on M whose carriers are contained in $\bigcup_\alpha A_\alpha$.

Proof. Choose a system of open sets B_α with compact closure such that $A_\alpha \subset B_\alpha \subset \bar{B}_\alpha \subset U_\alpha$. Applying lemma I to the compact sets $\bar{B}_\alpha$ we obtain n tensor fields $\omega^i \in T_1$ such that the tensors $\omega^i(x)$ are linearly independent for every $x \in \bigcup_\alpha B_\alpha$. Hence, we can write

$$\Phi(x) = \sum_{(\nu)} \tilde{\lambda}_{\nu_1 \ldots \nu_p}(x)\, \omega^{\nu_1}(x) \ldots \omega^{\nu_p}(x), \quad x \in \bigcup_\alpha B_\alpha, \tag{1}$$

where the coefficients are C^k-functions in $\bigcup_\alpha B_\alpha$. Since the carrier of Φ is contained in $\bigcup_\alpha A_\alpha$, the same must be true for every function $\tilde{\lambda}_{\nu_1 \dots \nu_p}$.

Hence, a system of C^k-functions $\tilde{\lambda}_{\nu_1 \dots \nu_p}$ can be defined on M by

$$\lambda_{\nu_1 \dots \nu_p} = \begin{cases} \tilde{\lambda}_{\nu_1 \dots \nu_p} & \text{in } \bigcup_\alpha B_\alpha, \\ 0 & \text{in } M - \bigcup_\alpha B_\alpha. \end{cases}$$

Then

$$\Phi(x) = \sum_{(\nu)} \lambda_{\nu_1 \dots \nu_p}(x)\, \omega^{\nu_1}(x) \dots \omega^{\nu_p}(x), \tag{2}$$

for every point $x \in M$. In fact, if $x \in \bigcup_\alpha B_\alpha$, the relation (2) follows from (1) and otherwise both sides of (2) are zero.

Lemma III. *With U_α and A_α as in lemma* I *consider any* $2r$ *tensor fields $\Phi^j \in T_p$ and $\Psi^j \in T_q$, where the carriers of the Φ^j are contained in $\bigcup_\alpha A_\alpha$. Then the relation*

$$\sum_j \Phi^j . \Psi^j = 0 \tag{3}$$

implies that

$$\sum_j \Phi^j \otimes \Psi^j = 0.$$

Proof. Choose the B_α as in lemma II and let ω^i be the tensor fields constructed in lemma II. Then Φ^j can be written as

$$\Phi^j = \sum_{(\nu)} \lambda^j_{\nu_1 \dots \nu_p} \omega^{\nu_1} \dots \omega^{\nu_p}.$$

It follows from (3) that

$$\sum_j \sum_{(\nu)} \lambda^j_{\nu_1 \dots \nu_p} \omega^{\nu_1} \dots \omega^{\nu_p} . \Psi^j = 0. \tag{4}$$

Since the tensors $\omega^i(x)$ are linearly independent for every $x \in \bigcup_\alpha B_\alpha$, the relation (4) implies that

$$\sum_j \lambda^j_{\nu_1 \dots \nu_p}(x)\, \Psi^j(x) = 0, \quad x \in \bigcup_\alpha B_\alpha. \tag{5}$$

By lemma II the carrier of $\lambda^j_{\nu_1 \dots \nu_p}$ is contained in $\bigcup_\alpha A_\alpha$ and hence in $\bigcup_\alpha B_\alpha$. Thus (5) holds for every $x \in M$, i.e.

$$\sum_j \lambda^j_{\nu_1 \dots \nu_p} \Psi^j = 0.$$

Now the bilinearity of the tensor product yields

$$\sum_j \Phi^j \otimes \Psi^j = \sum_j \Big(\sum_\nu \lambda^j_{\nu_1 \dots \nu_p} \omega^{\nu_1} \dots \omega^{\nu_p} \Big) \otimes \Psi^j = \sum_{(\nu)} \Big(\omega^{\nu_1} \dots \omega^{\nu_p} \otimes \sum_j \lambda^j_{\nu_1 \dots \nu_p} \Psi^j \Big) = 0.$$

Lemma IV. *Let M be a paracompact n-dimensional manifold. Then there exists a locally finite covering by open sets V_α^k, where $k = 0, \ldots, m$, $(m \leqslant n)$, and $\alpha \in I_k$ (I_k index sets) subject to the following conditions:*

i) $\bar{V}_\alpha^k$ *is compact;*

ii) V_α^k *is contained in a coordinate neighborhood;*

iii) $V_\alpha^k \cap V_\beta^k = \emptyset$ *for* $\alpha \neq \beta$.

Proof. Since M is a manifold, we may consider the covering $\{U\}$ consisting of all relatively compact coordinate neighborhoods. M is paracompact and hence there is a locally-finite refinement $\{S\}$ of $\{U\}$. As a paracompact space, M is normal; M has dimension n, hence $\{S\}$ has a refinement $\{R\}$ of order $\leqq n$ [1], [2]. Again, since M is paracompact, there is a locally finite refinement $\{W_\mu\}$ of $\{R_\mu\}$ whose index set is a subset of the former index set and such that $W_\mu \subset R_\mu$. In fact, if $\{Z_\beta\}$ is a locally finite refinement of $\{R_\mu\}$, choose $\mu(\beta)$ such that $Z_\beta \subset R_{\mu(\beta)}$ and put $W = \bigcup_{\mu(\beta)=\mu} Z_\beta$. Then $\{W_\mu\}$ is locally finite and of order $m \leqq n$. There exists a partition of unity $\{\varphi_\mu\}$ with carrier $\varphi_\mu \subset W_\mu$. Of course, carrier φ_μ is compact. Given $k+1$ different indices $\mu_0, \ldots, \mu_k$, put $\alpha = (\mu_0 \ldots \mu_k)$ and consider the sets

$$V_\alpha^k = \{x \mid x \in M,\ \varphi_\mu(x) = \operatorname{Min}(\varphi_{\mu 0}(x), \ldots, \varphi_{\mu k}(x)) \text{ for } \mu \neq \mu_0, \ldots, \mu_k\}.$$

Each V_α^k is open and $V_\alpha^k \cap V_\beta^k = \emptyset$ for $\alpha \neq \beta$. Furthermore,

$$V_\alpha^k \subset \bigcap_{j=0}^{k} \text{carrier } \varphi_{\mu j}.$$

Hence $\bar{V}_\alpha^k$ is compact and contained in some W_μ. Therefore it is contained in a coordinate neighborhood. Since the order of the covering $\{W_\mu\}$ is m, for $k > m$ the sets V_α^k are void. The sets V_α^k, $(0 \leqq k \leqq m)$, cover M since for every $x \in M$ some $\varphi_\mu(x) > 0$. The covering $\{V_\alpha^k\}$ is locally finite since $\{W_\mu\}$ is and hence it has all desired properties.

Theorem. *The homomorphism h is an isomorphism onto T_{p+q}.*

Proof. Consider the covering

$$M = \bigcup_{k=0} \bigcup_{\alpha} V_\alpha^k \tag{6}$$

constructed in lemma IV. Since M is paracompact and the covering (6) is locally finite we can choose an open subset W_α^k in each V_α^k such that

$$\bar{W}_\alpha^k \subset V_\alpha^k \tag{7}$$

and

$$\bigcup_{k=0}^{n} \bigcup_{\alpha} W_\alpha^k = M. \tag{8}$$

It follows from (7) and the property i) in lemma IV that the closures $\overline{W}_\alpha^k$ are compact.

Put $W^k = \bigcup_\alpha W_\alpha^k$, $(k = 0,\ldots,n)$, and let f^α be a partition of unity subordinate to the covering $\{W_\alpha^k\}$. Given an arbitrary tensor field $\Lambda \in T_{p+q}$ consider the tensor fields $\Lambda^k = f^k \Lambda$. The carrier of Λ^k is contained in W^k. Applying lemma II with $U_\alpha = V_\alpha^k$ and $A_\alpha = \overline{W}_\alpha^k$ we see that Λ^k can be written as

$$\Lambda^k = \sum_{(\nu)} \lambda^k_{\nu_1 \ldots \nu_{p+q}} \omega^{\nu_1} \ldots \omega^{\nu_{p+q}}, \tag{9}$$

where $\omega^\nu \in T_1$ and $\lambda^k_{\nu_1 \ldots \nu_{p+q}} \in F$. Introducing the tensor fields $\Phi^{\nu_1 \ldots \nu_p} = \omega^{\nu_1} \ldots \omega^{\nu_p}$ and $\Psi^{\nu_{p+1} \ldots \nu_{p+q}} = \omega^{\nu_{p+1}} \ldots \omega^{\nu_{p+q}}$ we obtain from (9)

$$\Lambda^k = \sum_{(\nu)} \lambda^k_{\nu_1 \ldots \nu_{p+q}} \Phi^{\nu_1 \ldots \nu_p} \Psi^{\nu_{p+1} \ldots \nu_{p+q}} =$$
$$= h \sum_{(\nu)} \lambda^k_{\nu_1 \ldots \nu_{p+q}} \Phi^{\nu_1 \ldots \nu_p} \otimes \Psi^{\nu_{p+1} \ldots \nu_{p+q}}.$$

Summation over k yields

$$\Lambda = h \sum_{k=0}^{n} \sum_{(\nu)} \lambda^k_{\nu_1 \ldots \nu_{p+q}} \Phi^{\nu_1 \ldots \nu_p} \otimes \Psi^{\nu_{p+1} \ldots \nu_{p+q}}.$$

This relation shows that h is an *onto* map.

To prove that k is one-to-one suppose that

$$h \sum_j \Phi^j \otimes \Psi^j = 0,$$

where $\Phi^j \in T_p$ and $\Psi^j \in T_q$.

Then

$$\sum_j \Phi^j . \Psi^j = 0$$

and multiplication by f^k yields

$$\sum_j f^k \Phi^j . \Psi^j = 0.$$

Since the carrier of $f^k \Phi^j$ is contained in $W^k \subset \bigcup_\alpha \overline{W}_\alpha^k$ we can apply lemma III with $U_\alpha = V_\alpha^k$ and $A_\alpha = \overline{W}_\alpha^k$. We thus obtain

$$\sum_j f^h \Phi^j \otimes \Psi^j = 0$$

and summing over k

$$\sum_j \Phi^j \oplus \Psi^j = 0 .$$

The above theorem is thereby proved.

Corollary. *Let* $(T^r_p)^\star$ *be the dual of the F-module* T^p_r. *Then*

$$(T^r_p)^\star \otimes (T^s_q)^\star \cong (T^r_p \otimes (T^s_q)^\star .$$

Proof. There exists a cronical F-isomorphism $\varphi^r_p : (T^r_p)^\star \to T^r_p$ [3]. Since all mappings the diagram

$$\begin{array}{ccccc} (T^r_p)^\star \otimes (T^s_q)^\star & \xrightarrow{\varphi^r_p \otimes \varphi^s_q} & T^p_r \otimes T^q_s & \xrightarrow{h} & T^{p+q}_{r+s}, \\ & & & & \downarrow \mathrm{Id} \\ (T^r_p \otimes T^s_q)^\star & \xrightarrow{h^\star} & (T^{r+s}_{p+q})^\star & \xrightarrow{\varphi^{r+s}_{p+q}} & T^{p+q}_{r+s} \end{array}$$

are isomorphisms, it follows that

$$(h^\star)^{-1} \circ (\varphi^{r+s}_{p+q})^{-1} \circ h \circ (\varphi^r_p \otimes \varphi^s_q)$$

is an isomorphism of $(T^r_p)^\star \otimes (T^s_q)^\star$ onto $(T^r_p \otimes T^s_q)^\star$.

Received the 7 IV 1965

University of Toronto, Canada

REFERENCES

1. Dowker C. H., Amer. J. of Math., 1947, p. 211.
2. Hurewicz W., *Dimension Theory*. Princeton, p. 67.
3. Halgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*. p. 15.

ASUPRA ÎNMULŢIRII CÎMPURILOR DE TENSORI

(Rezumat)

Autorii considerînd o varietate paracompactă n-dimensională M de clasă C^{k+1}, $(k \geqslant 0)$, $^\star T(x)$ fiind spaţiul tangent în punctul $x \in M$ şi $T(x)^\star$ spaţiul dual, definesc succesiv *tensorul de tip* (p, r) în punctul x ca fiind o funcţie $\varphi(x)$ cu valori reale de $p + r$ ori liniară cu p argumente în $T(x)$ şi r argumente în $T(x)^\star$ (tensorii de tipul (p, r) în x formează un spaţiu liniar $T^r_p(x)$) şi *produsul a doi tensori* $\varphi \in T^r_p(x)$ şi $\psi \in T^s_q(x)$. Introducînd apoi noţiunea de cîmp de tensori, se demonstrează că

$$h : T^r_p \otimes T^s_q \to T^{r+s}_{p+q}$$

este un izomorfism *onto* T^{r+s}_{p+q}.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. D. 513.76

SUR LES SYSTÈMES TRIPLES DE COURBES DANS L'ESPACE PROJECTIF

PAR

F. MARCUS

1. Introduction

La géométrie projective différentielle d'un terne de congruences de courbes, ou tout court d'un système triple, a été édifiée par G. Fubini [1] dans un mémoire de 1937, qui culmine avec l'introduction de l'élément linéaire projectif d'un tel système. Le but de Fubini a été l'étude projective des éléments géométriques qui, dans la géométrie métrique, ont été étudiés par Lamé et Ricci.

Trois congruences K_α de courbes C_α, $(\alpha = 1, 2, 3)$, forment un système triple si par chaque point x_0 de l'espace il passe une seule courbe de chaque congruence et dont leurs tangentes ne sont pas coplanaires. Le système triple est élémentaire ou holonome si l'on peut déterminer trois systèmes de surfaces Σ qui par leurs intersections deux à deux déterminent les courbes C_α. Pour l'étude d'un système triple, Fubini a introduit des symboles à trois et quatre indices, en montrant que les premiers sont analogues aux symboles de Christoffel de deuxième espèce, tandis que les deuxièmes se réduisent dans un cas particulier aux symboles à quatre indices de Riemann. Pour les considérations géométriques, Fubini considère la correspondance projective entre les droites de la gerbe de centre x_0 et les droites du plan ξ_α déterminées par les tangentes t_α des courbes C_α qui sortent de x_0 et une corespondance particulière qu'il appelle „proiettività di coniugio" entre les faisceaux de droites des plans ξ_α ayant le centre en x_0 et les droites des mêmes plans.

Dans une Note de 1939 E. Bortolotti [2] montre que la théorie de Fubini se rattache à l'étude des connexions projectives et aux surfaces non holonomes V_3^2 de S_3 [1]). Il considère des quadriques et des cônes qu'il attache à un système triple pour donner d'autres interprétations aux invariants de [1].

En 1939...1940, A. Maxia [3] a étudié quelques classes particulières de systèmes triples en utilisant la théorie de Fubini.

Récemment l'étude des systèmes triples a été reprise de nouveau par Gh. Gheorghiev et I. Popa [4] et T. Mihăilescu [5]. Dans [4] on considère entre autres quelques classes particulières de systèmes triples en donnant des interprétations géométriques intéressantes et dans [5] on s'occupe exclusivement des systèmes triples. Le Mémoire [5] contient des résultats très intéressants mais pour un non spécialiste il est très difficile de se rendre compte quels de ces résultats sont déjà connus.

---

[1]) Les variétés non holonomes ont été envisagées de la manière la plus générale par G. Vrănceanu [7].

Un des buts du présent travail est de mettre en évidence les résultate qui, sous une forme ou une autre, se trouvent dans le Mémoire [1], puis de donner quelques nouveaux résultats quant aux systèmes triples et de caractériser les systèmes triples considérées dans [5] sans utiliser les cônes de M a l u s et les quadriques locales. Toutefois on montre que le nouveau critère concernant l'applicabilité projective d'un système triple donné dans [5] et ultérieurement dans [6] n'est qu'une forme particulière du critère général donné par Fubini dans [1]. Pour plus de clarté nous reproduirons quelques résultats contenus dans [1].

2. Notions fondamentales

Soit x_0 un point de S_3 et K_α les trois congruences de courbes C_α, $(\alpha = 1, 2, 3)$, qui passent par x_0 et forment un système triple. Soit (x_0, x_1, x_2, x_3) le repère projectif attaché en x_0 au système triple et soit x_α trois points différents de x_0 et situés sur les tangentes t_α en x_0 aux courbes C_α. De même, avec ξ_β, $(\beta = 1, 2, 3)$, nous indiquons les plans tangents aux courbes C_α, $(\alpha \neq \beta)$, qui passent par x_0.

Les déplacements projectifs du repère sont donnés par

$$dx_i = \omega_{ij} x_j, \quad (i, j = 0, 1, 2, 3), \tag{2.1}$$

(avec les analogues pour y_i, z_i, t_i).

Les équations (2.1) déterminent les pfaffiens ω_{ij}. Le point x_0 pouvant se mouvoir librement dans S_3, les pfaffiens $\omega_{0\alpha}$, $(\alpha = 1, 2, 3)$, sont linéairement indépendants. Par conséquent on peut, d'après [1], exprimer tous les autres pfaffiens par des symboles à trois indices selon les relations

$$\omega_{ij} = \sum \begin{pmatrix} i & j \\ & \alpha \end{pmatrix} \omega_\alpha, \quad (\omega_\alpha = \omega_{0\alpha}). \tag{2.2}$$

Les symboles

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ & \alpha \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

sont égaux à 1 ou à 0 selon que $\alpha = \beta$ ou $\alpha \neq \beta$. Les pfaffiens ω_α et les symboles à trois indices déterminent les congruences K_α mais pas inversement [1], car les ω_α et les symboles à trois indices ne peuvent pas être choisis arbitrairement. Les ω_α doivent être linéairement indépendantes; il faut que les symboles (2.3) soient vérifiés et les conditions d'intégrabilité du système (2.1) doivent être satisfaites.

En considérant toutes les indéterminations possibles, Fubini montre que les expressions

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ & \beta \end{pmatrix}, \ (\beta \neq \alpha;\ \beta \neq \gamma), \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ & \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ & \gamma \end{pmatrix}, \ (\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha), \tag{2.4}$$

(les lettres grecques prennent les valeurs 1, 2, 3 et les lettres latines les valeurs 0, 1, 2, 3) sont des invariants relatifs d'un système triple. Ils se transforment selon les formules

$$(2.5)\qquad \begin{cases} \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ & \beta \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ & \beta \end{pmatrix} \dfrac{\sigma_0 \sigma_\beta}{\sigma_\alpha \sigma_\gamma}, \quad (\beta \neq \alpha,\ \beta \neq \gamma), \\ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ & \beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ & \gamma \end{bmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ & \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ & \gamma \end{pmatrix}\right] \dfrac{\sigma_0}{\sigma_\alpha}, \quad (\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha), \end{cases}$$

où σ_0 et σ_α sont des facteurs de normalisation arbitraires tandis que

$$(2.6)\qquad \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ & \beta \end{pmatrix} \frac{(\beta)}{(\alpha)(\gamma)}, \quad (\beta \neq \alpha,\ \beta \neq \gamma),$$

(où (α) indique une permutation paire des indices 1, 2, 3) et leurs fonctions sont des *invariants absolus d'un système triple.*

D'après Fubini, les plus importants de ces invariants sont

$$(2.7)\qquad R_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ & \beta \end{pmatrix}^2 : \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ & \gamma \end{pmatrix}^2, \quad (\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha),$$

et

$$(2.8)\qquad R_{\alpha\beta} R_{\beta\gamma} R_{\gamma\alpha} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ & \gamma \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ & \gamma \end{pmatrix}.$$

Ce dernier est nommé par Fubini *l'invariant de Ceva-Menelao.* Enfin Fubini introduit les formes différentielles d'un système triple, en montrant que

$$(2.9)\qquad \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ & \beta \end{pmatrix} \frac{\omega_\alpha \omega_\gamma}{\omega_\beta}, \ (\beta \neq \alpha,\ \beta \neq \gamma), \ \left[\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ & \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ & \gamma \end{pmatrix}\right] \omega_\alpha, \ (\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha),$$

sont des *covariants absolus d'un système triple.* Parmi ces covariants il a mis en évidence les formes covariantes relatives

$$(2.10)\qquad F_\alpha = \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ & \alpha \end{pmatrix} \omega_\beta^2 + \left[\begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma & \beta \\ & \alpha \end{pmatrix}\right] \omega_\gamma \omega_\beta + \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ & \alpha \end{pmatrix} \omega_\gamma^2, \ (\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha),$$

qui, annulées, définissent dans les plans ξ_α deux directions nommées par Fubini *directions asymptotiques* et les formes cubiques covariantes absolues

$$(2.11)\qquad \begin{cases} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ & \beta \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ & \alpha \end{pmatrix} \omega_\alpha^3 + \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ & \gamma \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ & \beta \end{pmatrix} \omega_\beta^3 + \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ & \alpha \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ & \gamma \end{pmatrix} \omega_\gamma^3, \\ \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ & \gamma \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ & \alpha \end{pmatrix} \omega_\alpha^3 + \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ & \alpha \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ & \beta \end{pmatrix} \omega_\beta^3 + \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ & \beta \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ & \gamma \end{pmatrix} \omega_\gamma^3, \end{cases}$$

qui conjointement forment *l'élément linéaire projectif d'un système triple.*

Enfin notons encore que les plans osculateurs des courbes C_α passent par les points [1]

$$\binom{\alpha\ \alpha}{\beta} x_\beta + \binom{\alpha\ \alpha}{\gamma} x_\gamma, \quad (\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha). \tag{2.12}$$

3. Conditions d'holonomie

Dans [5, § 7] on donne les conditions d'holonomie d'un système triple. Or, il est facile à voir que ces conditions ont été déjà établies dans [1]. En effet, d'après [1] un système triple est élémentaire (holonome) si

$$\lambda_{\gamma\gamma} = 0. \tag{3.1}$$

Mais des conditions (36) [1, p. 9] il en résulte

$$\lambda_{\gamma\gamma} = \binom{\beta\ \alpha}{\gamma} - \binom{\alpha\ \beta}{\gamma}, \quad (\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha). \tag{3.2}$$

Donc les conditions d'holonomie sont

$$\binom{\beta\ \alpha}{\gamma} - \binom{\alpha\ \beta}{\gamma} = 0, \tag{3.2'}$$

qui sont justement les conditions établies dans [5].

a) *Les invariants.* Sans démonstration, on affirme dans [5] que l'on peut prendre comme invariants fondamentaux d'un système triple les fonctions notées par h_α, f_α, F_α et f_{12}, f_{23}, f_{31}. Pour exprimer les invariants F_α, f_{12} et f_{31}, l'Auteur a introduit sans se référer à [1] les expressions

$$\beta_{ij} = a_{hii} - a_{hjj}, \quad (i \neq h \neq j \neq i; \quad i, h, j = 1, 2, 3). \tag{3.3}$$

Ces expressions ne diffèrent pas de celles des invariants relatifs, établies dans [1, p. 5].

Pour montrer la manière dont on peut obtenir les invariants fondamentaux, observons que si l'on change par exemple α avec γ dans (2.5) il résulte

$$\left[\begin{matrix}\gamma\ \alpha\\ \beta\end{matrix}\right] = \binom{\gamma\ \alpha}{\beta} \frac{\sigma_0\, \sigma_\beta}{\sigma_\gamma\, \sigma_\alpha}. \tag{3.4}$$

Par division on obtient

$$\binom{\gamma\ \alpha}{\beta} : \binom{\alpha\ \gamma}{\beta}, \tag{3.5}$$

qui sont proprement les invariants qui sont notés dans [5] par h_α.

De même pour $\gamma = \alpha \neq \beta$ et $\alpha \neq \gamma \neq \beta \neq \alpha$ il résulte de (2.5)

$$\left[\begin{matrix}\alpha & \alpha\\ \beta\end{matrix}\right] = \left(\begin{matrix}\alpha & \alpha\\ \beta\end{matrix}\right)\frac{\sigma_0\,\sigma_\beta}{\sigma_\alpha^2}, \quad \left[\begin{matrix}\alpha & \gamma\\ \beta\end{matrix}\right] = \left(\begin{matrix}\alpha & \gamma\\ \beta\end{matrix}\right)\frac{\sigma_0\,\sigma_\beta}{\sigma_\alpha\,\sigma_\gamma}, \tag{3.6}$$

d'où les invariants f_α

$$\left(\begin{matrix}\alpha & \alpha\\ \beta\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\gamma & \gamma\\ \beta\end{matrix}\right) : \left(\begin{matrix}\alpha & \gamma\\ \beta\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\gamma & \alpha\\ \beta\end{matrix}\right). \tag{3.7}$$

Enfin, pour $\alpha = \gamma$ et $\alpha \neq \gamma$ on obtient de (2.5_1) et (2.5_2) les autres invariants f_{12}, f_{23}, f_3 et F_α.

En ce qui concerne les invariants infinitésimaux donnés dans [5] et parmi lesquels ceux nommés par l'Auteur, de type Bompiani, il faut observer qu'ils sont tous contenus dans les formules (38) et (39) de [1], ou dans les formules (2.9) du présent travail.

b) *Figures et correspondances locales.* On remarque dans [5] que les cônes de Malus et les polarités de Pantazi permettent d'obtenir des interprétations géométriques pour tous les invariants d'une famille de repères (R_6) associée à un système triple non holonome. Nous voulons montrer que la „proiettività di coniugio" [1] permet elle aussi d'interpréter divers invariants d'un système triple sans utiliser les cônes de Malus. En effet pour un déplacement petit du point x_0 sur la droite x_0, $\varrho x_2 + \sigma x_3$, la droite caractéristique du plan ξ_1 est déterminée par les points x_0 et $\mu x_2 + \nu x_3$, $\mu : \nu$ étant donné par [1]

$$\mu\left[\varrho\left(\begin{matrix}2 & 2\\ 1\end{matrix}\right) + \sigma\left(\begin{matrix}2 & 3\\ 1\end{matrix}\right)\right] + \nu\left[\varrho\left(\begin{matrix}3 & 2\\ 1\end{matrix}\right) + \sigma\left(\begin{matrix}3 & 3\\ 1\end{matrix}\right)\right] = 0, \tag{2.8}$$

qui définit dans ξ_1 la „proiettività di coniugio".

Dans cette projectivité à la droite x_0, $\varrho x_2 + \sigma x_3$, correspond la tangente t_2 ou t_3 si

$$\varrho\left(\begin{matrix}2 & 2\\ 1\end{matrix}\right) + \sigma\left(\begin{matrix}2 & 3\\ 1\end{matrix}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \varrho\left(\begin{matrix}3 & 2\\ 1\end{matrix}\right) + \sigma\left(\begin{matrix}3 & 3\\ 1\end{matrix}\right) = 0. \tag{3.9}$$

Le birapport des points x_2, x_3, $\left(\begin{matrix}2 & 2\\ 1\end{matrix}\right)x_3 - \left(\begin{matrix}2 & 3\\ 1\end{matrix}\right)x_2$ et $\left(\begin{matrix}3 & 3\\ 1\end{matrix}\right)x_2 - \left(\begin{matrix}3 & 2\\ 1\end{matrix}\right)x_3$ est

$$\left(\begin{matrix}2 & 2\\ 1\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}3 & 3\\ 1\end{matrix}\right) : \left(\begin{matrix}2 & 3\\ 1\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}3 & 2\\ 1\end{matrix}\right), \tag{3.10}$$

qui est justement l'invariant f_1. De la même manière on peut obtenir les invariants f_2 et f_3. Pour interpréter, par exemple, l'invariant h_1, observons que dans la projectivité (3.8), la tangente t_2 correspond à la droite x_0,

$\varrho x_2 + \sigma x_3$ si $\varrho : \sigma$ satisfait à (3.9). De même à la droite t_2 correspond dans la même projectivité la droite x_0, $\mu x_2 + \nu x_3$ si

$$\mu \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ & 1 \end{pmatrix} = 0 . \tag{3.11}$$

Le birapport x_2, x_3, $\mu x_2 + \nu x_3$ et $\varrho x_2 + \sigma x_3$ est alors

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ & 1 \end{pmatrix} = h_1 . \tag{3.12}$$

Les points communs aux tangentes t_α et aux droites caractéristiques des plans ξ_β, $(\beta \neq \alpha)$, sont notés dans [5] par M_{ij}. Ces points sont les premiers points focaux de Fubini [4] et sont notés dans [1] par

$$F_{\alpha\beta} = x_\alpha - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ & \beta \end{pmatrix} x_0 , \quad (\alpha \neq \beta). \tag{3.13}$$

En ce qui concerne les invariants cycliques [5] ils peuvent s'obtenir directement de (14) [1] sans opérer avec les invariants infinitésimaux.

Le plus important de ces invariants est celui de Ceva-Menelao, car d'après Fubini la *condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une homographie qui porte le point x_0, les droites t_α et les plans osculateurs des courbes C_α d'un système triple dans un point x_0', dans les tangentes et dans les plans osculateurs d'un autre système, est que les invariants de Ceva-Menelao correspondants soient égaux.*

Ce résultat important n'est pas mentionné dans [5].

4. Système triple de Fubini

Fubini a montré que si l'invariant de Ceva-Menelao est égal à ± 1, alors les trois plans osculateurs des courbes C_α d'un système triple passent par une même droite, ou les droites d'intersection des plans osculateurs des courbes C_α avec les plans ξ_β, $(\beta \neq \alpha)$, sont situées dans un même plan.

Les systèmes triples dont l'invariant de Ceva-Menelao[2]) est égal à ± 1 sont nommés dans [5] systèmes triples de Fubini, respectivement systèmes triples de Bortolotti. Nous voulons compléter le résultat de Fubini en démontrant le

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'invariant de Ceva-Menelao soit égal à ± 1 est que les points* $\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ & \beta \end{pmatrix} x_\beta \mp \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ & \gamma \end{pmatrix} x_\gamma$, $(\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha)$, *soient collinéaires.*

En effet, si ces points sont collinéaires, alors il résulte, en observant que les points x_α ne sont pas collinéaires,

---

[2]) L'invariant de Ceva-Menelao est nommé par T. Mihăilescu l'invariant de Fubini.

$$(4.1)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \binom{\alpha\ \alpha}{\beta} & 0 & \mp\binom{\gamma\ \gamma}{\beta} \\ \mp\binom{\alpha\ \alpha}{\gamma} & \binom{\beta\ \beta}{\gamma} & 0 \\ 0 & \mp\binom{\beta\ \beta}{\alpha} & \binom{\gamma\ \gamma}{\alpha} \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on trouve

$$(4.2)\qquad R_{\alpha\beta}\, R_{\beta\gamma}\, R_{\gamma\alpha} = \pm 1.$$

Réciproquement, supposons que l'invariant de Ceva-Menelao est égal à ± 1. Montrons que les points $\binom{\alpha\ \alpha}{\beta} x_\beta \mp \binom{\alpha\ \alpha}{\gamma} x_\gamma$ sont collinéaires.

En effet considérons la droite déterminée par deux de ces points, par exemple par les points $\binom{\alpha\ \alpha}{\beta} x_\beta \mp \binom{\alpha\ \alpha}{\gamma} x_\gamma$ et $\binom{\beta\ \beta}{\gamma} x_\gamma \mp \binom{\beta\ \beta}{\alpha} x_\alpha$. L'intersection de cette droite avec la droite x_α, x_β est le point

$$(4.3)\qquad \binom{\beta\ \beta}{\gamma}\binom{\alpha\ \alpha}{\beta} x_\beta - \binom{\alpha\ \alpha}{\gamma}\binom{\beta\ \beta}{\alpha} x_\alpha,$$

et si l'on tient compte de l'expression de l'invariant de Ceva-Menelao il résulte que (4.3) est justement le point

$$(4.4)\qquad \binom{\gamma\ \gamma}{\alpha} x_\alpha \mp \binom{\gamma\ \gamma}{\beta} x_\beta. \qquad \text{c. q. f d.}$$

5. Autres points focaux

On considère dans [5] les points F_i^∞ et F_i^0 situés deux à deux sur les tangentes t_α du système triple. Nous voulons montrer que ce sont précisément les points que Fubini les appelle les troisièmes points focaux du système triple. En effet, les troisièmes points focaux des tangentes t_α s'obtiennent en considérant les points focaux des congruences engendrées par ces droites lorsque le point x_0 se déplace dans les plans ξ_β avec $\beta \neq \alpha$. Ils sont donnés par

$$(5.1)\qquad \begin{cases} \binom{\alpha\ \alpha}{\gamma} x_\alpha + \left[\binom{\alpha\ \alpha}{\beta}\binom{\alpha\ \beta}{\gamma} - \binom{\alpha\ \alpha}{\gamma}\binom{\alpha\ \beta}{\beta}\right] x_0, \\ \binom{\alpha\ \alpha}{\beta} x_\alpha + \left[\binom{\alpha\ \alpha}{\gamma}\binom{\alpha\ \gamma}{\beta} - \binom{\alpha\ \alpha}{\beta}\binom{\alpha\ \gamma}{\gamma}\right] x_0, \qquad (\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha). \end{cases}$$

Or, si l'on tient compte des formules (132), (135), (129) et (131) de [5] il en résulte que les couples des points F_i^∞, F_i^0, $(i = 1, 2, 3)$, sont proprement les points focaux (5.1).

En dehors de ces points focaux, Fubini considère encore d'autres points focaux, notamment les points focaux des congruences engendrées par les tangentes t_α lorsque le point x_0 se déplace dans les plans ξ_α. Nous dirons avec Fubini que les tangentes t_α engendrent dans ce cas des congruences H_α. Leurs points focaux s'appellent d'après Fubini les seconds points focaux, d'un système triple. Les congruences H_α et leurs points focaux ne sont pas envisagées dans [5] et pourtant ils sont, comme nous le montrerons, assez importants.

Soit

$$x_\alpha + rx_0 \tag{5.2}$$

un point de t_α. Les points (5.2) qui correspondent aux racines de l'équation

$$r^2 + r\left[\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \gamma\end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \gamma\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta\end{pmatrix} = 0, \tag{5.3}$$

sont les seconds points focaux du système triple [1].

Les équations

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\omega_\beta^2 + \left[\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \gamma\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta\end{pmatrix}\right]\omega_\beta\,\omega_\gamma - \begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta\end{pmatrix}\omega_\gamma^2 = 0, \tag{5.4}$$

déterminent les déplacements du points x_0 qui correspondent aux développables des congruences H_α.

Enfin les plans focaux de ces congruences sont déterminées par les tangentes t_α et les points

$$\omega_\beta x_\beta + \omega_\gamma x_\gamma, \tag{5.5}$$

avec $\omega_\beta : \omega_\gamma$ solutions de (5.4).

6. Quelques conséquences

De (3.13), (5.1), (5.3) et (5.4) on peut déduire quelques conséquences que nous allons utiliser ultérieurement.

a) *Si les plans focaux des congruences H_α sont harmoniquement conjugués avec les plans ξ_β, $(\beta \neq \alpha)$, alors les premiers points focaux coïncident et réciproquement.*

Ce résultat est une conséquence de (5.5), (5.4) et (3.13).

b) *Les plans focaux des congruences H_α coïncident avec les plans ξ_β, $(\beta \neq \alpha)$, si et seulement si*

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta\end{pmatrix} = 0. \tag{6.1}$$

Donnons maintenant une interprétation de ce résultat. Pour cela, demandons-nous dans quel cas les premiers et les seconds points focaux coïncident? De (3.13), (5.2) et (5.3), il résulte que cette coïncidence a lieu si et seulement si les conditions (6.1) sont satisfaites. Nous avons donc le résultat suivant

c) *Si les premiers et les seconds points focaux coïncident, alors les plans focaux des congruences H_α coïncident avec les plans tangents ξ_β, $(\beta \neq \alpha)$, et réciproquement.*

On peut obtenir une autre conséquence de ce résultat. En effet de (5.1), si l'on tient compte de (6.1), il en résulte que dans ce cas *les troisièmes points focaux coïncident avec les premiers et seconds points focaux.*

De plus, on peut démontrer que :

d) *Si les premiers points focaux coïncident avec les seconds ou, dans un ordre convenable, avec les troisièmes points focaux, alors les trois couples coïncident.*

En observant que les plans focaux des congruences H_α ne sont pas déterminés si

$$(6.2) \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta \end{pmatrix} = 0$$

et en tenant compte de (2.13) on obtient le résultat suivant :

e) *Si les seconds points focaux ou les troisièmes points focaux, pris dans un ordre convenable, coïncident avec les premiers points focaux et ces derniers coïncident entre eux, alors les plans focaux des congruences H_α sont indéterminés, c'est-à-dire chaque tangente t_α du système triple forme une gerbe et réciproquement.*

Enfin, nous voulons démontrer le

Théorème. *Les plans osculateurs des courbes C_α d'un système triple et leurs conjugués par rapport aux plans tangents ξ_β, $(\beta \neq \alpha)$, sont les plans focaux des congruences H_α si et seulement si autant les premiers que les troisièmes points focaux coïncident entre eux.*

En effet, de (2.12) et (3.13) il résulte que les plans osculateurs aux courbes C_α et leurs conjugués par rapport aux plans ξ_β, $(\beta \neq \alpha)$, sont les plans focaux des congruences H_α si

$$(6.3) \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta \end{pmatrix} = 0, \quad (\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha).$$

De (6.3) il résulte que les premiers points focaux sont confondus. D'autre part, de (5.1) on déduit que les troisièmes points focaux coïncident si

$$(6.4) \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Donc (6.4) est une conséquence de (6.3) et réciproquement, c. q. f. d.

Dans tous ces cas les invariants de Ceva-Menelao sont égaux à ± 1. Donc les systèmes triples correspondants sont systèmes triples de Fubini ou Bortolotti.

7. Classes particulières de systèmes triples

Dans [5] on étudie des systèmes triples particuliers, on montre leurs généralités et l'on donne des interprétations géométriques en utilisant les cônes de Malus et des quadriques locales. Nous caractériserons ces systèmes triples en utilisant seulement les résultats de Fubini et ceux établis ci-dessus.

a) *Systèmes triangulaires ou systèmes T.* Ils sont caractérisés analytiquement par T. Mihăilescu par les conditions $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ & \beta \end{pmatrix}$. Si l'on tient compte des résultats du § 6 il résulte:

Un système triple est triangulaire si et seulement si les plans tangents ξ_α aux courbes du système sont les plans focaux des congruences H_β, $(\beta \neq \alpha)$.

b) *Système triple polaire.* Un tel système peut être caractérisé de la manière suivante:

Un système triple est polaire s'il existe au moins trois droites d_α, non coplanaires, tellement que les doites caractéristiques des plans ξ_β coïncident avec les premières droites focales, lorsque x_0 se déplace sur l'une des droites d_α.

En effet, lorsque x_0 se déplace, par exemple, sur la droite d_1, déterminée par x_0 et $\varrho_1 x_1 + \varrho_2 x_2 + \varrho_3 x_3$, $\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 \neq 0$, alors la droite caractéristique du plan ξ_1 est décrite par le point [1]

$$x = \mu\left[x_2 - x_0\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} - x_0 \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ & 1 \end{pmatrix}\right] + \tag{7.1}$$

$$+ Y\left[x_3 - x_0\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} - x_0 \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ & 1 \end{pmatrix} + \frac{\varrho_3}{\varrho_1}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ & 1 \end{pmatrix}\right].$$

Cette droite coïncidera avec la première droite focale si

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{pmatrix}\frac{\varrho_2}{\varrho_1} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ & 1 \end{pmatrix}\frac{\varrho_3}{\varrho_1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ & 1 \end{pmatrix}\frac{\varrho_2}{\varrho_1} + \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ & 1 \end{pmatrix}\frac{\varrho_3}{\varrho_1} = 0. \tag{7.2}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ & 1 \end{pmatrix} = 0, \tag{7.3}$$

et la droite d_1 est déterminée par le point x_0 et le point

$$x_1 + \lambda_1\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{pmatrix} x_3 - \lambda_1\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ & 1 \end{pmatrix} x_2. \tag{7.4}$$

De la même manière on fait voir qu'il peut exister deux droites d_2 et d_3 tellement que les droites caractéristiques des plans ξ_2 et ξ_3 coïncident avec les droites $F_{11}F_{32}$ et $F_{13}F_{23}$ lorsque x_0 se déplace sur les droites d_2 ou d_3 si

$$(7.5)\qquad \begin{pmatrix}1&1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&3\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\3\end{pmatrix}=0$$

et les droites d_2 et d_3 seront déterminées par x_0 et les points

$$(7.6)\qquad x_2+\lambda_2\left[\begin{pmatrix}3&1\\2\end{pmatrix}x_3-\begin{pmatrix}3&3\\2\end{pmatrix}x_1\right],\quad x_3+\lambda_3\left[\begin{pmatrix}1&1\\3\end{pmatrix}x_2-\begin{pmatrix}1&2\\3\end{pmatrix}x_1\right].$$

Mentionnons encore qu'il existe un système triple polaire particulier tel que les trois plans engendrés par les droites d_α, quand λ_α varient, passe par une même droite. La droite est dans ce cas déterminée par x_0 et par le point

$$(7.7)\qquad \begin{pmatrix}1&2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&3\\2\end{pmatrix}x_1-\begin{pmatrix}1&1\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&3\\2\end{pmatrix}x_2-\begin{pmatrix}1&2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\2\end{pmatrix}x_3,$$

et l'invariant absolu

$$(7.8)\qquad \begin{pmatrix}1&1\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&3\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\1\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}1&2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\2\end{pmatrix}$$

est égal à -1.

c) *Système réglé. Un système triple est réglé si et seulement si dans la „proiettività di coniugio" les tangentes t_α se correspondent à elles-mêmes.*

Mentionnons que l'observation faite en [5], à savoir, si une système réglé est en même temps un système T, les figures formées par les plans focaux de chaque variété V_3^1 et les deux plans des V_3^2 qui passent par la droite commune des deux plans sont figures harmoniques s'explique par la propriété que nous avons trouvée ci-dessus pour les systèmes triples triangulaires.

d) *Systèmes triples holonomes.* La plus simple interprétation de tels systèmes est la suivante:

Un système triple est holonome si et seulement si les „proietività di coniugio" dans chaque plan tangent du système sont des involutions.

En effet d'après Fubini un système triple est élémentaire si $\lambda_{\alpha\alpha}=$ $=\begin{pmatrix}\beta&\alpha\\\gamma\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma\end{pmatrix}=0$. Mais si l'on tient compte de l'expression (3.8) il résulte que ce sont justement les conditions pour que la „proiettività di coniugio" soit une involution.

Dans [5] on considère aussi les systèmes triples caractérisés par les relations

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ & \gamma \end{pmatrix} = 0, \quad (\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha). \tag{7.9}$$

Ils sont caractérisés par la propriété que les trois cônes de Malus Γ_i sont circonscrits au trièdre (x_0, t_1, t_2, t_3) et sont nommés *systèmes holonomes et conjugués.*

Si l'on tient compte des résultats établis dans le § **6** nous pouvons caractériser ces systèmes triples que nous appellerons *systèmes triples de Darboux* de la manière suivante:

Un système triple este un système de Darboux si et seulement si les plans tangents ξ_α du système sont les plans focaux des congruences H_β, $(\beta \neq \alpha)$.

Enfin les systèmes triples de Darboux qui sont en même temps des systèmes T et qui sont caractérisés par T. Mihăilescu par les conditions

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ & \gamma \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ & \gamma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ & \beta \end{pmatrix} = 0, \tag{7.10}$$

ont une interprétation très simple qui résulte de la conséquence e), à savoir:

Un système triple holonome est triplement conjugué et triangulaire si les plans focaux des congruences H_α sont indéterminés.

Dans ce cas sont confondus non seulement les premiers points focaux et les points focaux F_i^∞ et F_i^0 (troisièmes points focaux d'après Fubini) comme l'on observe dans [5], *mais les seconds points focaux sont aussi confondus.*

8. Applicabilité projective des systèmes triples

Dans son Mémoire, T. Mihăilescu donne un nouveau critère concernant la correspondance d'applicabilité projective entre deux systèmes triples. Il montre qu'une correspondance entre deux systèmes triples est une applicabilité projective si et seulement si les invariants, qu'il a nommés de type Bompiani des deux systèmes triples, sont égaux. Ce nouveau critère a été mis en évidence dans [6]. Or *il est très facile à montrer que le nouveau critère ne représente rien d'autre qu'une forme particulière du critère général de Fubini* [1].

En effet posons dans les formules (72) de [1], qui expriment les conditions d'applicabilité projective de deux systèmes triples, $\sigma_\lambda = \sigma_\mu = 1$, $(\lambda \neq \mu, \lambda, \mu = 1, 2, 3)$. Alors on obtient

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ & \mu \end{pmatrix} \frac{\omega_\lambda^2}{\omega_\mu} = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda \\ & \mu \end{bmatrix} \frac{\Omega_\lambda^2}{\Omega_\mu}, \tag{7.1}$$

où $\begin{bmatrix} \lambda & \lambda \\ & \mu \end{bmatrix}$ et Ω_λ sont les symboles à trois indices et les pfaffiens du deuxième système triple, *qui représentent justement les nouveaux conditions d'applicabilité projective données dans* [5] *et* [6].

Nous voulons encore observer que les mêmes conditions (72) [1] démontrent que seulement les invariants finis (2.7) se conservent dans les déformations projectives d'un système triple. D'où la condition de Fubini:

Deux systèmes triples sont projectivement applicables si ils ont le même élément linéaire projectif.

Reçue le 10 I 1966

Institutul Politechnique, Jassy,
Chaire de Mathématiques I

BIBLIOGRAPHIE

1. Fubini G., Ann. di Mat. pura ed applicata (4) 16, 1937, pp. 1—33.
2. Bortolotti E., Boll. dell'Unione Mat. Italiana (2), 1939, pp. 409—421.
3. Maxia A., Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, 1941, **63**, pp. 93—110.
4. Gheorghiev Gh., Popa I., An. şt. Univ. Iaşi, secţ. I, 1961, **VII**, *2*, pp. 283—298.
5. Mihăilescu T., Ann. di Mat. pura ed appl. S. IV, 1961, **LIII**, pp. 231—300.
6. — *Les systèmes triples non holonomes linéaires et la correspondance entre deux espaces projectifs*. Centre Belge de Recherche Mathématique. Deuxième Colloque de Géométrie différentielle, Liège, 1961, pp. 121—139.
7. Vrănceanu G., *Les espaces non holonomes*. Mémorial des Sciences Mathématiques, 1936, *76*.

ASUPRA SISTEMELOR TRIPLE DE CURBE ÎN SPAŢIUL PROIECTIV

(Rezumat)

Fără a utiliza conurile lui Malus şi cuadrice locale, ci numai consideraţiile geometrice din [1, § **3**], se obţin rezultate referitoare la sistemele triple de curbe precum şi proprietăţi caracteristice ale sistemelor de curbe considerate în [5]. Se arată că rezultate semnificative date în [5] se găsesc sub o formă sau alta în [1]. În sfîrşit se arată că noul criteriu de aplicabilitate proiectivă a două sisteme triple de curbe dat în [5] şi [6] nu reprezintă decît un caz particular al criteriului obţinut în [1].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 513.736

ASUPRA CONGRUENŢELOR BIANCHI

DE

C. TALABĂ

Fie

$$\mathrm{d}M = \omega^i e_i\,,\ \mathrm{d}e_i = \omega_i^j e_j\,,\quad (i,j=1,2,3), \tag{1}$$

ecuaţiile diferenţiale ale mişcării triedrului ataşat unei congruenţe de drepte în spaţiul euclidian cu trei dimensiuni, unde e_i sînt trei vectori unitari şi ortogonali, iar ω^i, ω_j^i sînt forme diferenţiale liniare (pfaffieni), care satisfac ecuaţiile de structură ale spaţiului:

$$D\omega^i = [\omega^j, \omega_j^i],\quad D\omega_i^j = [\omega_i^k, \omega_k^j] \tag{2}$$

iar $\omega_j^i + \omega_i^j = 0$.

Alegînd triedrul canonic al congruenţei ca în [1, § **33**] (e_3 — versor al razei congruenţei, vîrful triedrului M în puctul mediu al razei congruenţei iar e_1 şi e_2 vectori paraleli cu tangentele la imaginile sferice ale riglatelor distribuitoare, pe sfera de rază e_3), vom avea pentru congruenţa noastră

$$\omega^1 = b\,\omega_2^3,\quad \omega^2 = b'\omega_1^3, \tag{3}$$

$$\omega_1^2 = h\,\omega_1^3 + k\,\omega_2^3,\quad \omega^3 = p\,\omega_1^3 + q\,\omega_2^3, \tag{4}$$

unde b şi b' sînt invarianţi ai congruenţei, iar funcţiile h, k, p, q împreună cu invarianţii precedenţi, b şi b', satisfac condiţiile de integrabilitate impuse de ecuaţiile de structură (2)

$$\begin{cases} q - b_1 = k(b+b'),\quad b_2' - p = h(b+b'), \\ -p_2 + q_1 + ph + qk = -b + b',\quad h^2 + k^2 - h_2 + k_2 + 1 = 0, \end{cases} \tag{2'}$$

în care am introdus notaţiile:

$$\begin{cases} \mathrm{d}b = b_1\,\omega_1^3 + b_2\,\omega_2^3,\quad \mathrm{d}b' = b_1'\,\omega_1^3 + b_2'\,\omega_2^3, \\ \mathrm{d}p = p_1\,\omega_1^3 + p_2\,\omega_2^3,\quad \mathrm{d}q = q_1\,\omega_1^3 + q_2\,\omega_2^3. \end{cases} \tag{5}$$

Am presupus că $[\omega_1^3, \omega_2^3] \neq 0$ (formele ω_1^3 şi ω_2^3 sînt liniar independente).

Utilizăm notaţiile: 2φ — unghiul dintre planele focale, 2ϱ — distanţa dintre focare, δ — distanţa dintre punctele limită.

Considerăm acum suprafeţele focale (F_1) şi (F_2) ale congruenţei.

Ataşăm suprafeţei focale (F_1) triedrul format din vectorii:

$$E_1 = e_3, \quad E_2 = e_1 \cos\varphi - e_2 \sin\varphi, \quad E_3 = e_1 \sin\varphi + e_2 \cos\varphi.$$

Ecuaţiile diferenţiale ale mişcării pe (F_1) au forma

$$dF_1 = \Omega_i E_i, \quad dE_i = \Omega_i^j E_j.$$

Formele Ω_i, Ω_i^j sînt determinate de formele principale ale congruenţei şi de invarianţii săi.

Introducem notaţiile

$$\tilde{\omega}_1 = \omega_2^3 \cos\varphi - \omega_1^3 \sin\varphi, \quad \tilde{\omega}_2 = \omega_2^3 \cos\varphi + \omega_1^3 \sin\varphi, \tag{6}$$

de unde

$$\omega_2^3 = \frac{\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2}{2\cos\varphi}, \quad \omega_1^3 = \frac{-\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2}{2\sin\varphi}. \tag{6'}$$

Atunci ecuaţia de structură $D\Omega_3 = 0$ (pentru (F_1)), după înlocuiri şi folosirea lemei lui Cartan conduce la:

$$\delta(\omega_1^2 - d\varphi) = A\tilde{\omega}_1 + B\tilde{\omega}_2, \quad \omega_3 + d\varrho = B\tilde{\omega}_1 + C\tilde{\omega}_2. \tag{7}$$

Analog obţinem pentru a doua suprafaţă focală (F_2)

$$\delta(\omega_1^2 + d\varphi) = A'\tilde{\omega}_2 + B'\tilde{\omega}_1, \quad \omega^3 - d\varrho = B'\tilde{\omega}_2 + C'\tilde{\omega}_1. \tag{7'}$$

În aceste notaţii congruenţele Bianchi se caracterizează prin

$$A = C, \quad A' = C'. \tag{8}$$

Din relaţiile (7) şi (7') obţinem

$$2\delta\omega_1^2 = (A + B')\tilde{\omega}_1 + (B + A')\tilde{\omega}_2, \quad 2\omega^3 = (B + C')\tilde{\omega}_1 + (C + B')\tilde{\omega}_2.$$

Folosind pentru ω_1^2 şi ω_2^3 formulele (4), în care înlocuim formele ω_1^2 şi ω_2^3 cu expresiile lor din (6'), obţinem

$$2\delta\left(h\frac{-\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2}{2\sin\varphi} + k\frac{\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2}{2\cos\varphi}\right) = (A + B')\tilde{\omega}_1 + (B + A')\tilde{\omega}_2,$$

$$2\left(p\frac{-\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2}{2\sin\varphi} + q\frac{\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2}{2\cos\varphi}\right) = (B + C')\tilde{\omega}_1 + (C + B')\tilde{\omega}_2,$$

și ținînd seama de faptul că pfaffienii $\tilde{\omega}_1$ și $\tilde{\omega}_2$ sînt liniar independenți, ajungem la relațiile:

$$A + B' = \delta\left(\frac{-h}{\sin\varphi} + \frac{k}{\cos\varphi}\right), \quad B + A' = \delta\left(\frac{h}{\sin\varphi} + \frac{k}{\cos\varphi}\right),$$

$$B + C' = \frac{-p}{\sin\varphi} + \frac{q}{\cos\varphi}, \quad C + B' = \frac{p}{\sin\varphi} + \frac{q}{\cos\varphi}.$$

Substituim în aceste relații $\delta = b + b'$ și rezultă

$$A - C = -\frac{h(b+b') + p}{\sin\varphi} + \frac{k(b+b') - q}{\cos\varphi},$$

$$A' - C' = \frac{h(b+b') + p}{\sin\varphi} + \frac{k(b+b') - q}{\cos\varphi}.$$

Folosind condițiile de integrabilitate (2') obținem

$$(9) \quad \begin{cases} A - C = \dfrac{b'_2}{\sin\varphi} - \dfrac{b_1}{\cos\varphi}, \\ A' - C' = -\dfrac{b'_2}{\sin\varphi} - \dfrac{b_1}{\cos\varphi}. \end{cases}$$

Dacă congruența este Bianchi, în conformitate cu (8), sistemul (9) devine omogen în b'_2 și b_1 și cum determinantul său este $-2/\sin\varphi\cos\varphi \neq 0$ urmează că $b'_2 = b_1 = 0$ este unica soluție. Invers, dacă $b'_2 = b_1 = 0$, sistemul (9) ne conduce la $A = C$ și $A' = C'$ și în conformitate cu (8), congruența este Bianchi.

Ținînd seama de notațiile (5), soluțiile $b'_2 = b_1 = 0$ se mai scriu

$$(10) \qquad [\omega_1^3, db'] = 0, \quad [db, \omega_2^3] = 0.$$

Relațiile (10) caracterizează o congruență Bianchi. Pentru a da o interpretare geometrică relațiilor (10) amintim că:

a) parametrul de distribuție pentru o riglată a congruenței este dat de formula

$$D = \frac{b(\omega_2^3)^2 - b'(\omega_1^3)^2}{(\omega_1^3)^2 + (\omega_2^3)^2};$$

b) ecuația riglatelor distribuitoare este

$$\omega_1^3\,\omega_2^3 = 0;$$

c) parametrii de distribuție extremi sînt

$$D_{(\omega_1^3=0)} = b \text{ și } D_{(\omega_2^3=0)} = -b'.$$

Pentru congruenţele Bianchi, datorită relaţiilor (10) avem:

$$(10') \qquad db = b_2 \omega_2^3 \text{ şi } db' = b_1' \omega_1^3.$$

Deci, pentru familia de riglate distributoare $\omega_2^3 = 0$, avem $db = 0$, iar pentru familia de riglate distributoare $\omega_1^3 = 0$ avem $db' = 0$.

Adică, pe o aceeaşi riglată distributoare a familiei $\omega_1^3 = 0$, riglatele distributoare ale familiei $\omega_2^3 = 0$ au acelaşi parametru la distribuţie şi analog riglatele distributoare ale familiei $\omega_1^3 = 0$ au acelaşi parametru de distribuţie pe razele aceleiaşi distributoare a familiei $\omega_2^3 = 0$.

Totodată, căutînd riglatele formate din razele congruenţei pentru care riglatele unei familii de distributoare (de ex. $\omega_1^3 = 0$) au acelaşi parametru de distribuţie, obţinem riglatele distributoare ale celei de-a doua familii ($\omega_2^3 = 0$).

În concluzie, rezultă că congruenţele Bianchi se caracterizează prin proprietatea că, oricare din cele două familii de riglate distributoare, este formată din riglate pe care riglatele celei de-a doua familii de riglate distributoare au acelaşi parametru de distribuţie.

Primită la 7 II 1966

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de Matematici II

BIBLIOGRAFIE

1. Фиников С. П., Теория конгруэнций. М., 1950.
2. Bianchi L., Ann. di Mat., 1890, **XVIII.**
3. — *Lezioni di geometria differenziale.* N. Zanichelli, Bologna, 1927.
4. Finikov S. P., *Déformation d'une surface et réseaux conjugués persistants.* Mémorial des Sciences Mathématiques, 1930, **LIV.**

О КОНГРУЕНЦИЯХ БИАНКИ

(Резюме)

Доказывается, что для любой конгруенции Бианки характерно следующее:
Любая из двух распределительных линейчатых поверхностей состоит из линейчатых поверхностей, на которых линейчатые поверхности второго семейства имеют тот же распределительный параметр.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

УДК 518.43

МЕТОД МНОГОУГОЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В ИССЛЕДОВАНИИ СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Д. МАНЖЕРОН, Г. СИЛАШ и Л. БРЫНДЕУ

Выдержка из сообщения представленного на научной сессии Ясского политехнического института, 5—7 февраля 1965 г.

1. Системы с нелинейной характеристикой могут быть исследованы методом приближения характеристики. В числе приближенных методов известны, напр., методы линеаризации, в частности метод гармонической линеаризации [16], метод прямой линеаризации [2], метод линеаризации по функции распределения [14], метод линеаризации Блакьера, представленный на недавно проведенном международном коллоквиуме, организованном французским национальным центром по научным исследованиям [19], [20], метод А. Рыбарского, примененный им к задаче линеаризации дифференциального уравнения вида маятниковых движений [21], [27], [28] и др.

Другие точки зрения в задаче приближенного решения нелинейных систем относятся к многоугольному приближению предложенному З. Кавальским [22], к кусочно-линейному приближению развитому Р. Райсигом [23] в связи с понятием структурной устойчивости [24], [25] и др.

Наибольшее количество методов линеаризации используют для приближения квадратичные ошибки.

Е. И. Эргин развил метод билинейного приближения, с условием минимизации квадратичной ошибки [5]. Более лучшее приближение получается используя метод полигонального приближения. Этот, развиваемый авторами метод состоит в замене данной непрерывной характеристики на определенном интервале некоторой соответственно подобранной полигональной характеристикой. В этом направлении работал М. Н. Олевский [1] использовав приближение по Чебышеву, а полученные результаты были использованы в исследовании нелинейных колебаний в работах [7] и [8].

В настоящей статье исследуется приближение непрерывных функций многоугольными, при условии, что квадратичная нагруженная ошибка была минимальной. В последующей заметке, используя некоторые результаты, недавно появившейся в свет, работы Р. Эриса и М. М. Денна [26], будет изложена задача нелинейной автономной механики колебаний исходя из задачи приближения некоторой функции $f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, при помощи N отрезков функций данной формы

$\varphi(x, c)$, где $c(c_1, c_2, ..., c_k)$ — постоянный вектор выбираемый в отдельности для каждого отрезка. Выбор постоянных c_n и $N-1$ точек соединения x_n выражается минимизацией функции

$$(*) \qquad F_N(a,b) = \sum_{n=1}^{N} \int_{x_{n-1}}^{x_n} [f(x) - \varphi(x, c_n)]^2 \mathrm{d}x.$$

Вместо (*) можно рассматривать, аналогично рассматриваемому ниже выражению (2), нагруженный интеграл.

2. Предположим, что функция $F(x)$ известна и представима на интервале $(0, x_m)$ некоторым отрезком кривой AB. Рассмотрим множество P_n полигональных линий, имеющих каждая по n сторон, на интервале $(0, x_m)$, зависящих от s параметров $\alpha_l, (l = 1, 2, ..., s)$. Оптимальное приближение реализируется выбором параметров α_l. Пусть

$$(1) \qquad g_i(x) = m_i x + n_i, \quad (x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1};\ i = 0, 1, ..., n-1),$$

— уравнение стороны i множества P_n, где m_i и n_i — функции параметров α_l. Для определения многоугольной линии наилучшего приближения функции $F(x)$ на интервале $(0, x_m)$, минимизируем выражение

$$(2) \qquad E = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{xi}^{x_{i+1}} [g_i(x) - F(x)]^2 p(x) \mathrm{d}x, \quad (x_n = x_m).$$

Нагружение в интегральной квадратичной невязке (2) дано функцией распределения $p(x)$, использование которой в нелинейной механике колебаний позволяет при хорошем приближении учитывать многоугольные линии лишь с небольшим количеством сторон. При данном количестве сторон улучшение приближения зависит от надлежащего выбора функции распределения. Так напр., в случае линейного приближения $(n = 1)$, известные методы линеаризации, как метод Пановко [2], в котором $p(x) = x^2$ или же метод гармонической линеаризации, в котором $p(x) = \pi(a^2 - x^2)^{-1/2}$, приводят к лучшим приближениям чем в случае когда $p(x) = 1$ [14].

Минимизирование квадратичной невязки (2) приводит к системе s уравнений с неизвестными α_l служащими для определения многоугольной линии наилучшего приближения:

$$(3) \qquad \frac{\partial E}{\partial \alpha_l} = 0, \quad (l = 1, 2, ..., s).$$

Введем обозначения

(4) $A_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [g_i(x) - F(x)]\,p(x)\,dx, \quad S_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [g_i(x) - F(x)]\,x\,p(x)\,dx,$

имеющие ясные геометрическо-механические интерпретации.

3. Рассмотрим сначала множество непрерывных многоугольников в целях решения задачи о приближении функции $F(x)$. Так как условия непрерывности многоугольной линии записываются в виде

(5) $$g_{i-1}(x_i) = g_i(x_i), \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

имея в виду (1) получаем

(6) $$n_i = n_{i-1} + x_i(m_{i-1} - m_i) = n_0 + \sum_{r=1}^{i} (m_{r-1} - m_r)\,x_r$$

и, следовательно, уравнение стороны i-го порядка:

(7) $$g_i(x) = m_i x + \sum_{r=1}^{i} (m_{r-1} - m_r)\,x_r + n_0.$$

Полученное множество многоугольных линий имеет $s = 2n$ параметров α_l, а именно абсциссы x_i, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, угловые коэффициенты m_i, $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, и ординату n_0. Следовательно:

(8) $$\frac{\partial g_i}{\partial x_k} = \begin{cases} 0 \text{ для } i < k, & (i = 0, 1, \ldots, n-1), \\ m_{k-1} - m_k \text{ для } i \geqslant k, & (k = 1, 2, \ldots, n-1) \end{cases}$$

и

(9) $$\frac{\partial g_i}{\partial m_k} = \begin{cases} 0 \text{ для } i < k, \\ x - x_k \text{ для } i = k, \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1), \\ x_{k+1} - x_k \text{ для } i > k, \ (k = 0, 1, \ldots, n-1). \end{cases}$$

Вводя обозначения (4), получаем

$$\frac{\partial E}{\partial x_k} = 2(m_k - m_{k-1}) \sum_{i=k}^{n-1} A_i \quad \text{и} \quad \frac{\partial E}{\partial m_k} = 2\left[S_k - x_k A_k + (x_{k+1} - x_k) \sum_{i=k+1}^{n-1} A_i \right].$$

Уравнения (3) для параметров x_k, $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, приводят к

(10) $$\sum_{i=k}^{n-1} A_i = 0 \quad \text{или же} \quad A_i = 0, \ (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Аналогично,

(11) $$\frac{\partial E}{\partial n} = 2 \sum_{i=0}^{n-1} A_i = 0 \quad \text{или же} \quad A_0 = 0.$$

Следовательно, нагруженные поверхности, определяемые кривой и стороной многоугольника должны быть равны между собой на каждом интервале, в то время как, принимая во внимание (9), (3) приводят к тому, что статистические моменты определяемые кривой и соответствующей стороной многоугольника также равны между собой на каждом интервале:

$$S_i = 0, \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{12}$$

Условия (10)...(12) представляют собою систему уравнений из которых определяются значения параметров для выбора многоугольной линии искомого приближения. Неизвестные n_0 и m_i, $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, входят линейно в рассматриваемые уравнения. После их исключения приходим к системе уравнений определяющих абсциссы x_i, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, вершин многоугольника. Некоторые упрощения возможны при решении этой последней вообще говоря сложной системы уравнений, если уравнения рассматриваются последовательно, начиная с первых. Если можно принять $n_0 = 0$, то число параметров множества многоугольников сводится к $s = 2n - 1$, причем уравнения (3), имея в виду (8) и (9), сводятся к условиям:

$$A_i = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \quad S_i = 0, \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{13}$$

В частности, для $n = 1$ и $p(x) = x^2$, уравнения (13) тождественны с формулами линейного приближения, данными в [2] для симметричных характеристик.

Приближение улучшается при увеличении числа сторон многоугольника. Кроме билинейного приближения характеристики, удобной в некоторых случаях, было рассмотрено в статье [17], в случае функции $F(x) = \sin x$, приближение трехсторонним многоугольником.

4. Пусть $F(0) = 0$. Рассмотрим приближение функции $F(x)$ непрерывным многоугольником имеющим n сторон, при условии, что первая сторона многоугольника — касательная в начале координат к рассматриваемой характеристике. Так как $m^0 = F(0)$ и $n_0 = 0$, трудность задачи сводится к определению $s = 2n - 2$ параметров: x_i, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, m_i, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, входящих в уравнения

$$A_i = 0, \quad S_i = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{14}$$

Условия (14) обобщают результаты полученные в работе [5] в случае билинейного приближения; к тому же они имеют более простую форму чем условия приведенные в [17].

5. В случае, когда уравнения выведенные для определения абсцисс достаточно громоздки, авторы рекомендуют, как вариант, выбор, в качестве вершин многоугольника, приближения точек перегиба, экстремаль-

ных и других особых точек $F(x)$. Таким образом, оставшиеся неизвестными α_l — лишь угловые коэффициенты m_i, $(i = 0, 1, ..., n-1)$, определяемые из системы линейных уравнений

$$(15) \qquad S_k - x_k A_k - (x_{k+1} - x_k) \sum_{i=k+1}^{n-1} A_i = 0, \quad (k = 0, 1, ..., n-1).$$

В случае если выбор вершин абсцисс приближающего многоугольника таков, что $A_k = 0$, $(k = 0, 1, ..., n-1)$, (15) приводят к $S_k = 0$, $(k = 0, 1, ..., n-1)$, а значит, к уже выше рассмотренному результату.

6. Пусть приближающий многоугольник состоит из касательных проведенных к характеристике в точках имеющих абсциссами ξ_i, $(i = 0, 1, ..., n-1)$. Уравнение стороны порядка i запишется в виде

$$(16) \qquad g_i(x) = F(\xi_i) + F'(\xi_i)(x - \xi_i),$$

причем неизвестные α_l — в настоящем случае абсциссы ξ_i, $(i = 0, 1, ..., n-1)$ — определяются из условий непрерывности (5). Отметим, что в рассматриваемом случае значения A_i и S_i в формулах (4) зависят от неизвестных ξ_i, причем уравнения (3) приводятся к системе

$$(17) \qquad \xi_k = S_k / A_k, \quad (k = 0, 1, ..., n-1).$$

Следовательно, абсцисса ξ_k точки касания равна абсциссе центра тяжести нагруженной поверхности A_k.

Подобным же образом определяется приближающий вписанный в рассматриваемую характеристику многоугольник. Сторона i-го порядка такого многоугольника имеет уравнение

$$(18) \qquad g_i(x) = \frac{(x - x_i) F(x_{i+1}) - (x - x_{i+1}) F(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \quad (x_i \leqslant x < x_{i+1}),$$

причем x_i, $(i = 1, 2, ..., n-1)$ — неизвестные абсциссы. Уравнения (3) сводятся к

$$(19) \qquad \frac{S_k - x_{k+1} A_k}{S_{k-1} - x_{k-1} A_{k-1}} = \frac{x_{k+1} - x_k}{x_k - x_{k-1}} \cdot \frac{m_{k-1} - F'(x_k)}{m_k - F'(x_k)}, \quad (k = 1, 2, ..., n-1).$$

Несмотря на некоторые трудности связанные с их определением, вписанные и описанные многоугольники ценны тем, что содержат между ними рассматриваемую характеристику.

7. В случае аппроксимирования рассматриваемой нелинейной характеристики разрывным n-сторонним многоугольником, количество

имеющихся в распоряжении параметров увеличится, а именно неизвестными будут: x_i, $(i = 1, 2,..., n-1)$, m_i, $(i = 0, 1,..., n-1)$, n_i, $(i = 0, 1,..., n-1)$, причем $s = 3n-1$. Так как теперь $g_{i-1}(x_i) \neq g_i(x_i)$, условия (3) для неизвестных x_i приводят к

$$F(x_i) = \frac{1}{2}[g_{i-1}(x_i) + g_i(x_i)], \quad (i = 1, 2,..., n-1), \tag{20}$$

что значит, что $F(x)$ проходит через середину отрезка, соединяющего концы прилегающих сторон. Выписывая затем уравнения (3) для n_i и, соответственно, m_i, получаем

$$A_i = 0, \quad S_i = 0, \quad (i = 0, 1,..., n-1). \tag{21}$$

Случай прерывного многоугольника, зачастую используемого при графическом интегрировании, дифференцировании или же гармоническом анализе, это многоугольник с параллельными сторонами, представленный ступенчатой функцией. Аппроксимирующие многоугольники зависят в рассматриваемом случае от x_i, $(i = 1, 2,..., n-1)$, и n_i, $(i = 0, 1,..., n-1)$. Эти параметры определяются из уравнений (20) и $A_i = 0$, $(i = 0, 1,..., n-1)$, а $m_i = m$ могут быть любыми (обычно берется $m_i = 0$).

8. Как было подчеркнуто выше, при увеличении числа сторон многоугольников, аппроксимирование улучшается за счет возрастающих трудоемкостей в вычислениях. Повышение точности можно достичь выбором нагружения $p(x)$ по некоторым статистическим законам. В частности, в случае переходных явлений можно рассматривать $p(x) = 1$, а при условиях режима — для $p(x)$ можно выбирать одно из выражений используемых при линеаризации.

В рассмотренных выше случаях аппроксимирования многоугольниками, предполагался известным интервал в котором определяется приближение. В нелинейной механике колебаний, x_m неизвестно и его нужно определить каким либо из методов линеаризации. Аналогично [5], используется метод итерации если x_m отличается от максимальной абсциссы полученной в рамках многоугольного приближения.

Метод аппроксимирования многоугольниками, так же как и интегральный метод разработанный первым из авторов и доложенный им на Международном симпозиуме по нелинейным колебаниям, проведенным в Киеве [28], может быть использован для решения обширного числа практических задач, а соответствующие вычисления программированы, в случае нужды, на ЭВМ.

Ясский политехнический институт,
Тимишорский политехнический институт,
кафедры механики

ЛИТЕРАТУРА

1. Олевский М. Н., ДАН СССР, 1952, **82**, *2*, стр. 193—195.
2. Пановко Я. Г., Инж. сб., 1952, **XIII**, стр. 175—183.
3. Куликов Н. К., Инж. сб., 1952, **XIII**, стр. 195—197.
4. Гопп Ю. А., Инж. сб., 1954, **XVIII**, стр. 215—223.
5. Ergin E. I., J. Appl. Mech., 1956, **23**, *4*, pp. 69—73.
6. Андронов А. А. и др., *Теория колебаний*. Физматгиз, М., 1959.
7. Попов Г. И., В сб. *Исследования по теории сооружений*, 1959, **VIII**, *1*, стр. 63.
8. Braier A., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1959, **V (IX)**, *1—2*, pp. 135—142.
9. Левин С. С., в сб. *Исследования по теории сооружений* 1960, **IX**, стр. 115.
10. Гольденблат И. И. и др. *Расчет конструкций на действие сейсмических и импульсивных сил*. Госстройиздат, М., 1961.
11. Рабинович И. М., в сб. *Исследования по теории сооружений*, 1961, **X**, стр. 97.
12. Григорьев Н. В., *Нелинейные колебания элементов машин и сооружений*. Машгиз, М., 1961.
13. Коловский и др., Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и маш., 1962, *5*, стр. 101—106.
14. Mangeron D., Gabos Z., Stan I., *Fundamentele mecanicii*. Cap. IV. *Mecanica vibraţiilor*. Ed. Acad. R. P. R., Buc., 1962.
15. Бутенин Н. В., *Теория нелинейных колебаний*. Судпромгиз, Л., 1962.
16. Файзибаев Э. Ф., Сообщ. Груз. ССР АН, 1963, **XXXII**, *3*, стр. 84—88.
17. Чачава Т. Н., Сообщ. Груз. ССР АН, 1963, **XXXII**, *3*, стр. 93—97.
18. Blaquière A., Colloque intern. *Les vibrations forcées dans les systèmes non linéaires*. 1964, C. N. R. S., Marseille.
19. Blaquière A., Grivet P., Proc. IEEE, 1963, **51**, *11*, pp. 254—260.
20. Rybarski A., Bull. Acad. polon. sci., sér sci. math., astron., phys., 1962, **10**, *4*, pp. 217—220.
21. Kawalski Z., Ann. polon. math., 1963, **13**, *2*, pp. 173—204.
22. Reissig R., Colloque intern. *Nonlinear Mechanics*. Academic Press, New York-London, 1963, pp. 24—32.
23. Osinski Z., Mechan. teor. i stosow., 1963, **1**, *1*, pp. 7—36.
24. Bellman R., a. o., Proc. Acad. Sci. U. S. A., 1961, **47**, *8*, pp. 1191—1194.
25. Aris R., Denn M. M., AIAA J., 1964, **2**, *8*, pp. 1516—1524.
26. Mangeron D., *Internationale Konferenz über Nichtlineare Schwingungen*. Berlin, Akademie-Verlag, 1965, S. 76—90.
27. Beckenbach E. F., Bellman R., *Inequalities*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1965.
28. Mangeron D., Colloque intern. *Nonlinear Mechanics*. АН УССР, Киев, **I**, 1963, pp. 347—350.

METODĂ DE APROXIMARE POLIGONALĂ PENTRU SISTEMELE CU CARACTERISTICĂ NELINIARĂ

(Rezumat)

Autorii studiază în cadrul problemelor de calcul numeric, interesînd mecanica tehnică a vibraţiilor, problema de aproximare poligonală pentru sistemele cu caracteristică neliniară. Rezultatele obţinute prin aproximări prin poligoane continue sau discontinue, generalizînd, în particular, un şir de rezultate anterioare obţinute de E. I. Ergin [5], Ia. G. Panovko [2] ş. a., se pretează pentru programări la maşinile de calcul electronice cifrice.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. D. 518.43

FORME INTEGRALI DEL RESTO NELL'APPROSSIMAZIONE POLINOMIALE TAYLORIANA PLURIDIMENSIONALE

DI

MALCA BERCOVICI, ARSENIE OPREA e FLORIN POTERAŞU *)

Estratto dalla communicazione presentata in sessione scientifica dell'Istituto miniero di Petroşani, di 7 — 8 febbraio 1966

1. Nell'ambito dei svariatissimi domini di Matematica pura ed applicata, il Calcolo numerico deve pur'esso la sua attrezzatura odierna, atta ad essere prelevata dai centri calcolatrici elettroniche, all'Illustre Accademico Linceo Mauro P i c o n e, il quale ne ha cristallizzato il suo fondamento sulla base profonda dell'Analisi funzionale nel Suo oramai classico *Trattato di Analisi Matematica* [1] e ne ha promosso un rapido sviluppo di esso calcolo in tutt'un insieme di lavori eseguiti sotto la Sua geniale guida nel quadro dell' INAC da Lui creato [2], [3] e diretto poscià per un periodo di oltre tre decenni.

Alla base del quadro della determinazione di varie forme del resto spettante nel dominio di analisi funzionale lineare al probleme generale di approssimazione [4], [5] sta il seguente

T e o r e m a (di Picone) [1, pp. 668—669]. *Se* $f(x_1, x_2, ..., x_p)$ *è una funzione del punto* $X(x_1, x_2, ..., x_p)$ *con coordinate reali* $x_1, x_2, ..., x_p$, *continua con le sue derivate parziali fino a quelle d'ordine* $n+1$ *incluse, nel campo connesso* A *dello spazio* $S_{(p)}$ *a* p *dimensioni, per il resto* $R_n(X)$, *d'indice* n, *della sua formola di T a y l o r riferita al punto* $X_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_p^0)$ *di* A, *sussiste in* A *l'eguaglianza*

$$(1)\quad R_n(X) = (C)\int_{X_0}^{X} \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_p=n} \frac{(x_1-\xi_1)^{k_1}(x_2-\xi_2)^{k_2}\ldots(x_p-\xi_p)^{k_p}}{k_1!\,k_2!\ldots k_p!}\,\mathrm{d}\,\frac{\partial^n f}{\partial\xi_1^{k_1}\partial\xi_2^{k_2}\ldots\partial\xi_p^{k_p}},$$

C designando una qualsivoglia curva, composta di archi di classe uno, tracciata in A, *terminata ai punti* X_0 *e* X. *Si ha, cioè, in* A

[1]) Gli autori esprimono al Professore M a n g e r o n i sensi di gratitudine per i consigli concessigli durante la preparazione del presente lavoro.

$$f(X) = f(X_0) + \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)_0 (x - x_k^0) + \ldots +$$

$$(2) \quad + \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_p=n} \left(\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_p^{k_p}}\right) \frac{(x_1 - x_1^0)^{k_1} (x_2 - x_2^0)^{k_2} \ldots (x_p - x_p^0)^{k_p}}{k_1!\, k_2! \ldots k_p!} +$$

$$+ (C) \int_{X_0}^{X} \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_p=n} \frac{(x_1 - \xi_1)^{k_1} (x_2 - \xi_2)^{k_2} \ldots (x_p - \xi_p)^{k_p}}{k_1!\, k_2! \ldots k_p!} \, \mathrm{d} \frac{\partial^n f}{\partial \xi_1^{k_1} \partial \xi_2^{k_2} \ldots \partial \xi_p^{k_p}},$$

dove, col simbolo $(\partial^\nu f / \partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_p^{k_p})_0$, $(\nu = 1, 2, \ldots, n;\ k_1 + k_2 + \ldots + k_p = \nu)$, *è stato indicato il valore della derivata* $\partial^\nu f / \partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_p^{k_p}$ *nel punto* X_0, *e con* $\partial^n f / \partial \xi_1^{k_1} \partial \xi_2^{k_2} \ldots \partial \xi_p^{k_p}$ *il valore della stessa derivata nel punto* $\Xi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ *della curva* C.

2. In ciò che segue gli autori presentano, nelle ipotesi di cui sopra, nel caso della considerazione della formola del tipo di Taylor, limitandoci, per economia di spazio, ai casi di $n = 3, 4$, le seguenti espressioni integrali del resto nell'approssimazione Tayloriana pluridimensionale:

$$(3) \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_p) - T(x_1, x_2, \ldots, x_p) = R(x_1, x_2, \ldots, x_p),$$

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_p) =$$

$$(4) \qquad \sum_{i_p=0}^{k_p} \sum_{i_{p-1}=0}^{k_{p-1}} \cdots \sum_{i_1=0}^{k_1} \underset{x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_p^{i_p}}{f^{(i_1+i_2+\ldots+i_p)}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0)} \frac{(x_1 - x_1^0)^{i_1} (x_2 - x_2^0)^{i_2} \ldots (x_p - x_p^0)^{i_p}}{i_1!\, i_2! \ldots i_p!},$$

$$(5) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_p} T(x_1, x_2, \ldots, x_p)}{\partial x_1^{\nu_1} \partial x_2^{\nu_2} \ldots \partial x_p^{\nu_p}}\right)_0 = \left(\dfrac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_p} f(x_1, x_2, \ldots x_p)}{\partial x_1^{\nu_1} \partial x_2^{\nu_2} \ldots \partial x_p^{\nu_p}}\right), \\ \left(\dfrac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_p} R(x_1, x_2, \ldots, x_p)}{\partial x_1^{\nu_1} \partial x_2^{\nu_2} \ldots \partial x_p^{\nu_p}}\right)_0 = 0, \\ (\nu_i = 0, 1, \ldots, k_i;\ i = 1, 2, \ldots, p), \end{cases}$$

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^{k_i+1} R(x_1, x_2, \ldots, x_p)}{\partial x_i^{k_i+1}} = \dfrac{\partial^{k_i+1} f(x_1, x_2, \ldots, x_p)}{\partial x_i^{k_i+1}}, \ldots, \\ \dfrac{\partial^{k_1+k_2+\ldots k_p+p} R(x_1, x_2, \ldots, x_p)}{\partial x_1^{k_1+1} \partial x_2^{k_2+1} \ldots \partial x_p^{k_p+1}} = \dfrac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_p+p} f(x_1, x_2, \ldots, x_p)}{\partial x_1^{k_1+1} \partial x_2^{k_2+1} \ldots \partial x_p^{k_p+1}}, \end{cases}$$

$$(7) \qquad 2R(x_1, x_2, x_3) = \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{(x_1 - \xi_1)^{k_1}}{k_1!} \cdot \frac{\partial^{k_1+1} f_1(\xi_1, x_2, x_3)}{\partial \xi_1^{k_1+1}} \, \mathrm{d}\xi_1 +$$

$$+\int_{x_2^0}^{x_2}\frac{(x_2-\xi_2)^{k_2}}{k_2!}\cdot\frac{\partial^{k_2+1}f_2(x_1,\xi_2,x_3)}{\partial\xi_2^{k_2+1}}\,d\xi_2+\int_{x_3^0}^{x_3}\frac{(x_3-\xi_3)^{k_3}}{k_3!}\cdot\frac{\partial^{k_3+1}f_3(x_1,x_2,\xi_3)}{\partial\xi_3^{k_3+1}}d\xi_3-$$

(7)

$$-\int\cdots\int_{X_0}^{X}\frac{(x_1-\xi_1)^{k_1}(x_2-\xi_2)^{k_2}(x_3-\xi_3)}{k_1!\,k_2!\,k_3!}\cdot\frac{\partial^{k_1+k_2+k_3+3}f(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{\partial\xi_1^{k_1+1}\partial\xi_2^{k_2+1}\partial\xi_3^{k_3+1}}\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3,$$

(8)
$$\begin{cases} f_1(\xi_1,x_2,x_3)=f(\xi_1,x_2,x_3)+f(\xi_1,x_2^0,x_3^0),\\ f_2(x_1,\xi_2,x_3)=f(x_1,\xi_2,x_3)+f(x_1^0,\xi_2,x_3),\\ f_3(x_1,x_2,\xi_3)=f(x_1,x_2,\xi_3)+f(x_1^0,x_2^0,\xi_3), \end{cases}$$

$$3R(x_1,x_2,x_3,x_4)=\int_{x_1^0}^{x_1}\frac{(x_1-\xi_1)^{k_1}}{k_1!}\cdot\frac{\partial^{k_1+1}f_1(\xi_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial\xi_1^{k_1+1}}\,d\xi_1+$$

$$+\int_{x_2^0}^{x_2}\frac{(x_2-\xi_2)^{k_2}}{k_2!}\cdot\frac{\partial^{k_2+1}f_2(x_1,\xi_2,x_3,x_4)}{\partial\xi_2^{k_2+1}}\,d\xi_2+\int_{x_3^0}^{x_3}\frac{(x_3-\xi_3)^{k_3}}{k_3!}\cdot\frac{\partial^{k_3+1}f_3(x_1,x_2,\xi_3,x_4)}{\partial\xi_3^{k_3+1}}d\xi_3+$$

(9)
$$+\int_{x_4^0}^{x_4}\frac{(x_4-\xi_4)^{k_4}}{k_4!}\cdot\frac{\partial^{k_4+1}f_4(x_1,x_2,x_3,\xi_4)}{\partial\xi_4^{k_4}}\,d\xi_4-$$

$$-\int\cdots\int_{X_0}^{X}\frac{(x_1-\xi_1)^{k_1}(x_2-\xi_2)^{k_2}(x_3-\xi_3)^{k_3}(x_4-\xi_4)^{k_4}}{k_1!\,k_2!\,k_3!}\times$$

$$\times\frac{\partial^{k_1+k_2+k_3+k_4+4}f(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)}{\partial\xi_1^{k_1+1}\partial\xi_2^{k_2+1}\partial\xi_3^{k_3+1}\partial\xi_4^{k_4+1}}\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3\,d\xi_4,$$

(10)
$$\begin{cases} f_1(\xi_1,x_2,x_3,x_4)=f(\xi_1,x_2,x_3,x_4)+f(\xi_1,x_2^0,x_3,x_4^0)+f(\xi_1,x_2,x_3^0,x_4^0),\\ f_2(x_1,\xi_2,x_3,x_4)=f(x_1,\xi_2,x_3,x_4)+f(x_1^0,\xi_2,x_3,x_4^0)+f(x_1^0,\xi_2,x_3^0,x_4^0),\\ f_3(x_1,x_2,\xi_3,x_4)=f(x_1,x_2,\xi_3,x_4)+f(x_1^0,x_2^0,\xi_3,x_4)+f(x_1^0,x_2^0,\xi_3,x_4^0),\\ f_4(x_1,x_2,x_3,\xi_4)=f(x_1,x_2,x_3,\xi_4)+f(x_1^0,x_2,x_3^0,\xi_4)+f(x_1,x_2^0,x_3^0,\xi_4). \end{cases}$$

3. In una Nota futura vi saranno esposti vari risultati concernenti il resto degli sviluppi in serie di autofunzioni degli operatori autocogniugati alle derivate totali nel senso di Picone [6], studiati sistematicamente dal Mangeron [7], [8], ed utilizzati poscià dai numerosi scienziati tra cui J. Favard [9], R. Bellman [10], Yu. M Berezanski [11], L. E.

Krivošein [12], T. Kamytov [13] ed altri ancora ed aventi per il prototipo il sistema differenziale polivibrante

$$[A(X)u'(X) + \lambda B(X)u(X)]' + \lambda[B(X)u'(X) + C(X)u(X)] = 0,$$
$$u(X)_{\mathrm{Fr}R^*} = 0, \quad R^* = \{x_i^* \leqslant x_i \leqslant x_i^{**}\}, \quad (i = 1, 2, ..., p),$$

di cui novità consta nel fatto che R^*, è un dominio „rattangolare" a p dimensioni ed il simbolo denota la derivata totale prima

$$u' \equiv \partial^p u / \partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_p,$$

mentre in un'altra Nota di prossima pubblicazione i risultati conseguiti sono stati collegati con la cospicua mole di risultati pubblicati nell'ambito della Scuola di Calcolo numerico, diretta a Cluj dall'accademico. Popoviciu [14]...[17].

Istituto politecnico di Iaşi,
Ia e IIa Cattedra di Matematiche

BIBLIOGRAFIA

1. Picone M., Fichera G., *Trattato di Analisi Matematica.* Vol. **II**, Tumminelli, Roma, 1955.
2. Picone M., *Sur l'oeuvre mathématique de l'Institut National Italien pour les Applications du Calcul.* III-e Congrès des Mathématiciens de l'U.R.S.S., Moscou, 1956.
3. „ * * *Le onoranze a Mauro Picone*, Roma, Città universitaria, 1956.
4. Collatz L., *Funktionalanalysis und Numerische Mathematik.* Springer-Verlag, Berlin, 1964.
5. Yosida Kôsaku, *Functional Analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1965.
6. Picone M., Ann. Sci. Univ. Jassy, Section I (Math., Phys., Chimie), 1940, **XXVI**, *1*, pp. 183–232.
7. Mangeron D., C.r. Acad. Sci., Paris, 1937, **204**, pp. 94—96, 544—546, 1022—1024; Ibid., 1962, **255**, pp. 2894—2896.
8. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1958, **IV** (**VIII**), *3—4*, pp. 73—78.
9. Favard J., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI** (**XV**), *1—2*, pp. 17—20.
10. Bellman R., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X** (**XIV**), *3—4*, pp. 5—10.
11. Березанский Ю. М., ДАН СССР, 1958, **122**, *6*, стр. 959–962.
12. Кривошеин Л. Е., Материалы 12-й научной сессии, Мат., Кирг. Гос. Ун-т, 1964, стр. 21—24.
13. Камытов Т., Доклады III-й Сиб. Конф. Мат. механ., Томский Гос. Ун-т, 1964, стр. 113—115.
14. Popoviciu T., Mathematica, Cluj, 1959, **1** (**24**), pp. 95—142.
15. Stancu D. D., St. şi cerc. şt., Matem., Acad. R.P.R., filiala Cluj, 1960, **11**, *1*, pp. 177-183.
16. Ionescu D. V., Colloque d'approximation des fonctions, Acad. R. P. R., Cluj, Inst. Calcul, 15—19 XI 1963, Programme.
17. Mangeron D., Colloque d'Analyse fonctionnelle, Acad. R.P.R., Cluj, Inst. Calcul, 1–5 VII 1965, Programme.

FORME INTEGRALE ALE RESTULUI ÎN APROXIMAREA POLINOMIALĂ TAYLORIANĂ ÎN MAI MULTE DIMENSIUNI

(Rezumat)

Autorii, luînd ca punct de plecare o teoremă a lui Picone [1, pp. 668—669] şi folosind unele rezultate din domeniul calculului numeric aparţinînd lui D. Mangeron [7], [8] sau şcolii de la Cluj, condusă de acad. T. Popoviciu [14]...[17], stabilesc forme integrale ale restului în aproximarea polinomială taylorianã în mai multe dimensiuni.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. D. 519.242

TECHNIQUES DE PROLONGEMENT PAR CONTINUITÉ; APPLICATION À L'ÉTUDE DE LA CONTINUITÉ DES FONCTIONS ALÉATOIRES NORMALES

PAR

JEAN DELPORTE

1. Dans tout ce qui suit, on désignera par $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ un espace de probabilité, triplet de l'événement sûr Ω, d'une σ-algèbre d'événements $\mathcal{S}$ et d'une mesure probabiliste P [7].

Dans un travail récent [3], nous nous sommes proposés d'étendre aux séries de fonctions aléatoires normales indépendantes, presque sûrement continues un critère de convergence presque sûre, bien connu, de A. N. Kolmogoroff [6] et [7]:

Étant donnée une suite $\{\xi_n(\omega)\}$ *de variables aléatoires indépendantes, d'espérances mathématiques nulles, de variances* σ_n^2, $\sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_n^2 < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\omega)$ *converge presque sûrement.*

Ce problème nous a d'abord conduit à définir des conditions suffisantes assurant la continuité presque sûre sur un intervalle donné $[a, b]$ de la version séparable [4], d'une fonction aléatoire normale, d'espérance mathématique nulle, de covariance $\Gamma(t, s)$.

2. Ce problème nous a mené à reprendre les techniques classiques de prolongement par continuité d'une fonction uniformément continue sur un sous ensemble dénombrable dense de $[a, b]$ en une fonction continue sur $[a, b]$.

Nous avons supposé que $[a, b] = [0, 1]$ et que la fonction considérée était nulle en 0 et 1 [1]).

Il est alors bien connu ([3], [5] et [8]) que toute fonction continue sur $[0, 1]$, nulle en 0 et 1, est la somme d'une série uniformément convergente de fonctions triangulaires sous la forme

---

[1]) Cette condition ne diminue en rien la généralité; elle est introduite par raison de simplicité.

$$x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \eta_n e_n . \tag{2.1}$$

Les fonctions $e_n(t)$ ne sont autres que les fonctions triangulaires de J. Schauder [8] et si l'on pose pour tout entier n positif $n = 2^{q-1} + p$, où $0 \leqslant p \leqslant 2^{q-1}$, η_n est alors donné par :

$$\eta_n = x\left(\frac{2p+1}{2^q}\right) - \frac{1}{2}\left[x\left(\frac{p}{2^{q-1}}\right) + x\left(\frac{p+1}{2^{q-1}}\right)\right]. \tag{2.2}$$

Nous introduisons alors les notations suivantes :

$$x_n(t) = \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j(t), \tag{2.3}$$

$$A_{q,h} = \sup_{p,\,l} \left| x\left(\frac{p}{2^q} + \frac{l}{2^{q+h}}\right) - x\left(\frac{p}{2^q}\right)\right|, \tag{2.4}$$

où $0 \leqslant p < 2^q$, $1 \leqslant l \leqslant 2^h$,

$$A'_{q_k} = \sup_{p,\,l} \left| x\left(\frac{p}{2^{q_k}} + \frac{l}{2^{q_k+1}}\right) - x\left(\frac{p}{2^{q_k}}\right)\right|, \tag{2.5}$$

$\{q_k\}$ désignant une suite croissante d'entiers positifs, tendant vers l'infini avec k, p et l étant des entiers tels que :

$$0 \leqslant p < 2^{q_k}, \quad 1 \leqslant l \leqslant 2^{q_{k+1}-q_k}.$$

On démontre alors les deux théorèmes suivants :

Théorème 2A. *Pour que la suite $x_n(t)$ converge uniformément vers une fonction continue $x(t)$, il faut et il suffit qu'une sous suite x_{n_k} converge uniformément. Cette condition équivaut à la condition de continuité uniforme de $x(t)$ sur l'ensemble dyadique* $\mathfrak{D}$

$$\lim_{q \text{ et } h \to +\infty} A_{q,h} = 0. \tag{2.6}$$

Théorème 2B. *Pour qu'une fonction $x(t)$ définie sur l'ensemble dyadique $\mathfrak{D}$ y soit uniformément continue, il faut et il suffit qu'il existe une suite $\{q_k\}$ d'entiers positifs, définie comme ci-dessus, telle que*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} A'_{q_k} < +\infty . \tag{2.7}$$

Si tel est le cas et si $\|x\|$ désigne la norme de la convergence uniforme, on a de plus :

$$\|x\| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} A'_{q_k} . \tag{2.8}$$

3. Nous nous sommes efforcés, étant donné une covariance réelle $\Gamma(t, s)$ continue sur $[0,1] \times [0,1]$, nulle sur la frontière de ce carré [2], de rechercher des conditions suffisantes, formulées en termes de module de continuité de cette covariance, assurant la continuité presque sûre de la version séparable de la fonction aléatoire normale, d'espérance nulle, associée à cette covariance.

Pour ceci, nous avons utilisé les deux lemmes suivants:

Lemme 3A [7, p. 173]. *Soit* $\{\xi_n\}$ *une suite de variables aléatoires intégrables telles que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} E|\xi_n| < +\infty ; \tag{3.1}$$

alors $\sum_{n=1}^{+\infty} |\xi_n| < \infty$ *presque sûrement.*

Lemme 3B [3, p. 44]. *Soit* $\{\xi_n\}$, $n=1,2,\ldots, N$, *une suite de variables aléatoires normales, d'espérances mathématiques nulles, de variances* $\sigma_1^2,\ldots,\sigma_N^2$; *alors on a l'inégalité:*

$$E\left[\sup_{1\leq n\leq N} |\xi_n|\right] \leqslant C\,[\log(1+N)]^{1/2} \sup_{1\leq n\leq N} \sigma_n . \tag{3.2}$$

Introduisons alors les notations suivantes:

$$\gamma(t, t+h) = \Gamma(t+h, t+h) - 2\Gamma(t, t+h) + \Gamma(t, t), \tag{3.3}$$

$$G'_{q_k} = \sup_{p,l} \gamma^{1/2}\left(\frac{p}{2^{q_k}} , \frac{p}{2^{q_k}} + \frac{l}{2^{q_{k+1}}}\right), \tag{3.4}$$

où p et l sont définis comme en (2.5).

Il découle alors facilement du théorème 2 B et des lemmes 3 A et 3 B la proposition suivante

Proposition 3C. *Soit* $\Gamma(t, s)$ *une covariance continue sur* $[0,1] \times [0,1]$, *nulle sur la frontière, telle que:*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{q_{k+1}}\, G'_{q_k} < +\infty . \tag{3.5}$$

Alors la version séparable $\tilde{x}(t, \omega)$ *du processus gaussien d'espérance nulle et de covariance* $\Gamma(t, s)$ *est presque sûrement continue sur* $[0,1]$. *On a de plus*

$$E\|x\| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} E(A'_{q_k}) \leqslant C \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{q_{k+1}}\, G'_{q_k} .$$

---

[2] v. [1])

On en déduit facilement le corollaire suivant

Corollaire 3D. *Soit* $\Gamma(t,s)$ *une covariance continue sur* $[0,1]\times[0,1]$, *nulle sur la frontière, telle que*

$$\gamma(t,t+h)=0(|\log|h||^{-\alpha}),\quad \alpha>1.$$

Alors la version séparable $\tilde{x}(t,\omega)$ *au sens de la proposition* 3 C *est presque sûrement continue.*

Ce résultat améliore — dans le cas des fonctions aléatoires normales — un théorème classique de A. N. Kolmogoroff et E. Slutsky [9, p. 193].

4. Utilisant la majoration de la proposition 3C, il nous est maintenant possible de résoudre le problème posé.

Nous avons en effet démontré dans notre Note [2] le théorème suivant

Théorème 4A. *Soit* $\{x_n\}$ *une suite d'éléments aléatoires indépendants, d'espérances mathématiques nulles, à valeurs dans un espace de Banach* $\mathfrak{X}$ *et tels que*

$$\Big\|\sum_{\tau\in I}x_\tau\Big\|\in L^r(\Omega),\quad r\geqslant 1, \tag{4.1}$$

pour tout sous ensemble fini d'indices I; *si*

$$E\Big\|\sum_{j=n+1}^{n+k}x_j\Big\|^r\to 0 \tag{4.2}$$

lorsque n *et* k *tendent vers l'infini, alors la série* $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ *converge fortement presque sûrement.*

Ce résultat généralise à tous les espaces de Banach le critère classique de A. N. Kolmogoroff; on peut en déduire à l'aide de la proposition 3 C une forme plus maniable pour l'espace de Banach $C[0,1]$ de la manière suivante:

Théorème 4B. *Soit* $\{x_n(t,\omega)\}$ *une suite de fonctions aléatoires normales indépendantes, presque sûrement continues, d'espérances nulles, de covariances* $\Gamma_n(t,s)$.

Si les conditions

$$\Gamma(t,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\Gamma_n(t,t)<+\infty,\ \textit{uniformément en } t \tag{4.3}$$

et

$$\gamma(t,t+h)=0(|\log|h||^{-\alpha}),\quad \alpha>1, \tag{4.4}$$

sont satisfaites, alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n(t,\omega)$ *converge uniformément presque sûrement sur* $[0,1]$; *sa somme* $x(t,\omega)$ *est une fonction aléatoire normale presque sûrement continue, de covariance* $\Gamma(t,s)$.

Il est alors possible de déduire du théorème de Mercer [10, p. 544] le résultat suivant:

Théorème 4C. *Soit* $\Gamma(t,s)$ *une covariance continue vérifiant la condition* (4.4) *et soit*

$$\Gamma(t,s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \varphi_n(t)\,\varphi_n(s)$$

son développement en série de Mercer; alors la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_n}\,\varphi_n(t)\,\xi_n(\omega)$$

(*où* $\{\xi_n(\omega)\}$ *désigne une suite de variables aléatoires normales indépendantes réduites*) *converge uniformément presque sûrement, sa somme* $x(t,\omega)$ *presque sûrement continue, d'espérance nulle, admet pour covariance* $\Gamma(t,s)$.

Les résultats qui précèdent peuvent être utilisés pour l'étude des fonctions stationnaires; ils permettent notamment de prouver facilement la convergence uniforme presque sûre de la série définissant la fonction aléatoire du mouvement brownien de Wiener-Lévy (voir notre Note [2]).

Nous nous proposons dans un travail ultérieur de les généraliser aux fonctions de 2 ou n variables.

Reçu le 5 II 1965

Faculté libre des Sciences,
Lille, France

BIBLIOGRAPHIE

1. Delporte J., C. R. Acad. Sc., Paris, 1963, **256**, p. 3949—3952.
2. — C. R. Acad. Sc., Paris, 1963, **257**, p. 35—37.
3. — Ann. Inst. Henri-Poincaré, 1964, **I**, *2*, p. 1—105.
4. Doob J. L., *Stochastic processes*. J. Wiley, N. Y., 1959.
5. Kampé de Fériet J., J. Math. pures et appl., 1960, **39**, p. 97—163.
6. Kolmogoroff A. N., Math. Ann., 1928, **99**, S. 303—319.
7. Loeve M., *Probability Theory*. Van Nostrand, N. Y., 1955.
8. Schauder J., Math. Z., 1937, **26**, S. 47—65.
9. Slutsky E., Giornale Inst. Ital. Attuari, 1937, **8**, p. 183—199.
10. Zaanen A. C., *Linear Analysis*. North. Holland Publish. Co., Amsterdam, 1960.

TEHNICA PRELUNGIRII PRIN CONTINUITATE; APLICAŢII LA STUDIUL CONTINUITĂŢII FUNCŢIILOR ALEATOARE NORMALE

(Rezumat)

Autorul, continuînd ordinea de idei a unei lucrări recente proprii, consacrată extinderii la serii de funcţii aleatoare normale independente aproape sigur continue a unui criteriu de convergenţă aproape sigură a lui A. N. Kolmogorov [3], [6], [7], reia în studiu, în această Notă, procedeele clasice de prelungire prin continuitate a unei funcţii uniform continue pe un subansamblu enumerabil dens din $[a, b]$ într-o funcţie continuă pe $[a\ b]$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

УДК 519.21

ОБОБЩЕННАЯ ИНТЕГРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ТЕОРИИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

И. Д. ЧЕРКАСОВ

1. При $k \geqslant 2$ введем в рассмотрение k-мерные векторы m, p, q, x с координатами m_i, p_i, q_i, x_i, $(i = 1, \ldots, k)$, причем $q_i = 1 - p_i$, $p_1 + \ldots + p_k = 1$, а m_i — целые неотрицательные числа $(m_1 + \ldots + m_k = n)$. Пусть производится n независимых испытаний, каждое из которых имеет k несовместимых исходов A_r, $(r = 1, \ldots, k)$, с вероятностями p_r соответственно. Через μ_n обозначим случайный вектор с координатами μ_{in}, показывающими число появлений события A_i в n последовательных испытаниях.

Если a_n — вектор с координатами $a_{in}(m_i) = (m_i - np_i)/\sqrt{np_iq_i}$, а G — некоторая область плоскости S, имеющей уравнение $(0 < p_i < 1$ $i = 1, \ldots, k)$

$$x_1\sqrt{p_1q_1} + \ldots + x_k\sqrt{p_kq_k} = 0, \tag{1}$$

то через $W_n(G)$ будем обозначать вероятность того, что $\xi_n \in G$, (ξ_n — случайный вектор с координатами $\xi_{in} = a_{in}(\mu_{in})$). Как известно, равномерно относительно G (см. [1, стр. 87-94]:

$$\lim_{n \to \infty} W_n(G) = W(G), \tag{2}$$

где

$$W(G) = \int_G \varphi(x)\,dx,$$

а

$$\varphi(x) = \sqrt{(2\pi)^{1-k}q_1 \ldots q_k/(p, q)}\exp\left\{-\frac{1}{2}(q_1x_1^2 + \ldots + q_kx_k^2)\right\}.$$

2. В целях обобщения равенства (2) рассмотрим случайную величину $\eta_n = f_n(\mu_n)$, где $f_n(m)$ — функция, определенная и однозначная для всех вышевведенных векторов m, $(n = 1, 2, ...)$. Обозначим через $M_{W_n}(f_n/G)$ $(M_W(f/G))$ условное математическое ожидание случайной величины η_n, $(\eta = f(\xi))$, при условии, что $\xi_n \in G$, $(\xi \in G)$, (считая, что оно существует). При этом ξ_n и ξ — случайные векторные величины, распределенные по законам $W_n(G)$ и $W(G)$ соответственно. Обозначим, кроме того,

$$v_n(\xi_n) = f_n\left(n\left(p_1 + \xi_{1n}\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n}}\right), ..., n\left(p_k + \xi_{kn}\sqrt{\frac{p_k q_k}{n}}\right)\right).$$

Ясно, что $\eta_n = v_n(\xi_k)$; предположим, что

$$v_n(a_n) = f(a_n) + \alpha_n(m), \tag{3}$$

где $f(x)$ — функция, определенная в S, а $\alpha_n(m) \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно относительно a_n, заключенного в ограниченной части плоскости S.

Теорема. *Если функция $f(x)$ ограничена в ограниченной области G и существует конечное математическое ожидание $M_W(f/G)$, то равномерно относительно области G, расположенной в конечной части плоскости S,*

$$\lim_{n\to\infty} M_{W_n}(f_n/G) = M_W(f/G). \tag{4}$$

Доказательство. Так как

$$M_{W_n}(f_n/G)\, P\{\xi_n \in G\} = \sum_{a_n \in G} f_n(m)\, P_n(m),$$

то, учитывая (2), мы убеждаемся, что для справедливости доказываемой теоремы достаточно доказать равенство

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{a_n \in G} v_n(a_n)\, \pi_n(a_n) = \int_G f(x)\, \varphi(x)\, dv_x; \tag{5}$$

при этом введено обозначение

$$\pi_n(a_n) = P_n(np_1 + a_{1n}\sqrt{np_1 q_1}, ..., np_k + a_{kn}\sqrt{np_k q_k}) = P\{\mu_n = m\}.$$

Существование интеграла в правой части (5) вытекает из существования $M_W(f/G)$ и из того, что этот интеграл равен $W(G)\, M_W(f/G)$. Справедливость равенства (5) доказывается следующим образом. Учитывая равенство (3), локальную предельную теорему и ограниченность функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, можно записать:

$$\sum_{a_n \in G} v_n(a_n)\, \pi_n(a_n) = \sum_{a_n \in G} \varphi(a_n)\, f(a_n) \Delta_n v + \delta_n, \tag{6}$$

где

$$\Delta_n v = \frac{\sqrt{n^{k-1}(p, q)}}{(n+1)\ldots(n+k-1)\sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} p_i q_i}}$$

есть элементарный объем тех ячеек области G, где вычисляются значения $\varphi(a_n)$ и $f(a_n)$, а $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Теперь из равенства (6) ввиду существования интеграла (5), при $n \to \infty$ вытекает справедливость равенства (5), т. е. теоремы.

Отметим, что интегральная предельная теорема (2) получается из (5) при $f_n(m) \equiv 1$.

Кроме того, отметим, что если $f(x)$ ограничена на всей плоскости S, то в формулировке доказанной теоремы выражение „расположенной в конечной части плоскости S" можно опустить. Разумеется, теорему можно обобщить и на неограниченные функции $f(x)$, но на этом мы не останавливаемся.

3. Пусть $F(y)$ — непрерывная или имеющая не более счетного множества конечных скачков функция, определенная и ограниченная на сегменте $[0,1]$. Возьмем $k = 2$, $m_1 = m$, $m_2 = n - m$, $p_1 = y = q_2$, $p_2 = 1 - y = q_1$, $f_n(m) = F(m/n)$; тогда в случае непрерывности $F(y)$ получим:

$$v_n(a_n) = F\left(a_{1n}\sqrt{\frac{y(1-y)}{n}} + y\right) = F(y) + \alpha_n(m).$$

Значит, $f(x) = F(y)$ и из (5) при $G = G_j \to S$, $j \to \infty$, мы получим:

$$\lim_{n\to\infty} B_n(F, y, G_j) = F(y)\ W(G_j) \to F(y),\ j \to \infty, \tag{7}$$

где B_n — обобщенные полиномы Бернштейна, т. е.

$$B_n(F, y, G_j) = \sum_{a_n \in G_j} F\left(\frac{m}{n}\right)\frac{n!}{m!\,(n-m)!}\, y^m (1-y)^{n-m}.$$

Если в (7) взять $G_j = S$, то мы получим известную теорему Вейерштрасса, впервые доказанную вероятностным путем в [2].

Пусть в точке $y_0 \in (0, 1)$ функция $F(y)$ имеет скачок. Представим S в виде суммы $S = S_1 + S_2$, причем $x_1 < 0$ для S_1 и $x \geqslant 0$ для S_2. Тогда из (4) при $G = S$ мы получим

$$\lim_{n\to\infty} B_n(F, y) = F(y_0 - 0)\ W(S_1) + F(y_0 + 0)\ W(S_2) = \frac{F(y_0 - 0) + F(y_0 + 0)}{2}, \tag{8}$$

где $B_n(F, y)$ — обычные полиномы Берштейна.

Пусть $p_i = y_i$, $(i = 1, \ldots, k)$, $y_1 + \ldots + y_k = 1$, а $F(y)$ функция, определенная и ограниченная в области $y_i \geqslant 0$, $y_1 + \ldots + y_k = 1$. Рассмотрим полином

$$B_n(F, y, G_j) = \sum_{a_n \in G_j} \frac{n!\, y_1^{m_1} \dots y_k^{m_k}}{m_1! \dots m_k!} F(\varphi_1(n, m), \dots, \varphi_k(n, m)),$$

где $\varphi_1 + \dots + \varphi_k = 1$, а при $n \to \infty$ в случае ограниченности G_j функции φ_i равномерно стремятся к y_i. Тогда, если y — точка непрерывности для $F(y)$, то из (5) получаем при $G = G_j$:

$$\lim_{n\to\infty} B_n(F, y, G_j) = F(y)\ W(G_j). \tag{9}$$

При $G_j = S$, $\varphi_i = m_i/n$ из, (9) вытекает теорема 1 работы [3].

Если y_0 — точка разрыва, то из (4) при $G = S$ находим:

$$\lim_{n\to\infty} B_n(F, y_0, S) = \sum_{j=1}^{\infty} F_j(y_0)\ W(G_j) = M_W f(\xi),$$

где G_j — области, для которых $f(\xi) = F_j(y_0)$ с вероятностью 1. Ясно что (8) вытекает из последнего равенства при $k = 2$.

4. Пусть теперь $F(y)$ — непрерывная ограниченная функция в пространстве R_m, а случайные величины μ_N^i, $(N = (n_1, \dots, n_m))$, таковы, что

$$P\{\mu_N^1 = i_1, \dots, \mu_N^m = i_m\} = \varphi_N^{i_1 \dots i_m}(y) \prod_{r=1}^{m} (-1)^{i_r} \frac{1}{i_r!} x_r^{i_r},$$

где $i_r = 0, 1, 2, \dots$.Тогда, введя случайную величину

$$\eta_N = F[\mu_N^1/\chi_1(n_1), \dots, \mu_N^m/\chi_m(n_m)],$$

мы убеждаемся в том, что заключение теоремы 2 работы [4] имеет следующий вероятностный смысл:

$$\lim_{N\to\infty} M\eta_N = F(y),$$

причем сходимость равномерна в области $y_i \geqslant 0$. Эта интерпретация может оказаться полезной при изученни функций $F(y)$, разрывных в области $y_i \geqslant 0$, а также при построении условного математического ожидания $M(\eta_N/G)$.

Поступила в 9 XI 1964 г.

Нцжне-Тагильский педагогический институт, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б. Г., *Курс теории вероятностей*. 3. изд., Фузматгиз, М., 1961.
2. Бернштейн С. Н., Сообщ. Харьковского матем. общ., серия 2, 1912, **13**, стр. 1 — 2.
3. Stancu D. D., St. şi cerc. şt., Acad. R. P. R., filiala Cluj, Matem., 1960, **XI**, *2*, pp. 221 — 233.
4. Schurer F., Proc Math. Sci., 1963, **66**, *3*, pp. 313 — 327.

TEOREMĂ RELATIVĂ LA LIMITA SPERANŢEI MATEMATICE CONDIŢIONATE ŞI APLICAŢIILE EI ÎN TEORIA INTERPOLĂRII

(Rezume)

Se demonstrează egalitatea (4) şi se consideră unele aplicaţii ale ei referitoare la aproximarea funcţiilor.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 518.3

NOMOGRAME CU TRANSPARENT ORIENTAT PENTRU SISTEME DE DOUĂ ECUAŢII CU OPT, NOUĂ, ZECE ŞI UNSPREZECE VARIABILE

DE

GH. D. IONESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

Nomogramele cu transparent, ale căror principii de construcţie şi utilizare au fost introduse încă de M. d'Ocagne, oferă posibilitatea de a nomografia ecuaţii şi sisteme de ecuaţii cu un număr suficient de mare de variabile. Ne vom referi în lucrarea de faţă la nomogramele cu transparent orientat, formate din două plane, un plan fix (π) şi un plan mobil (π'), a cărui deplasare pe planul fix (π) are două grade de libertate întrucît de fiecare dată o dreaptă dată D' din planul (π') va rămîne paralelă cu o dreaptă fixă D din planul (π). Posibilitatea celor două translaţii ale planului mobil pe planul fix depinde de doi parametri — coordonatele originii sistemului de referinţă la care raportăm unul din plane, în raport cu sistemul de referinţă la care raportăm celălalt plan.

Exprimînd analitic contactele de poziţie şi de rezolvare care apar în utilizarea nomogramei, se obţin anumite relaţii atît între variabilele ce intervin în contactele respective, cît şi între cei doi parametri, de care depinde analitic poziţia planului mobil faţă de planul fix.

Eliminarea acestor parametri conduce la formele canonice ale unei ecuaţii, sau ale unui sistem de ecuaţii, cu un număr dat de variabile, care poate fi rezolvat prin nomograma respectivă. Se cunosc astfel formele canonice şi nomogramele corespunzătoare pentru ecuaţii cu patru şi cinci variabile [1] şi [2], precum şi pentru ecuaţii cu şase variabile [4] şi ecuaţii cu şapte variabile [5].

Folosind toate posibilităţile de grupare ale contactelor, duble cu duble, simple cu duble, simple cu simple etc., am determinat toate formele canonice corespunzătoare unui sistem de două ecuaţii, conţinînd de

la opt pînă la inclusiv unsprezece variabile. Fiecare formă canonică am caracterizat-o prin gruparea de contacte folosită, care apoi ne permite construcţia nomogramei corespunzătoare.

Am notat cu cifre romane contactele duble, în care cifra respectivă reprezintă numărul de elemente cotate, cu cifre arabe contactele simple de tip a [8], în care de asemenea cifra respectivă reprezintă numărul de elemente cotate şi cu p paralelismul dreptelor D' şi D.

În acest mod, folosind o primă grupare de contacte $(IV, 2', p)$, am obţinut pentru un sistem de două ecuaţii cu opt necunoscute forma canonică

$$(1)\qquad \begin{cases} F_1(f_{1,2}+f_{3,4}+f_5,\ g_{1,2}+g_{3,4}+g_5,\ z_7)=0, \\ F_2(f_{1,2}+f_{3,4}+f_6,\ g_{1,2}+g_{3,4}+g_6,\ z_8)=0, \end{cases}$$

căreia îi corespunde nomograma din fig. 1, şi a cărei utilizare se bazează pe realizarea contactelor

$$(2)\qquad P'_{3,4}\,|\!=\!|\,P_{1,2};\ P'_5\,|\!-\!|\,C_7;\ P'_6\,|\!-\!|\,C_8;\ D'\parallel D,$$

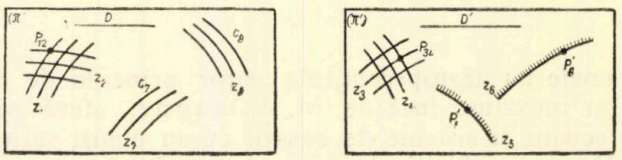


Fig. 1

dintre care, fie contactul dublu, fie cele două contacte simple, împreună cu paralelismul celor două drepte D' şi D, determină poziţia planului mobil faţă de cel fix, iar celelalte contacte din (2) sînt contactele de rezolvare, care în toate cazurile dau valorile numerice pentru două necunoscute ale sistemului (1).

Gruparea de contacte $(III, 3, 2, p)$ conduce la înlocuirea în nomograma din fig. 1 a unei familii din planul fix printr-o scară mută şi a unei scări din planul mobil printr-un cîmp binar, iar sistemul de două ecuaţii cu opt necunoscute, corespunzător acestei grupări, este

$$(3)\qquad \begin{cases} F_1(f_{1,2}+f_3+f_{4,5},\ g_{1,2}+g_3+g_{4,5},\ z_8)=0, \\ F_2(f_{1,2}+f_3+f_{6,7},\ g_{1,2}+g_3+g_{6,7})=0. \end{cases}$$

În mod analog, pentru gruparea $(IV, 2, 2, p)$ se obţine forma canonică

$$(4)\qquad \begin{cases} F_1(f_{1,2}+f_{3,4}+f_{5,6},\ g_{1,2}+g_{3,4}+g_{5,6})=0, \\ F_2(f_{1,2}+f_{3,4}+f_{7,8},\ g_{1,2}+g_{3,4}+g_{7,8})=0, \end{cases}$$

a cărei nomogramă corespunzătoare foloseşte două scări mute în planul fix, iar toate cele opt variabile sînt exprimate prin cîmpuri binare, unul în planul fix (z_1, z_2) şi celelalte două în planul mobil (fig. 2).

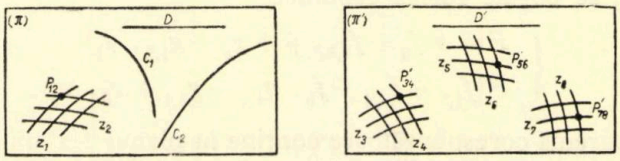


Fig. 2

Gruparea (IV, 2', II', p) conduce la utilizarea unei singure familii de linii cotate în unul din plane, exprimînd celelalte şapte variabile prin scări sau cîmpuri binare (fig. 3), iar forma canonică corespunzătoare acestei grupări este

$$\begin{cases} F(f_{1,2} + f_{3,4} + f_6,\ g_{1,2} + g_{3,4} + g_6,\ z_5) = 0, \\ F(f_6 + f_7 + f_8,\ g_6 + g_7 + g_8,\ z_5) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

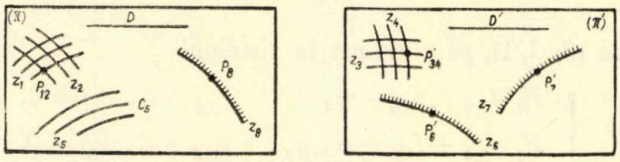


Fig. 3

Este de remarcat faptul că dacă poziţia planului mobil faţă de cel fix este asigurată de $P'_7 \mid\!=\!\mid P_8$ şi $D' \parallel D$, atunci nomograma de mai sus poate determina valorile numerice corespunzătoare chiar pentru trei necunoscute ale sistemului (5).

Transformarea familiei de linii cotate de mai sus într-o scară mută şi ca atare a unei scări într-un cîmp binar, corespunde grupării de contacte (II', IV, 2, p), iar eliminarea parametrilor de poziţie între relaţiile corespunzătoare contactelor de mai sus conduce la forma canonică

$$\begin{cases} F(f_1 + f_2 + f_{3,4},\ g_1 + g_2 + g_{3,4}) = 0, \\ F(f_{3,4} + f_{5,6} + f_{7,8},\ g_{3,4} + g_{5,6} + g_{7,8}) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

rezolvabilă prin nomograma din fig. 4.

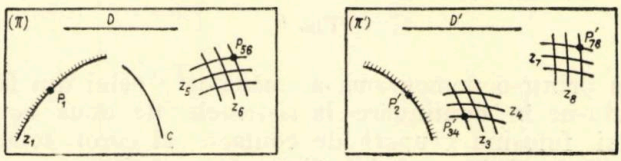


Fig. 4

Folosind în continuare un contact dublu cu patru elemente cotate, un contact simplu cu două elemente cotate în plane diferite şi un contact dublu cu două elemente cotate, însă în acelaşi plan, respectiv gruparea (IV, 2', II, p), se obţine forma canonică

$$(7)\qquad \begin{cases} F(\alpha + f_6 + f_{7,8},\ \beta + g_6 + g_{7,8},\ z_5), \\ F(f_{1,2} + f_{3,4} + f_6,\ g_{1,2} + g_{3,4} + g_6,\ z_5), \end{cases}$$

a cărei nomogramă corespunzătoare conţine în planul fix un punct necotat $Q(\alpha, \beta)$, iar cele opt variabile sînt exprimate prin cîmpuri binare, scări sau familii de linii cotate (fig. 5).

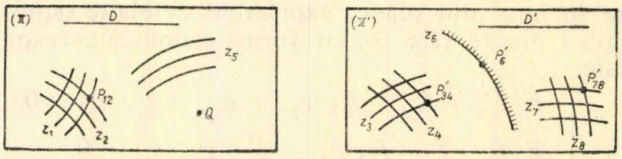


Fig. 5

Gruparea (3, 3, II, p) conduce la sistemul

$$(8)\qquad \begin{cases} F_1(f_{1,2} + f_{5,6} + \alpha,\ g_{1,2} + g_{5,6} + \beta,\ z_7) = 0, \\ F_2(f_{3,4} + f_{5,6} + \alpha,\ g_{3,4} + g_{5,6} + \beta,\ z_8) = 0, \end{cases}$$

căruia îi corespunde o nomogramă uşor de utilizat, deoarece planul mobil conţine puţine elemente cotate (fig. 6), în timp ce gruparea (IV, 2, II, p) exprimă de data aceasta cele două variabile z_7, z_8 ale sistemului (8) pentru un cîmp binar şi mai introduce încă un element necotat (o scară mută) pe lîngă punctul $Q(\alpha, \beta)$; forma canonică corespunzătoare acestei grupări

$$(9)\qquad \begin{cases} F(f_{1,2} + f_{3,4} + f_{5,6},\ g_{1,2} + g_{3,4} + g_{5,6}) = 0, \\ F(\alpha + f_{5,6} + f_{7,8},\ \beta + g_{5,6} + g_{7,8}) = 0, \end{cases}$$

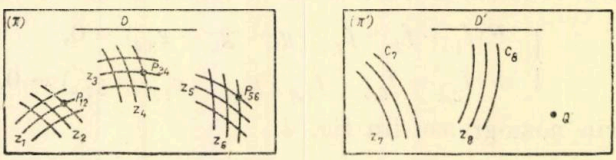


Fig. 6

este rezolvată printr-o nomogramă asemănătoare celei din fig. 6.

Referindu-ne în continuare la sistemele de două ecuaţii cu nouă necunoscute şi folosind grupări de contacte al căror total de elemente cotate să fie nouă, obţinem mai întîi forma canonică

$$\begin{cases} F_1(f_{1,2}+f_{3,4}+f_{5,6},\ g_{1,2}+g_{3,4}+g_{5,6},\ z_7)=0, \\ F_2(f_{1,2}+f_{3,4}+f_8,\ g_{1,2}+g_{3,4}+g_8,\ z_9)=0, \end{cases} \tag{10}$$

corespunzătoare grupării (IV, 3, 2′, p).

Nomograma corespunzătoare acestei forme canonice (fig. 7), utilizată prin folosirea contactelor $P'_{3,4}\,|\!=\!|\,P_{1,2}$; $P'_{5,6}\,|\!-\!|\,C_7$; $P'_8\,|\!-\!|\,C_9$, determină, de fiecare dată, pînă la două necunoscute ale sistemului (10).

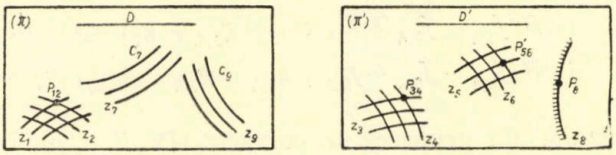


Fig. 7

Gruparea de contacte (IV, 3, 2, p) conduce la

$$\begin{cases} F_1(f_{1,2}+f_{3,4}+f_{5,6},\ g_{1,2}+g_{3,4}+g_{5,6},\ z_9)=0, \\ F_2(f_{1,2}+f_{3,4}+f_{7,8},\ g_{1,2}+g_{3,4}+g_{7,8})=0, \end{cases} \tag{11}$$

iar nomograma respectivă se obţine prin înlocuirea familiei de linii cotate corespunzătoare variabilei z_7 (fig. 7), printr-o scară mută, şi ca atare prin introducerea cîmpului binar $(z_7,\ z_8)$ în locul scării z_7.

În fine, gruparea de contacte (IV, 3, II′, p) conduce la sistemul

$$\begin{cases} F(f_{1,2}+f_{3,4}+f_{6,7},\ g_{1,2}+g_{3,4}+g_{6,7},\ z_8)=0\,, \\ F(f_{3,4}+f_5+f_9,\ g_{3,4}+g_5+g_9,\ z_8)=0, \end{cases} \tag{12}$$

a cărei nomogramă corespunzătoare (fig. 8) conţine o singură familie de linii cotate, pe cînd gruparea de contacte (IV, 3, II, p), căreia îi corespunde sistemul

$$\begin{cases} F(f_{1,2}+f_{3,4}+f_{6,7},\ g_{1,2}+g_{3,4}+g_{6,7},\ z_5)=0\,, \\ F(\alpha+f_{6,7}+f_{8,9},\ \beta+g_{6,7}+g_{8,9},\ z_5)=0\,, \end{cases} \tag{13}$$

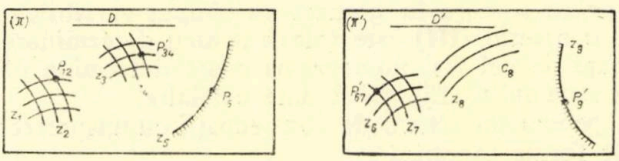


Fig. 8

introduce un element necotat $Q(\alpha, \beta)$ şi un cîmp binar în locul celor două scări din fig. 8.

Pentru sistemul de două ecuaţii cu zece necunoscute, am determina două forme canonice care se pot rezolva prin nomograme cu transparen orientat şi anume

$$(14)\qquad \begin{cases} F_1(f_{1,2}+f_{3,4}+f_{5,6},\ g_{1,2}+g_{3,4}+g_{5,6},\ z_9)=0, \\ F_2(f_{1,2}+f_{3,4}+f_{7,8},\ g_{1,2}+g_{3,4}+g_{7,8},\ z_{10})=0, \end{cases}$$

şi

$$(15)\qquad \begin{cases} F(f_{1,2}+f_{3,4}+f_7,\ g_{1,2}+g_{3,4}+g_7,\ z_8)=0, \\ F(f_{3,4}+f_{5,6}+f_{9,10},\ g_{3,4}+g_{5,6}+g_{9,10},\ z_8)=0. \end{cases}$$

Prima rezultă din gruparea de contacte (IV, 3, 3, p), iar nomograma corespunzătoare conţine în unul din plane două familii de linii cotate restul de variabile fiind exprimate prin cîmpuri binare (fig. 9).

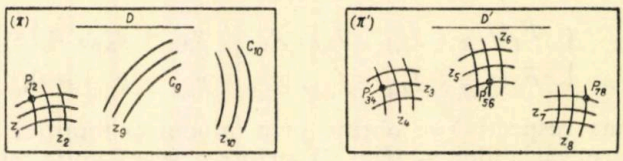


Fig. 9

Utilizarea nomogramei se bazează pe realizarea contactelor $P'_{3,4}\,|=|\,P_{1,2}$ $P'_{5,6}\,|-|\,C_9$; $P'_{7,8}\,|-|\,C_{10}$ şi permite determinarea a cel mult două necunoscute ale sistemului (14).

Cea de a doua formă canonică (15) se obţine din gruparea de contacte (III, 3, IV, p), iar nomograma ce o rezolvă se obţine din cea corespunzătoare formei (14) prin exprimarea variabilelor z_9 şi z_{10} de data aceasta printr-un cîmp binar în contact cu cîmpul binar al variabilelor z_5 şi z_6 (IV), prin exprimarea variabilei z_8 cu ajutorul unei familii de linii cotate în contact cu cîmpul variabilelor z_3, z_4 (3) şi prin exprimarea variabilei z_7 printr-o scară în contact cu cîmpul variabilelor z_1, z_2 (III). În cazul cînd contactul (III) este folosit pentru determinarea poziţiei planului mobil faţă de cel fix, nomograma poate determina pînă la trei necunoscute ale sistemului (15), fiind date celelalte.

În fine, pentru un sistem de două ecuaţii cu unsprezece necunoscute am determinat forma canonică

$$(16)\qquad \begin{cases} F(f_{1,2}+f_{3,4}+f_{5,6},\ g_{3,4}+g_{5,6},\ z_{11})=0, \\ F(f_{5,6}+f_{7,8}+f_{9,10},\ g_{5,6}+g_{7,8}+g_{9,10},\ z_{11})=0, \end{cases}$$

prin eliminarea celor doi parametri între contactele corespunzătoare grupării (IV, IV, 3, p). Nomograma corespunzătoare acestui sistem (fig. 10), poate determina în toate cazurile pînă la trei necunoscute ale sistemului 16), fiind date celelalte.

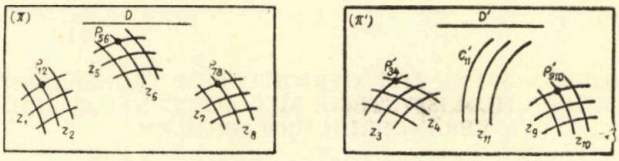


Fig. 10

Dintre contactele indicate la fiecare formă canonică, un contact dublu sau două contacte simple, împreună cu paralelismul dreptelor D şi D' din cele două plane ale nomogramei, sînt suficiente pentru fixarea poziţiei planului mobil (π') pe cel fix (π); ele constituie contactele de poziţie ale nomogramei.

Celelalte contacte care apar în utilizarea nomogramei reprezintă contacte de rezolvare şi determină un număr oarecare de necunoscute. Astfel dacă în contactul simplu $P'_{ij} \mid\!-\!\mid C_k$ se cunosc valorile numerice ale necunoscutelor z_i, z_j, din cîmpul (z_i, z_j), atunci se determină necunoscuta z_k, a cărei valoare numerică reprezintă cota curbei din familia C_k, pe care cade punctul P'_{ij}. Dacă se cunosc valorile numerice ale necunoscutelor z_k şi z_i, atunci prin acest contact simplu se determină necunoscuta z_j. De asemenea prin contactul dublu $P'_{ij} \mid\!=\!\mid P_{kl}$ se pot determina cel mult două dintre variabilele z_i, z_j, z_k, z_l, cînd pe lîngă variabilele ce intervin în contactele de poziţie, se mai cunosc celelalte două dintre acestea, indiferent dacă variabilele cunoscute aparţin aceluiaşi cîmp sau la cîmpuri diferite.

Mai precizăm că în construcţia nomogramei trebuie să se ţină seama de o serie de cerinţe practice, care se referă atît la o utilizare simplă a nomogramei, cît şi la o cît mai mare precizie în fixarea datelor problemei şi la citirea rezultatelor corespunzătoare. Pentru acest motiv se impune necesitatea pe de o parte ca cele două plane să nu fie prea încărcate cu elemente geometrice complicate şi cu spaţiu redus între ele, care ar duce la imprecizii în utilizare, iar pe de altă parte nomograma să nu ocupe nici un spaţiu prea mare.

Institutul politehnic, Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. Bal L., St. şi cerc. de matem., Cluj, 1957, **IX**, *1—2*, pp. 169—176.
2. — Mathematica, 1959, **2** (**24**), pp. 193—197.
3. Bal L., Ionescu Gh. D., St. şi cerc. de matem., Cluj, 1963, **XIV**, *2*, pp. 235—246.

MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

4. Ionescu Gh. D., Mathematica, 1964, **6** (**29**), *2*, pp. 193–216.
5. — Bulet. Inst. polit. Cluj, 1965, *8*, pp. 79—92.
6. Margoulis W., *Les abaques à transparent orienté ou tournant.* Gauthier-Villars, Paris 1931.
7. d'Ocagne M., *Traité de nomographie.* 2 éd., Gauthier-Villars Paris, 1921.
8. Rado Fr., St. şi cerc. de matem., Cluj, 1956, **VIII**, *3—4*, pp. 319—327.

NOMOGRAMME MIT GERICHTETEM TRANSPARENT FÜR DOPPELGLEICHUNGSSYSTEME MIT ACHT, NEUN, ZEHN UND ELF VERÄNDERLICHEN GRÖSSEN

(Zusammenfassung)

In dieser Arbeit werden bestimmte Doppelgleichungssysteme mit acht, neun, zehn und elf veränderlichen Grössen festgestellt, die durch Nomogramme mit gerichtetem Transparent gelöst werden.

Das Verfahren besteht in der Verwendung von drei Kontakten zwischen den zwei Ebenen des Nomogramms; die betrefende Gruppierung der Kontakte kernzeichnet auf diese Weise das Doppelgleichungssystem und das Nomogramm ihm entspricht.

Für jedes Nomogramm wird die verwendete Kontaktgruppierung angegeben, indem die Doppelkontakte mit römischen und die einfachen Kontakte mit arabischen Ziffern bezeichnet werden. Die betreffende Ziffer stellt die Nummer der berechneten Kontaktelemente dar.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

D. C. 532.51 ; 538.12

A NOTE ON THE ROTATION OF AN ISOTROPIC CONDUCTING LIQUID IN PLANE MOTION

BY

N. CH. PATTABHI RAMACHARYULU

1. The two dimensional motion of an infinite rigid cylinder in a rotating homogeneous incompressible fluid was first considered by Taylor [10]. He compared two inviscid fluid motions : a general two-dimensional motion of the cylinder in the fluid and a second motion derived from the first by the superposition, on the whole system, of a constant angular velocity Ω. He noticed that the second motion is dynamically possible, whenever the first is, and the motion of the cylinder relative to the liquid is not altered by the superposition. He also observed that the stress system in the second flow differs from that in the first only by a scalar stress. This was later confirmed experimentally by Taylor himself in the case of a real liquid of small viscosity [11]. Dean noticed that this result holds good even for a classical viscous liquid [1]. Later, several authors observed that the same result remains valid for various prototypes of non-Newtonian viscous liquids [2], [3], [4], [6], [7]. Recently, Pande [8] finds that the presence of a constant axial magnetic field has no influence on the Taylor's result for a non-Newtonian liquid characterized by Reiner [9].

The aim of the present Note is to record the validity of the Taylor's result for a general isotropic incompressible conducting medium in the presenceof a constant axial magnetic field. The essential assumptions are that the medium is weakly conducting (which always happens when the cylinder is of infinite conductivity), non-magnetic, free of charges, isotropic and incompressible and that the motion is two dimensional. It is further assumed that the applied magnetic field **H** is perpendicular to the plane of motion of the cylinder and that the perturbation in it due to interaction with the fluid velocity is negligibly small.

2. The motion of such a liquid is governed by the equations of magneto-hydrodynamics which can be written in a simplied form as

$$\varrho \frac{D\mathbf{q}}{Dt} = \operatorname{Div} S - \sigma \mu_l^2 H^2 \mathbf{q} \tag{1}$$

together with the continuity equation :

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = 0 , \tag{2}$$

where $\mathbf{q}$ is the fluid velocity, ϱ — the density, σ — the electric conductivity, μ_l — the magnetic permeability of the liquid and $\mathbf{H}$ is the intensity of the applied magnetic field. Also S denotes the stress-tensor, which for an incompressible fluid in motion can be written as

(3) $$S = -pI + T,$$

where p is the hydrostatic mean pressure, I — the unit tensor of 2nd order and T — the deviatoric stress tensor. Body forces are ignored here, but any conservative body forces can be taken into account by a simple adjustment of p.

3. As in [10], we compare a two-dimensional motion of a cylinder in the liquid with a second motion derived from the first by superposing, on the whole system, a constant angular velocity Ω, the axis of which meets the plane of motion at O (say). We denote the physical quantities in the two motions by the suffixes 1 and 2 respectively. We choose a system of perpendicular axes OX, OY (in the plane of the flow) fixed in the first motion. The fluid particle (x, y) at time t in the first motion is at the same point in the second motion referred to a set of axes rotating about O with constant angular velocity Ω. If (u_1, v_1) and (a_1, b_1) be the velocity and acceleration components in the first motion, then the velocity (u_2, v_2) and acceleration (a_2, b_2) in the second motion can be expressed in terms of the Lagrangian Coordinates as

(4 a) $$u_2 = u_1 - \Omega y, \quad v_2 = v_1 + \Omega x$$

and

(4 b) $$a_2 = a_1 - 2\Omega v_1 - \Omega^2 x, \quad b_2 = b_1 + 2\Omega u_1 - \Omega^2 y.$$

The equations of motion (1) in the two cases can be written as

(5 a) $$\varrho a_r = \frac{\partial}{\partial x}[S_{xx}]_r + \frac{\partial}{\partial y}[S_{xy}]_r - \sigma \mu_l H^2 u_r$$

and

(5 b) $$\varrho b_r = \frac{\partial}{\partial x}[S_{xy}]_r + \frac{\partial}{\partial y}[S_{yy}]_r - \sigma \mu_l H^2 v_r, \quad (r = 1,2).$$

The equation of continuity in each case is identically satisfied when we introduce the stream function given by

(6) $$u_r = -\frac{\partial \Psi_r}{\partial y}, \quad v_r = \frac{\partial \Psi_r}{\partial x}.$$

From (4 a), we notice that the stream functions are related by

(7) $$\Psi_2 = \Psi_1 + \frac{1}{2}\Omega^2 (x^2 + y^2).$$

We express the boundary condition as

(8) $$(u_r, v_r)_n = -\frac{\partial \Psi_r}{\partial r}$$

on Γ, where s, n denote the directions of the tangent and outward drawn normal at a point P of Γ, the contour of the cylinder and $(u_r, v_r)_n$ = velocity along n.

From the principle of isotropy of space, stated by Noll [5], the constitutive relation of an isotropic incompressible medium in motion, the deviatoric stress-tensor is not altered by the superposition of any rigid rotation, we have $[T]_2 = [T]_1$ and hence from [3]

(9 a) $$[S_{xx}]_2 - [S_{xx}]_1 = -(p_2 - p_1) = [S_{yy}]_2 - [S_{yy}]_1$$

and

(9 b) $$[S_{xy}]_2 - [S_{xy}]_1 = 0$$

i. e., the difference between the normal stresses in the two flows arise solely from the difference between the mean pressures and there is no difference in the shear-stresses.

We get from (5), on substracting,

$$\varrho\,(a_2 - a_1) = -\frac{\partial}{\partial x}(p_2 - p_1) - \sigma\,\mu_l^2\,H^2\,(u_2 - u_1) \tag{10 a}$$

and

$$\varrho\,(b_2 - b_1) = -\frac{\partial}{\partial y}(p_2 - p_1) - \sigma\,\mu_l^2\,H^2\,(v_2 - v_1). \tag{10 b}$$

These yield, on integration:

$$p_2 - p_1 = \varrho\left[2\Omega\Psi_1 + \frac{1}{2}\Omega\,(x^2 + y^2)\right] - 2\,A\sigma\,\mu_l^2\,H_2\,\Omega + C, \tag{11}$$

where A is the area enclosed by the contour Γ and C — the constant of integration, independent of the space coordinates (x, y). We thus establish the Taylor's result holding good for any isotropic conducting liquid in the presence of a constant axial magnetic field: the stresses in the second motion differ from those in the first by a scalar stress given by (11). We notice further that the imposed magnetic field decreases this difference.

4. We now calculate the fluid reactions on the cylinder. The reaction (F_r, G_r) per unit length of the cylinder and the couple H_r exerted about the centre of mass (x_0, y_0) of A, are given by

$$F_r = \int_\Gamma \{[S_{xx}]_r \cos(n, x) + [S_{xy}]_r \sin(n, x)\}\,dA,$$

and

$$G_r = \int_\Gamma \{[S_{xy}]_r \cos(n, x) + [S_{yy}]_r \sin(n, x)\}\,dA,$$

$$H_r = \int_\Gamma (\eta\{[S_{xx}]_r \cos(n, x) + [S_{xy}]_r \sin(n, x)\} -$$
$$-\xi\{[S_{xy}]_r \cos(n, x) + [S_{yy}]_r \sin(n, x)\})\,dA,$$

where $\xi = x_0 - x$, $\eta = y_0 - y$. From these results we obtain, as in [1], that

$$F_2 - F_1 = -\varrho A\,(\Omega^2 x_0 + 2\Omega V), \quad G_2 - G_1 = \varrho A\,(\Omega^2 y_0 - 2\Omega U)$$

and

$$H_2 - H_1 = 0, \tag{12}$$

(U, V) being the velocity of the centre of mass in the first motion. We thus have the result: *the forces due to the liquid stresses on the cylinder in the second motion are the resultant of forces that act in the first motion together with a force*

$$[-\varrho A\,(\Omega^2 x_0 + 2\Omega V), \quad -\varrho A\,(\Omega^2 y_0 - 2\Omega U)]$$

and this is independent of the applied magnetic field.

Received the 20 III 1964

Regional Engineering College,
Warangal, India

REFERENCES

1. Dean W. R., Quart. J. Mech. a. Appl. Math., 1954, **7**, p. 257.
2. Jain M. K., ZAMM, 1955, **35**, S. 379.
3. Kapur J. N., Proc. of Nat. Inst. India, 1960, **25 A**, p. 231.
4. Lakshmana Rao S. K., ZAMM, 1963, **43**, S. 369.
5. Noll W., J. Rational Mech. a. Anal., 1955, **4**, p. 3.
6. — Quart. Appl. Math., 1957, **15**, p. 317.
7. Oldroyd J. G., Thomas R. H., Quart. J. Mech. a. Appl., Math, 1956, **9**, p. 136.
8. Pande G. C., Canita, 1962, **13**, p. 99.
9. Reiner M., Am. J. of Math., 1945, **67**, p. 350.
10. Taylor G. I., Proc. of Royal Soc., 1916, **93 A**, p. 99.
11. — Proc. of Royal Soc., 1921, **100 A**, p. 114.

ASUPRA ROTAȚIEI PLANE A UNUI LICHID CONDUCTOR IZOTROPIC

(Rezumat)

Autorul demonstrează validitatea rezultatelor lui Taylor [10] pentru un mediu general izotropic incompresibil, conductor, în prezența unui cîmp axial magnetic constant.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. D. 531.55 ; 521.1

ÉTUDE PAR VOIE DIRECTE DU MOUVEMENT SOUS L'ACTION DES FORCES NEWTONIENNES

PAR

ALFRED BRAIER

Comunication présentée à la sesion scientifique de l'Institut Polytechnique „Gh. Gheorghiu-Dej" de Bucarest, 28–30 Mai 1965

1. Pour l'étude du mouvement d'un point matériel sous l'action d'une force newtonienne exercée par un centre fixe, on utilise couramment le théorème du moment de l'impulsion d'ou il en résulte que la trajectoire est une courbe plane, que le point attiré décrit en respectant la loi des aires par rapport au centre. Si l'on choisit le centre attractif comme pôle d'un système de coordonnés polaires on peut donc écrire

$$r^2\theta = C, \tag{1}$$

où C est la constante des aires. On peut puis établir et utiliser les formules de B i n e t, qui conduisent à l'équation différentielle de la trajectoire [1] ... [7], ou bien on peut utiliser l'intégrale de l'énergie pour l'étude du mouvement [8] ... [11].

Dans [12] on a montré que dans le cas des forces newtoniennes l'utilisation de la représentation des vecteurs plans par des nombres complexes permet de résoudre immédiatement l'équation du mouvement et d'obtenir sous une forme compacte et intuitive les relations qui caractérisent le mouvement. La représentation par un nombre complexe de la vitesse fournit une construction graphique rapide et simple. Cette représentation a été utilisée [12] pour l'étude de quelques problèmes de transfert et de correction des trajectoires coplanaires.

2. Dans cette Note on utilise la lois des aires (1) pour intégrer directement l'équation vectorielle qui décrit le mouvement d'un point matériel sous l'action d'une force newtonniene. On obtient sans difficultés une représentation vectorielle de la vitesse, ainsi que l'équation de la trajectorie. Les résultats permettent d'étudier, par exemple, le mouvement du point après une modification de sa vitesse dans une position quelqonque pendant son mouvement et d'obtenir par voie directe la position dans l'espace et la forme de la nouvelle trajectoire etc., c'est-à-dire d'aborder avec des moyens simples des problèmes de transfert et de correction dans l'espace.

3. Soit le système de coordonnés polaires ayant le pôle dans le centre attractif fixe O, de masse M. Si $\mathbf{i}$ et $\mathbf{u}$ sont respectivement les vecteurs unitaires le long des directions radiale et transversale, alors évidemment (fig. 1) :

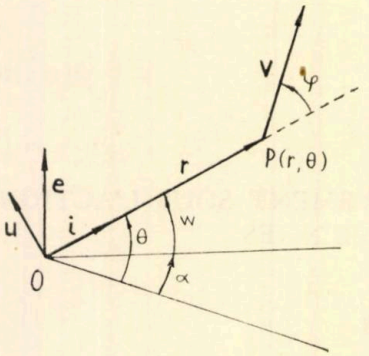


Fig. 1

$$\frac{d\mathbf{i}}{d\theta} = \mathbf{u}, \qquad \frac{d\mathbf{u}}{d\theta} = -\mathbf{i}. \tag{2}$$

Le mouvement du point de masse m est décrit par l'équation

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\varkappa m M}{r^2}\mathbf{i}, \tag{3}$$

ou $\varkappa$ est la constante de l'attraction universelle. Mais $\ddot{\mathbf{r}} = d\mathbf{v}/dt = (d\mathbf{v}/d\theta)\dot{\theta}$; l'utilisation de (1) et (3) conduit a $d\mathbf{v} = -(\varkappa M/C)\mathbf{i}d\theta$. En tenant compte de (2_2) on obtient par intégration directe

$$\mathbf{v} = \frac{\varkappa M}{C}(\mathbf{u} + \mathbf{e}), \tag{4}$$

ou $\mathbf{e}$ est une constante vectorielle, ayant une signification qui sera précisée ci-dessous.

Ayant en vue que $\mathbf{r} = r\mathbf{i}$ et $\mathbf{v} = (d\mathbf{r}/d\theta)\dot{\theta} = (C/r^2)[(d\mathbf{r}/d\theta)\mathbf{i} + r\mathbf{u}]$, où on a tenu compte de (2), la relation (4) devient

$$-C\frac{d}{d\theta}\left[\frac{1}{r}\right]\mathbf{i} + \frac{C}{r}\mathbf{u} = \frac{\varkappa M}{C}(\mathbf{u}+\mathbf{e}). \tag{5}$$

Après multiplication scalaire avec $\mathbf{i}$ on obtient $r = (C^2/\varkappa M)/(1 + \mathbf{e}.\mathbf{u})$. Si $\alpha + \pi/2$ est l'angle formé par le vecteur constant $\mathbf{e}$ avec l'axe polaire, alors en posant comme d'habitude $w = \theta - \alpha$ il vient que $\mathbf{e}.\mathbf{u} = e\cos w$ et donc

$$r = \frac{C^2/\varkappa M}{1 + e\cos w}. \tag{6}$$

La trajectoire (6) est une section conique, avec e comme excentricité et α, l'angle formé par l'axe des foyers réels avec l'axe polaire.

4. On déduit donc que $\mathbf{e}$ est la représentation vectorielle de l'excentricité de la trajectoire (6) par un vecteur de direction perpendiculaire à l'axe des foyers réels et qui est précisé par les conditions initiales. Une autre représentation vectorielle de l'excentricité, par un vecteur dirigé vers le périhelie, a été introduite dans [13].

La relation (4) fournit

$$\mathbf{e} = \frac{C}{\varkappa M}\mathbf{v} - \mathbf{u}\left(= \frac{C}{\varkappa M}\mathbf{v}_0 - \mathbf{u}_0 \right). \tag{7}$$

Si à $t = 0$, $\mathbf{r}(0) = r(0)\,\mathbf{i}(0) = r_0\,\mathbf{i}_0$, $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0 \cos\varphi_0\,\mathbf{i}_0 + v_0 \sin\varphi_0\,\mathbf{u}_0$, alors $C = r_0 V_0 \sin\varphi_0$ (φ angle entre la vitesse $\mathbf{v}$ et la direction radiale $\mathbf{i}$) et un calcul élémentaire conduit à

$$\begin{cases} e = \sqrt{1 + \dfrac{r_0^2\, v_0^2 \sin^2\varphi_0}{(\varkappa M)^2}\left(v_0^2 - \dfrac{2\varkappa M}{r_0} \right)}, \\ \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\varkappa M \sin\theta_0 + r_0\, v_0^2 \sin\varphi_0 \cos(\theta_0 + \varphi_0)}{\varkappa M \cos\theta_0 - r_0\, v_0^2 \sin\varphi_0 \sin(\theta_0 + \varphi_0)}. \end{cases} \tag{8}$$

On obtient évidemment de (7) les conditions initiales connues qui donnent un mouvement circulaire ($e = 0$); il faut que $\mathbf{v}_0 = (\varkappa M/C)\,\mathbf{u}_0$, c'est-à-dire la vitesse initiale v_0 soit perpendiculaire a $\mathbf{r}_0$, ($\varphi_0 = \pm \pi/2$), donc $v_0 = \sqrt{\varkappa M/r_0}$ (car $|C| = r_0 V_0$).

La relation (4) donne

$$v = \frac{xM}{C}\sqrt{1 + e^2 + 2e\cos w}. \tag{9}$$

On obtient aussi de (4), après un calcul simple, les expressions des composantes radiale et transversale de la vitesse. En tenant compte (fig. 1) que

$$\mathbf{e} = e\sin w\,\mathbf{i} + e\cos w\,\mathbf{u}, \quad \mathbf{v} = v\cos\varphi\,\mathbf{i} + v\sin\varphi\,\mathbf{u}, \tag{10}$$

il en résulte

$$v\cos\varphi = \frac{\varkappa M}{C}\, e\sin w, \qquad v\sin\varphi = \frac{\varkappa M}{C}(1 + e\cos w). \tag{11}$$

On doit observer que l'expression (4) met en évidence le fait connu [14] que dans le mouvement sous l'action de l'attraction newtonienne, la vitesse présente deux composantes ayant les intensités constantes, à savoir: la première avec l'intensité $\varkappa M/C$, perpendiculaire à la direction radiale, l'autre avec l'intensité $\varkappa Me/C$, perpendiculaire a l'axe des foyers réels.

5. La représentation vectorielle de l'excentricité (7) peut être utilisée pour étudier différents aspects des problèmes de transfert et de correction des trajectoires dans le cas spatial.

Si dans la position $P(\mathbf{r})$ (donc w fixé), le point matériel soubit la variation de vitesse $\Delta\mathbf{v}$ (de grandeur Δv et dirigée sous l'angle ψ par rapport au plan Π de la trajectoire $\mathscr{C}$, χ étant l'angle formé par la pro-

jection de $\Delta\mathbf{v}$ sur ce plan avec la direction de la vitesse $\mathbf{v}$ dans le respectif moment (fig. 2)), et si $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire le long de la normale au plan Π, $(\mathbf{n} = \mathbf{i} \times \mathbf{u})$, on a

$$\Delta\mathbf{v} = \Delta v \cos\psi \cos(\varphi + \chi)\,\mathbf{i} + \Delta v \cos\psi \sin(\varphi + \chi)\,\mathbf{u} + \Delta v \sin\psi\,\mathbf{n}.$$

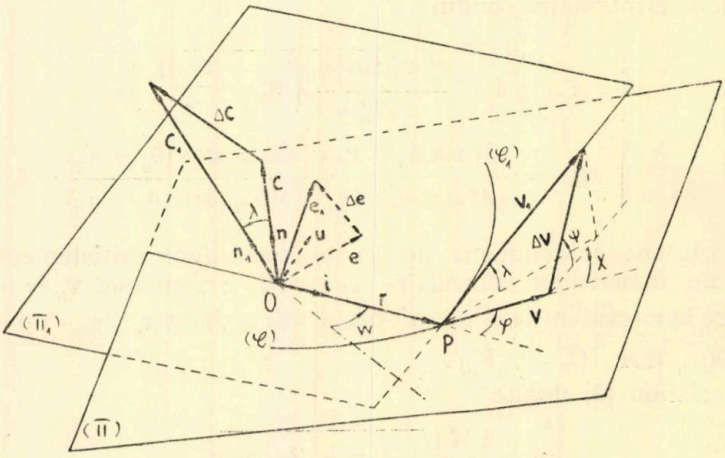


Fig. 2

En tenant compte de (11) et (9)

$$\Delta\mathbf{v} = \frac{\Delta v}{v}\frac{\varkappa M}{C}\Big\{\cos\psi\,[e\sin(v-\chi) - \sin\chi]\,\mathbf{i} + \cos\psi\,[e\cos(w-\chi) + \tag{12}$$
$$+ \cos\chi]\,\mathbf{u} + \sin\psi\sqrt{1 + e^2 + 2e\cos w}\,\mathbf{n}\Big\}.$$

Pour obtenir l'angle λ qui caractérise la rotation du plan de la trajectoire autour de OP (fig. 2), on doit calculer $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}'$ où $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}'$ est la composante de $\mathbf{v}_1$ dans le plan Π de l'ancienne trajectoire; en tenant compte de (11) et (12) il en résulte

$$\begin{cases} \cos\lambda = \dfrac{\sqrt{1 + (\Delta v/v)^2\cos^2\psi + 2(\Delta v/v)\cos\psi\cos\chi}}{1 + (\Delta v/v^2) + 2(\Delta v/v)\cos\psi\cos\chi}, \\ \sin\lambda = \dfrac{(\Delta v/v)\sin\psi}{\sqrt{1 + (\Delta v/v)^2 + 2(\Delta v/v)\cos\psi\cos\chi}}. \end{cases} \tag{13}$$

La représentation vectorielle de l'excentricité $\mathbf{e}_1$ de la nouvelle trajectoire $\mathscr{E}_1$ s'obtient à l'aide de (7)

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e} + \Delta\mathbf{e} = \mathbf{e} + \frac{1}{\varkappa M}[C_1(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) - C\mathbf{v}] + \mathbf{u} - \mathbf{u}_1, \tag{14}$$

où C_1 est l'intensité de la nouvelle constante des aires $\mathbf{C}_1 = \mathbf{r}\times(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) = \mathbf{C} + \mathbf{r}\times\Delta\mathbf{v}$ et $\mathbf{u}_1 = \cos\lambda\,\mathbf{u} + \sin\lambda\,\mathbf{n}$ (v. la fig. 2). En tenant compte de (12) on trouve

$$\begin{cases} (\mathbf{C}_1)_i = 0, \\ (\mathbf{C}_1)_u = -r\dfrac{\Delta v}{v}\dfrac{\varkappa M}{C}\sin\psi\sqrt{1 + e^2 + 2e\cos w}, \\ (\mathbf{C}_1)_n = C + r\dfrac{\Delta v}{v}\dfrac{\varkappa M}{C}\cos\psi\,[e\cos(w - \chi) + \cos\chi]. \end{cases} \tag{15}$$

En utilisant aussi (6), (15) conduit à

$$\left(\frac{C_1}{C}\right)^2 = 1 + 2\frac{\Delta v}{v}\cos\psi\frac{e\cos(w - \chi) + \cos\chi}{1 + e\cos w} + \\ + \left(\frac{\Delta v}{v}\right)^2\frac{(1 + e^2 + 2e\cos w) - \cos^2\psi\,[e\sin(w - \chi) - \sin\chi]^2}{(1 + e\cos w)^2}. \tag{16}$$

L'expression (14) permet de déterminer le vecteur excentricité $\mathbf{e}_1$ de la nouvelle trajectoire $\mathscr{E}_1$, sur laquelle vient de s'installer le point mobile après qu'il soubit dans la position w la variation de vitesse $\Delta\mathbf{v}$ (12). En tenant compte de (10), (11) et (12) on obtient pour les projections de $\mathbf{e}_1$ sur les directions **i, u, n** respectivement

$$\begin{cases} (\mathbf{e}_1)_i = \dfrac{C_1}{C}\left\{e\sin w + \dfrac{\Delta v}{v}\cos\psi\,[e\sin(w - \chi) - \sin\chi]\right\}, \\ (\mathbf{e}_1)_u = \dfrac{C_1}{C}\left\{(1 + e\cos w) + \dfrac{\Delta v}{v}\cos\psi\,[e\cos(w - \chi) + \cos\chi]\right\} - \cos\lambda, \\ (\mathbf{e}_1)_n = \dfrac{C_1}{C}\dfrac{\Delta v}{v}\sin\psi\sqrt{1 + e^2 + 2e\cos w} - \sin\lambda. \end{cases} \tag{17}$$

Les relations trouvées par la voie exposée ci-desus permettent à étudier d'une manière détaillée les différentes situations qui présentent de l'intérêt pour les problèmes de manoeuvre de la dynamique du vol cosmique [15] ... [17].

Institut polytechnique, Jassy,
Chaire de Mécanique théorique

BIBLIOGRAFIE

1. Vâlcovici V., Bălan Şt., Voinea R., *Mecanică teoretică.* Ed. Tehn., Buc., 1959.
2. Appell P., *Traité de Mécanique rationelle.* Tome **I**, 5-ème éd., Gauthier-Villars, Paris.
3. Goldstein H., *Classical Mechanics.* Cambridge, 1950.

4. Synge J. L., *Classsical Dynamics* (Vol. **III/1** de Handbuch der Physik), Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1960.
5. Погорелов Д. А., *Теория кеплеровых движении летательных аппаратов.* Физматгиз, M., 1961.
6. Gábos Z., Mangeron D., Stan I., *Fundamentele mecanicii.* Ed. Acad. R.P.R., Buc., 1962.
7. Лахтин Л. М., *Свободное движение в поле земного сфероида.* Физматгиз, M., 1963.
8. Levi-Civita T., Amaldi U., *Lezioni di Meccanica razionale.* Vol. **II**, parte *1*, Bologna, 1926.
9. Pascaru I., *Racheta.* Ed. Militară, Buc., 1959.
10. Александров С. Г., Федоров Р. Е., *Советские спутник и космические корабли.* Изд. АН СССР, M., 1963.
11. Brouver D., Clemence G., *Methods of Celestial Mechanics.* Academic Press, N. Y. — London, 1961.
12. Braier A., Ghinea I., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI** (**XV**), *3—4*, pp. 329–334.
13. Ward G. N., *Équations intrinsèques pour le mouvement des planètes.* Séminaire de mécanique analitique et mécanique céleste M. Janet, de la Faculté des sciences, Paris (1962–1963), 1964 (P.Ж. Мех., 1965, *2***A**59).
14. Cronin J, L., Jr., Schwartz R. F., J. Aerospace Sci., **29**, *11*, pp. 1384–1385 (P. Ж. Мех., 1963, *8***A**73).
15. Stoenescu Al., *Elemente de cosmonautică.* Ed. Tehn., Buc., 1962.
16. * * * *Космические траектории.* ИИЛ, M, 1963, (trad. de l'anglaise).
17. * * * *Управление полетом космических аппаратов.* ИИЛ, M., 1963, (trad. de l'anglaise).

STUDIUL DIRECT AL MIŞCĂRII SUB ACŢIUNEA FORŢELOR NEWTONIENE

(Rezumat)

Utilizînd legea ariilor (1) se integrează direct ecuaţia vectoriată (3) care descrie mişcarea unei particule materiale atrasă de un centru fix cu o forţă newtoniană. Se obţine o reprezentare vectorială a vitezei particulei (4), în care **e** este un vector de intensitate egală cu excentricitatea traiectoriei (6), de direcţie perpendiculară pe axa focarelor sale reale.

Expresia (4) a vitezei se utilizează pentru studiul unor aspecte ale problemelor de transfer şi corecţie a traiectoriei în cazul spaţial. De exemplu, dacă în poziţia P particula suferă variaţia de viteză $\Delta \mathbf{v}$ dirijată în afara planului II al traiectoriei $\mathcal{C}$ (fig. 2), atunci unghiul λ de rotire a planului traiectoriei este dat de (13), iar constanta ariilor C_1 pentru mişcarea pe noua traiectorie din planul rotit Π_1 este dată de (16). De asemenea vectorul excentricitate $\mathbf{e}_1$ al noii traiectorii este dat de (17) (**i**, **u**, **n** sînt versorii direcţiilor radială transversală şi normală la planul traiectoriei de plecare).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 530.1

ASUPRA TEOREMEI RECIPROCITĂŢII STĂRILOR FIZICE LINIARE

DE

I. DEUTSCH şi E. DÎMBOIU

1 Generalităţi

În diferite domenii ale fizicii se pot întîlni mărimi legate între ele prin relaţii liniare şi avînd mărimea produs de dimensiunea unui lucru mecanic sau a unei puteri. Astfel de mărimi sînt: forţa şi săgeata, cuplul şi rotaţia, bimomentul şi deplanarea în mecanica corpului elastic, sarcina electrică şi potenţialul electric, tensiunea electromotoare şi intensitatea curentului continuu sau alternativ, solenaţia şi fluxul magnetic în electrotehnică, presiunea acustică şi viteza volumică în acustică, presiunea sonică şi curentul sonic în sonicitate etc. Prima mărime, de obicei, poate fi considerată „cauză" a fenomenului iar cea de a doua drept un „efect" produs.

„Cauzele" şi „efectele" pot fi constante în timp (de exemplu forţa statică şi deformaţia după aplicarea forţei) sau variabile. În tehnică se întîlnesc de asemenea şi mărimi variabile periodic în timp avînd însă aceeaşi frecvenţă (tensiuni electromotoare, curenţi etc). În cele ce urmează se consideră mărimi care fac parte dintr-una dintre aceste categorii. Mărimile variabile armonic în timp se pot reprezenta fie prin valorile lor instantanee, fie simbolic, în complex.

Astfel de mărimi verifică teorema superpoziţiei (principiul suprapunerii efectelor), conform căreia „efectul" final într-o stare oarecare este sumă a „efectelor", pe care le-ar produce fiecare dintre „cauze", dacă acestea ar acţiona izolat. O consecinţă a acestei teoreme este şi teorema reciprocităţii lucrului mecanic, cunoscută şi sub denumirea de teorema lui Betti în mecanica corpurilor elastice, teorema lui Green în electrostatică etc.

2. Teorema reciprocităţii lucrului mecanic

Se consideră un sistem fizic oarecare (corp elastic, circuit electric închis, circuit sonic închis etc.), în două stări Γ' şi Γ'' precum şi două categorii de mărimi aferente corpului, a şi b, care satisfac condiţiile de mai sus. Se presupune că în prima stare, în punctele oarecare i ale corpului acţionează „cauzele" a_i'. Ca urmare se produc „efecte" b_i', ceea ce conduce la dezvoltarea unui lucru mecanic sau a unei puteri $L' = k \sum a_i' b_i'$, unde s-a notat prin k un coeficient egal de exemplu cu 1/2 în mecanica corpurilor elastice, în electrostatică şi în electrodinamică.

În cea de a doua stare, prin aplicarea în punctele j a unor „cauze" a_j'' se produc „efectele" b_j'' precum şi un lucru mecanic (sau putere) $L'' = k \sum a_j'' b_j''$. Dacă peste prima stare se aplică ulterior şi „cauzele" din cea de a doua stare, atunci lucrul mecanic va fi egal cu:

$$L = L' + L'' + \sum a_i' b_i'',$$

întrucît şi cauzele a_i', existente pe corp, produc un lucru mecanic suplimentar odată cu aplicarea „cauzelor" din cea de a doua stare.

Analog, prin aplicarea „cauzelor" din prima stare peste cele din starea a doua, se obţine

$$L = L' + L'' + \sum a_j'' b_j'.$$

Deoarece lucrul mecanic sau puterea finală nu depind de ordinea de aplicare a „cauzelor" a_i' şi a_j'', se obţine:

$$\sum a_i' b_i'' = \sum a_j'' b_j'. \tag{1}$$

Această egalitate exprimă teorema reciprocităţii lucrului mecanic, după care suma produselor „cauzelor" din prima stare cu „efectele" corespunzătoare din starea a doua este egală cu suma produselor dintre „cauzele" stării a doua şi „efectele" corespunzătoare primei stări.

3. Aplicaţiile teoremei

Teorema reciprocităţii lucrului mecanic poate fi folosită la rezolvarea unui mare număr de probleme de fizică.

În numeroase aplicaţii prima stare a corpului este cea dată de enunţul problemei. În astfel de probleme se cere să se afle anumite „efecte" produse de către „cauzele" cunoscute, respectiv se cere să se găsească „cauzele" care conduc la o anumită stare a „efectelor". Pentru rezolvarea problemei se consideră o a doua stare, cît mai simplă, de obicei cu o singură „cauză", a cărei valoare numerică poate fi egală cu unitatea şi aplicată în dreptul şi pe direcţia mărimii necunoscute, din prima stare. Dacă în prima stare sînt mai multe necunoscute atunci pentru fiecare necunoscută se alege cîte o a doua stare cu $a_j'' = 1$. Din relaţia (1) rezultă în acest caz expresia necunoscutei:

$$b_j' = \sum a_i' b_i'', \tag{2}$$

unde însă şi mărimile b_i'' din cea de a doua stare sînt necunoscute. Determinarea necunoscutelor b_i'' reprezintă însă o operaţie mai simplă, întrucît în a doua stare se aplică numai o singură „cauză". Necunoscutele b_i'' se dau chiar în tabele pentru anumite domenii ale fizicii. De aici rezultă un avantaj al metodei de calcul, care derivă din teoremă, întrucît substituie studiul stării complexe cu studiul unei stări simple, dar combinat cu aplicarea teoremei.

Dacă în cele două stări acţionează doar cîte o singură „cauză" de aceeaşi valoare ($a_i' = a_j''$), atunci din relaţia (1) se obţine teorema lui Maxwell (denumită şi teorema lui Trent în acustică):

$$b_i'' = b_j', \tag{3}$$

adică „efectul" în locul j produs de către o „cauză" aplicată în locul i este egal cu „efectul" produs în locul i de către aceeaşi „cauză" aplicată în locul j.

În cele ce urmează se fac unele precizări şi se dau cîteva exemple relativ la aplicarea teoremei reciprocităţii în diverse ramuri ale fizicii.

a) *Mecanica corpului elastic.* Teorema poate avea o aplicabilitate mult mai vastă [3] decît cea prezentată în cărţile de specialitate. Ea poate fi utilizată la calculul deplasărilor elastice şi la rezolvarea stărilor static nedeterminate, atît în cazul barelor, al sistemelor de bare (cadre, grinzi cu zăbrele etc.), cît şi în cazul plăcilor şi al blocurilor. Ea a fost formulată de Betti în anul 1872.

În mecanica corpului elastic, „cauzele" sînt forțele, cuplurile și bimomentele, iar „efectele" acestora săgeți, rotații, deplanări.

În fig. 1 se consideră, spre exemplu, o placă circulară de grosime h, avînd o încărcare nesimetrică oarecare, formată dintr-o forță concentrată P, un cuplu concentrat M_0, o forță distribuită p de-a lungul unui arc de lungime s și una repartizată q pe o suprafață de mărime A.

Pentru calculul săgeții de la mijlocul plăcii, de exemplu, se consideră placa într-o a doua stare și se aplică în locul săgeții căutate o forță concentrată egală cu unitatea. În această stare ecuația suprafeței mediane este, de obicei, cunoscută:

$$w = \frac{3(1-\mu^2)}{2\pi E h^3}\left[\frac{(3+\mu)(R^2-\varrho^2)}{2(1+\mu)} + \varrho^2 \ln\frac{\varrho}{R}\right],$$

unde s-a notat cu E modulul de elasticitate longitudinal, iar cu μ coeficientul de contracție transversală al materialului plăcii.

Prin aplicarea teoremei reciprocității lucrului mecanic se obține săgeata v_0, anume:

$$1 \cdot v_0 = P w_p + M_0 \varphi_0 + \int_S p w \, ds + \int_A q w \, dA .$$

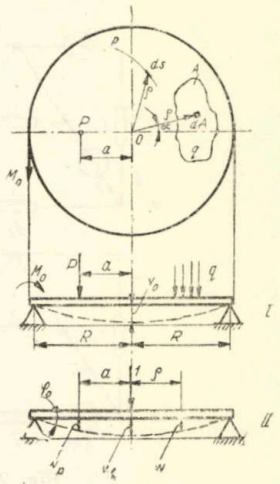


Fig. 1

Dacă placa se sprijină la mijlocul ei pe un reazem, atunci ea este static nedeterminată. Reacțiunea Y din reazem se calculează tot cu ajutorul teoremei:

$$-Y w_0 + P w_p + M_0 \varphi_0 + \int_S p w \, ds + \int_A q w \, dA = 0 .$$

a) Electrotehnică. În electrotehnică există mărimi care satisfac teorema reciprocității. Astfel, dacă sarcinile q_i' ale unui sistem de conductoare produc potențialele V_j' și dacă sarcinile q_j'' produc potențialele V_i'', atunci

$$\sum q_i' V_i'' = \sum q_j'' V_j' . \tag{4}$$

Relația obținută se numește și teorema lui Green. În lucrarea [10] se arată că teorema poate fi aplicată și la dielectrici.

Teorema reciprocității poate fi utilizată la calculul circuitelor liniare ramificate de curent continuu sau alternativ și a circuitelor magnetice liniare ramificate. Circuitul poate conține mai multe surse de energie, rezistoare, bobine și condensatoare. În acest caz „cauzele" sînt tensiunile electromotoare ale surselor (de tensiuni) iar „efectele" intensitățile curenților în ramurile circuitului.

În fig. 2 se consideră ca exemplu un circuit ramificat cu mai multe surse, de tensiuni electromotoare $\underline{E}_i$, și impedanțele $\underline{Z}_k$.

Pentru determinarea intensității curentului care circulă prin ramura de impedanță oarecare $\underline{Z}_j$, se aplică aici, într-o a doua stare, o tensiune electromotoare $\underline{E} = 1$, care produce în laturile circuitului curenți $\underline{I}'$ (fig. 2 b). Dacă acești curenți $\underline{I}'$ se cunosc, atunci rezultă prin aplicarea teoremei reciprocității celor două stări:

$$1 \cdot \underline{I}_j = \sum \underline{E}_i \underline{I}_i' . \tag{5}$$

În mod analog se poate utiliza teorema reciprocității și în cazul circuitelor magnetice ramificate. Dacă în fig. 2 a se consideră în locul tensiunilor electromotoare solenațiile $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ în locul impedanțelor reluctanțele magnetice $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots, \mathcal{R}_m$ și în locul curenților fluxurile

magnetice $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$, atunci, pentru determinarea fluxului care circulă prin ramura de reluctanţă magnetică $\mathcal{R}_j$ se aplică în a doua stare o solenaţie $\theta = 1$, care produce în ramurile circuitului fluxurile magnetice Φ'. Între cele două stări există relaţia

$$1.\ \Phi_i = \sum \theta_i \Phi_i' .$$

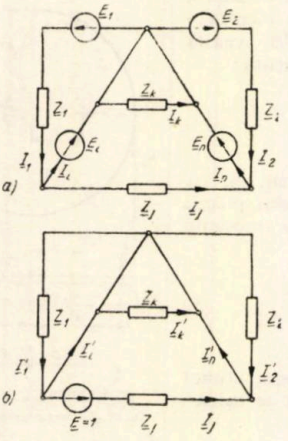


Fig. 2

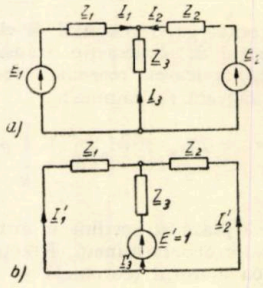


Fig. 3

În fig. 3 a se consideră un exemplu de circuit electric ramificat cu două generatoare de curent alternativ, care debitează în paralel pe o reţea cu impedanţele:

$$\underline{Z}_1 = (1{,}2 - \mathrm{j}\,1{,}6)\ \Omega,\quad \underline{Z}_2 = (1 + \mathrm{j}\,2)\ \Omega,\quad \underline{Z}_3 = (2 + \mathrm{j}\,2)\ \Omega .$$

Primul generator produce o tensiune electromotoare $E_1 = 40$ V, iar al doilea $E_2 = 50$ V, defazată cu 90° înaintea primei. Se cere să se calculeze curentul prin impedanţa $\underline{Z}_3$.

Se reconsideră circuitul aplicîndu-se o singură sursă pe ramura impendanţei $\underline{Z}_3$ (fig. 3 b) pentru care curenţii se determină, spre exemplu, cu teoremele lui Kirchhoff. Rezultă:

$$\underline{I}_1' = \frac{-\underline{E}'\underline{Z}_2}{\sum \underline{Z}_i \underline{Z}_j} = -\frac{1}{10}(2 + \mathrm{j})\ \mathrm{A},\quad \underline{I}_2' = \frac{-\underline{E}'\underline{Z}_1}{\sum \underline{Z}_i \underline{Z}_j} = \frac{\mathrm{j}}{5}\ \mathrm{A},\quad \underline{I}_3' = \frac{\underline{E}'(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{\sum \underline{Z}_i \underline{Z}_j} = \frac{1}{10}(2 - \mathrm{j})\ \mathrm{A}.$$

Tensiunile electromotoare din prima stare se pot exprima sub forma:

$$\underline{E}_1 = 40\ \mathrm{V},\quad \underline{E}_2 = \mathrm{j}\,50\ \mathrm{V}.$$

Prin aplicarea teoremei reciprocităţii:

$$1.\ \underline{I}_3 = \underline{E}_1 \underline{I}_1' + \underline{E}_2 \underline{I}_2'$$

se obţine curentul căutat:

$$\underline{I}_3 = -(18 + \mathrm{j}\,4)\ \mathrm{A} \text{ sau } I_3 = 18{,}44\ \mathrm{A}.$$

Aplicarea teoremei reciprocităţii la rezolvarea circuitelor electrice ramificate de curent continuu şi de curent alternativ precum şi a circuitelor magnetice ramificate, sub forma prezentată în această Notă, nu a fost întîlnită de autori în literarura de specialitate.

c) Acustica. Teorema reciprocității este aplicabilă la orice sistem acustic liniar, care poate conține spre exemplu, o inertanță, o capacitate acustică și o rezistență acustică. „Cauzele" fenomenului acustic pot fi considerate presiunile acustice, iar „efectele" — vitezele volumice.

Se consideră în prima stare a sistemului o serie de presiuni acustice p'_i, de aceeași frecvență, iar în cea de a doua alte presiuni acustice p''_j, de aceeași frecvență ca și primele, aplicate însă în puncte oarecare. Fie vitezele volumice din prima stare U'_j iar cele din a doua stare U''_i. Rezultă din (1) relația:

$$\sum p'_i U''_i = \sum p''_j U'_j .$$

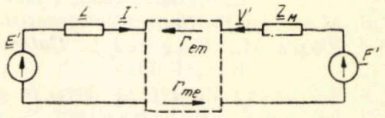


Fig. 4

Teorema reciprocității își găsește aplicabilitate în cazul traductoarelor electromecanice utilizate în acustică.

Se consideră, spre exemplu, traductorul electromecanic din fig. 4, în care $\underline{Z}$ este impedanța electrică a circuitului, Z_M — impedanța mecanică, Γ_{em} și Γ_{me} — factorii de cuplaj, $\underline{E}'$ — tensiunea electromotoare aplicată circuitului electric, $\underline{F}'$ — forța mecanică aplicată sistemului mecanic, $\underline{I}'$ — intensitatea curentului din circuitului electric, iar $\underline{V}'$ — viteza vibrației părții mecanice. În prima stare, între mărimile amintite există sistemul de relații [2]:

$$\underline{E}' = \underline{Z}\,\underline{I}' + \Gamma_{em}\,\underline{V}', \quad \underline{F}' = \underline{Z}_M\,\underline{V}' + \Gamma_{me}\,\underline{I}' .$$

Aplicînd aceluiași traductor tensiunea electromotoare $\underline{E}''$ și forța $\underline{F}''$, sistemul de ecuații devine:

$$\underline{E}'' = \underline{Z}\,\underline{I}'' + \Gamma_{em}\,\underline{V}'', \quad \underline{F}'' = \underline{Z}_M\,\underline{V}'' + \Gamma_{me}\,\underline{I}'' .$$

Din aceste sisteme de relații rezultă:

$$\underline{E}'\,\underline{I}'' - \underline{E}''\,\underline{I}' + \underline{F}'\,\underline{V}'' - \underline{F}''\,\underline{V}' = (\Gamma_{em} - \Gamma_{me})\,\underline{I}''\,\underline{V}' + (\Gamma_{me} - \Gamma_{em})\,\underline{I}'\,\underline{V}'' .$$

În cazul traductorului reversibil ($\Gamma_{em} = \Gamma_{me}$) se obține teorema reciprocității sub forma:

$$\underline{E}'\,\underline{I}'' + \underline{F}'\,\underline{V}'' = \underline{E}''\,\underline{I}' + \underline{F}''\,\underline{V}' .$$

Dacă traductorul lucrează în prima stare ca motor ($\underline{F}' = 0$) iar în a doua ca generator ($\underline{E}'' = 0$), teorema reciprocității ia forma simplificată:

$$\underline{E}'\,\underline{I}'' = \underline{F}''\,\underline{V}' .$$

În cazul general a n traductoare electromecanice reversibile, teorema reciprocității poate fi pusă sub forma:

$$\sum (\underline{E}'\,\underline{I}'' - \underline{E}''\,\underline{I}') = \sum (\underline{F}''\,\underline{V}' - \underline{F}'\,\underline{V}'') .$$

Teorema reciprocității este aplicabilă la etalonarea receptoarelor și generatoarelor de vibrații și la etalonarea traductoarelor electroacustice, ca în [4] și [12], pentru stabilirea sensibilității acestora.

d) Sonicitate. Asemănător ca în electrotehnică teorema reciprocității poate fi folosită la studiul transmisiilor sonice, formate din generatoare sonice, impedanțe sonice și motoare sincrone sonice. Pentru două stări ale sistemului sonic, între curenții sonici i și presiunile sonice h există relația

$$\sum i'_i h''_i = \sum i''_j h'_j ,$$

care exprimă teorema reciprocității.

Primită la 26 X 1964

Institutul politehnic, Brașov

BIBLIOGRAFIE

1. Andonie G., Hidrotehnica, 1960, **5**, *9*.
2. Bădărău E., Grumăzescu M., *Bazele acusticii moderne*. Ed. Acad. R.P.R., Buc., 1961.
3. Deutsch I., *Teorema reciprocităţii*. Lit. Învăţ., Braşov, 1957.
4. Kolesnikov A. E., Automatică-Telemecanică-Metrologie, 1964, *2*.
5. Kontorovici M. I., *Calculul operaţional şi fenomenele tranzitorii în circuite electrice*. EES, Buc., 1955, (trad. din l. rusă).
6. Mazilu P., *Statica construcţiilor*., Vol. **II**, Edit. tehn., Buc., 1959.
7. Popa M., Wagner J., *Culegere de probleme de electricitate şi electrotehnică*. EES, Buc., 1953.
8. Răduleţ R., *Bazele teoretice ale electrotehnicei*. Vol. **II**, EES, Buc., 1954.
9. Seshu G., Balabanian N., *Linear Network Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., N. Y., Chapman & Hall, Ltd., London, 1959.
10. Smythe W. R., *Static and Dynamic Electricity*. Mc. Graw-Hill Book Company, N. Y., 1950.
11. Timotin Al. şi colab., *Lecţii de bazele electrotehnicii*. Vol. **I, II**, Edit. Did. şi Ped., Buc., 1964.
12. Tkaceva V. A., Automatică-Telemecanică-Metrologie, 1964, *2*.

SUR LE THÉORÈME DE LA RÉCIPROCITÉ DES ÉTATS PHYSIQUES LINÉAIRES

(Résumé)

On présente dans toute sa généralité le théorème de la réciprocité dans les différents domaines de la physique où l'on trouve des grandeurs liées entre elles par des relations linéaires et ayant le produit egal à un travail mécanique ou à une puissance. Par exemple la force et la flêche de flexion, le couple et la rotation, le bimoment et la déplanation dans la mécanique du corps élastique, la charge électrique et le potentiel électrique, la force électromotrice et l'intensité du courant continu ou alternatif, la force magnétomotrice et le flux magnétique dans l'électrotechnique, la pression acoustique et le courant acoustique en acoustique, la pression sonique et le courant sonique en sonicité etc. La première grandeur peut être considérée comme „cause" du phénomène et la deuxième — „l'effet".

On donne das exemples pratiques, quant à l'application du théorème dans la mécanique du corps élastique et dans l'électrotehnique.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 535 331; 546.682

DOZAREA SPECTRALĂ A INDIULUI ÎN MINEREURI

DE

C. RUSCIOR, GH. TACU, MARCEL MOISE şi CORNELIA CIOBANU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

Indiul este un element rar, a cărui concentraţie în scoarţa pămîntului este de 10^{-5} %. Se întîlneşte în puţine minereuri, mai ales în cele ce conţin blendă (ZnS) şi casiterită (SnO_2), unde concentraţia sa nu depăşeşte 10^{-2} %.

Problema determinării spectrale a indiului în minereuri a fost studiată de mai mulţi autori, dintre care amintim pe A. K. Rusanov şi colab. [1]. M. A. Iaroş şi colab. [2].

Pentru determinarea indiului pe cale spectrală se folosesc liniile analitice 3 039,3 ; 3 256,1 ; 3 258,6 ; 4 101,8 şi 4 511,3 Å. Primele trei linii aparţinînd spectrului ultraviolet, necesită o aparatură cu optică de cuarţ. În afară de aceasta ele sînt linii de intensitate mică, ceea ce limitează sensibilitatea metodei. Din această cauză majoritatea autorilor au folosit liniile analitice 4 101,8 şi 4 511,3 Å din spectrul vizibil, care au cea mai mare intensitate. Ele permit dozarea indiului pînă la concentraţii de 10^{-4}% şi determinarea se poate efectua folosind aparatură spectrală cu optică de sticlă. Inconvenientul prezentat de aceste linii îl reprezintă faptul că în cazul arcului cu electrozi de cărbune ele cad în domeniul benzilor cianului.

Pentru înlăturarea acestui inconvenient se poate proceda în mai multe moduri, care caracterizează în fond metoda spectrală elaborată. Astfel, în locul electrozilor de cărbune se utilizează arcul cu electrozi de cupru, de alamă sau aluminiu [2]...[4]. Arcul între electrozi metalici are însă o temperatură mult mai joasă decît arcul între electrozi de cărbune, din care cauză intensitatea liniilor scade, ceea ce micşorează sensibilitatea metodei. S-a încercat a se mări intensitatea liniilor prin adăugare de substanţe activizatoare [3].

O altă metodă recurge la reducerea intensităţii benzilor cianului prin adăugare de săruri ale metalelor alcaline [2]. În sfîrşit în locul arcului electric se poate folosi flacăra oxiacetilenică [5].

În metoda elaborată de noi am folosit arcul între electrozi de cărbune în atmosferă de bioxid de carbon. Folosind acest gaz nu se mai formează prin ardere cianul, din lipsa azotului, astfel că benzile sale dispar din spectru. Arcul în atmosferă de bioxid de carbon s-a utilizat foarte puţin la determinarea spectrală a elementelor, din cauză că el presupune construirea unui arzător special care să asigure în permanenţă această at-

mosferă. Metoda dă însă rezultate bune iar în cazul indiului nu a fost utilizată pînă în prezent. Diverse metode de dozare ale indiului în minereuri sînt prezentate în lucrările [6]...[9].

2. Aparatura utilizată şi metoda de lucru

Drept aparat spectral a fost utilizat spectrograful cu trei prizme FD-S (ROW — Rathenow, R.D.G.). Acest aparat are domeniul spectral 3900...6000 A pe o placă de 9×24 cm^2, cu dispersie bună în domeniul violet al spectrului (4,5 Å/mm pentru $\lambda = 4\,100$ Å). Suportul pentru electrozi este închis în interiorul unei camere, fapt ce ne-a permis ca în urma unor adaptări simple să putem întreţine în interiorul ei o atmosferă de CO_2. Gazul era obţinut de la o butelie de bioxid de carbon lichid, cu un debit de circa 5 l/min. În aceste condiţii dispar benzile cianului din spectrul arcului cu cărbune.

Drept electrozi au fost utilizaţi cărbuni spectrali de tip T_1, alimentarea făcîndu-se în curent continuu, la un curent de intensitate 6 A. Ca plăci spectrale s-au folosit plăcile Agfa-Rot-Rapid.

Fotometrarea plăcilor s-a realizat cu ajutorul microfotometrului MF-2.

Metoda de lucru a fost următoarea. Cărbunele spectral de diametru 7 mm, care servea ca anod, era găurit pe o adîncime de 4 mm, diametrul găurii fiind de 3 mm, iar grosimea peretelui de 1 mm. Cantitatea de substanţă introdusă a fost de 50 mg. Probele, bine mojarate, erau amestecate cu 30 mg praf de cărbune necesar pentru a împiedica formarea perlelor. Distanţa între electrozi era de 4 mm.

După ce au fost depistate probele care conţin indiu (2 probe din 40 probe analizate calitativ) s-a stabilit timpul de evaporare a indiului în aceste probe. S-a constatat că acest timp este de 4 min, intensitatea maximă a liniilor sale avînd loc în primele 2 min.

Determinarea concentraţiei s-a efectuat cu ajutorul metodei etaloanelor, folosindu-se arderea parţială a probei (timp de 2 min cu 10 sec timp de preardere). Este cunoscut faptul că prepararea unui bun etalon prezintă o problemă importantă pentru analiza spectrochimică. Acest etalon trebuie să îndeplinească condiţia de a fi de aceeaşi natură ca şi proba de studiat şi de a conţine (pe cît posibil) aceleaşi elemente ca şi proba, cu excepţia elementului cercetat. În minereurile analizate de noi, colectate din aceeaşi regiune, s-a putut găsi un minereu care satisface acestui deziderat în bune condiţiuni.

3. Rezultate obţinute

În tabelul 1 este dată constituţia probelor de analizat şi a probei etalon.

Din tabel se constată că etalonul conţine în plus faţă de probă doar Ag şi Cd, la care apar liniile ultime, deci aceste elemente sînt în concentraţie redusă şi nu pot influenţa sensibil intensitatea liniilor analizate.

Analiza spectrală calitativă s-a realizat folosind spectroproiectorul SP-2.

Tabelul 1

Felul probei	Elementele conținute
Proba de analizat I	Al, Ca, Co, Cu, Fe, Mg, Na, Pb, Si, Zn, Sn, In
Proba de analizat II	Al, Ca, Co, Cu, Fe, Mg, Na, Pb, Si, Zn, In
Proba etalon	Al, Ca, Cu, Fe, Co, Mg, Mn, Na, Pb, Si, Zn, Ag, Cd

Drept linie analitică a fost utilizată linia In—4 101,8 Å. Alegerea elementului standard intern a prezentat însă o dificultate serioasă din cauza bogăției de linii pe care le întîlnim la analiza minereurilor. Un domeniu lipsit de linii în vecinătatea liniei In—4 101,8 Å a fost cel cuprins între 4 095,9 și 4 085,3 Å, ceea ce a permis alegerea cobaltului drept standard intern. Acesta posedă în domeniul menționat linia Co—4 092,4 Å avînd potențialul de excitație apropiat de linia In—4 101,8 Å. Probele analizate conțin de fapt Co, dar în proporție atît de redusă încît linia sa Co—4 092,4 Å nu apare în ele. În aceste condiții s-a putut lua drept standard intern această linie, prin adăugarea în probe a unei cantități de 0,1 % oxid de cobalt.

Probele etalon, în număr de patru, au fost obținute prin introducerea indiului, sub formă de $InCl_3$. Concentrația în indiu la aceste probe a fost $5{,}18.10^{-3}$; $3{,}89{,}10^{-3}$; $2{,}59.10^{-3}$ și $1{,}295.10^{-3}$ %.

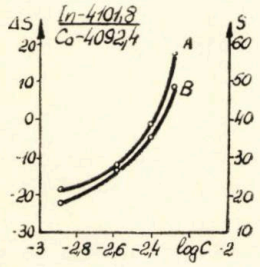


Fig. 1

Cu ajutorul etaloanelor s-au construit curbele de etalonare prezentate în fig. 1. În abscisă s-a introdus logaritmul zecimal al concentrației de indiu. Curba *A* a fost construită folosind perechea de linii analitice In—4 101,8 Å, Co—4,092,4 Å. Ordonata din stînga furnizează diferența înnegririlor celor două linii adică $\Delta S = \log (I_{In}/I_{Co})$. Curba *B* s-a construit folosind drept standard intern fondul spectrului. Înnegririle liniei indiului sînt date în ordonata din dreapta.

Se constată că cele două curbe de etalonare nu sînt liniare. Acest rezultat a fost constatat și de alți autori, pentru concentrații mici ale indiului [1] și se datorește în principal autoabsorției liniei analitice.

Concentrația în indiu la cele două probe studiate este de $3{,}1.10^{-3}$ % și $4{,}4.10^{-3}$ %. Eroarea medie este de 20 %.

Institutul politehnic, Iași
Catedra de fizică

BIBLIOGRAFIE

1. Русанов А. К., Хитров В. Г., Ботова Н. Т., ЖАХ, 1959, **14**, стр. 534.
2. Ярош Н. А., Скорняков Г. П., Ефремова К. А., Зав. лаб., 1956, **11**, стр. 1314.
3. Бронштейн А. Н., ИАН СССР, с. физ., 1955, **19**, стр. 159.
4. Блох И. М., Материалы X Всесоюзного Совещания по спектроскопии, Львов, **II**, Изд. Льв. Ун-та, 1958, стр. 343.
5. Русанов А. К., Алексеева В. М., Зав. лаб., 1940, **9**, стр. 66.
6. Русанов А. К., *Спектральный анализ руд и минералов*. Госгеолиздат., М.-Л., 1948, стр. 147.
7. Ahrens L. H., Taylor S. R., *Spectrochemical Analysis*. Addison-Wesley Publ. Comp., London, 1961, p. 237.
8. Moenke H., *Spektralanalyse von Mineralien und Gesteinen*. Geest & Portig, Leipzig, 1962, S. 80.
9. Боборик-Романова Т., Беляев И. И., Куценко И. И., Павленко Л. И., Савинова Е. Н., Фарафонов М. М., *Спектральное определение редких и рассеяных элементов*. Изд. АН СССР, М., 1962, стр. 107.

LE DOSAGE SPECTRAL DE L'INDIUM DANS LES MINÉRAIS

(Résumé)

Utilisant la décharge entre électrodes de carbon dans une atmosphère de gaz carbonique, qui a éliminé du spectre les bandes du cyanogène, on a déterminé la concentration de l'indium dans deux minérais, en utilisant comme ligne analitique In—4 101,8 Å. La teneur en indium des minerais etudiés est $3{,}1.10^{-3}$% et $4{,}4.10^{-3}$ %.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1—2, 1966

Chimie

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XII (XVI), вып. 1—2, 1966

Химия

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XII (XVI), 1—2, 1966

Chemistry

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 545.33 ; 669.75

ASUPRA REDUCERII Sb^{3+} PE PICĂTURA DE MERCUR, ÎN MEDIU APOS ŞI ÎN AMESTEC DE SOLVENŢI

DE

GH. BURLACU ŞI CORNELIA IOAN

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

Studii asupra reducerii unor ioni pe picătura de mercur, în amestec de solvenţi şi în medii neapoase, au fost întreprinse de către mulţi cercetători ; cele mai importante sînt cele ale lui I. M. Kolthoff şi J. F. Coetzee [1], care studiază caracteristicile polarografice ale reducerii Li^+, Rb^+, K^+, Na^+, NH_4^+ etc. în acetonitril, întrebuinţînd ca electrolit indiferent perclorat de natriu, perclorat de tetraetil amoniu, iodură de tetrabutil amoniu şi determină curentul de difuzie, panta treptei, potenţialul de semitreaptă şi apoi caută posibilitatea întrebuinţării acestui solvent în scopuri analitice.

Alţi cercetători, ca T. A. Pinfold şi F. Sebba [2], studiază ionii de Bi, Sb, Pb, Sn, Cd, Tl, Zn, In în acid formic, folosind ca soluţii de bază formiaţii. S-au mai întrebuinţat şi alţi solvenţi ca, de exemplu, alcoolii, amoniacul lichid, anilina, acidul acetic, acetona, comparîndu-se caracteristicile de reducere în aceşti solvenţi cu cele din medii apoase [3], [4].

2. Partea experimentală

Noi ne-am propus, pentru început, să studiem comparativ cîteva caracteristici polarografice ale Sb^{3+} în mediu apos şi în amestec de apă-acetonă, amestec de apă-metil-etil-cetonă. În acest scop s-au determinat în mediile respective potenţialul de semitreaptă, constanta curentului de difuzie, viteza de reducere pe electrodul picurător de mercur. S-a urmărit influenţa naturii solventului asupra vitezei de reacţie pe electrod, pentru a se observa dacă adaosul de solvent organic aduce unele avantaje analitice. Ca electrolit indiferent s-a folosit sare Seignette + clorură de amoniu + amoniac.

Reducerea Sb^{3+}, aflat sub formă de emetic, este studiată printre alţii de I. M. Kolthoff [5], arătînd că acesta, în soluţii de bază 0,5 *m* tartrat, în absenţa gelatinei, formează o treaptă cu trei părţi distincte, iar dacă se adaugă NaOH şi gelatină, se obţine o treaptă unitară, foarte bine conturată, care poate fi întrebuinţată în scopuri analitice. Acelaşi autor

afirmă că este dificil să se admită că Sb^{3+} s-ar reduce în trei etape şi este mult mai probabil că apariţia celor trei părţi distincte este consecinţa unor specii diferite de tartraţi complecşi.

În cazul soluţiilor de bază întrebuinţate de noi, la un anumit raport între ionii de stibiu şi sarea Seignette, apar pe curba polarografică, două porţiuni foarte distincte, spre exemplu amestecul cu raportul $1{,}3.10^{-3}$ *m* $Sb^{3+}/1{,}3.10^{-2}$ *m* sare Seignette, adică 4 ml soluţie emetic (formată din SbOCl 0,01 *m* + tartrat 0,1 *m*) + 1 ml NH_4Cl 1 *m* + 3 ml NH_3 1 *m* + 20 ml H_2O + 2 ml gelatină 0,2% (fig. 1, curba *1*). Dacă în acest amestec se măreşte treptat cantitatea de sare Seignette (0,15 ; 0,25 ; 0,5 ; 1 ml sare Seignette 1 *m*) se observă tendinţa primei porţiuni a curbei de a dispărea fig. 1 (curbele *2*...*5*), iar la o anumită concentraţie rămîne o singură treaptă, bine conturată.

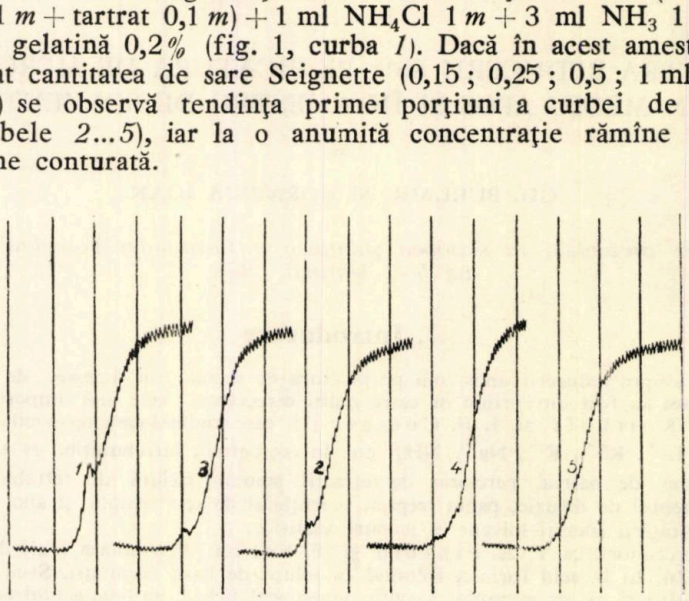


Fig. 1

Deci modificarea formei curbei se datoreşte creşterii concentraţiei de sare Seignette, toţi ceilalţi factori fiind constanţi.

În studiul întreprins de I. M. Kolthoff se arată că treptele diferite ce apar pe curba polarografică dispar prin adaos de gelatină şi variaţia pH-ului În adevăr şi în cazul nostru, un adaos de 0,5 ; 1 ; 1,5 ; 2 ml gelatină 0,2% micşorează prima treaptă (fig. 2, curbele *1*...*4*) fără ca aceasta să dispară.

Dacă se măreşte raportul Sb^{3+}/tartrat (prin scăderea concentraţiei sării Seignette) atunci cele două părţi din curba polarografică sînt mai nete. Curbele *5*...*8* (fig. 2) corespund unei soluţii în care concentraţia în sare Seignette este pe jumătate şi cu cantităţi crescînde de gelatină faţă de cele întrebuinţate în cazurile reprezentate în curbele *1*...*4*.

Nici adaosul de amoniac nu are drept efect dispariţia vreunei porţiuni din curba polarografică. De exemplu curba *2* din fig. 3 corespunde unei cantităţi duble de amoniac faţă de cazul reprezentat în curba *1*.

Înălţimea primei porţiuni s-a micşorat, dar separarea celor două porţiuni este mai netă.

Din cele de mai sus se poate trage concluzia că factorul hotărîtor în formarea celor două trepte pe curba polarografică îl constituie raportul dintre Sb^{3+} şi sarea Seignette şi nu gelatina sau amoniacul. Ele influenţează formarea lor dar nu în mod hotărîtor. În adevăr se formează probabil doi complecşi diferiţi, care se reduc la potenţiale diferite şi formarea lor depinde de raportul Sb^{3+}/sare Seignette.

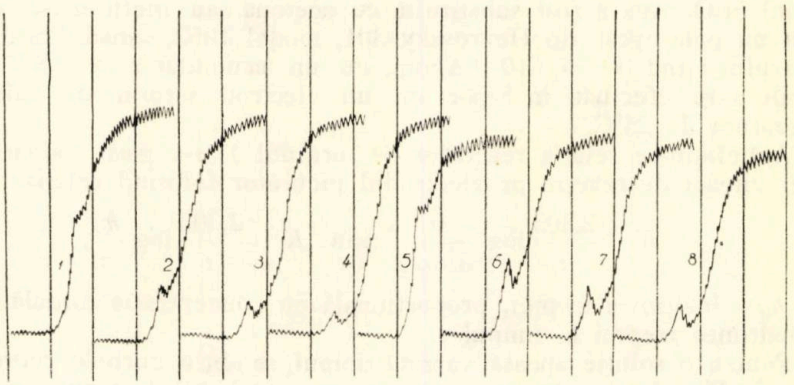


Fig. 2

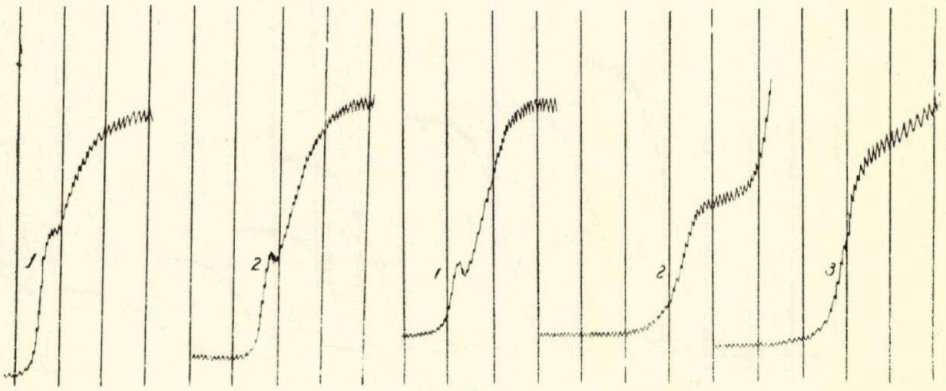


Fig. 3 Fig. 4

Adaosul unor substanţe organice în soluţia de polarografiat conduce la formarea unei singure trepte, bine conturate. Curba *1* din fig. 4 a fost obţinută cu emetic în mediu apos, curba *2* cu adaos de acetonă, iar curba *3* cu adaos de dioxan la mediul apos.

Se observă caracterul unitar al curbei polarografice; solvenţii organici împiedică formarea primei porţiuni din treaptă. În plus în mediu apos potenţialul de semiundă, faţă de electrodul saturat de calomel, este $E_{1/2} = 0{,}991$ V, iar într-o soluţie cu 53% acetonă este $E_{1/2} = 1{,}053$ V, rezultînd deci o negativare.

Pentru cercetarea influenţei solvenţilor organici (acetonă şi metil-etil-cetonă) asupra reducerii stibiului la electrodul picurător de mercur, s-a folosit soluţie cu următoarea compoziţie: 2 ml emetic 0,01 m + 2 ml sare Seignette 0,5 m + 1 ml NH_4Cl 1 m + 3 ml NH_3 1 m + 1 ml gel. 0,2% + + 21 ml H_2O. Apa a fost substituită cu acetonă sau metil-etil-cetonă. S-a folosit un polarograf tip Heyrovsky 301, model 1952, sensibilitatea galvanometrului fiind $S = 4{,}3.10^{-9}$ A/mm, cu un acumulator de 3,8 V. Determinările s-au efectuat în raport cu un electrod saturat de calomel, la temperatura de 25°C.

Aplicîndu-se relaţia reacţiilor de ordinul 1 s-a găsit valoarea constantei vitezei de reacţie pe electrodul picurător folosind relaţia:

$$K = \frac{2{,}303}{t} \log \frac{a_0}{a_0 - x} \quad \text{sau} \quad K = \frac{2{,}303}{t} \log \frac{h_0}{h},$$

unde h_0 – înălţimea treptei, proporţională cu concentraţia iniţială a Sb^{3+}, h — înălţimea treptei la timpul t.

Pentru o soluţie apoasă, variind timpul, se obţin curbele reprezentate în fig. 5. Din datele obţinute, consemnate în tabelul 1, rezultă pentru K o valoare constantă, cu media $6{,}08.10^{-3}$.

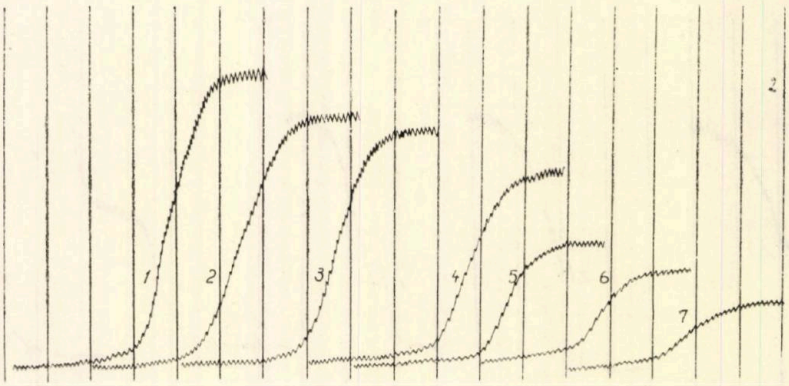


Fig. 5

Comparativ s-a determinat valoarea lui K în soluţii ce conţin şi acetonă. Rezultatele obţinute figurează în tabelul 2a.

Se constată că valoarea lui K scade pe măsură ce creşte concentraţia în acetonă. Pentru un conţinut de circa 50% acetonă, viteza de reducere este de 10 ori mai mică.

În soluții care conțin metil-etil-cetonă valoarea constantei vitezei de reacție nu mai depinde de concentrația solventului organic, după cum se constată din tabelul 2b.

Tabelul 1

Natura soluției	t min	h_0 mm	h mm	K
Soluție apoasă	0	76		
	25	—	65	$6{,}23.10^{-3}$
	40	—	59	$6{,}32.10^{-3}$
	75	—	49	$5{,}84.10^{-3}$
	145	—	31	$6{,}17.10^{-3}$
	200	—	23	$5{,}96.10^{-3}$
	260	—	17	$5{,}96.10^{-3}$
			Media	$6{,}08.10^{-3}$

Tabelul 2a

Natura soluției	K (media)
Soluție apoasă cu 0% acetonă	$6{,}08.10^{-3}$
Soluție apoasă cu 26,6% acetonă	$3{,}10.10^{-3}$
Soluție apoasă cu 53,3% acetonă	$5{,}50.10^{-4}$

Tabelul 2b

Natura soluției	K (media)
Soluție apoasă cu 10% metil-etil-cetonă	$6{,}72.10^{-3}$
Soluție apoasă cu 23,3% metil-etil-cetonă	$6{,}82.10^{-3}$

Pentru cercetarea variației potențialului de semiundă s-a ținut seama de rezistența internă a celulei. Din tabelul 3 și fig. 6 rezultă că prin creșterea cantității de acetonă potențialul $E_{1/2}$ se negativează, ca apoi pentru concentrații depășind 46,6% să tindă către o valoare constantă. Nu s-a putut adăuga mai mult de 53,3% acetonă, deoarece se obțineau precipitate.

În cazul folosirii metil-etil-cetonei rezultă din tabelul 4 o negativare și mai puternică a potențialului de semiundă. Din fig. 7 se observă că și în acest caz, începînd de la o cantitate de 23,3% metil-etil-cetonă, potențialul $E_{1/2}$ tinde către o valoare constantă. Nu s-au putut folosi cantități mai mari de 26,6% solvent organic deoarece se separau fazele.

Tabelul 3

Natura soluţiei	$E_{1/2}$ V
Soluţie apoasă cu 0 % acetonă	0,993
Soluţie apoasă cu 6,6% acetonă	1,020
Soluţie apoasă cu 10 % acetonă	1,050
Soluţie apoasă cu 13,3% acetonă	1,073
Soluţie apoasă cu 20 % acetonă	1,098
Soluţie apoasă cu 26,6% acetonă	1,115
Soluţie apoasă cu 33,3% acetonă	1,120
Soluţie apoasă cu 46,6% acetonă	1,135
Soluţie apoasă cu 53,3% acetonă	1,135

Tabelul 4

Natura soluţiei	$E_{1/2}$ V
Soluţie apoasă cu 3,3% metil-etil-cetonă	1,072
Soluţie apoasă cu 6,6% metil-etil-cetonă	1,133
Soluţie apoasă cu 10 % metil-etil-cetonă	1,168
Soluţie apoasă cu 13,3% metil-etil-cetonă	1,185
Soluţie apoasă cu 16,6% metil-etil-cetonă	1,195
Soluţie apoasă cu 20 % metil-etil-cetonă	1,200
Soluţie apoasă cu 23,3% metil-etil-cetonă	1,213
Soluţie apoasă cu 26,6% metil-etil-cetonă	1,215

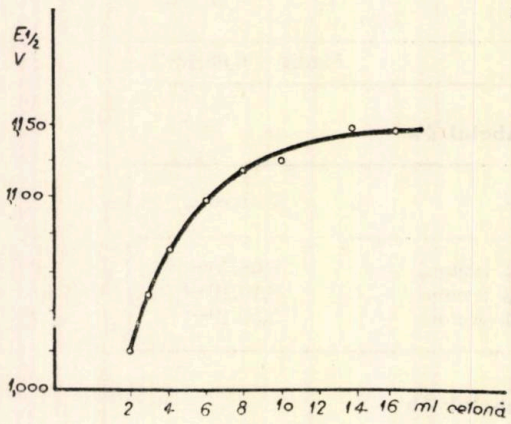


Fig. 6

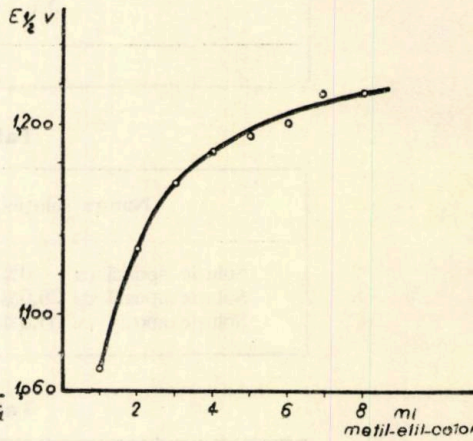


Fig. 7

Solvenţii organici folosiţi produc deci o deplasare a potenţialului de semiundă, ceea ce indică posibilitatea separării unor trepte, care în medii apoase se suprapun.

Constanta curentului de difuzie s-a calculat din ecuaţia lui Ilkovic:

$$i_d = 0{,}627\, n\, F\, D^{1/2}\, m^{2/3}\, t^{1/6}\, c,$$

de unde se deduce:

$$I = 0{,}627\, n\, F\, D^{1/2} = \frac{i_d}{c\, m^{2/3}\, t^{1/6}}.$$

În măsurările efectuate m şi t s-au determinat la potenţialul de semiundă.

Valorile lui I obţinute la concentraţii diferite de acetonă sînt redate în tabelul 5, iar cele pentru metil-etil-cetonă în tabelul 6.

Tabelul 5

Natura soluţiei	*I* A
Soluţie apoasă cu 0 % acetonă	6,37
Soluţie apoasă cu 26,6% acetonă	4,94
Soluţie apoasă cu 40 % acetonă	4,62
Soluţie apoasă cu 53,3% acetonă	3,95

Tabelul 6

Natura soluţiei	*I* A
Soluţie apoasă cu 6,6% metil-etil-cetonă	6,17
Soluţie apoasă cu 13,3% metil-etil-cetonă	5,75
Soluţie apoasă cu 16,6% metil-etil-cetonă	5,67
Soluţie apoasă cu 20 % metil-etil-cetonă	5,62
Soluţie apoasă cu 23,3% metil-etil-cetonă	5,41

Se constată o diminuare continuă a constantei curentului de difuzie, mai lentă în cazul folosirii metil-etil-cetonei.

Pentru cercetarea dependenţei înălţimii treptei faţă de conţinutul în Sb^{3+} s-au folosit soluţii apoase (fig. 8), soluţii cu un conţinut de 53,3% acetonă (fig. 9) şi soluţii cu un conţinut de 10% metil-etil-cetonă (fig. 10). Valorile obţinute, după cum se constată din graficele din figurile indicate, arată o directă proporţionalitate, în toate cazurile.

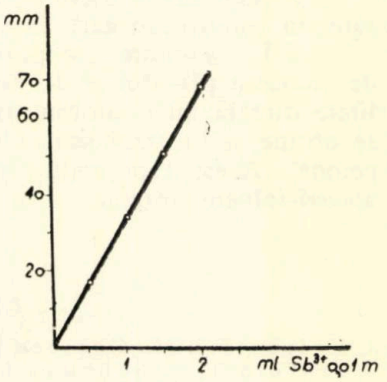


Fig. 8

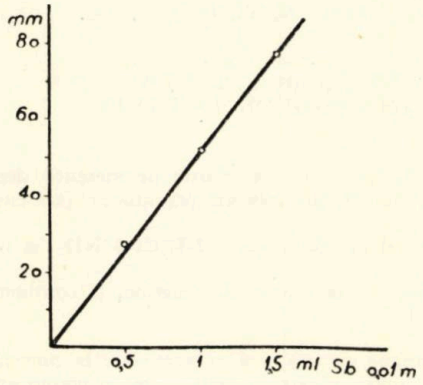


Fig. 9

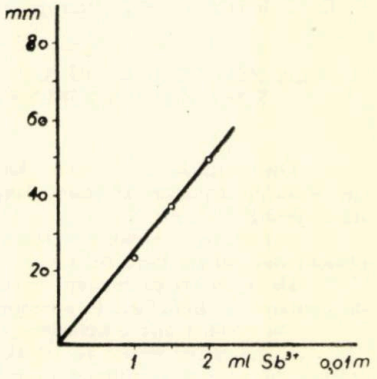


Fig. 10

3. Concluzii

S-au comparat unele valori ale reducerii Sb^{3+} pe picătura de mercur şi se constată că adaosul de solvenţi organici modifică aceste valori şi anume:

1. Viteza de reducere a ionului Sb^{3+} pe picătura de mercur este mai mică în prezenţa acetonei decît în apă şi scade mult la creşterea concentraţiei în solvent organic, ceea ce contribuie la reproductibilitatea curbelor polarografice cînd concentraţia în Sb^{3+} este redusă. În schimb în prezenţa metil-etil-cetonei constanta vitezei de reacţie are o valoare apropiată de cea găsită în soluţii apoase şi adaosul de solvent organic nu produce variaţii însemnate.

2. Adaosul de solvenţi organici produce negativarea potenţialului de semitreaptă, care la o anumită concentraţie tinde spre valori constante, ceea ce indică posibilitatea de a separa treapta Sb^{3+} de a altor ioni.

3. Adaosul de solvenţi organici produce trepte unitare bine conturate, în condiţii în care în soluţii apoase apar discontinuităţi.

4. La anumite compoziţii ale soluţiei de bază apoase, care depind de valoarea pH-ului şi de raportul Sb^{3+}/tartrat, se obţine o proporţionalitate directă între concentraţia Sb^{3+} şi înălţimea treptei. Acelaşi rezultat se obţine şi în cazul adaosului de solvenţi organici (acetonă şi metil-etil-cetonă). Acest fapt indică posibilitatea dozării Sb^{3+} în amestec soluţie apoasă-solvent organic.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de chimie generală

BIBLIOGRAFIE

1. Kolthoff I. M., Coetzee J. F., J. Am. Chem. Soc., 1957, **79**, p. 870.
2. Pinfold T. A., Sebba F., J. Am. Chem. Soc., 1956, **78**, p. 5193.
3. Zlhotowscki I., Kolthoff I. M., J. Am. Chem. Soc., 1942, **64**, p. 1927.
4. Novak J. V. A., Collection, 1939, **11**, p. 573.
5. Kolthoff I. M., *Polarography*. Vol. **II**, Intersc. Publ., N. Y., 1952, p. 545.

LA RÉDUCTION DU Sb^{3+} SUR LA GOUTTE DE MERCURE DANS UNE SOLUTION AQUEUSE ET DANS UN MÉLANGE DE SOLVANTS

(Résumé)

On examine, comparativement, la réduction du Sb^{3+} sur la goutte de mercure dans une solution aqueuse et aussi dans un mélange d'eau et de solvants organiques (acétone, méthyle-éthyle-cétone).

On utilise, comme électrolyte indifférent, le sel de Seignette + NH_4Cl + NH_3 et on obtient des paliers bien définis.

Dans ces conditions on détermine: la constante de la vitesse de réaction, la constante du courant de diffusion, le potentiel du demi-palier.

On aboutit aux conclusions suivantes:

1. La constante de la vitesse de réaction diminue au fur et à mesure que la concentration du solvant organique augmente lorsqu'on emploie l'acétone, tandis que en employant le méthyle-éthyle-cétone elle reste invariable.

2. La constante du courant de diffusion diminue au fur et à mesure que le rapport solvant organique/eau augmente.

3. Les valeurs du potentiel du demi-palier sont d'autant plus négatives que le rapport solvant organique/eau augmente; au delà d'une certaine valeur de ce rapport, la valeur du potential du demi-palier reste invariable.

4. Pour une certaine valeur du rapport solvant organique/eau, on obtient une proportionalité directe entre la concentration du Sb^{3+} et l'hauteur du palier.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

УДК 669.234 ; 535.24

ЭКСТРАКЦИОННО-ФОТОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАЛЛАДИЯ С ПОМОЩЬЮ 1-(2-ПИРИДИЛАЗО)-РЕЗОРЦИНА

А. И. БУСЕВ и В. М. ИВАНОВ

1. *Введение*

Пиридиновые азосоединения с оксигруппой в орто-положении к азогруппе оказались ценными комплексонометрическими индикаторами, а также реагентами для фотометрического определения ряда элементов [1]. Эти соединения легко синтезируются [2], [3] и дают высокочувствительные реакции с ионами ряда металлов. Еще Ченг и Брей [4] отмечали, что Pd^{2+} взаимодействует с 1-(2-пиридилазо)-2-нафтолом (ПАН) с образованием соединения, экстрагируемого изоамиловым спиртом или четыреххлористым углеродом и окрашивающего органический слой в зеленый цвет. Было детально изучено [5] взаимодействие ионов Pd^{2+} с этим реагентом и показана возможность гравиметрического и экстракционно-фотометрического определения Pd. Доно, Накагава и Хаяси [6] изучили взаимодействие Pd с этим реагентом и также применили его для фотометрического определения палладия в присутствии 50-кратных количеств Rh, Pt, Au, Ag и Hg. Ионы Fe (III), Co, Ni и Cu (II) маскировали в слабокислой среде комплексоном III.

Наши опыты показали, что 1-(2-пиридилазо)-резорцин (ПАР) образует с ионами Pd^{2+} два соединения: одно — в слабокислой или нейтральной среде, по цвету похожее на соединения ПАР с другими катионами, образующимися при аналогичных условиях; другое — в кислой среде, оно устойчиво в 6...8 N H_2SO_4, имеет коричневато-зеленый цвет, нерастворимо в воде, экстрагируется органическими растворителями с окрашиванием экстракта в зеленый цвет. Представляло интерес детально изучить оба соединения и выснить возможность использования их для определения малых количеств Pd в присутствии других элементов.

2. *Экспериментальная часть*

а) *Приготовление реагентов*

Исходный раствор соли палладия приготовляли растворением $PdCl_2$ в 0,1 N HCl. Концентрацию палладия определяли гравиметрически диметилглиоксиматным методом ; она составила в среднем

0,59 мг/мл Pd. Более разбавленные растворы готовили разбавлением исходного раствора.

Реагент ПАР, 0,025%-ный раствор, был приготовлен растворением в воде навески чистого продажного препарата.

б) Взаимодействие ионов палладия с ПАР в нейтральной среде

Ион палладия образует с ПАР в слабокислой или нейтральной среде (pH = 4...6) растворимое в воде соединение малинового цвета с максимумом светопоглощения при 50 ммк. Максимум светопоглощения не смещается при изменении молярных отношений компонентов и изменений pH в интервале 4...7, что свидетельствует, очевидно, об образовании одного соединения. Кривые светопоглощения растворов, приготовленных в оптимальных условиях и содержащих постоянное количество ПАР и переменное количество ионов палладия, пересекаются в изобестической точке при 450 ммк (рис. 1).

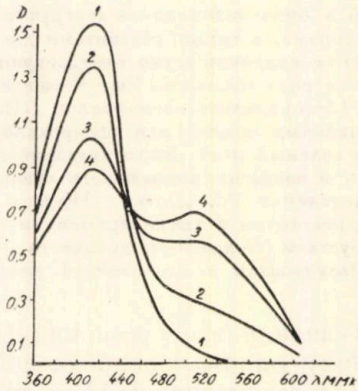


Рис. 1. — Светопоглощение растворов соединения Pd с ПАР при различной концентрации Pd: *1* — 6.10^{-5} мол/л ПАР; *2* — 1.10^{-5} г-ион/л Pd; *3* — 3.10^{-5} г-ион/л Pd; *4* — 4.10^{-5} г-ион/л Pd, (pH = 5,6). Измерено на спектрофотометре СФ-5 при толщине слоя 10 мм, относительно воды.

Оптическая плотность растворов соединения палладия имеет максимальное значение в интервале pH = 5,7...6,4 (рис. 2), который можно создавать с помощью ацетатно-аммиачных буферных растворов.

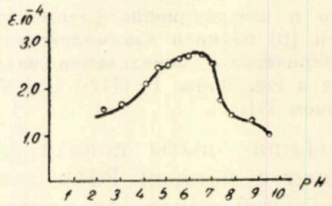


Рис. 2. — Влияние pH на оптическую плотность соединения Pd с ПАР. Взято 50 мкг Pd, 2,0 мл 0,025 %-ного раствора ПАР, объем 25 мл.

Методом отношений тангенсов углов наклона [7] было найдено молярное отношение 1 : 1 при взаимодействии ионов палладия с ПАР. Готовили две серии растворов: в первой концентрация ПАР составляла $4,0.10^{-5}$ мол/л, а концентрация ионов палладия изменялась от 8.10^{-6} г-ион/л до 32.10^{-6} г-ион/л; во второй серии, наоборот, была постоянной концентрация ионов палладия ($4,0.10^{-5}$ г-ион/л), а кон-

центрация ПАР изменялась в интервале $8.10^{-6}...32.10^{-6}$ мол/л. Все растворы были разбавлены до объема 25 мл 10%-ным раствором $CH_3COONa.3H_2O$ с pH = 6,3. Оптическую плотность измеряли на спектрофотометре СФ-5 при 510 ммк и толщине слоя 10 мм для первой серии растворов относительно 4.10^{-5} мол/л раствора ПАР, для второй серии — относительно воды (рис. 3). По правой ветви рис. 3 был рассчитан молярный коэффициент погашения, который оказался равным $1{,}76.10^4$; $1{,}83.10^4$; $1{,}91.10^4$; $1{,}94{,}10^4$; $1{,}77.10^4$; $1{,}85.10^4$; $1{,}83.10^4$; $1{,}84.10^4$; в среднем $1{,}84.10^4$.

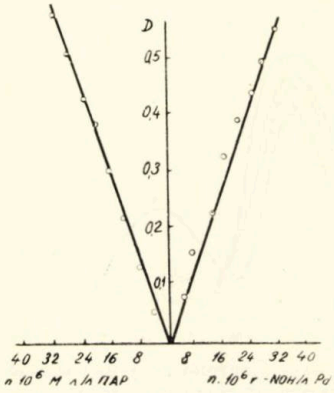


Рис. 3. — Молярное отношение компонентов по методу отношения тангенсов углов наклона.

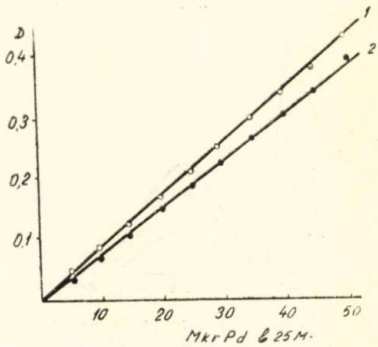


Рис. 4. — Подчинение закону Бера растворов соединения Pd с ПАР при pH = 6,3: *1* — при 510 ммк; *2* — при 530 ммк.

Для растворов окрашенного соединения справедлив закон Бера в интервале концентраций 5...50 мкг Pd в 25 мл (рис. 4), для измерения оптической плотности можно применять фотоэлектроколориметр с сине-зеленым светофильтром. Для образования соединения необходимо вводить 7...10-кратный по отношению к палладию избыток реагента, нагревать растворы до 70°...80°С и измерять оптическую плотность через 5 мин после сливания растворов.

Так как в слабокислой среде с ПАР взаимодействуют многие ионы, образуя окрашенные в красный цвет соединения, было изучено влияние комплексона III на результаты определения палладия. Даже 1000-кратные количества комплексона III относительно палладия не влияют на оптическую плотность растворов.

Несмотря на высокую чувствительность реагента в нейтральной и слабокислой средах, применение его для фотометрического определения малых количеств палладия несколько затруднено ввиду необходимости введения большого избытка реагента.

в) *Взаимодействие ионов палладия с ПАР в кислой среде*

При сливании растворов ПАР и $PdCl_2$ в кислой среде (0,1...7 N H_2SO_4) образуется соединение, которое нерастворимо в воде, *н*-гексане, хлороформе, четыреххлористом углероде, бензоле, толуоле, ксилоле, дихлорэтане, но растворимо в ацетоне, диоксане, метаноле, высших спиртах, этилацетате, амилацетате и циклогексаноне. Кривые светопоглощения растворов этого соединения в органических растворителях имеют два максимума: при 440 ммк и при 590...610 ммк; кривые светопоглощения в растворителях, смешивающихся с водой, имеют максимумы при 440 ммк и 590 ммк (рис. 5, 6).

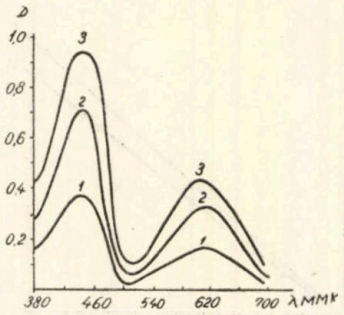


Рис. 5. — Светопоглощение растворов соединения Pd с ПАР при различной концентрации комплекса: *1* — 2,5.10^{-5} мол/л, *2*—5,0.10^{-5} мол/л; *3*—7,0.10^{-5} мол/л. Экстрагент— этилацетат, кислотность водной фазы 5 N H_2SO_4. Измерено на спектрофотометре СФ-5 при толщине слоя 10 мм, относительно воды.

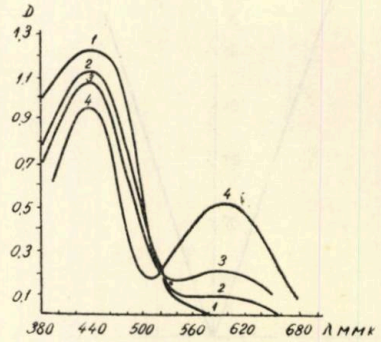


Рис. 6. — Светопоглощение водно-диоксановых растворов соединения Pd с ПАР при концентрации Pd: *1* — 6.10^{-5} мол/л ПАР; *2* — 1.10^{-5} г-ион/л; *3* — 2.10^{-5} г-ион/л; *4* — 6.10^{-5} г-ион/л. Концентрация H_2SO_4 — 2N, диоксан — 40% по объему. Измерено на спектрофотометре СФ-5 при толщине слоя 10 мм, относительно воды.

Изменение кислотности водной фазы в пределах 3...10 N H_2SO_4 заметно не влияет на оптическую плотность экстрактов (рис. 7); соединение образуется практически сразу при сливании растворов компонентов и устойчиво более суток; полнота экстракции достигается при встряхивании водных растворов объемом 10...20 мл в течение 10 сек с 5...10 мл органического растворителя за 1 раз.

Методом изомолярных серий установлено молярное отношение компонентов 1 : 1 (рис. 8) при суммарной концентрации компонентов 2.10^{-4} мол/л; характер кривых указывает на высокую прочность образующегося соединения.

Экстракты подчиняются закону Бера в интервале концентраций 10...50 мкг Pd в объеме 5 мл (рис. 9). Лучше всего определять палладий при кислотности водной фазы не менее 2 N H_2SO_4; в этих ус-

ловиях ПАР не экстрагируется этилацетатом и не мешает измерению оптической плотности при 440 ммк. Все другие растворители экстрагируют ПАР даже при кислотности водной фазы 6...8 N H_2SO_4. При

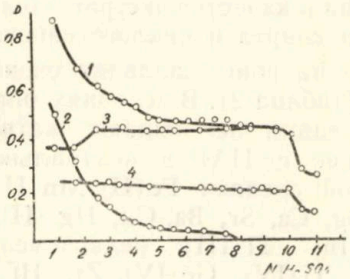


Рис. 7. — Оптическая плотность экстракта в зависимости от кислотности водной фазы: *1* — экстракт соединения по отношению к воде (440 ммк); *2* — экстракт реагента по отношению к воде (440 ммк); *3* — дифференциальная кривая; *4* — экстракт соединения по отношению к воде (630 ммк) (экстрагент — этилацетат).

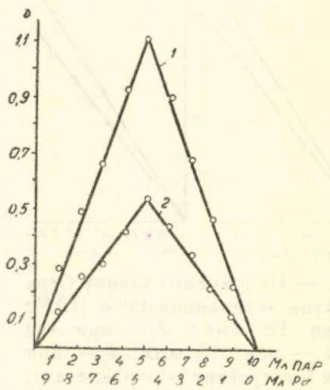


Рис. 8. — Молярные отношения при взаимодействии Pd и ПАР по методу Остромысленского-Жобе (в этилацетате).

определении 30...200 мкг палладия в качестве экстрагента лучше применять изобутиловый спирт, а оптическую плотность измерять при 590 ммк.

Молярные коэффициенты погашения соединения палладия с ПАР в различных органических растворителях (таблица 1) вычислены по

Таблица 1

Молярные коэффициенты погашения соединения палладия с ПАР в различных растворителях

Экстрагент	Максимум светопоглощения ммк		Молярный коэффициент погашения E	
Н-бутиловый спирт	450	590	14 400 ± 500	6 700 ± 300
Изобутиловый спирт	450	590	17 300 ± 300	7 700 ± 400
Н-амиловый спирт	450	600	15 300 ± 600	6 900 ± 200
Изоамиловый спирт	450	610	15 100 ± 800	6 400 ± 300
Этилацетат	440	610	14 800 ± 400	6 500 ± 100
Амилацетат	440	610	14 400 ± 300	6 300 ± 200
Циклогексанон	440	610	18 500 ± 300	8 700 ± 200

результатам измерения оптической плотности растворов, в которых практически полностью реагент связан в комплексное соединение (в присутствии избыта ионов палладия). Полученные данные позволяют сделать вывод о целесообразности использования в качестве экстрагентов изобутилового спирта и циклогексанона.

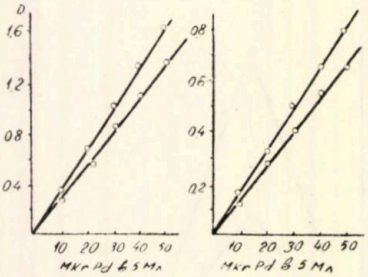


Рис. 9. — Подчинение закону Бера экстрактов соединения Pd с ПАР: *1* — при 420 ммк; *2* — при 440 ммк; *3* — при 610 ммк; *4* — при 630 ммк (экстрагент — этилацетат).

Реагент на ионы палладия очень селективен (таблца 2). В условиях определения палладия не мешают катионы, реагирующие с ПАР в нейтральной и слабокислой средах: **Fe (II), Mn (II), Zn, Cu, Be, Mg, Ca, Sr, Ba, Cd, Hg (II), Al, Sc, Ga, In, Tl (III)**, редкоземельные элементы, **Ti (IV), Ge (IV), Zr, Hf, Th, U (VI)** и **Bi (III)**.

Fe (III) в форме хлорида мешает, поскольку экстрагируется этилацетатом, однако, переведя его в сульфат выпариванием с серной кислотой можно устранить влияние **Fe (III)**.

Определению палладия не мешают **Ir, Rh, Os, Pt, Ru**. Мешает **Ag (I)**, которое нужно отделить, например, осаждением в форме **AgCl**.

Разработаный метод можно применять для обнаружения палладия и для экстракционно-фотометрического определения его в различных объектах.

г) *Обнаружение палладия*

Навеску анализируемого материала, содержащую 5...10 мкг **Pd**, растворяют в концентрации HNO_3 раствор упаривают до объема 0,5 мл, прибавляют 1 мл 10 *N* H_2SO_4 для создания кислотности 3...7 *N* прибавляют 0,5 мл 0,01%-ного раствора ПАР; через 2...3 мин экстрагируют 2...3 мл этилацетата. В присутствии палладия этилацетат окрашивается в изумрудно-зеленый цвет.

д) *Определение палладия в сплаве с серебром*

Навеску сплава 15...25 мг взвешивают с точностью 0,01 мг, обрабатывают при нагревании на песочной бане 3...5 мл HNO_3, $d = 1{,}4$, и упаривают до объема 1...1,5 мл. Раствор переносят в мерную колбу емкостью 200 мл, прибавляют 5 мл H_2SO_4, $d = 1{,}84$, и разбавляют водой до метки. Отбирают 5,0 мл раствора, переносят в делительную воронку емкостью 25...50 мл, вводят 8 мл 10 *N* H_2SO_4, 1 мл насыщенного раствора **KCl** (для осаждения ионов Ag^+) и 2 мл 0,025%-ного раствора ПАР. Через 3...5 мин прибавляют 10,0 мл изобутилового спирта и экстрагируют 30...40 сек. Измеряют оптическую плотность экстракта

Таблица 2

Экстракционно-фотометрическое определение Pd в присутствии посторонних ионов (взято 50,0 мкг Pd).

Введено мг катиона металла	Отношение Pd : катион		Найдено Pd мкг	Ошибка	
				мкг	%
H_2PtCl_6	1,84	1 : 38	48,0	— 2,0	— 4,0
	3,68	1 : 76	50,0	0	0
Na_2IrCl_6	0,61	1 : 12	52,0	+ 2,0	+ 4,0
	1,83	1 : 36	52,5	+ 2,5	+ 5,0
Na_3RhCl_6	0,80	1 : 16	52,0	+ 2,0	+ 4,0
	2,40	1 : 48	51,0	+ 1,0	+ 2,0
Co^{2+}	2,5	1 : 50	49,0	— 1,0	— 2,0
	10,0	1 : 200	48,5	— 1,5	— 3,0
	50,0	1 : 1 000	50,0	0	0
Ni^{2+}	2,5	1 : 50	50,0	0	0
	10,0	1 : 200	47,5	— 2,5	— 5,0
	50,0	1 : 1 000	51,5	+ 1,5	+ 3,0
Cu^{2+}	2,5	1 : 50	50,0	0	0
	10,0	1 : 200	50,0	0	0
	50,0	1 : 1 000	49,0	— 1,0	— 2,0
$FeCl_3$	5,0	1 : 100	50,0	0	0
	10,0	1 : 200	48,0	— 2,0	— 4,0
	50,0	1 : 1 000	38,0	— 12,0	— 24,0
$Fe_2(SO_4)_3$	11,2	1 : 224	48,5	— 1,5	— 3,0
	56,0	1 : 1 120	49,0	— 1,0	— 2,0
$AgNO_3$ *)	5,0	1 : 100	33,0	— 17,0	— 34,0
$AgNO_3$ **)	5,0	1 : 100	49,5	— 0,5	— 1,0
	25,0	1 : 500	48,0	— 2,0	— 4,0

*) Без отделения Ag(I) от Pd.
**) С отделением Ag(I) в форме AgCl.

реагента той же концентрации. Количество Pd находят по калибровочному графику.

Калибровочный график строят в интервале концентраций 20... 40...60...80...100...120 мкг Pd в 10 мл экстрагента. При определении Pd в сплаве, содержащем 22,0% Pd, было найдено 22,20; 22,15; 22,28; 22,40; 22,10% Pd, в среднем 22,23% Pd при навеске сплава 8,7... 12,3 мг.

3. *Выводы*

Изучено взаимодействие ионов Pd^{2+} с 1-(2-пиридилазо)-резорцином. Установлено, что при этом образуется два соединения. Одно из них, образующееся в нейтральной среде, растворимо в воде, имеет максимум светопоглощения при 510 ммк, оптимальный интервал pH=5,7...6,4.

Молярное отношение компонентов равно 1 : 1, молярный коэффициент погашения 18 400. Растворы окрашенного соединения подчиняются закону Бера в интервале концентраций 5...50 мкг Pd в 25 мл.

Другое соединение образуется в слабокислой среде, устойчиво в сильнокислой среде, нерастворимо в воде и хорошо растворяется в ацетоне, диоксане, спиртах, циклогексаноне и сложных эфирах. Растворы соединения о органических растворителях имеют два максимума светопоглощения: при 440...450 ммк и 590...610 ммк (положение максимума зависит от природы растворителя). Молярное отношение компонентов равно 1 : 1. Определены молярные коэффициенты погашения растворов соединения в различных растворителях. Разработан экстракционно-фотометрический метод определения Pd в присутствии Fe(II) Mn(II), Zn, Cu, Be, Mg, Ca, Sr, Ba, Cd, Hg(II), Al, Sc, Ga, In, Tl, редкоземельных элементов, Ti(IV), Th(IV), Ge(IV), Zr, Hf, U(VI), Bi, Fe(III), Ir, Rh, Os, Ru, Pt и Ag. Метод применен для анализа Ag-Pd сплава.

Поступила в 15 XI 1965 г.

Университет им. М. В. Ломоносова
Москва, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Бусев А. И., Иванов В. М., ЖАХ, 1964, **19**, стр. 1238.
2. Чичибабин А. Е., Рязанцев М. Д., ЖРХО, 1915, **47**, стр. 1582.
3. Чичибабин А. Е., ЖРХО, 1918, **50**, стр. 513.
4. Cheng K. L., Bray R. H., Analyt. Chem., 1955, **27**, p. 782.
5. Бусев А. И., Киселева Л. В., Вестн. Моск. ун-та, Сер. мат. физ., и химии, 1958, *4*, стр. 179.
6. Tsurumatsu Dono, Henghiti Nakagava, Haiashi Miiashi, Nippon kogaku zasshi, J. Chem. Scc. Japan., Pure Chem. Sec., 1960, **81**, p. 1703, A—114.
7. Бабко А. К., *Физико-химический анализ комплексных соединений в растворах*. Изд. АН УССР, Киев, 1955.

DETERMINAREA EXTRACTIV-FOTOMETRICĂ A PALADIULUI CU AJUTORUL 2-PIRIDILAZO-REZORCINEI

(Rezumat)

Se studiază cele două combinaţii ce se formează între ionii de Pd^{2+} şi 2-piridilazo-rezorcină: una în mediul neutru sau slab acid şi alta în mediul acid.

Se pune la punct atît posibilitatea de descoperire calitativă a Pd cît şi metoda extractiv-fotometrică pentru dozarea sa cantitativă în diferite substanţe şi în prezenţa ionilor străini.

Explicaţia figurilor

Fig. 1.—Adsorbţia luminii de către soluţiile Pd cu PAR[1]) la concentraţii diferite ale Pd: *1*—6.10^{-5} mol/l; *2*—1.10^{-5} g-ion/l Pd; *3*—3.10^{-5} g-ion/l Pd; *4*—4.10^{-5} g-ion/l Pd (pH = 5,6). Măsurarea s-a efectuat cu spectrofotometrul SF-5, la grosimea stratului de 10 mm faţă de apă.

[1]) 2-piridilazo-rezorcina.

Fig. 2. — Influenţa pH-ului asupra densităţii optice a compusului Pd cu PAR. S-a utilizat 50 mkg Pd, 2,0 ml soluţie PAR 0,025%, 25 ml volum.

Fig. 3. — Raportul molar al componenţilor prin metoda raporturilor tangentelor unghiului de înclinare.

Fig. 4. — Verificarea legii lui Beer de către soluţiile compusului Pd cu PAR în cazul pH = 6,3: *1*— la 510 mμ, *2*—la 530 mμ.

Fig. 5. — Absorbţia luminii de către soluţiile Pd cu PAR la concentraţii diferite ale complexului: *1*—$2{,}5.10^{-5}$ mol/l, 2—$5{,}10^{-5}$ mol/l; *3*—$7{,}0.10^{-5}$ mol/l. Extragentul—etil-acetat, aciditatea fazei apoase—5*N* H_2SO_4. Măsurarea a fost efectuată cu spectrofotometrul SF-5, la grosimea stratului de 10 mm faţă de apă.

Fig. 6. — Absorbţia luminii de către soluţiile dioxanice ale compusului Pd cu PAR la concentraţii diferite ale Pd: *1*—6.10^{-5} mol/l PAR; *2*—1.10^{-5} g-ion/l; *3*—$2{,}0.10^{-5}$ g-ioni; *4*—6.10^{-5} g-ioni/l. Concentraţia H_2SO_4—2*N*, dioxan- 40% după volum. Măsurarea s-a efectuat cu spectrofotometrul SF-5 la grosimea stratului de 10 mm faţă de apă.

Fig. 7. — Dependenţa densităţii optice a extractului funcţie de aciditatea fazei apoase: *1*—extractul compusului în raport cu apa (440 mμ); *2*—extractul reagentului în raport cu apa (440 mμ); *3*—curba de diferenţiere; *4*—extractul compusului faţă de apă (630 mμ) (extragent — etil-acetat).

Fig. 8. — Raporturi molare la interacţiunea Pd şi PAR după metoda lui Ostromîslenski - Joba (în etilacetat).

Fig. 9. — Verificarea legii lui Beer de către extractul compusului Pd cu PAR: *1*—la 420 mμ; *2*—la 440 mμ; *3*—la 610 mμ; *4*— la 630 mμ (extragent-etilacetat).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 541.132 ; 546.732 ; 54—145.1

ASUPRA EXISTENŢEI IONILOR COMPLECŞI DE Co (II) ÎN SOLUŢII APOASE

DE

I. ROŞCA şi SOFIA APOSTOL

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

Structura şi compoziţia complecşilor care se formează în soluţiile apoase ale $CoCl_2$ deşi au fost studiate încă din veacul trecut, continuă şi astăzi să fie cercetate.

Schimbarea coloraţiilor soluţiilor care conţin $CoCl_2$ şi diverse substanţe anorganice a fost explicată prin diferite teorii, dintre care cele mai importante sînt: a hidratării [1]...[12], a lui Bersch [13], a lui Engel [14], a lui Ostwald [15], a lui Donnan şi Basset [16], [17].

Pe fondul acestor teorii s-au dezvoltat cu timpul concepţii ale unor autori care explicau formarea combinaţiilor complexe în soluţiile sărurilor anorganice şi organice de cobalt fie dînd prioritate unor teorii, fie modificîndu-le sau completîndu-le [18]...[30]. Mai tîrziu apar şi alte teorii printre care cea dată de Hill şi Howell [31], [32], teoria lui Bredicka [33]...[37]. Contribuţii preţioase la stabilirea compoziţiei soluţiilor apoase de $CoCl_2$ şi diverse săruri anorganice au adus şi alţi cercetători [38]...[50]. Cele mai recente lucrări [51]...[56] indică prezenţa ionilor coloraţi albastru $[CoCl_4]^{2-}$ în soluţii apoase de $CoCl_2$ şi HCl, în dezacord cu unii autori citaţi.

Cunoscînd comportarea ionilor Co^{2+} în soluţiile apoase ale unor cloruri, de a genera complecşi [70], ne propunem să punem în evidenţă prin electroforeză pe hîrtie şi cromatografie pe hîrtie, existenţa simultană a tuturor complecşilor ce se formează din sistemele:

$CoAc_2—H_2O$	$Co(NO_3)_2—H_2O$	$CoCl_2—H_2O$
$CoAc_2—LiCl—H_2O$	$Co(NO_3)_2—LiCl—H_2O$	$CoCl_2—LiCl-H_2O$
$CoAc_2—KCl—H_2O$	$Co(NO_3)_2—KCl—H_2O$	$CoCl_2—KCl—H_2O$
$CoAc_2—NaCl—H_2O$	$Co(NO_3)_2—NaCl—H_2O$	$CoCl_2—NaCl—H_2O$
$CoAc_2—NH_4Cl—H_2O$	$Co(NO_3)_2—NH_4Cl—H_2O$	$CoCl_2—NH_4Cl—H_2O$
$CoAc_2—MgCl_2—H_2O$	$Co(NO_3)_2—MgCl_2—H_2O$	$CoCl_2—MgCl_2—H_2O$
$CoAc_2—ZnCl_2—H_2O$	$Co(NO_3)_2—ZnCl_2—H_2O$	$CoCl_2—ZnCl_2—H_2O$
$CoAc_2—CaCl_2—H_2O$	$Co(NO_3)_2—CaCl_2—H_2O$	$CoCl_2—CaCl_2—H_2O$
$CoAc_2—SnCl_2—H_2O$	$Co(NO_3)_2—SnCl_2—H_2O$	$CoCl_2—SnCl_2—H_2O$
$CoAc_2—HgCl_2—H_2O$	$Co(NO_3)_2—HgCl_2—H_2O$	$CoCl_2—HgCl_2—H_2O$
	$Co(NO_3)_2—HCl—H_2O$	$CoCl_2—HCl—H_2O$

Alegerea sistemelor de mai sus a fost făcută pe baza comportării diferite a unor cloruri, cu proprietăţi bine cunoscute. Dependenţa compoziţiei grupelor complexe în soluţie faţă de concentraţie [66] precum şi structura soluţiilor apoase de electroliţi [67] au impus alegerea condiţiilor optime de separare a complecşilor care se formează din sistemele amintite.

Separările cele mai bune ale compuşilor au fost obţinute cu electroliţii: KNO_3, $KClO_3$, KAc, HCl pentru electroforeza pe hîrtie, iar cu developanţii: KAc, HCl, acetonă + alcool metilic (8:2), benzen + acetonă (1:9), alcool butilic + acetonă (1:1) etc., pentru cromatografia pe hîrtie.

2. Modul de lucru şi interpretarea rezultatelor

Partea experimentală a acestei lucrări, referitoare la cromatografia şi electroforeza pe hîrtie, a fost orientată în sensul rezultatelor obţinute de unii autori în separarea complecşilor cloruraţi ai cationilor metalici [57], [58] precum şi a separării produselor anorganice [59]...[64].

În metoda cromatografiei ascendente pe hîrtie s-a folosit hîrtie cromatografică Watman nr. 1, 2×25 cm, în camere de cromatografiat cilindrice. Timpul de separare a fost de 2,5 h.

Separarea electroforetică s-a efectuat pe hîrtie cromatografică Watman nr. 1, $1,5 \times 14$ cm, la o diferenţă de potenţial de 10; 15 şi 30 V/cm, timp de 5...20 min. Aparatul folosit este cel descris în [63], cu mici modificări.

Din datele obţinute se constată că indiferent de anionul de care este legat Co (II) iniţial (Cl^-, NO_3^-, Ac^-) în soluţii concentrate apoase de HCl, LiCl, KCl, NaCl, $MgCl_2$ etc., se formează produşi coloraţi albastru care se separă prin cromatografie şi electroforeză pe hîrtie. Nu se observă nici o modificare a culorii soluţiilor care conţin ioni Co^{2+} şi $ZnCl_2$, $HgCl_2$, $SnCl_2$ etc., şi se separă prin cromatografie şi electroforeză pe hîrtie un singur produs, care dă reacţia Co^{2+}.

În consecinţă se deduce că la formarea produselor colorate în albastru participă ionii Cl^-, care sînt introduşi cu cationii mai puţin complexabili decît Co^{2+}.

De asemenea am reuşit să arătăm că produşii de culoare albastră sînt daţi de anioni iar produşii de culoare roz de cationi, utilizînd un tub în formă de U umplut cu soluţii apoase de LiCl sau HCl, în care s-au introdus la mijloc, pe rînd, soluţii de $CoCl_2$, $Co(NO_3)_2$, $CoAc_2$. La partea superioară a braţelor s-au introdus electrozi de grafit conectaţi la o sursă de curent continuu. După stabilirea unei diferenţe de potenţial între electrozi s-a constatat totdeauna ascensiunea soluţiei de culoare albastră de partea anodului iar a soluţiei de culoare roz la catod. Concentraţia în Cl^- spre anod fiind mai ridicată [68] rezultă o participare a Cl^- la formarea produşilor de culoare albastră, în concordanţă şi cu o parte din indicaţiile din literatura citată.

Între $CoCl_2$ şi HCl sau LiCl se formează produşi coloraţi albastru începînd cu raportul

$$\frac{[HCl]}{[CoCl_2]} > 25 \text{ și } \frac{[LiCl]}{[CoCl_2]} > 30.$$

Pentru alte cloruri ca: KCl, NaCl, $MgCl_2$ etc., produșii de culoare albastră, similari, apar începînd cu valori mai ridicate ale acestui raport. Acești compuși albaștri pot fi separați în cromatografia pe hîrtie și electroforeza pe hîrtie.

Dacă se substituie $CoCl_2$ cu $CoAc_2$ sau $Co(NO_3)_2$ și se lucrează în același mod, se obțin rezultate analoge ca în cazul folosirii $CoCl_2$, cu simpla deosebire că produșii albaștri apar la o concentrație a componenților ceva mai ridicată.

Produșii albaștri care s-au separat din sistemele: $CoCl_2$—HCl—H_2O, $CoCl_2$—LiCl—H_2O, $CoCl_2$—KCl—H_2O, $CoCl_2$—$MgCl_2$—H_2O, prin cromatografie și electroforeză pe hîrtie, dovedesc prezența ionului colorat albastru, care se deplasează spre polul pozitiv, în timp ce produșii colorați roz indică prezența ionului Co^{2+}, care se îndreaptă spre polul negativ.

Cobaltul se deplasează cationic în HCl pînă la 4,8 *N* în produse de culoare roz, iar peste această concentrație în HCl se deplasează anionic în produse de culoare albastră. Aproximativ la concentrații similare în LiCl se obțin deplasări analoge, în același sens ca cele ale zonelor de mai sus.

3. Concluzii

În concluzie, formarea complecșilor colorați albastru ar corespunde complecșilor întîlniți în literatură, $[CoCl_4]^{2-}$, iar compușii colorați roz ar corespunde sărurilor care conțin Co(II) hidratat. Aceste concluzii sînt în acord cu tendința cobaltului de a forma complecși [69]...[72] și cu varietatea echilibrelor din soluțiile apoase ale electroliților capabili de a complexa [73].

Substituirea moleculelor de apă din sfera de hidratare a ionului Co^{2+} cu ionii Cl^- începe în măsură mai mare la concentrații ridicate în HCl sau în LiCl, KCl, $MgCl_2$, $CaCl_2$; gradul de disociere al acestor substanțe în asemenea concentrații nu este ridicat. Această constatare ne permite să susținem că procesul:

$$[Co(H_2O)]^{2+} + 4\,Cl^- \rightleftarrows [CoCl_4]^{2-} + 6\,H_2O$$

decurge lent și parțial, dacă în soluție se găsește o cantitate însemnată de molecule nedisociate de HCl sau de cloruri care îndeplinesc rolul agentului deshidratant. Această supoziție este confirmată de creșterea concentrației $[CoCl_4]^{2-}$ în sistemul $CoCl_2$—HCl—H_2O, prin introducerea în soluție a acetonei sau a H_2SO_4.

Într-o lucrare recentă [56] se arată că în spectrul de absorbție al sistemului $CoCl_2$—HCl—H_2O se observă numai frecvența ionilor complecși $[Co(H_2O)_6]^{2+}$ și $[CoCl_4]^{2-}$. Acest fapt este în concordanță și cu separările

noastre pe hîrtie cromatografică a numai doi compuşi coloraţi şi nu şi a celor intermediari presupuşi de unii din autorii citaţi. Apariţia a numai doi produşi coloraţi s-ar putea explica fie prin substituirea moleculei de apă în ionul $[Co(H_2O)_6]^{2+}$ cu anionul Cl^- care însoţeşte schimbarea numărului de coordinaţie a Co (II) fără forme intermediare complexe, fie că reacţia decurge în stadii, dar concentraţia complecşilor intermediari este foarte mică.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de chimie anorganică

BIBLIOGRAFIE

1. Babo A., Jalvosb, 1957, **7**, p. 2.
2. Schiff E., Ann., 1859, **110**, p. 203.
3. Glastone E., J. Chem. Soc. London, 1858, **10**, p. 79; Ibid., 1859, **11**, p. 36.
4. Tichborne T., Chem. New., 1872, **22**, p. 133.
5. Vogel L., Ber., 1878, **11**, S. 913.
6. Russell B., Proc. Roy. Soc. London, 1881, **32**, p. 258.
7. Potilitzine E., Ber., 1884, **17**, S. 276.
8. Wyrouboff B., Bull. Soc. Chim., 1890, **5**, p. 460.
9. Lescoeur R., Ann. Chim. Phys., 1890, **19**, p. 547; Ibid., 1895, **4**, p. 213.
10. Charpy B., C. R., 1891, **113**, p. 794.
11. Étard N., C. R., 1891, **113**, p. 699; Ibid., 1895, **122**, p. 1057.
12. Hartley W., Trans. Dublin Roy. Soc., 1900, **7**, p. 253.
13. Bersch B., Sitzber. Wien. Akad. Wiss., 1867, **56**, S. 724.
14. Engel E., Bul. Soc. Chim., 1891, **6**, p. 239.
15. Ostwald E., *Lehrbuch der allgemeine Chemie.* 1891.
16. Noyes E., Coolidge, Z. physik. Chem., 1903, **46**, S. 323.
17. Donnan I., Basset, J. Chem. Soc. London, 1902, **81**, p. 939.
18. Hartley W., J. Chem. Soc. London, 1903, **83**, p. 401.
19. Vaillant V., C. R., 1929, **189**, p. 747; Ibid., 1931, **193**, p. 654.
20. Moore M., Z. physik. Chem., 1906, **55**, S. 641.
21. Lewis L., Z. physik. Chem., 1905, **52**, S. 222; Ibid., 1906, **56**, S. 223.
22. Jones I., Basset H. P., Am. Chem. J., 1905, **33**, S. 565; Z. physik. Chem., 1905, **52**, S. 224.
23. Anderson A., Am. Chem. J., 1909, **41**, p. 163.
24. Strong E., Am. Chem. J., 1911, **45**, p. 1.
25. Hulburt H., Hutchinson, J. physik. Chem., 1917, **21**, S. 150.
26. Jones I., Uhler, Am. Chem. J., 1907, **37**, p. 126.
27. Mozetu M., Am. Chem. J., 1904, **53**, p. 365; Z. physik. Chem., 1905, **52**, S. 224.
28. Кочубей И., ЖФХ, 1914, **46**, стр. 1055.
29. Groh G., Z. anorg. Chem., 1925, **146**, S. 305; Ibid., 1927, **162**, S. 321.
30. Hantzsch H., Z. anorg. Chem., 1927, **159**, S. 273; Ibid., 1927, **166**, S. 237.
31. Hill V., Hovel H., Phil. Mag., 1928, **48**, p. 839.
32. Hovell H., J. Chem. Soc. London, 1927, **130**, p. 2039; Ibid., 1927, **158**, p. 2843; Ibid., 1928, **132**, p. 162.
33. Bredicka K., Coll. Trav. Chim. Tchécoslovaque, 1930, **2**, p. 489; Ibid., 1930, **2**, p. 545.
34. Toporescu I., C. R., 1931, **192**, p. 280.
35. Brode B., J. Am. Chem. Soc. 1931, **53**, p. 2457.
36. Rohde K., Vogt, Z. physik. Chem., 1932, **15**, S. 353.
37. Le Chassevent, Bull. Soc. Chim., 1891, **6**, p. 3.
38. Foote F., J. Am. Chem. Soc., 1923, **45**, p. 663.
39. Bassett B., Croucher, J. Chem. Soc. London, 1930, **135**, p. 1784.
40. Clendinnen L., J. Chem. Soc., 1922, **121**, p. 801.

41. Foote F., Am. J. Sci., 1927, **13**, p. 158.
42. Beurath B., Z. anorg. Chem., 1927, **163**, S. 393.
43. Mozetti M., Gazz. Chim. ital., 1926, **56**, p. 601.
44. Pascal P., *Nouveau traité de Chimie minérale*. Ed. Masson, Paris, 1959, p. 413.
45. Job P., C. R., 1933, **196**, p. 181.
46. — C. R., 1934, **198**, p. 827.
47. — Bull. de la Sci. Chim., 1923, **33**, p. 6.
48. — C. R., 1925, **180**, p. 928.
49. — Ann. Chim. France, 1928, 9, p. 113.
50. — An. Chim. France, 1936, **6**, p. 97.
51. Андреев С. А., ЖОХ, 1964, **29**, стр. 1798.
52. Kotzin L. J., J. Am. Chem. Soc., 1954, **76**, p. 3089.
53. Мыщенго К. П., ЖФХ, 1957, **31**, стр. 2026.
54. Бабко А. К., Укр. хим. журн., 1958, **24**, стр. 298.
55. Пинскер З. Г., ДАН СССР, 1955, **100**, стр. 913.
56. — ДАН СССР, 1960, **134**, стр. 345.
57. Pucar Z., Analyt. Chim. Acta, 1957, **17**, p. 476.
58. — Analyt. Chim. Acta, 1957, **17**, p. 485.
59. Lederer M., Ward F., Analyt. Chim. Acta, 1952, **6**, p. 355.
60. Hais I. M., Macek K., *Cromatografia pe hîrtie*. Ed. Tehn., Buc., 1960. (trad. din l. cehă)
61. Născuțiu T., *Cromatografia pe hîrtie a substanțelor anorganice*. Ed. Tehn., Buc., 1961.
62. Grassini G., Ossicini L., J. of Chromatography, 1962, **7**, p. 351.
63. Idu M., Cîmpeanu S., *Electroforeza*. Ed. medicală, Buc., 1957.
64. Ледерер М., *Введение в электрофорез на бумаге и родственные методы*. ИЛ, Москва, 1956, стр. 64.
65. Бабко А. К., ЖОХ, 1948, **18**, стр. 816.
66. Kuzneţov V. I., *Reactivi şi produse chimice*. Ed. medicală, Buc., 1957, (trad. din l. rusă).
67. Самоилов О. И., ДАН СССР, 1951, **77**, стр. 633.
68. Atanasiu I. A., Facsko G., *Electrochimie*. Ed. Tehn., Buc., 1958.
69. Ketelaar I. A., *Liaisons et propriétés chimiques*. Dunod, Paris, 1960.
70. Pascal P., *Traité de Chimie Minérale*. 10-e ed., Masson, Paris, 1932, p. 321.
71. Barriol J., *La constitution des molécules*. Gauthier Villars, Paris, 1958, p. 153.
72. * * * *Cobalt Monograph*. Ed. Centre d'inform. du Cobalt, Brussels, 1960.
73. Grimberg A. A., *Introducere în chimia combinațiilor complexe*. Ed. Tehn., Buc., 1957, (trad. din l. rusă).

SUR L'EXISTENCE DES IONES COMPLEXES DE Co(II) DANS LES SOLUTIONS AQUEUSES

(Résumé)

On a déterminé à l'aide de l'éléctrophorèse sur papier et de la chromatographie sur papier l'existence des complexes qui se forment dans la solution aqueuse d'acétate, d'azotate et de chlorure de cobalt (II) et des divers sels anorganiques.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 661.183.28

SCHIMBĂTORI DE IONI DIN CĂRBUNI ROMÂNEŞTI

III. INFLUENŢA OXIDĂRII PREALABILE A CĂRBUNILOR ASUPRA ACTIVITĂŢII SCHIMBĂTORILOR DE IONI OBŢINUŢI

DE

ELEONORA DIACONESCU şi FLORENTINA CHIRIAC

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

În cadrul suitei de lucrări privind valorificarea unor cărbuni indigeni în scopul obţinerii de schimbători de ioni [1]...[6], în prezenta lucrare s-au studiat în continuare alte sorturi de cărbuni şi anume: a) cărbunele provenit de la exploatarea Petrila şi b) cărbunele provenit de la exploatarea Lupeni.

Caracteristicile analitice ale acestor cărbuni sînt prezentate în tabelul 1.

2. Partea experimentală

Pentru a se obţine schimbători de ioni cu capacităţi de schimb sporite, cărbunii au fost supuşi unei oxidări menajate, proces care precede sulfonarea.

Macromolecula cărbunelui fiind constituită dintr-o reţea de nuclee aromatice legate între ele prin radicali laterali de natură nearomatică, partea periferică a macromoleculei cărbunelui se caracterizează printr-o capacitate de reacţie sporită în comparaţie cu partea centrală. De aceea, în condiţii blînde de oxidare, au loc procese de interacţiune a oxidantului, de preferinţă cu partea periferică a macromoleculei cărbunelui, cu formare de acizi humici şi alte substanţe micromoleculare de oxidare [7].

În lucrarea de faţă s-a efectuat oxidarea cărbunilor cu aer în condiţii izoterme de temperatură, la 150°, 175° şi 200°C, timp de 1 oră.

Cărbunele uscat pînă la greutate constantă, conţinut într-un vas de sticlă cu fund poros, se introduce într-o etuvă prin care se trece un curent de aer, în prealabil uscat pe $CaCl_2$ şi H_2SO_4, cu un debit de 100 l/oră.

În scopul cunoaşterii naturii compuşilor carbon-oxigen, s-au ridicat experimental spectrele în infraroşu (IR) ale cărbunilor oxidaţi.

În domeniul $\lambda = 5...15{,}4\ \mu$ spectrele cărbunilor oxidaţi s-au comparat cu spectrele cărbunilor iniţiali [8]...[12].

Spectrele au fost obţinute la spectrofotometrul în IR Unicam S. P. 100 şi sînt redate în fig. 1 şi 2.

Tabelul 1

Caracteristici analitice ale cărbunilor

Datele analitice ale cărbunilor %	Sortul de cărbune	
	Cărbune de Petrila	Cărbune de Lupeni
Umiditate	3,94	2,20
Substanţe volatile combustibile	28,90	22,31
Cocs	67,16	75,49
Cenuşă	4,46	7,32
Sulf	2,01	1,89
C	63,25	68,07
H_2	5,21	4,72
N_2	0,93	0,61
O_2	28,60	24,71
Substanţe bituminoase	2,76	2,14
Acizi humici liberi	8,10	5,27
Humaţi de calciu	4,28	7,55
Humaţii altor metale	9,10	7,15
Acizi humici totali	21,48	20,97

Curbele spectrale obţinute, în concordanţă cu determinările chimice, indică acumularea în cărbunele oxidat a grupelor ce conţin oxigen: carboxil $\lambda = 5{,}9\ \mu$ (1 700 cm^{-1}) şi $\lambda = 6{,}25\ \mu$ (1 600 cm^{-1}), fenolice şi alcoolice $\lambda = 8{,}3\ \mu$ (1 200 cm^{-1}), $\lambda = 7{,}2\ \mu$ (1 380 cm^{-1}), legături eterice, aromatice şi alifatice $\lambda = 6{,}9\ \mu$ (1 440 cm^{-1}), $\lambda = 8{,}5\ \mu$ (1 170 cm^{-1}).

Absorbţia la $\lambda = 5{,}9\ \mu$ (1 700 cm^{-1}), care caracterizează oscilaţiile C—O din grupele carboxilice, *ce apar numai la cărbunii oxidaţi*, arată că în procesul de oxidare are loc acumularea grupelor carboxilice. Intensitatea benzii de absorbţie la $\lambda = 6{,}25\ \mu$ (1 600 cm^{-1}) a cărbunilor oxidaţi este mult mai intensă ca în cărbunii iniţiali.

Restul de oxigen se găseşte sub forma altor grupe ce conţin oxigen, ca de exemplu: alcooli, fenoli, eteri etc.

Tabelul 2

Conţinutul în grupe carboxilice a cărbunilor iniţiali şi a aceloraşi cărbuni după oxidare

Sortul cărbunilor	Grupe —COOH în cărbunii iniţiali mval %	Grupe —COOH după oxidare mval %	Creşterea grupelor —COOH mval %
Cărbune Petrila	53,70		
Cărbune Lupeni	52,43		
Cărbune Petrila oxidat la 150°C		70,49	16,79
Cărbune Petrila oxidat la 175°C		82,56	28,86
Cărbune Petrila oxidat la 200°C		94,98	41,18
Cărbune Lupeni oxidat la 150°C		65,19	12,76
Cărbune Lupeni oxidat la 175°C		79,31	26,88
Cărbune Lupeni oxidat la 200°C		88,47	36,04

Caracteristice şi intense pentru cărbunii oxidaţi sînt absorbţiile din zona 700...900 cm^{-1}, corespunzînd oscilaţiilor exterioare ale atomilor de hidrogen în nucleele aromatice condensate.

Măsura în care, în urma procesului de oxidare, apar noi grupe carboxilice, se poate stabili prin calcul, din diferenţa dintre grupele carboxilice ale cărbunilor după şi înainte de oxidare. Datele astfel obţinute, referitoare la probele de cărbuni pe care le cercetăm, sînt redate în tabelul 2, unde în coloana *2* figurează grupele carboxilice ale cărbunilor iniţiali iar în coloana *3* grupele carboxilice rezultate în urma oxidării.

Se constată şi de aici o creştere a conţinutului grupelor carboxilice în urma procesului de oxidare a cărbunilor.

Acţiunea oxidantă se remarcă în special la cărbunii oxidaţi la temperaturile de 175° şi 200°C, la care creşterea conţinutului de grupe carboxilice este mult mai pronunţată.

După tratamentul termic cărbunii au fost supuşi sulfonării cu acid sulfuric oleum (20% SO_3) şi cu acid clorsulfonic 100%. Reacţia s-a efectuat în vase închise, cu agitare continuă, la temperatura de 100°...105°C, timp de 1 oră, raportul cărbune: reactiv de sulfonare fiind de 1: 5.

Greutăţile volumetrice ale schimbătorilor de ioni astfel obţinuţi sînt date în tabelul 3. Capacităţile de schimb, diferenţiate pe grupe sulfonice şi carboxilice, determinate complexometric prin metoda statică, precum şi conţinutul procentual de sulf total al acestor sulfocarboni sînt redate în tabelele 4 şi 5.

Din analiza datelor cuprinse în tabelele 4 şi 5 reies o serie de concluzii şi anume:

a) Cărbunii de Petrila şi Lupeni trataţi cu acid sulfuric oleum sau cu acid clorsulfonic, permit obţinerea de schimbători de ioni cu bune capacităţi de schimb.

Tabelul 3

Greutatea volumetrică a sulfocarbonilor obținuți prin sulfonarea cărbunilor cu acid sulfuric oleum 20% SO_3 și acid clorsulfonic (timp de sulfonare 1 oră, la temperatura de 100°C)

Sulfocarboni obținuți din	Reactivi de sulfonare	Greutatea volumetrică kg/l
Cărbune Petrila	Oleum 20% SO_3	0,6068
Cărbune Petrila oxidat 1 oră la 150°C	Oleum 20% SO_3	0,3643
Cărbune Petrila oxidat 1 oră la 175°C	Oleum 20% SO_3	0,3790
Cărbune Petrila oxidat 1 oră la 200°C	Oleum 20% SO_3	0,3661
Cărbune Petrila	Acid clorsulfonic	0,4800
Cărbune Petrila oxidat 1 oră la 150°C	Acid clorsulfonic	0,3562
Cărbune Petrila oxidat 1 oră la 175°C	Acid clorsulfonic	0,3754
Cărbune Petrila oxidat 1 oră la 200°C	Acid clorsulfonic	0,3767
Cărbune Lupeni	Oleum 20% SO_3	0,6518
Cărbune Lupeni oxidat 1 oră la 150°C	Oleum 20% SO_3	0,4131
Cărbune Lupeni oxidat 1 oră la 175°C	Oleum 20% SO_3	0,4094
Cărbune Lupeni oxidat 1 oră la 200°C	Oleum 20% SO_3	0,4746
Cărbune Lupeni	Acid clorsulfonic	0,5408
Cărbune Lupeni oxidat 1 oră la 150°C	Acid clorsulfonic	0,4131
Cărbune Lupeni oxidat 1 oră la 175°C	Acid clorsulfonic	0,4270
Cărbune Lupeni oxidat 1 oră la 200°C	Acid clorsulfonic	0,3648

Tabelul 4

Capacitatea de schimb, diferențiată pe grupe sulfonice și grupe carboxilice, existente în sulfocarbonii în ciclul de hidrogen, proveniți din cărbunii de Petrila, sulfonați (la temperatura de 100°C, timp de sulfonare 1 oră)

Sulfocarboni obținuți din	Reactivi de sulfonare	Capacitatea de schimb mval/g			Sulf activ calculat din grupele sulfonice	Sulf total
		datorită grupelor sulfonice	datorită grupelor carboxilice	totală	%	%
Cărbune de Petrila	Oleum 20% SO_3	1,08	0,79	1,87	3,45	5,38
Cărbune de Petrila oxidat 1 oră la 150°C	Oleum 20% SO_3	1,26	0,84	2,10	4,03	5,46
Cărbune de Petrila oxidat 1 oră la 175°C	Oleum 20% SO_3	1,38	1,09	2,47	4,42	5,61
Cărbune de Petrila oxidat 1 oră la 200°C	Oleum 20% SO_3	1,41	1,20	2,61	4,51	5,86
Cărbune de Petrila	Acid clorsulfonic	1,12	0,82	1,94	3,58	5,64
Cărbune de Petrila oxidat 1 oră la 150°C	Acid clorsulfonic	1,29	0,94	2,23	4,13	6,11
Cărbune de Petrila oxidat 1 oră la 175°C	Acid clorsulfonic	1,46	1,17	2,63	4,67	6,27
Cărbune de Petrila oxidat 1 oră la 200°C	Acid clorsulfonic	1,60	1,21	2,81	5,18	6,31

Tabelul 5

Capacitatea de schimb, diferenţiată pe grupe sulfonice şi grupe carboxilice, existente în sulfocarbonii în ciclul de hidrogen, proveniţi din cărbunii de Lupeni, sulfonaţi (la temperatura de 100°C, timp de sulfonare 1 oră)

Sulfocarboni obţinuţi din	Reactivi de sulfonare	Capacitatea de schimb mval/g			Sulf activ calculat din grupele sulfonice	Sulf total
		datorită grupelor sulfonice	datorită grupelor carboxilice	totală	%	%
Cărbune de Lupeni	Oleum 20% SO_3	1,38	0,61	1,99	4,41	5,92
Cărbune de Lupeni oxidat 1 oră la 150°C	Oleum 20% SO_3	1,52	0,75	2,27	4,86	6,35
Cărbune de Lupeni oxidat 1 oră la 175°C	Oleum 20% SO_3	1,68	0,89	2,57	5,37	6,48
Cărbune de Lupeni oxidat 1 oră la 200°C	Oleum 20% SO_3	1,69	0,97	2,66	5,40	6,62
Cărbune de Lupeni	Acid clorsulfonic	1,43	0,72	2,15	4,57	6,71
Cărbune de Lupeni oxidat 1 oră la 150°C	Acid clorsulfonic	1,59	0,94	2,53	5,08	6,81
Cărbune de Lupeni oxidat 1 oră la 175°C	Acid clorsulfonic	1,76	1,20	2,96	5,63	6,82
Cărbune de Lupeni oxidat 1 oră la 200°C	Acid clorsulfonic	1,72	1,18	2,90	5,60	6,81

b) Sulfonarea efectuată asupra cărbunilor în prealabil oxidaţi la temperaturile de 150°, 170° şi 200°C, are drept urmare o creştere accentuată a capacităţii de schimb, datorită atît grupelor sulfonice cît şi grupelor carboxilice formate. Valoarea capacităţii de schimb variază funcţie de temperatura de oxidare a cărbunilor, cît şi de natura reactivului cu care s-a efectuat sulfonarea. În ceea ce priveşte temperatura de oxidare, se constată că se obţin cele mai mari valori pentru capacităţile de schimb la schimbătorii proveniţi din cărbunele de Petrila, oxidat la temperatura de 200°C, şi la acei din cărbunele de Lupeni, oxidat la temperatura de 175°C.

c) Pentru sulfocarbonii proveniţi din cărbunele de Petrila, oxidat la temperatura de 200°C şi sulfonat cu acid sulfuric oleum, capacitatea de schimb datorită grupelor carboxilice creşte cu 50,6%, iar cea datorită grupelor sulfonice cu 30,5%. La sulfonarea cu acid clorsulfonic capacitatea de schimb sulfonică creşte cu 47,5%, iar cea carboxilică cu 43%, faţă de capacităţile de schimb respective obţinute la acelaşi cărbune neoxidat.

Pentru sulfocarbonii obţinuţi din cărbunele de Lupeni, oxidat la temperatura de 175°C, sulfonat cu acid sulfuric oleum, capacitatea de schimb datorită grupelor carboxilice creşte cu 59,8%, iar cea datorită grupelor sulfonice cu 22,5%, în timp ce la sulfonarea cu acid clorsulfonic creşte cu 66,6%, respectiv 38,1%, faţă de capacităţile de schimb ale sulfocarbonilor obţinuţi din acelaşi cărbune, neoxidat. De remarcat la aceşti schimbători creşterile mai accentuate pentru capacităţile de schimb carboxilice, datorită creerii de noi grupe carboxilice prin procesul de oxidare a cărbunilor, anterior sulfonării.

d) Întrebuinţarea acidului clorsulfonic ca agent de sulfonare conduce, atît în cazul cărbunelui de Petrila cît şi a celui de Lupeni, la obţinerea de schimbători de ioni cu capacităţi de schimb mai mari decît a sulfocarbonilor obţinuţi prin tratarea cărbunilor cu acid sulfuric oleum.

e) Din datele cuprinse în tabelele 4 şi 5 se poate urmări şi variaţia conţinutului în sulf total la schimbătorii de ioni obţinuţi. Valori mai ridicate se observă la sulfocarbonii obţinuţi din cărbunii oxidaţi, iar cea mai accentuată creştere se constată la sulfocarbonii proveniţi din cărbunii oxidaţi, trataţi cu acid clorsulfonic.

Studiul în IR [13], [14] al cationiţilor preparaţi de noi, s-a efectuat cu scopul de a pune în evidenţă, şi pe această cale, apariţia de noi grupe funcţionale schimbătoare de ioni — sulfonice, carboxilice şi fenolice — create în procesul de sulfonare, prin acţiunea acidului sulfuric oleum şi a acidului clorsulfonic faţă de aceleaşi grupe funcţionale ce rezultă la sulfonarea aceloraşi cărbuni, nesupuşi în prealabil tratamentului de oxidare şi de asemenea faţă de grupele fenolice şi carboxilice existente în cărbunii iniţiali.

Studiul în IR s-a efectuat cu probele de cărbuni, pregătite cu KBr.

Curbele spectrale pentru schimbătorii de ioni obţinuţi din cărbunele de la Petrila sînt redate în fig. 3 şi 4.

Faţă de cărbunele iniţial şi cărbunele oxidat apar în aceste spectre benzi de absorbţie provenite din procesul de sulfonare şi anume : benzi de absorbţie mai slabe cuprinse între $\lambda = 9{,}70...9{,}90\,\mu$ (1 030...1 010 cm^{-1}), atribuite vibraţiei de valenţă a legăturii C—OH şi benzi de absorbţie mai puternice cuprinse între $\lambda = 8{,}7...8{,}47\,\mu$ (1 150...1 180 cm^{-1}), atribuite grupărilor acide sulfonice; benzile de absorbţie de la $\lambda = 5{,}81...5{,}88\,\mu$ (1 700... 1 720 cm^{-1}), corespunzătoare grupei C=O carboxilică, sînt mult mai intense ca în cărbunele nesulfonat.

În curbele spectrale care corespund schimbătorilor de ioni obţinuţi din cărbunele de Lupeni, redate în fig. 5 şi 6, se pun în evidenţă în plus faţă de cărbunele iniţial şi oxidat următoarele benzi de absorbţie: benzi medii de absorbţie apărute în urma procesului de sulfonare, atribuite vibraţiei de valenţă a legăturii C—OH la $\lambda = 9{,}81...9{,}61\,\mu$ (1 020... ...1 050 cm^{-1}) şi benzi puternice de absorbţie datorite grupelor sulfonice, la $\lambda = 8{,}47\,\mu$ (1 180 cm^{-1}).

La sulfocarbonul obţinut din cărbunele de Lupeni, oxidat la 150°C şi apoi clorsulfonat, se constată apariţia unor noi benzi de absorbţie caraç-

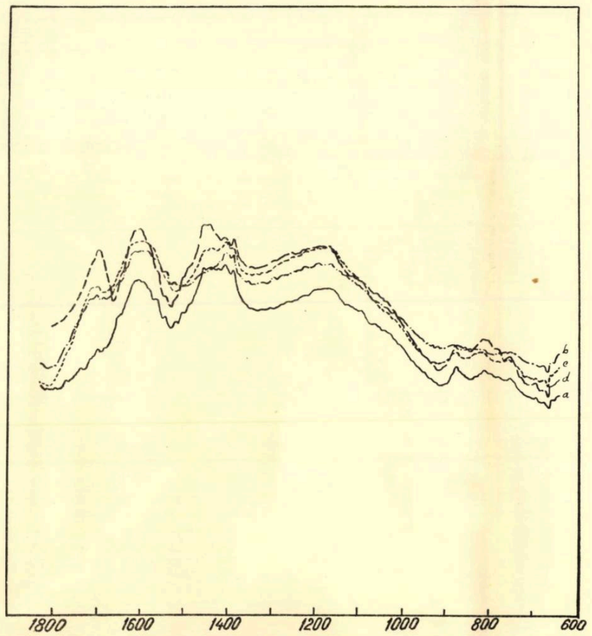


Fig. 1. — *a* — Spectrele de absorbție a cărbunelui de Petrila; *b* — spectrele de absorbție a cărbunelui de Petrila, oxidat la temperatura de 150°C, timp de 1 oră; *c* — spectrele de absorbție a cărbunelui de Petrila, oxidat la temperatura de 175°C, timp de 1 oră; *d* — spectrele de absorbție a cărbunelui de Petrila, oxidat la temperatura de 200°C, timp de 1 oră.

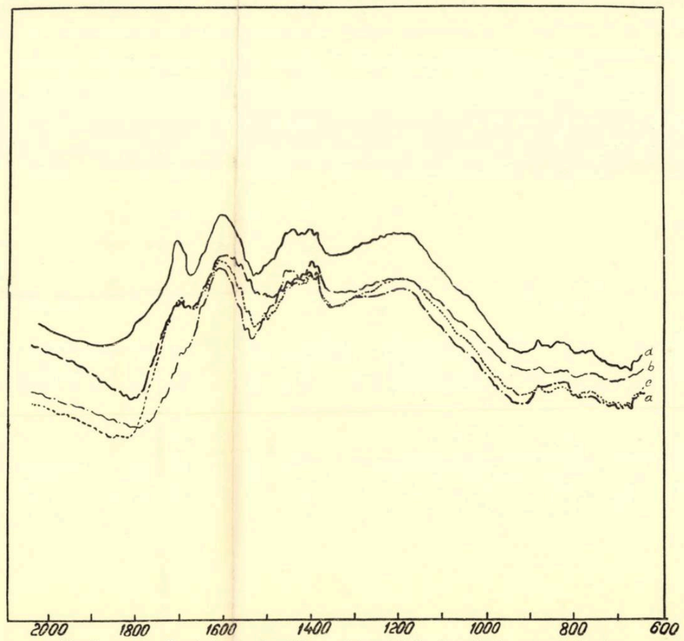


Fig. 2. — *a* — Spectrele de absorbție a cărbunelui de Lupeni; *b* — spectrele de absorbție a cărbunelui de Lupeni, oxidat la temperatura de 150°C, timp de 1 oră; *c* — spectrele de absorbție a cărbunelui de Lupeni, oxidat la temperatura de 175°C, timp de 1 oră; *d* — spectrele de absorbție a cărbunelui de Lupeni, oxidat la temperatura de 200°C, timp de 1 oră.

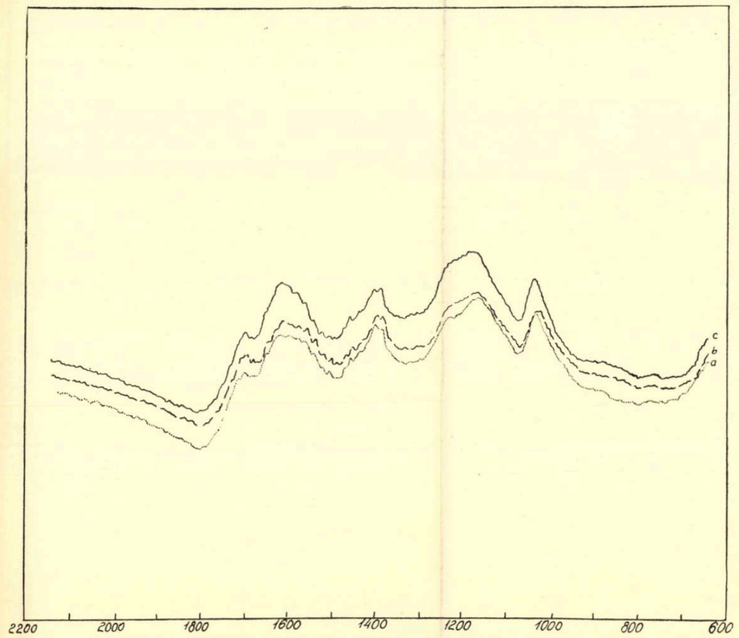


Fig. 3. — *a* — Spectrele de absorbție a cărbunelui de Petrila, neoxidat, sulfonat; *b* — spectrele de absorbție a cărbunelui de Petrila, oxidat la temperatura de 150°C, timp de 1 oră, sulfonat; *c* — spectrele de absorbție a cărbunelui de Petrila, oxidat la temperatura de 175°C, timp de 1 oră, sulfonat.

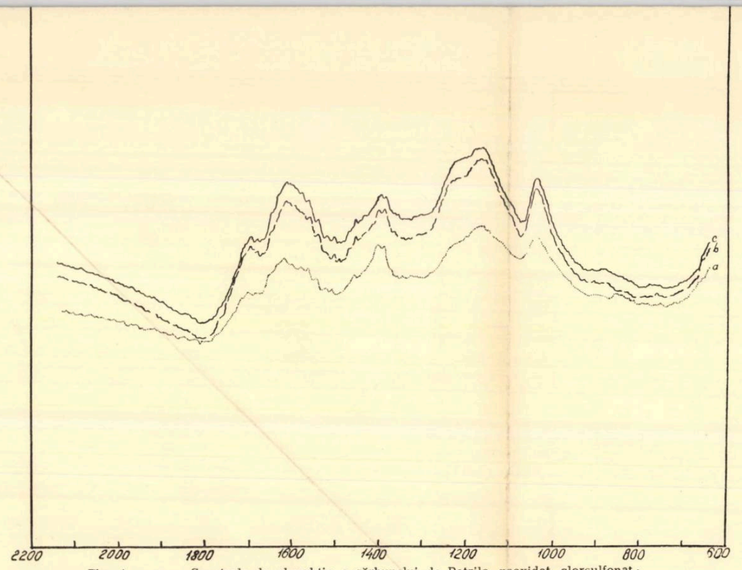


Fig. 4. — *a* — Spectrele de absorbție a cărbunelui de Petrila, neoxidat, clorsulfonat; *b* — spectrele de absorbție a cărbunelui de Petrila, oxidat la temperatura de 150°C, timp de 1 oră, clorsulfonat; *c* — spectrele de absorbție a cărbunelui de Petrila, oxidat la temperatura de 175°C, timp de 1 oră, clorsulfonat.

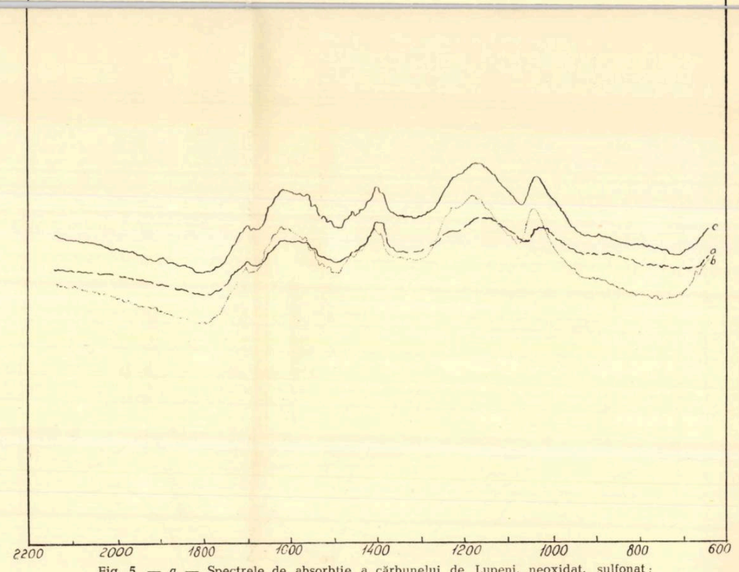


Fig. 5. — *a* — Spectrele de absorbție a cărbunelui de Lupeni, neoxidat, sulfonat; *b* — spectrele de absorbție a cărbunelui de Lupeni, oxidat la temperatura de 150°C, timp de 1 oră, sulfonat; *c* — spectrele de absorbție a cărbunelui de Lupeni, oxidat la temperatura de 175°C, timp de 1 oră, sulfonat.

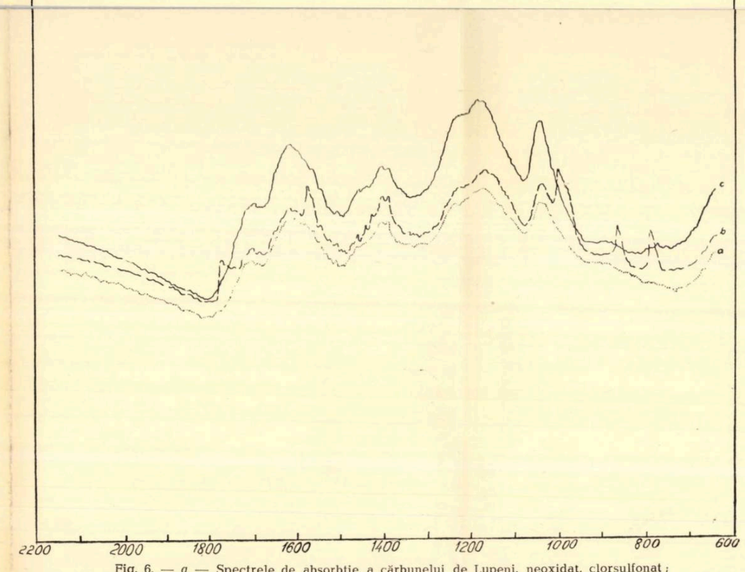
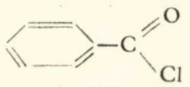


Fig. 6. — *a* — Spectrele de absorbție a cărbunelui de Lupeni, neoxidat, clorsulfonat; *b* — spectrele de absorbție a cărbunelui de Lupeni, oxidat la temperatura de 150°C, timp de 1 oră, clorsulfonat; *c* — spectrele de absorbție a cărbunelui de Lupeni, oxidat la temperatura de 175°C, timp de 1 oră, clorsulfonat.

teristice şi anume: două benzi deosebit de intense, atribuite vibraţiei legăturii C—Cl sub formă de monocloraţi, la $\lambda = 12{,}5\,\mu$ şi $\lambda = 11{,}2\,\mu$ (800 şi respectiv 890 cm^{-1}) şi o bandă de absorbţie la $\lambda = 5{,}65\,\mu$ (1 770 cm^{-1}) atribuită moleculei



Benzile de absorbţie la $\lambda = 6{,}25\,\mu$ (1 600 cm^{-1}) şi $\lambda = 5{,}81\,\mu$ (1 700 cm^{-1}), datorite grupei —COOH carboxilice, sînt mai intense ca în cărbunii iniţiali datorită creşterii conţinutului în grupe carboxilice în procesul de sulfonare a cărbunilor.

În toate curbele spectrale ale acestor schimbători de ioni sînt prezente benzile de absorbţie de la $\lambda = 7{,}10\,\mu$ (1 410 cm^{-1}), atribuite grupei OH fenolice.

3. Concluzii

S-a studiat procesul de oxidare a cîtorva cărbuni româneşti, prin metoda chimică şi spectroscopia în IR. Din datele obţinute s-a constatat că acest proces constă în acumularea de grupe ce conţin oxigen şi anume: grupe carboxilice, fenolice, hidroxil-alcoolice, eteri alifatici şi eteri aromatici.

La sulfocarbonii obţinuţi din cărbunii oxidaţi la 150°, 175° şi 200°C, prin tratarea acestora cu acid sulfuric oleum şi acid clorsulfonic, s-a determinat, prin metoda statică, capacitatea de schimb de ioni, punîndu-se în evidenţă procentual creşterea acestei capacităţi, faţă de aceea a sulfocarbonilor obţinuţi din cărbuni neoxidaţi.

Prin spectrele în IR au fost puse în evidenţă noile grupe funcţionale schimbătoare de ioni, apărute în urma procesului de oxidare şi sulfonare.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de chimie generală

BIBLIOGRAFIE

1. Dima M. şi colab., St. şi cerc. şt., Chimie, Acad. R. P. R., filiala Iaşi 1956, **VII**, *1*, pp. 31—62.
2. Diaconescu El., Dima M., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1960, **VI (X)**, *1—2*, pp. 139—156.
3. Dima M. şi colab., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1960, **VI (X)**, *3—4* pp. 117—126.
4. Cocheci V., Taubert R., Bul. Inst. polit. Timişoara, 1961, **6 (20)**, *1*.
5. — Bul. Inst. polit. Timişoara, 1960, **5 (19)**, *1—2*.
6. Diaconescu El., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X (XIV)**, *3—4*, pp. 111—122.
7. Ларина Н. К., Касаточкин И. В., Тр. Инст. горн. ископаемых, СССР, 1960, *14*, стр. 98—107.
8. Кухаренко Т. А., ИАН СССР, ОХН, 1962, *1*, стр. 180—185.
9. Brooks J. D., Durie R. A., Sternhell, Austr. J. Appl. Sci., 1958, **9**, pp. 303—320.

10. Brooks J. D., Sternhell, Austr. J. Appl. Sci., 1957, **8**, pp. 206–221.
11. Lynch B. M., Brooks J. D., Durie R. A., Sci. Proc. of the Royal Dublin Soc., Series A, 1960, **1**, *4*, pp. 124.
12. Bergmann G., Huck G., Brennstoffchemie B—C, 1957, **38**, *13/14*, S. 196.
13. Belamy L., *The Infra-Red Spectra of Complex Molecules*. London, 1957.
14. * * * *Ullmanns Enzyklopädie der technischen Chimie*. Bd. **2/1**, 1961, S. 291—304.

IONENAUSTAUSCHER AUS RUMÄNISCHEN KOHLEN

III. Der Einfluss der vorausgehenden Oxydierung der Kohlen auf die Austauschfähigkeit den erhaltenen Ionenaustauscher

(Zusammenfassung)

In dieser Arbeit wurde mittels chemischen und infrarotspektroskopischen Methoden, das Verhalten von zwei rumänischen Kohlenproben im Oxydations- und Sulfonierungsvorgang, zwecks Erhaltung von Ionenaustauscher, studiert. Aus den erhaltenen Angaben wurde festgestellt, das der Oxydationsvorgang der Kohlen aus der Ansammlung der Sauerstoffhaltigen Gruppen besteht: Carboxyl-, Phenol- Hidroxyl-alkoholische Gruppen, aliphatische und aromatische Äther.

Bei den Ionenaustauschern, die aus bei Temperaturen von 150°, 175° und 200°C oxydierten Kohlen durch Behandlung mit Schwefelsäure -Oleum und mit Chlorsulfonsäure erhalten wurden, bestimmt man mit hilfe der statischen Methode die Ionenaustauschfähigkeit und gibt man prozentuell das Ansteigen dieser Fähigkeit an, im Vergleich zu jener aus unoxydierten Kohlen erhaltehen Ionenaustauscher.

Durch die Infrarot-Spektren wurden die neuen ionenaustauschenden funktionellen Gruppen nachgewiesen, die infolge des Oxydations- und Sulfonierungsvorganges, auftreten.

Erklärung der Abbildungen

Abb. 1. — *a* — Absorptionsspektren von Petrila-Kohle ; *b* — Absorptionsspektren von bei einer Temperatur von 150°C eine Stunde lang oxydierter Petrila-Kohle ; *c* — Absorptionsspektren von bei einer Temperatur von 175°C eine Stunde lang oxydierter Petrila-Kohle ; *d* — Absorptionsspektren von bei einer Temperatur von 200°C eine Stunde lang oxydierter Petrila-Kohle.

Abb. 2. — *a* — Absorptionspektren von Lupeni-Kohle ; *b* — Absorptionsspektren von bei einer Temperatur von 150°C eine Stunde lang oxydierter Lupeni-Kohle ; *c* — Absorptionsspektren von bei einer Temperatur von 175°C eine Stunde lang oxydierter Lupeni-Kohle ; *d* — Absorptionsspektren von bei einer Temperatur von 200°C eine Stunde lang oxydierter Lupeni-Kohle.

Abb. 3. — *a* — Absorptionsspektren von unoxydierter, sulfonierter Petrila-Kohle ; *b* — Absorptionsspektren von bei einer Temperatur von 150°C eine Stunde lang oxydierter, sulfonierter Petrila-Kohle ; *c* — Absorptionsspektren von bei einer Temperatur von 175°C eine Stunde lang oxydierter, sulfonierter Petrila-Kohle.

Abb. 4. — *a* — Absorptionsspektren von unoxydierten, chlorsulfonierter Petrila-Kohle ; *b* — Absorptionsspektren von bei einer Temperatur von 150°C eine Stunde lang oxydierter, chlorsulfonierter Petrila-Kohle ; *c* — Absorptionsspektren von bei einer Temperatur von 175°C eine Stunde lang oxydierter, chlorsulfonierter Petrila-Kohle.

Abb. 5. — *a* — Absorptionsspektren von unoxydierter, sulfonierter Lupeni-Kohle ; *b* — Absorptionsspektren von bei einer Temperatur von 150°C eine Stunde lang oxydierter, sulfonierter Lupeni-Kohle ; *c* — Absorptionsspektren von bei einer Temperatur von 175°C eine Stunde lang oxydierter, sulfonierter Lupeni-Kohle.

Abb. 6. — *a* — Absorptionsspektren von unoxydierter, chlorsulfonierter Lupeni- Kohle ; *b* — Absorptionsspektren von bei einer Temperatur von 150°C eine Stunde lang oxydierter, chlorsulfonierter Lupeni-Kohle ; *c* — Absorptionsspektren von bei einer Temperatur von 175°C eine Stunde lang oxydierter, chlorsulfonierter Lupeni-Kohle.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 547.678.2; 66.095.3; 547.55

CONDENSAREA ACENAFTENCHINONEI CU AMINE AROMATICE ŞI DIAMINE

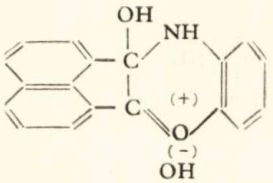
DE

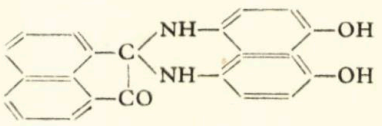
ILIE MATEI
membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
şi
TATIANA LIXANDRU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

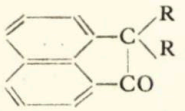
1. Introducere

Cercetări anterioare [1] au arătat că la condensarea acenaftenchinonei cu *o*-aminofenol se obţine un derivat hidratat de acenafto-fenazoxonium hidroxid, iar cu *p*-aminofenolul se obţine di-*p*-oxifenilamino-acenaftenona:





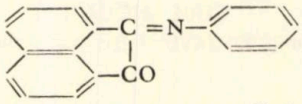
Literatura indică reacţia acenaftenchinonei cu anilina [2], [3], dimetil-[4] şi dietilanilina [5], cu formare de acenaftenone disubstituite, de forma generală:



Aminele primare cu caracter alifatic, de tipul $R-CH_2-NH_2$, reacţionează cu acenaftenchinona ducînd la oxazoli şi imidazoli [6].

Mai recent O. Tsuge şi M. Tashiro [7] arată că aminele cu caracter alifatic reacţionează în alt mod, cu formarea intermediară a unei baze Schiff, final obţinîndu-se o acenaftazină.

Literatura indică un singur caz de obţinere a unei baze Schiff aromatice a acenaftenchinonei, dar nu prin acţiunea directă a aminei asupra acenaftenchinonei, ci prin acţiunea nitrozo-benzenului asupra acenaftenonei [8]:

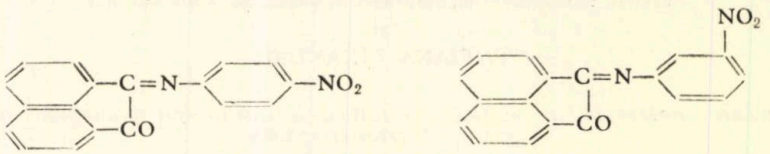


În lucrarea de faţă ne-am propus *studiul reacţiei de condensare a acenaftenchinonei cu amine aromatice şi diamine*, care conduce la formare de *baze Schiff*.

2. Partea teoretică

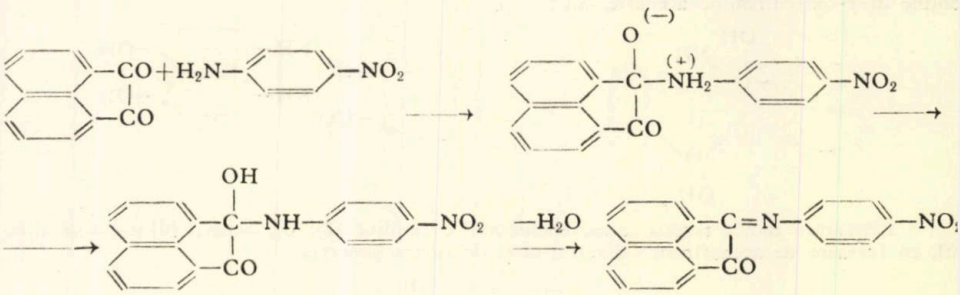
Noi am realizat obţinerea directă a unor baze Schiff a acenaftenchinonei cu *m*- şi *p*-nitro-anilina, acidul *p*-amino-benzoic, α şi β-naftil-amina şi cu benzidina, folosind toluenul ca solvent.

În cazul condensării cu *m*- şi *p*-nitro-anilina se obţine *acenaftenchinon-p-nitro-anil* sau *acenaftenchinon p-nitrofenil-imina* şi *acenaftenchinon-m-nitro-anil* sau *acenaftenchinon-m-nitrofenil-imina :*



P-nitro-anilina reacţionează mai repede decît *m*-nitro-anilina datorită efectului $-M$ şi $-I$ pe care îl exercită grupa nitrică din *para*.

Mecanismul de reacţie este de tipul mecanismului general de formare al azometinelor :



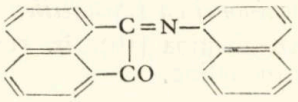
Produsul de reacţie cu *p*-nitro-anilina se separă din mediul de reacţie chiar la cald, este cristalin roşu, devenind mai abundent pe măsura încălzirii. Azometina corespunzătoare *m*-nitro-anilinei separă numai la răcirea mediului de reacţie.

Acidul *p*-amino-benzoic reacţionează cu acenaftenchinona mai lent de cît nitro-anilinele, cu formare de *acenaftenchinon-p-carboxi-anil* sau *acenaftenchinon-p-carboxifenil-imina.*

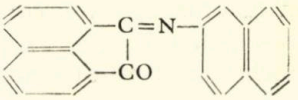
Pe măsură ce se formează, produsul de reacţie — galben portocaliu — se separă din mediul de reacţie.

α- şi β-naftil-amina necesită un timp de reacţie şi mai îndelungat. β-naftil-amina formează un produs portocaliu, care pe măsura formării iese din reacţie chiar la cald. Azometina corespunzătoare α-naftil-aminei iese din reacţie numai la rece.

Analizele indică formarea de baze Schiff la o singură grupă carbonilică.



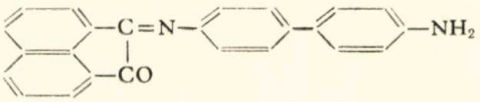
accenaftenchinon-2,3-benzo-anil sau *acenaftenchinon-α-naftil-imină*



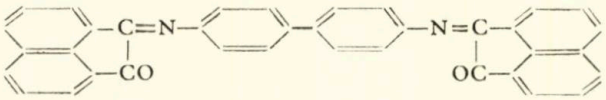
acenaftenchinon-3,4-benzo-anil sau *acenaftenchinon-β-naftil-imină*

Cu benzilul α-naftil-amina formează amestec de monoanil şi dianil [9].

Benzidina reacţionează cu acenaftenchinona în raport molar de 1 : 1 formînd, cu randament cantitativ, azometina corespunzătoare unei singure grupe carbonilice. Pe măsură ce se formează, produsul se separă chiar la cald din mediul de reacţie. Produsul ar fi *acenanftenchinon-p-(p'-aminofenil)-anil* sau *ac naftenchinon-p-aminobifenil-imină* de forma:



Dacă se lucrează cu un raport molar de 2 : 1 acenaftenchinonă : benzidină, se obţine *N.N'-diacenaftenchinon-benzidina*:



Benzilul [10] reacţionează cu benzidina formînd un produs întrutotul analog celui obţinut de noi din acenaftenchinonă.

În toate cazurile studiate de noi acenaftenchinona reacţionează cu o singură moleculă de amină primară, ducînd la formarea azometinei corespunzătoare unei singure grupe carbonilice, chiar dacă se lucrează cu exces de componentă aminică sau dacă se prelungeşte timpul de reacţie. Al doilea oxigen carbonilic nu reacţionează, ceea ce concordă cu indicaţiile din literatură [4].

Toţi produşii obţinuţi sînt coloraţi, cristalini sau amorfi, hidrolizează în mediu de acid diluat. Structura a fost determinată prin analiză chimică şi spectrală.

Bazele Schiff studiate de noi şi-ar putea găsi aplicaţie ca produse tuberculostatice sau fungicide. Literatura indică de altfel proprietăţi tuberculostatice [11] şi activitate fungicidă [12] pentru unele baze Schiff din seria aromatică.

Aceste proprietăţi ar putea fi accentuate încă, în cazul azometinelor sintetizate de noi, prin faptul că acenaftenchinona însăşi are proprietăţi bactericide [13] şi fungicide [14].

O parte din bazele Schiff preparate au fost transformate în aminele secundare corespunzătoare.

Am efectuat apoi *condensarea acenaftenchinonei cu 1.8-naftilen-diamina.*

1,2-Naftilen-diamina [15] şi 2,3-naftilen-diamina [16], în reacţia cu acenaftenchinona formează acenafto-benzochinoxaline.

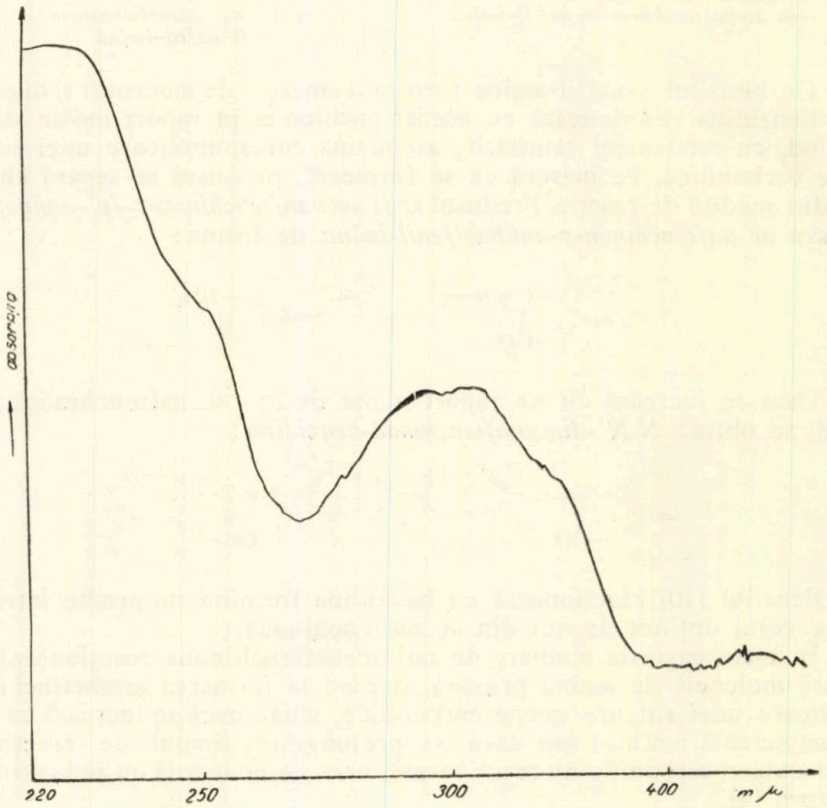
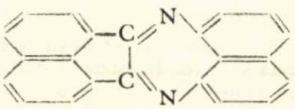
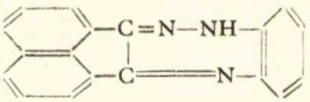


Fig. 2. — Spectrul UV al acenaftenchinon-α-naftil-iminei. Spectrul prezintă λ_{max} la 253 (s), 294, 304, 319 (s), 460 mμ.

Acenaftenchinona reacţionează cu 1.8-naftilen-diamina, cu eliminare de două molecule de apă. S-ar închide deci un ciclu de şapte atomi formînd *perinaftilen-2,3-acenafto-heptadiazina 1,4:*



Interpretarea dată de noi structurii produsului obţinut concordă cu indicaţiile întîlnite în literatură referitoare la reacţia *o*-amino-fenil-hidrazinei cu acenaftechinona, cînd se formează un derivat de 1,4,5-heptatriazină [17]



precum şi cu cele referitoare la reacţia 2,2'-diamino-dinaftilului cu fenantrenchinona [18] şi cu benzilul [19], cînd se închid cicluri de opt atomi.

Pentru confirmarea structurii produşilor sintetizaţi s-au efectuat determinări spectrale în infraroş (IR) şi în ultraviolet (UV), la unele azometine.

Spectrele IR au fost ridicate la un spectrofotometru UR-10; s-a lucrat în pastilă de KBr, suspensie de nujol sau în solvent nepolar, după cum a necesitat fiecare substanţă în parte.

Spectrele UV s-au înregistrat la spectrofotometrul Optica Milano CF-4, utilizînd ca solvent alcool etilic sau clorură de metilen.

Spectrele IR prezintă benzi de absorbţie la 1 658 cm^{-1} şi 1 660 cm^{-1}, datorite frecvenţei vibraţiei legăturii C = N. Pentru grupa C = O benzile se situează la 1 718 şi 1 735 cm^{-1}. La fiecare produs apar şi benzile caracteristice pentru substituenţii respectivi.

3. Partea experimentală

a) *Azometine cu m- şi p-nitro-anilina*

2 g acenaftenchinonă şi 1,6 g nitro-anilină se solvă la cald în 20 ml toluen şi se încălzesc sub reflux 30 min în cazul *p*-nitro-anilinei şi 2 ore în cazul *m*-nitro-anilinei. Produsul cu *p*-nitro-anilina este cristalin, roşu, şi se purifică prin recristalizare din toluen. P.t. = 238°C. Azometina cu *m*-nitro-anilina este de culoare galbenă; se purifică prin spălare la cald cu alcool metilic şi recristalizări repetate din toluen. P.t. = 225°C.

Analize:

$C_{18}H_{10}N_2O_3$ (302)		C%	H%	N%
	Calculat	71,52	3,31	9,27
	Găsit *m*-	71,58	3,45	9,38
		71,45	3,60	9,50
	p-	71,30	3,50	9,45
		71,38	3,62	9,49

b) *Acenaftenchinon-p-carboxifenil-imina*

2 g acenaftenchinonă şi 1,6 g acid *p*-amino-benzoic se solvă la cald în 40 ml toluen şi se refluxează 2 ore. Pe măsura încălzirii separă chiar la cald un produs galben portocaliu, care se purifică prin recristalizare din CCl_4; p. t. = 295°C.

Analize:

$C_{19}H_{11}O_3N$ (301)	C%	H%	N%
Calculat	75,74	3,65	4,65
Găsit	75,51	3,59	4,64
	75,60	3,70	

c) *Azometine cu α- şi β-naftil-amina*

1 g acenaftenchinonă şi 1 g naftil-amină se solvă la cald în 20 ml toluen şi se refluxează 2 ore şi 30 min sub continuă agitare. În cazul β-naftil-aminei separă chiar la cald un produs portocaliu, care se purifică prin solvire în alcool şi adaus de apă pînă la opalescenţă. P. t. = 156°C. Azometina cu α-naftil-amina separă numai la rece; se purifică prin spălări cu alcool etilic. P. t. = 236°C.

Analize:

$C_{22}H_{13}NO$ (307)		C%	H%	N%
Calculat		85,99	4,23	4,55
Găsit	α-	85,77	4,51	4,86
		85,80	4,42	4,85
	β-	85,63	4,92	4,81
		85,69	4,94	4,60

d) *Azometine cu benzidina*

Acenaftenchinona reacţionează cu benzidina în raport molar de 1:1 (I) şi 2:1 (II). 1 g acenaftenchinonă şi 1 g benzidină, respectiv 2 g acenaftenchinonă şi 1 g benzidină se solvă la cald în 10 ml toluen. Se încălzeşte sub reflux timp de 30 min. Produsele de condensare separă din mediul de reacţie pe măsura încălzirii; sînt de culoare roşie. În primul caz se obţine randament cantitativ, în al doilea caz se obţine un randament de 72%. Purificarea se realizează prin spălări repetate la cald cu alcool metilic. (I) P. t. = 330°; (II) P. t. = 295°C.

Analize:

		C%	H%	N%
(I) $C_{24}H_{16}N_2O$ (348)				
	Calculat	82,75	4,59	8,04
	Găsit	82,74	4,59	8,36; 8,20
(II) $C_{36}H_{20}N_2O_2$ (512)				
	Calculat	84,37	3,90	5,47
	Găsit	84,19	4,30	5,60; 5,90

e) *Perinaftilen-2,3-acenafto-heptadiazina-1,4*

2 g acenaftenchinonă şi 2 g 1.8-naftilen-diamină se solvă la cald în 20 ml toluen şi se refluxează o oră. Pe măsura încălzirii produsul separă chiar la cald. Se purifică prin solviri repetate în acid acetic glacial şi adaos de apă pînă la opalescenţă. P. t. = 247°C.

Analize:

$C_{22}H_{12}N_2$ (304)	C%	H%	N%
Calculat	86,84	3,94	9,21
Găsit	86,32	4,28	9,60
	86,40	4,25	9,42

4. Concluzii

1. Reacţia de condensare a acenaftenchinonei cu *m*- şi *p*-nitroanilină, acid *p*-amino-benzoic, α- şi β-naftil-amină şi benzidină duce la formare de azometine.

2. Acenaftenchinona, în aceste reacţii, formează azometine corespunzătoare unei singure grupe carbonilice, chiar dacă se lucrează în exces de amină sau în condiţii mai energice.

3. La condensarea acenaftechinonei cu 1.8-naftilen-diamina se închide un heterociclu de şapte atomi cu formare de perinaftilen-2,8-acenafto-heptadiazina-1,4.

Spectrele IR şi UV au fost executate de Maria Mocanu-Paraschiv, cercetător la Institutul de fizică atomică, Bucureşti, Iulian Gabe, cercetător principal la Institutul de chimie „P. Poni", Iaşi şi Elena Harnagea, chimist la Combinatul chimic, Borzeşti, cărora le aducem pe această cale mulţumiri.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de chimie organică

BIBLIOGRAFIE

1. Matei I., Lixandru T., Comaniţă E., Bul.. Inst. polit. Iaşi, 1960, **VI (X)**, *1-2*, p. 171.
2. Zerweck W., Korten E., I. G. Farbenindustrie Akt. Ges., D. R. P. *631 099*, 9 Dez. 1934; Chem. Zentr., 1936, **II**, S. 1620.
3. * * * I. G. Farbenindustrie Akt. Ges., Schw. P. *184 879*, 28 Dez. 1935; Chem. Zentr., 1937, **I**, S. 1550.
4. Zsuffa M., Ber. dtsch. chem. Ges., 1910, **43**, S. 2915.
5. Matei I., Ber. dtsch. chem. Ges., 1932, **65**, S. 1623.
6. Japp, Davidson, J. chem. Soc., 1895, **67**, p. 32.
7. Tsuge O., Tashiro M., Bull. Chem. Soc. Japan, 1965, **38**, p. 399.
8. Sander L., Ber. dtsch. chem. Ges., 1925, **58**, S. 834.
9. Bandrowski F. X., Monatsh., 1889, **9**, S. 690.
10. Ferriss C. V., Turner E. E., J. Chem. Soc., 1920, **117**, p. 1140.
11. Müsslin L., Roth W., Erlenmeyer H., Helv. Chim. Acta, 1953, **36**, S. 886.
12. Farrow W. M., Hanne C., Schneler F. W., J. Am. Pharm. Assoc., 1954, **43** p. 370; Chem. Abstr., 1954, **48**, p. 10838.
13. Ladd E. C., Ch[illegible] bstr., 1948, **42**, p. 2724 b.
14. — Chem Abstr., 1956, **50**, p. 525.
15. Коптюг Б. А., Володарский Л. Б, Ворожцов Л. Б., ЖОХ, 1962, **32**, стр. 1614.
16. Goldstein H., Strenli M., Helv. Chim. Acta, 1937, **20**, S. 650; Chem. Zentr., 1937, **II**, S. 2528.
17. Guha P. C., De M. K., Quat. Journ. Ind. Chem. Soc., 1926, **3**, p. 41; Chem. Zentr., 1926, **II**, p. 212.
18. Le Fevre, J. Chem. Soc., 1929, p. 736; Beilst., 1929, **23**, *II*. S. 303.
19. Tauber, Ber. dtsch. chem. Ges., 1892, **25**, S. 3288.

LA CONDÉNSATION DE L'ACÉNAPHTENQUINONE AVEC DES AMINES ET DIAMINES AROMATIQUES

(Résumé)

Les Auteurs aboutissent aux conclusions suivantes :

1. La condensation de l'acénaphtenquinone avec *m*- et *p*-nitro-aniline, acide *p*-amino-benzoique, α- et *β*-naphtylamine et benzidine conduit à la formation d'azométhines.

2. La présence de l'acénaphtenquinone dans ces réactions produit des azométhines correspondant à un seul groupe $>C=O$, même si l'on utilise l'amine en excès, ou bien dans des conditions extrémement énergiques.

3. La condensation de l'acénaphtenquinone avec 1.8-naphtylen-diamine conduit à l'obtention du perinaphtylen-2,3-acénaphto-heptadiazine-1.4.

4. Les azométhines obtenues pourraient être utilisées comme substances tuberculostatiques ou fungicides. La littérature indique certaines azométhines (au bases Schiff) aromatiques possédant ces propriétés.

Explications des figures

Fig. 1. — Spectre IR de l'acénaphtenquinone-α-naphtyl-imine.

Fig. 2. — Spectre UV de l'acénaphtenquinone-α-napthyl-imine. Le spectre présente λ_{max} à 253(s), 294, 304, 319(s), 460 mμ.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 547.541.521 ; 547.587

SULFAMIDELE ACIZILOR FENOXIPROPIONICI

NOTA I

DERIVAŢI SULFAMIDAŢI AI ACIZILOR α- ŞI β-FENOXIPROPIONICI

DE

GH. BOTEZ, CORNELIU ONISCU, ECATERINA MERICA şi CAMELIA GOREA

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

Acizii fenoxipropionici deşi au fost sintetizaţi şi studiaţi pentru prima dată, încă în anul 1900, de C. A. Bischoff [1], totuşi pînă în ultimul timp ei nu şi-au găsit aplicaţii practice cu toate că formează cu uşurinţă esteri, cloruri acide, derivaţi halogenaţi şi alţi compuşi.

În ultimii zece ani s-a constatat că o serie de derivaţi ai acizilor fenoxipropionici posedă proprietăţi fiziologice importante şi pe această bază au căpătat utilizări largi, fie ca stimulatori de creştere şi ierbicide în agricultură, fie ca medicamente cu acţiuni specifice în terapeutică.

Menţionăm cîteva din aplicaţiile practice în domeniul agriculturii :

a) Acidul α-(2,4,5-triclor-fenoxi)-propionic (2,4,5-T.P.) este folosit pe plan mondial ca ierbicid selectiv pentru culturile de porumb, bumbac ş.a., fiind în acelaşi timp un valoros regulator de creştere [2]. Prin stropirea pomilor fructiferi cu acest produs se obţine o creştere considerabilă a recoltelor de fructe.

b) Acidul α-(2-metil-4-clor-fenoxi)-propionic (2-M-4-C. P.) distruge buruienile rezistente faţă de alte ierbicide şi se utilizează pe scară largă în diferite ţări pentru protecţia cerealelor [3].

c) Un alt produs, acidul α-(2,4-diclor-fenoxi)-propionic (2,4-D.P.), stimulează creşterea fructelor şi previne căderea lor înainte de recoltare [4].

În domeniul medicinii acizii fenoxipropionici prezintă importanţă deoarece intervin în structura unor medicamente cu acţiune antiinfecţioasă şi vasodilatatoare, introduse recent în terapeutică.

Astfel „Feneticilina“ (fenoxietil-penicilina), prima penicilină de semisinteză, se obţine pe cale industrială prin condensarea acidului 6-amino-penicilanic cu clorura acidului α-fenoxipropionic [5]. Feneticilina are proprietăţi farmacologice superioare faţă de penicilinele obişnuite.

Un alt produs, cunoscut sub denumirea de „Dibenzilină“, utilizat în clinică ca medicament hipotensiv, conţine în moleculă un radical fenoxi-propil [6].

Din această scurtă prezentare se poate constata că studiul derivaţilor de substituţie ai acizilor fenoxi-propionici este de actualitate şi preocupă pe mulţi cercetători.

Studiile noastre s-au îndreptat asupra compuşilor sulfamidaţi ai acizilor fenoxi-propionici, care nu au fost sintetizaţi pînă în prezent. Scopul acestei lucrări este de a găsi noi substanţe cu acţiune stimulatoare de creştere şi alte produse intermediare în vederea obţinerii unor noi peniciline semisintetice.

Pentru sinteza acestor derivaţi am aplicat reacţia de clorosulfonare a esterilor etilici ai acizilor fenoxipropionici, reacţie care a fost elaborată pentru prima dată în cadrul laboratorului nostru, cu ocazia unor cercetări referitoare la sulfamidele acizilor fenoxiacetici [7].

Clorosulfonarea esterilor fenoxipropionici se efectuează la temperaturi moderate (10°...25°C), folosind un exces de 7 mol acid clorsulfonic pentru un mol ester. După descompunerea masei de reacţie (cu gheaţă) precipită esterii sulfocloruraţi, care se separă prin filtrare.

Esterii sulfocloruraţi ai acizilor fenoxipropionici sînt substanţe foarte reactive, fiind pasibili de diverse transformări, atît la gruparea clorosulfonil cît şi la gruparea esterică.

Astfel, prin amidarea esterilor sulfocloruraţi cu amoniac sau cu diferite amine, se obţin esterii sulfonamidaţi corespunzători. Aceştia pot fi transformaţi prin reacţii cunoscute în amide, hidrazide, imidazoline şi alţi compuşi, substituiţi cu grupări sulfonamidice simple, alchilate sau alchilarilate.

2. Partea teoretică

Folosind această metodă generală de sinteză s-au preparat o serie de compuşi sulfamidaţi proveniţi din acizii α- şi β-fenoxipropionici.

a) *Derivaţi sulfamidaţi ai acidului α-fenoxipropionic*

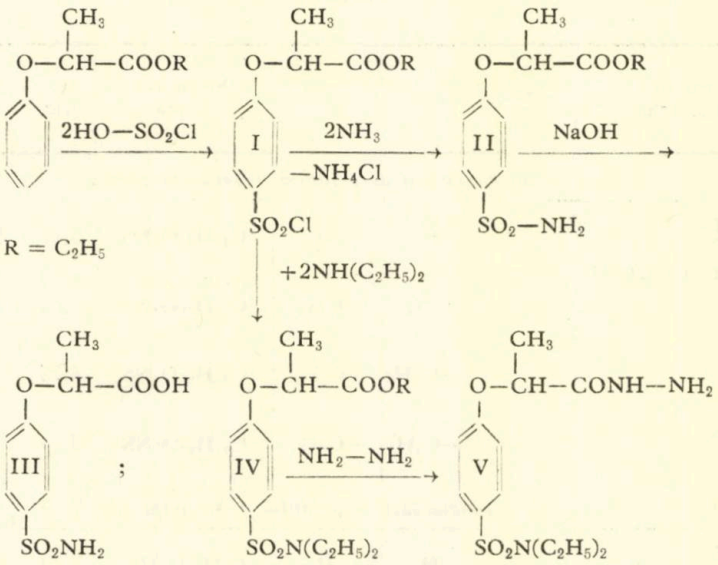
Plecînd de la esterul etilic al acidului α-fenoxipropionic, prin clorosulfonare se obţine α-(4-clorosulfonil-fenoxi-)-propionatul de etil (I). Acesta, la tratare cu amoniac (2 mol), în soluţie acetonică, formează α-(4-amidosulfonil-fenoxi)-propionatul de etil (II), care prin hidroliză conduce la acidul α-(4-amidosulfonil-fenoxi)-propionic (III).

Pe de altă parte prin amidarea esterului sulfoclorurat (I) cu dietilamina rezultă α-(4-dietil-amidosulfonil-fenoxi)-propionatul de etil (IV) din care prin condensare cu hidrazina se obţine hidrazida acidului α-(4-dietil-amidosulfonil-fenoxi)-propionic (V).

Reacţiile au loc după schema indicată în cele ce urmează.

Pentru sinteza acestor derivaţi reacţia de clorosulfonare are o importanţă deosebită. Deoarece reacţia se aplică asupra unui ester care este uşor hidrolizabil este necesar să se folosească un exces mare de acid clorsulfonic pentru legarea apei formate şi pentru a evita reacţia secundară de sulfonare.

Schema reacţiilor



Din încercările efectuate am constatat că se obţin randamente mari în sulfoclorură (circa 93%) prin folosirea unui raport molar de 1/7 şi conducînd reacţia la temperatura de 20°C, sub bună agitare.

Efectuînd reacţia de clorosulfonare la temperaturi mai ridicate, cuprinse între 30°... 60°C, nu este posibil a se introduce a doua grupare clorosulfonil în moleculă. În aceste condiţii se obţine derivatul monosubstituit în poziţia *para*, cu p. t. = 48°C.

Substituţia în *1 ... 4* a fost dovedită prin studiul spectrelor în infraroşu (IR), problemă de care ne vom ocupa ulterior.

În tabelul 1 se redau caracteristicile compuşilor sintetizaţi.

b) *Derivaţi sulfamidaţi ai acidului β-fenoxipropionic*

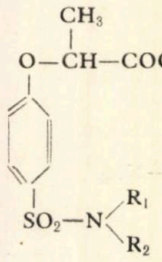
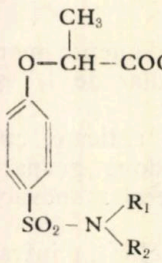
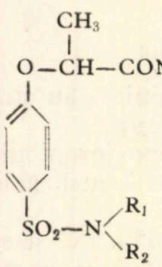
Derivaţii sulfamidaţi proveniţi din acidul β-fenoxipropionic s-au sintetizat după aceeaşi schemă de reacţii ca şi compuşii precedenţi.

Clorosulfonarea esterului etilic (metilic) al acidului β-fenoxipropionic decurge la rece, cu viteză ridicată, folosind un exces de 7 mol acid clorsulfonic.

Reacţia de clorosulfonare începe la temperatura de 4°... 5°C şi se perfectează la 12°... 15°C, rezultînd esterul sulfoclorurat respectiv cu un randament de 92%.

Reactivitatea mai ridicată a derivatului β faţă de cea a derivatului α se datoreşte efectului inductiv $-I$, exercitat de grupa carbonilică, care transmiţîndu-se printr-o catenă laterală mai lungă îşi pierde din intensitate şi ca urmare la izomerul β efectul mezomer $+M$ produs de oxigen, fiind mai mare, reactivitatea nucleului aromatic este crescută.

Tabelul 1

Formula structurală	Nr.	R_1	R_2	Formula brută	N% calc.	N% găsit	P. t. °C
Esteri sulfonamidaţi ai acidului α-fenoxipropionic							
	*1*	H	H	$C_{11}H_{15}O_5NS$	5,11	5,01	94
	2	$-CH_3$	$-CH_3$	$C_{13}H_{19}O_5NS$	4,64	4,52	67
	3	$-C_2H_5$	$-C_2H_5$	$C_{15}H_{23}O_5NS$	4,25	—	lichid
	4	$-C_6H_5$	$-C_2H_5$	$C_{19}H_{23}O_5NS$	3,70	—	lichid
Derivaţi sulfonamidaţi ai acidului α-fenoxipropionic							
	*5*	H	H	$C_9H_{11}O_5NS$	5,70	5,66	158
	6	$-CH_3$	$-CH_3$	$C_{11}H_{15}O_5NS$	5,11	5,23	130
	7	$-C_2H_5$	$-C_2H_5$	$C_{13}H_{19}O_5NS$	4,64	4,65	123
	8	$-C_6H_5$	$-C_2H_5$	$C_{17}H_{19}O_5NS$	4,00	3,96	101
Hidrazidele acidului α-(4-amidosulfonil-fenoxi)-propionic							
	*9*	H	H	$C_9H_{13}O_4N_3S$	16,20	16,18	172
	10	$-CH_3$	$-CH_3$	$C_{11}H_{17}O_4N_3S$	14,61	14,50	145
	11	$-C_2H_5$	$-C_2H_5$	$C_{13}H_{21}O_4N_3S$	13,31	13,21	113
	12	$-C_6H_5$	$-C_2H_5$	$C_{17}H_{21}O_4N_3S$	11,55	11,40	111

Esterul sulfoclorurat obţinut se supune amidării cu amoniac sau cu alchilamine, la temperatura ambiantă, cînd se formează esterul sulfonamidaı corespunzător.

Reacţia de hidrazidare se efectuează prin condensarea esterilor sulfamidaţi cu hidrat de hidrazină, folosind metoda uzuală [8].

Tabelul 2 cuprinde compuşii sintetizaţi.

Tabelul 2

Compuşii sintetizaţi

Denumirea chimică	Formula brută	N% calc.	N% găsit	p. t. °C
β-(4-amidosulfonil-fenoxi)-propionat de etil	$C_{11}H_{15}O_5NS$	5,11	5,25	117
β-(4-dimetil-amidosulfonil-fenoxi)-propionat de etil	$C_{13}H_{19}O_5NS$	4,64	4,81	54
β-(4-dietietil-amidosulfonil-fenoxi)-propionat de etil	$C_{15}H_{23}O_5NS$	4,25	4,35	lichid
β-(4-amidosulfonil-fenoxi)-propionat de metil	$C_{10}H_{13}O_5NS$	5,40	5,56	134
β-(4-dimetil-amidosulfonil-fenoxi)-propionat de metil	$C_{12}H_{17}O_5NS$	4,90	5,02	95
β-(4-dietil-amidosulfonil-fenoxi)-propionat de metil	$C_{14}H_{21}O_5NS$	4,44	4,45	61
Acidul β-(4-amidosulfonil-fenoxi)-propionic	$C_9H_{11}O_5NS$	5,70	5,82	139
Acidul β-(4-dimetilamido-sulfonil-fenoxi)-propionic	$C_{11}H_{15}O_5NS$	5,11	5,23	67
Acidul β-(4-dietilamido-sulfonil-fenoxi)-propionic	$C_{13}H_{19}O_5NS$	4,64	4,78	86
Hidrazida acidului β-(4-amido-sulfonil-fenoxi)-propionic	$C_9H_{13}O_4N_3S$	16,18	16,22	186
Hidrazida acidului β-(4-dimetil-amido-sulfonil-fenoxi)-propionic	$C_{11}H_{17}O_4N_3S$	14,61	14,73	115
Hidrazida acidului β-(4-dietil-amido-sulfonil-fenoxi)-propionic	$C_{13}H_{21}O_4N_3S$	11,55	—	—

3. Spectrele în infraroşu ale derivaţilor sulfamidaţi proveniţi din acizii α- şi β-fenoxipropionici

Pentru a preciza structura chimică, substituţia în poziţiile *1* ... *4* şi unele aspecte mai fine ale constituţiei moleculare, s-au studiat spectrele în IR ale acestor compuşi.

Aparatul folosit pentru înregistrarea spectrelor a fost un spectro-fotometru U.R.-10, Karl Zeiss-Jena, utilizîndu-se prisme de KBr, NaCl şi LiF. Substanţele au fost examinate în emulsie de nujol.

În fig. 1 ... 5 se reprezintă, pentru cîţiva din compuşii sintetizaţi, spectrul respectiv şi numerele de undă ale benzilor caracteristice vibraţiilor celor mai importante grupări, în domeniul 400 ... 3 600 cm^{-1}.

În fig. 1 şi 2 sînt înregistrate spectrele IR ale acizilor α- şi β-fenoxipropionici substituiţi în poziţia *4* cu grupări sulfonamidice simple, pe care le vom analiza comparativ.

La ambii compuşi apar benzile caracteristice pentru substituţia *1* ... *4* la 840; 1 015; 1 050; 1 100 cm^{-1}; în acest mod se precizează că gruparea etoxi-carboxilică esterificată orientează grupa clorosulfonil în poziţia *para*.

De asemenea în ambele spectre se observă benzile corespunzătoare vibraţiei următoarelor grupări: —SO_2 la 1 160 şi 1 460 cm^{-1}; —C = C— (vibraţii aromatice ale nucleului) la 1 590 ... 1 600 cm^{-1}.

C = O (carbonilul acid) la produsul *1* apare ca o bandă intensă la 1 740 cm^{-1}, pe cînd la compusul *2* aceeaşi bandă se găseşte la 1 710 cm^{-1}. Această deplasare a spectrului se datoreşte deosebirilor structurale dintre cele două catene laterale: substituţia în poziţia α la primul compus şi în β la al doilea.

În continuarea spectrului apar benzile caracteristice vibraţiilor grupelor: —OH asociat acid la 2 400; 2 500; 2 600 cm^{-1}; —CH_2, —CH_3 la 2 850 ... 3 200 cm^{-1} asociate cu aceleaşi vibraţii ale nujolului; —NH asociat la 3 270 şi 3 360 cm^{-1}, iar —NH liber la 3 470 cm^{-1}.

Aceste spectre au fost comparate cu cele ale acizilor α- şi β-fenoxipropionici nesubstituiţi, găsindu-se o concordanţă perfectă cu vibraţiile caracteristice ale grupelor preexistente în moleculă [9].

In fig. 3 este redat spectrul IR al acidului α-(4-fenil-etil-amidosulfonil)-fenoxipropionic, care conţine un radical fenil şi unul etil substituiţi în locul celor doi hidrogeni din grupa sulfonamidică.

Se observă aceleaşi benzi caracteristice grupelor din moleculă, specificate anterior, şi în plus apar vibraţiile proprii monosubstituţiei nucleului benzenic la 707,750 cm^{-1}.

În fig. 4 şi 5 sînt redate spectrele IR ale hidrazidelor acizilor α-fenoxipropionici sulfonamidaţi care se vor analiza comparativ.

Compusul *5* se deosebeşte de *4* numai prin substituţia celor doi hidrogeni sulfonamidici cu doi radicali etil. Vom analiza numai banda amidică.

În ambele spectre, vibraţia proprie carbonilului amidic apare ca o bandă intensă la 1 670 cm^{-1}.

La derivatul *4* apare în plus o bandă de intensitate medie la 1 640 cm^{-1}, caracteristică pentru hidrogenul asociat la gruparea amidică (C = O ... H—R)

Deoarece în molecula acestui compus se găsesc trei hidrogeni în gruparea hidrazinică şi doi hidrogeni în gruparea sulfonamidică se pune întrebarea care dintre ei formează această legătură de hidrogen.

Analizînd spectrul compusului *5*, în care există gruparea hidrazinică liberă, iar hidrogenii amidici sînt substituiţi, se constată absenţa benzii

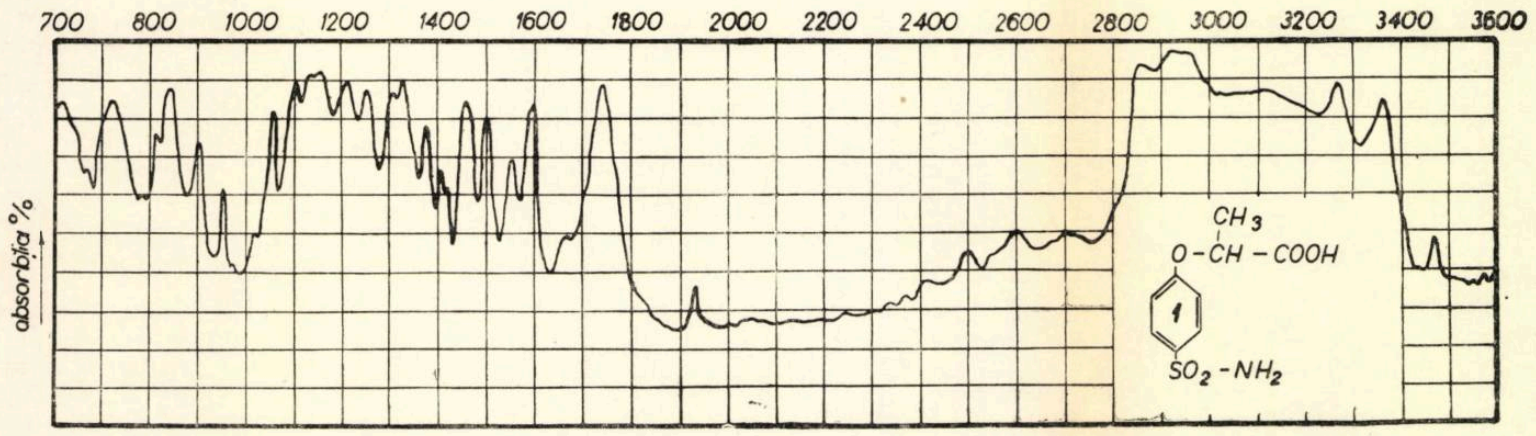


Fig. 1. — Spectrul I.R. al acidului α-(4-aminosulfonil-fenoxi)-propionic.

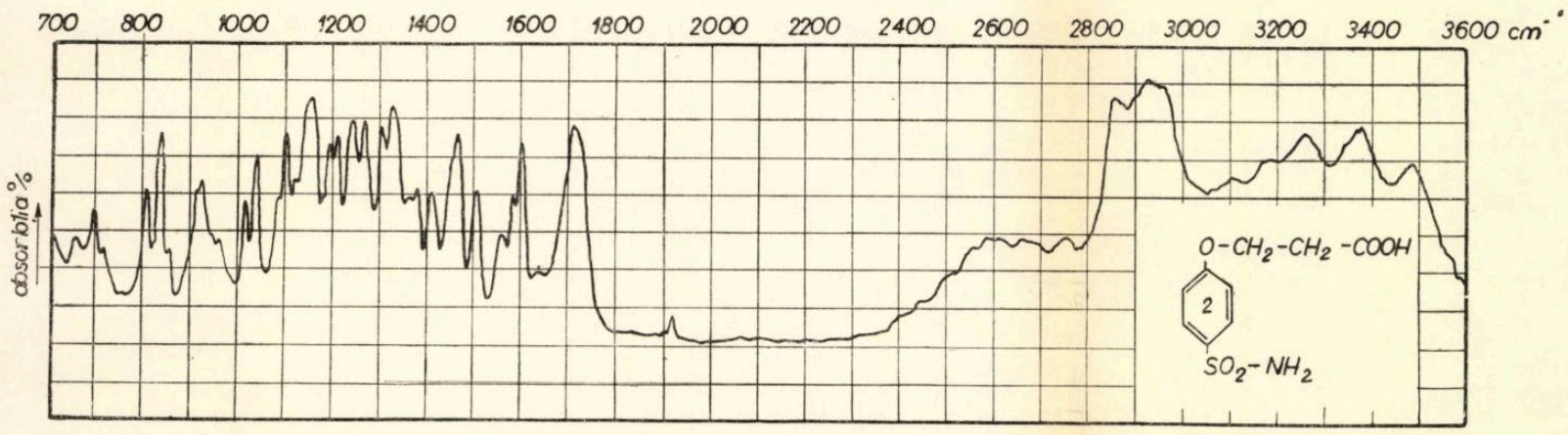


Fig. 2. — Spectrul I.R. al acidului β-(4-amidosulfonil-fenoxi)-propionic.

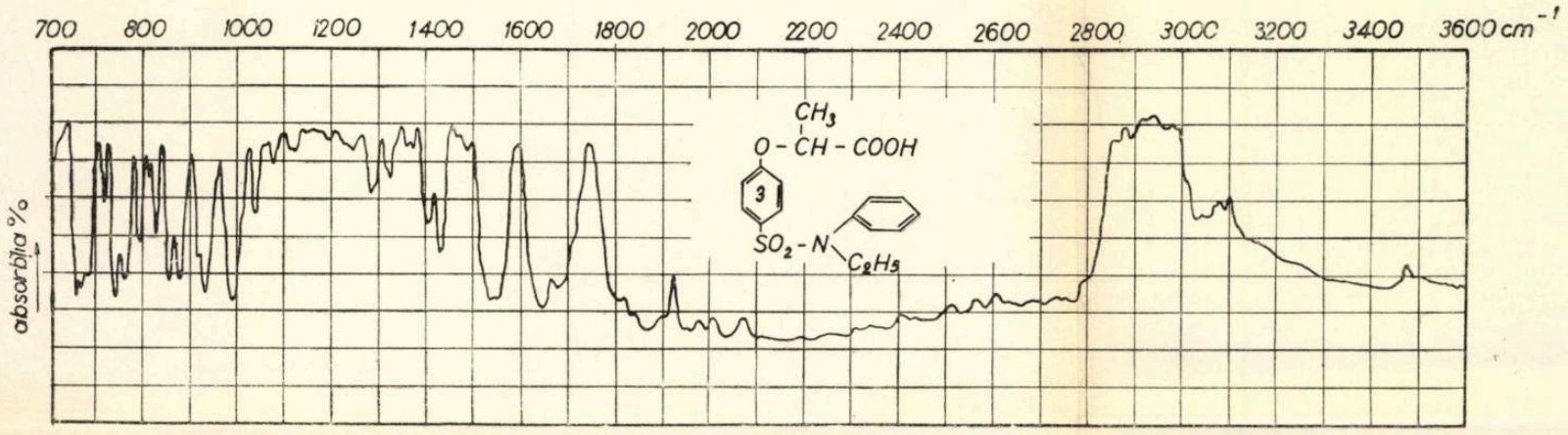


Fig. 3. — Spectrul I.R. al acidului α-(4-fenil-etil-amidosulfonil-fenoxi)-propionic.

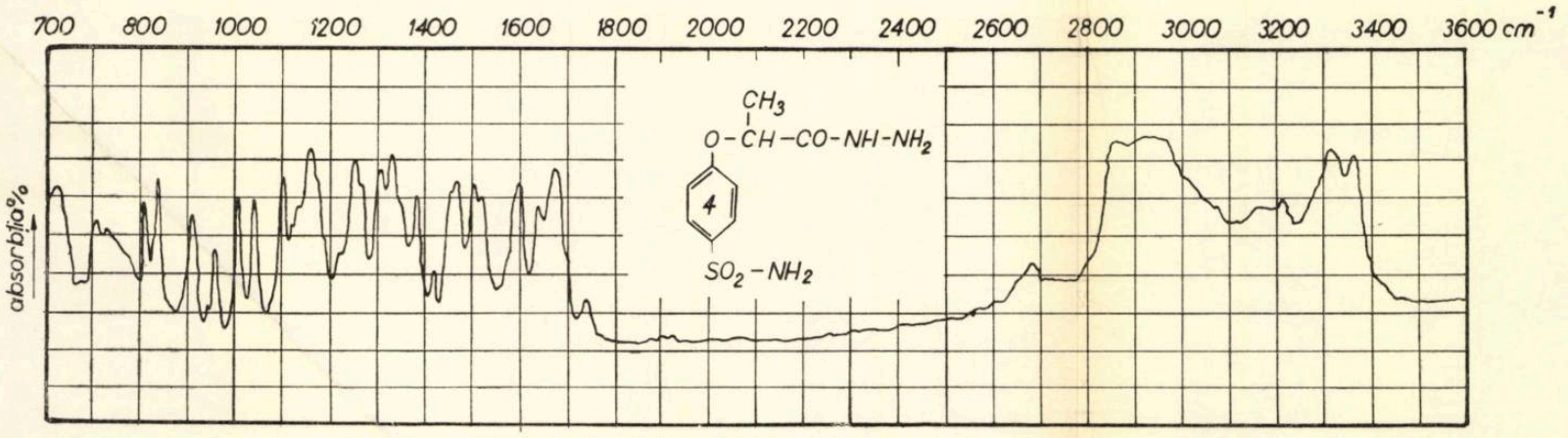


Fig. 4. — Spectrul I.R. al hidrazidei acidului α-(4-amidosulfonil-fenoxi)-propionic.

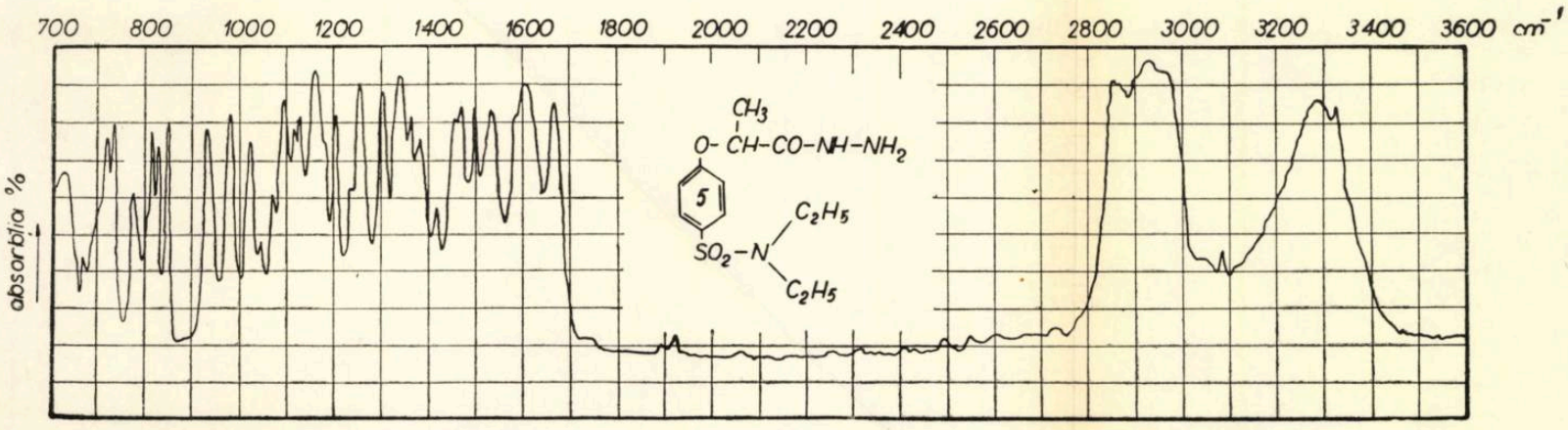


Fig. 5. — Spectrul I.R. al hidrazidei acidului α-(4-dietil-amidosulfonil-fenoxi-propionic).

amidice asociate. Se poate preciza deci că hidrogenii grupării hidrazidice nu participă la această legătură.

Se ajunge astfel la concluzia că banda amidică asociată se datorește unei cuplări a vibrației de alungire a legăturii C = O amidice cu vibrațiile de deformare a legăturii N — H din gruparea sulfonamidică.

Se pune acum problema dacă legătura în cauză este intramoleculară sau intermoleculară.

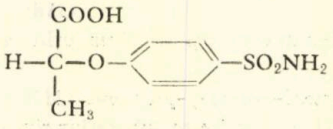
Această legătură nu se poate forma între cele două grupări de atomi ale aceleiași molecule din cauza împiedecărilor sterice și a distanțelor interatomice; în consecință avem de-a face cu o legătură intermoleculară (asociație dimeră).

Excludem posibilitatea formării asociațiilor polimere deoarece literatura indică o altă structură a benzilor în astfel de cazuri [9].

Din analiza spectrelor IR s-au obținut date precise asupra structurii și asociației moleculare a compușilor sintetizați.

4. Observații asupra izomeriei optice

Derivații sulfamidați ai acidului α-fenoxipropionic, avînd un atom de carbon asimetric, apar sub două forme optic active; dextrogiră și levogiră. Izomerii optic activi au o structură asemănătoare acizilor α-lactici:



Deoarece acțiunea fiziologică este în strînsă dependență de izomeria optică, este important de studiat dedublarea în antipozi optici a compușilor racemici, așa cum se obțin prin sinteză.

Cel mai indicat procedeu pentru dedublarea unui compus racemic în izomeri optici constă în transformarea sa în săruri cu alcaloizii și separarea sărurilor dextrogire de cele levogire prin cristalizări succesive [10].

S-au întreprins mai multe încercări de izolare a izomerilor optic activi prin transformarea derivaților sulfamidați ai acizilor α-fenoxipropionici în săruri cu stricnina, cinconina și cu baza levogiră a cloromicetinei. În toate cazurile sărurile respective nu au cristalizat și nu a fost posibilă separarea antipozilor optici.

Pentru fiecare compus racemic este indicat un anumit alcaloid capabil să formeze săruri dedublabile.

Fourneau a reușit să izoleze izomerii optici ai acidului α-fenoxipropionic numai cu ajutorul iohimbinei [11].

Deoarece noi nu am dispus de acest alcaloid, problema rămîne deschisă pentru un alt studiu.

5. Partea experimentală

a) *α-(4-clorosulfonil-fenoxi)-propionatul de etil (I)*

50 g acid clorsulfonic răcit la 2° ... 3 °C se tratează cu 10 g α-fenoxi-propionat de etil şi se agită la rece timp de 10 min. Se ridică apoi temperatura la 20°...25°C şi se continuă agitarea timp de 30 min.

Masa de reacţie se picură peste 200 g gheaţă pisată pentru descompunerea excesului de acid clorosulfonic. Esterul sulfoclorurat precipită, se filtrează şi se spală cu apă rece pînă la reacţie neutră. Prin purificare din etanol se obţin cristale albe cu p.t. = 48°C.

Produsul este solubil în acetonă la rece şi în alcool la uşoară încălzire.

Analize :

$C_{11}H_{13}O_5ClS$ $M = 292,72$

	Cl%
Calculat	12,11
Găsit	12,25

β-(4-clorosulfonil-fenoxi)-propionatul de etil (p.t. = 38°C) se obţine în condiţii similare conducînd reacţia de clorosulfonare la 12° ... 15°C.

b) *α-(4-amidosulfonil-fenoxi)-propionatul de etil (II)*

10 g ester sulfoclorurat se solvă în 20 ml acetonă şi se tratează în porţiuni, sub bună agitare, cu cantitatea necesară de amoniac (25%). Reacţia fiind exotermă se răceşte sub 20°C, pentru a evita hidroliza şi pierderile de amoniac.

Amestecul de reacţie se mai agită 10 min, apoi se diluează cu 100 ml apă rece. Produsul precipitat se filtrează şi se spală cu apă.

Este solubil în acetonă şi etanol la rece; precipită din soluţie prin diluare cu apă. Cristali albi cu p.t. = 94°C.

Analize :

$C_{11}H_{15}O_5NS$ $M = 273,29$

	N%
Calculat	5,11
Găsit	5,01 ; 5,12

Esterii dimetil- şi dietil-sulfonamidaţi se obţin prin amidare cu dimetil- şi dietil-amina în condiţii similare.

c) *Acidul α-(4-amidosulfonil-fenoxi-)-propionic (III)*

2,73 g ester sulfamidat (II) se încălzeşte sub reflux timp de 30 min cu o soluţie hidro-alcoolică (50%) care conţine 0,8 g NaOH. Se evaporă alcoolul, soluţia sării de sodiu se purifică cu cărbune activ, apoi se acidulează cu acid clorhidric la pH = 2.

Prin repaus la rece produsul cristalizează.

Se prezintă sub forma unor cristale prismatice cu p.t. = 158°C.

Analize :

$C_9H_{11}O_6NS$ $M = 245,23$

	N%
Calculat	5,70
Găsit	5,66 ; 5,59

d) *Hidrazida acidului α-(4-amidosulfonil-fenoxi)-propionic (IV)*

8 g ester sulfamidat (II) şi 2 ml hidrat de hidrazidă se dizolvă în 20 ml etanol şi se fierbe sub reflux timp de 1 oră. Alcoolul se evaporă pe baie marină, reziduul se reia cu apă şi se filtrează produsul cristalizat. Se purifică din apă; la răcire cristalizează în foiţe sidefii cu p.t. = 172°C.

Solubil în acid clorhidric cu formarea clorhidratului.

Analize :

$C_9H_{13}O_4N_3S$ $M = 259,25$

	N%
Calculat	16,20
Găsit	16,18

Toţi derivaţii sulfamidaţi ai acizilor α- şi β-fenoxipropionici menţionaţi în tabelele 1 şi 2 se sintetizează în condiţiile arătate la primii patru compuşi.

6. Concluzii

Din cercetările efectuate referitoare la sinteza unor noi derivaţi ai acizilor fenoxi-propionici se desprind următoarele concluzii:

1. Esterii acizilor α- şi β-fenoxipropionici se pot clorosulfona la temperaturi coborîte (10°... 25°C), cu un exces de acid clorsulfonic, rezultînd sulfoclorurile respective cu randamente bune (80... 93%).

2. Esterii sulfocloruraţi reacţionează uşor cu amoniacul sau cu diferite amine obţinîndu-se esterii sulfonamidaţi corespunzători, care pot fi transformaţi prin reacţii cunoscute în amide, hidrazide şi acizi sulfonamidaţi.

3. Din studiul spectrelor în IR s-a dovedit că aceşti compuşi sînt substituiţi în poziţiile *1... 4*, deci gruparea etoxi-carboxilică esterificată orientează grupa clorosulfonil numai în poziţia *para*.

4. Spectrele IR au fost în mare măsură analizate comparativ, obţinîndu-se o serie de date relative la structura şi asociaţiile moleculare ale acestor compuşi. Astfel, din analiza benzii amidice a hidrazidelor nesubstituite rezultă că se formează asociaţii între carbonilul amidic al unei molecule şi un hidrogen sulfonamidic al altei molecule (dimer).

5. La dedublarea în antipozi optici a derivaţilor acidului α-fenoxipropionic se întîmpină greutăţi; sărurile cu alcaloizii folosiţi în acest scop nu au cristalizat şi nu a fost posibilă izolarea izomerilor optic-activi din compuşii racemici.

6. S-au sintetizat 26 compuşi noi care pot găsi utilizări practice fie domeniul penicilinelor semisintetice fie ca stimulatori de creştere ai plantelor.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de industrii organice

BIBLIOGRAFIE

1. Bischoff C. A., Ber., 1900, **33**, S. 925, 1953.
2. Degman S. E., Batjer P. L., Proc. Amer. Soc. Hortic. Sci., 1955, *66*, pp 84—86.
3. Lush B. G., Proc. British Weed Control, 1955, **1**, p. 625.
4. Баскаков И. А., Ж. Всесоюз. хим. общ., 1950, V, стр. 254.
5. Uri Y., Die Pharmaze, 1964, **19**, *2*, S. 85.
6. Kerwin F. J., Hall C. G., J. Am. Chem. Soc., 1951, **73**, p. 4162.
7. Botez G., Bul. Instit. polit. Iaşi, 1960, **VI (X)**, *3—4*, p. 133.
8. Botez Gh., Tutoveanu M., Comaniţă E., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1962, **VIII (XII)** *3—4*, p. 151.
9. * * * Colecţia Inst. de Spectrochimie, Dortmund, Fişa Nr. *9611*/7/1963.
10. Cross A. D., *Introduction to Infrared Spectroscopy Practice*. London, 1960, p. 64.
11. Matell D., Arkiv Kemi, 1955, **9**, p. 157.
12. Fourneau E., Săndulesco G., Bull. Soc. Chim., 1922, **31**, p. 988.

SULFAMIDES DES ACIDES PHÉNOXIPROPIONIQUES

Note I

Derivés sulfamidés des acides α- et β-phénoxipropioniques

(Résumé)

Pour trouver de nouveaux produits à action stimulatrice dans le procesus de developpement des plantes et de certains derivés intermédiares pour l'obtention des penicilines semi-synhtétiques, les Auteurs ont synthétisé une série de composés sulfamidés qui proviennent des acides α- et β-phénoxipropioniques.

Pour la synthèse de ces composés on prend comme point de départ les esthères des acides phénoxipropioniques qui sont soumis à la reaction de chlorosulfonation, en obtenant par cette voie les esthères sulfochlorurés respectifs.

Ceux-ci peuvent être amidés avec l'ammoniaque ou avec les amines, en obtenant les esthères sulfamidés des acides phénoxipropioniques.

Par l'hydrolise ou par hydrazidation de ceux-ci il en resulte les acides ou les hydrazides respectives. On a synthetisé 26 de nouveaux composés.

Explications des figures

Fig. 1.—Spectre IR de l'acide α-(4-amidosulfonil-phénoxi)-propionique.

Fig. 2.—Spectre IR de l'acide β-(4-amidosulfonil-phénoxi)-propionique.

Fig. 3.—Spectre IR de l'acide α-(4-phényl-ethyl-amidosulfonil-phénoxi)-propionique.

Fig 4.—Spectre IR de la hydrazide de l'acide α-(4-amidosulfonil-phénoxi)-propionique.

Fig. 5.—Spectre IR de la hydrazide de l'acide α-(4-diethyl-amidosulfonil-phénoxi)-propionique.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 547.497.1 ; 542.951.1

SINTEZE DE NOI ACIL-TIOSEMICARBAZIDE SI SEMICARBAZIDE

NOTA I

DE

ILIE MATEI
membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
şi
EUGENIA COMANIŢĂ

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

Obţinerea 1-acil-tiosemicarbazidelor-4-substituite prin reacţia dintre hidrazide şi izosulfocianaţi este cunoscută de multă vreme. Prima substanţă din această grupă şi anume, 1-benzoil-4-fenil-tiosemicarbazida, a fost preparată de Marckwald şi Bott, prin adiţia hidrazidei benzoice la izosulfocianatul de fenil [1].

Majoritatea compuşilor de acest tip au fost însă preparaţi destul de recent, după descoperirea făcută de Buu-Hoi şi colaboratori, privind proprietăţile tuberculostatice ale acestor produse [2]. S-au sintetizat în special tiosemicarbazide substituite cu radicali acil proveniţi din hidrazide cunoscute ca substanţe tuberculostatice [2] ... [11].

În lucrarea de faţă am realizat *sinteza unei serii noi de 1-acil-tiosemicarbazide-4-substituite*, plecînd de la cîteva hidrazide mai puţin cercetate sub aspectul activităţii antituberculoase.

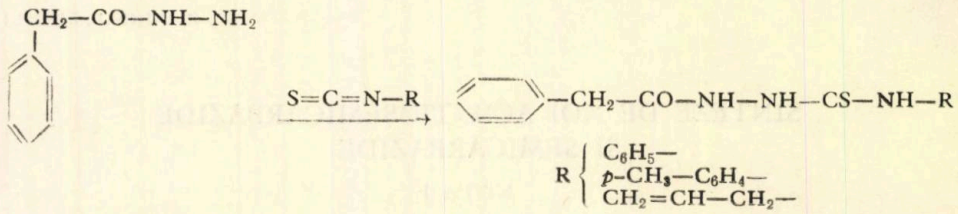
2. Partea teoretică

Tiosemicarbazidele preparate de noi, conţin în poziţia *1* o grupare acetil substituită cu radicali aril legaţi direct sau prin intermediul grupării oximetil. Unii derivaţi au şi o grupare alcoolică ataşată restului acetil în poziţia α.

Prin folosirea izosulfocianaţilor corespunzători, N^4 al tiosemicarbazidelor este legat de radicalii fenil, *p*-tolil sau alil.

În sintezele pe care le-am efectuat am folosit hidrazidele: fenilacetică, amigdalică, benzilică, fenoxiacetică, 2,4-diclor-fenoxiacetică, 2,4,5-triclor-fenoxiacetică şi 2-metil-4-clor-fenoxiacetică.

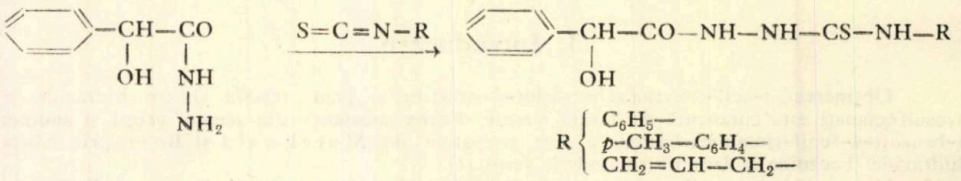
Din hidrazida acidului fenilacetic, la tratare cu cantitatea echivalentă de izosulfocianat de fenil, *p*-tolil şi alil în mediu de alcool etilic, am obţinut 1-*fenilacetil-tiosemicarbazidele-4-substituite*, după reacţia:



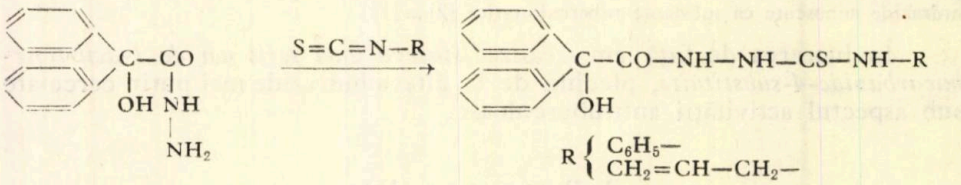
Tiosemicarbazidele cu rest fenil şi *p*-tolil, fiind mai greu solubile în alcool, se separă chiar în timpul încălzirii sub forma unui precipitat cristalin, în timp ce alil-tiosemicarbazida cristalizează numai după răcire.

S-au preparat alte *trei tiosemicarbazide* plecînd de la *hidrazida amigdalică*. Se cunosc derivaţi ai acestei hidrazide cu aldehide şi cetone, care prezintă activitate antituberculoasă. Însuşi acidul amigdalic este un bactericid eficace contra infecţiilor aparatului urinar [12].

Hidrazida amigdalică reacţionează cu izosulfocianaţii în modul următor:



Compuşi asemănători am obţinut la folosirea *hidrazidei acidului benzilic:*



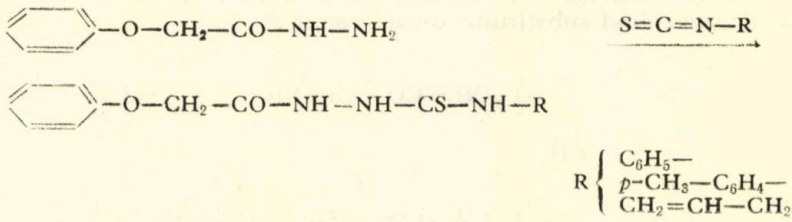
Asemenea derivaţi cu radical acil hidroxilat nu sînt menţionaţi în literatură.

Un alt grup de tiosemicarbazide le-am sintetizat plecînd de la *hidrazidele unor acizi aril-oxiacetici.*

În literatură se citează sinteza 1-fenoxiacetil-tiosemicarbazidei, prin reacţia fenoxiacetil-clorurii cu tiosemicarbazida, în piridină uscată [13]. Se indică şi prepararea unei tiosemicarbazide-fenoxiacetice-4-substituită.

care a fost obţinută din hidrazida fenoxiacetică şi izosulfocianatul de *p*-etoxifenil [2].

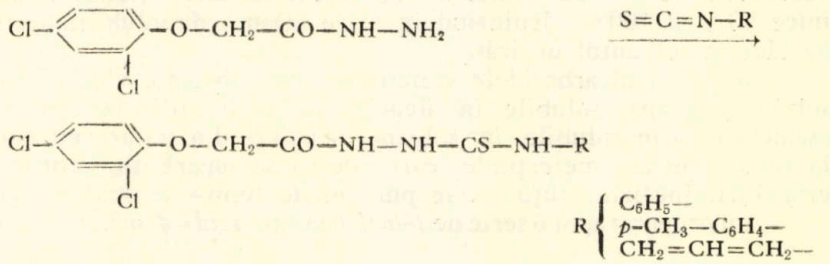
Am preparat 1-*fenoxiacetil-tiosemicarbazidele* substituite în poziţia *4* cu radical fenil, *p*-tolil şi alil, după schema:



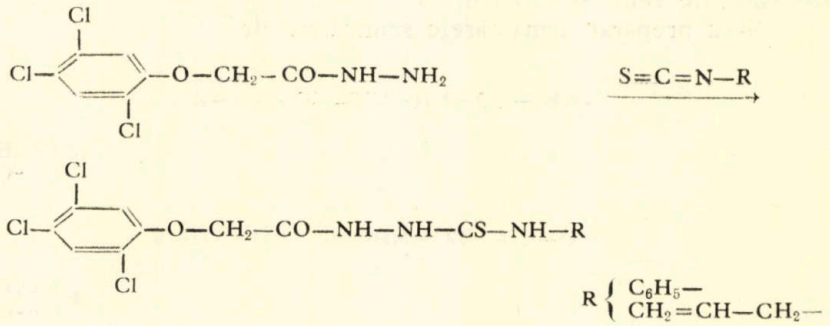
Reacţia decurge prin adăugarea izosulfocianatului la suspensia de hidrazidă fenoxiacetică în alcool. După o scurtă încălzire hidrazida intră în soluţie şi curînd începe separarea tiosemicarbazidei.

Ne-am ocupat totodată şi de hidrazidele unor acizi fenoxiacetici substituiţi in nucleu.

Acidul 2,4-diclor-fenoxiacetic, prin esterificare şi transformare în hidrazidă, adiţionează la izosulfocianaţi, formînd tiosemicarbazide după următoarea reacţie:

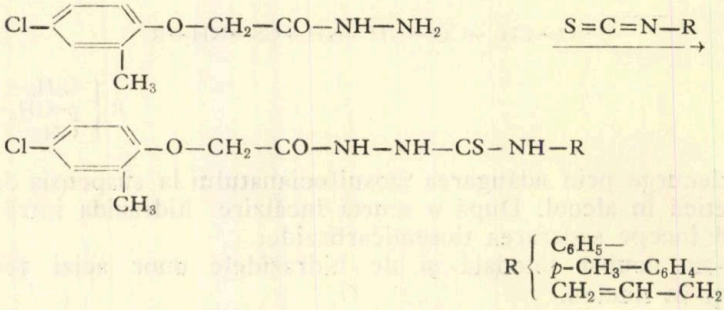


Hidrazida 2,4,5-triclor-fenoxiacetică ne-a condus la produşi substituiţi cu trei atomi de clor în restul fenoxiacetil:



Hidrazida triclor-fenoxiacetică fiind greu solubilă în alcool, a necesitat o cantitate mai mare de solvent şi o agitare continuă pentru a facilita reacţia. Tiosemicarbazidele sînt mai solubile în alcool decît hidrazida de plecare, cea cu radical alil separîndu-se numai la rece.

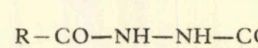
În mod analog, din *hidrazida 2-metil-4-clor-fenoxiacetică* am obţinut tiosemicarbazide-4-substituite după reacţia:



În concluzie, hidrazidele studiate de noi se comportă cu izosulfocianatul de fenil, *p*-tolil şi alil în mod obişnuit, dînd naştere tiosemicarbazidelor substituite la N^1 cu radicalii acil corespunzători. Randamentele variază între 90% şi 100%, depinzînd în mare măsură de solubilitatea tiosemicarbazidei în solventul utilizat.

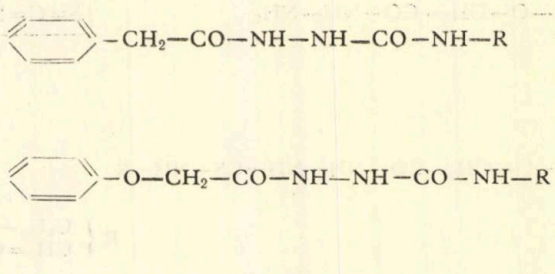
Acil-tiosemicarbazidele sintetizate sînt substanţe albe, cristaline, greu solubile în apă, solubile în alcool metilic şi etilic la cald. Ele sînt de asemenea puţin solubile în solvenţi nepolari. La tratare cu NaOH diluat la rece formează mercaptide, care adesea se separă din soluţie sub formă cristalină. Încălzite puţin peste punctul de topire se descompun.

Am preparat apoi o serie de *1-acil-semicarbazide-4-substituite* cu structura



Reacţia s-a efectuat prin tratarea hidrazidei în benzen anhidru cu izocianat de fenil şi α-naftil.

S-au preparat următoarele semicarbazide:



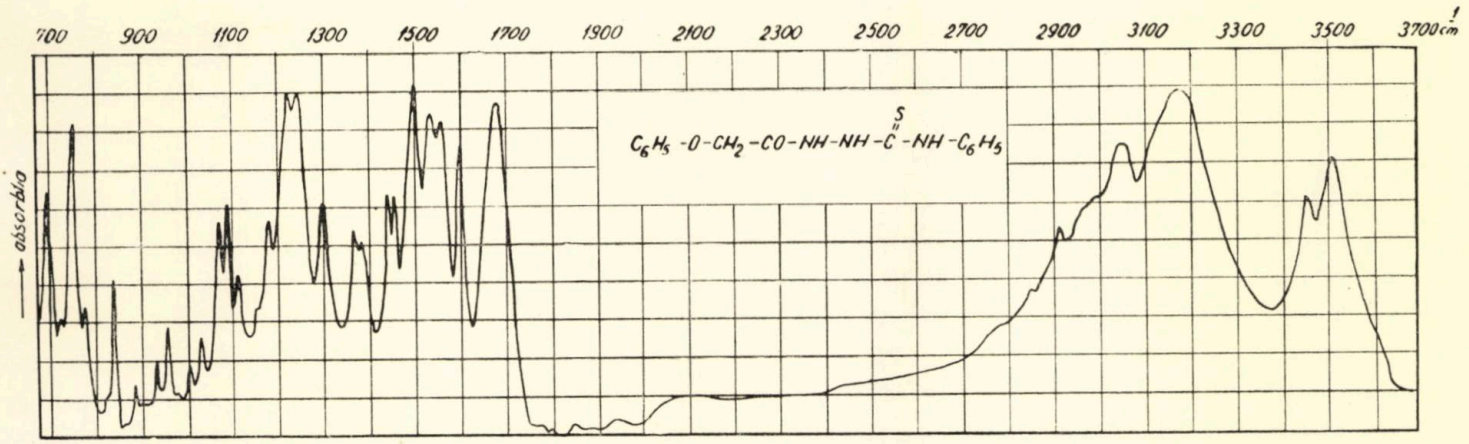


Fig. 1. — Spectrul IR al 1-fenoxiacetil-4-fenil-tiosemicarbazidei.

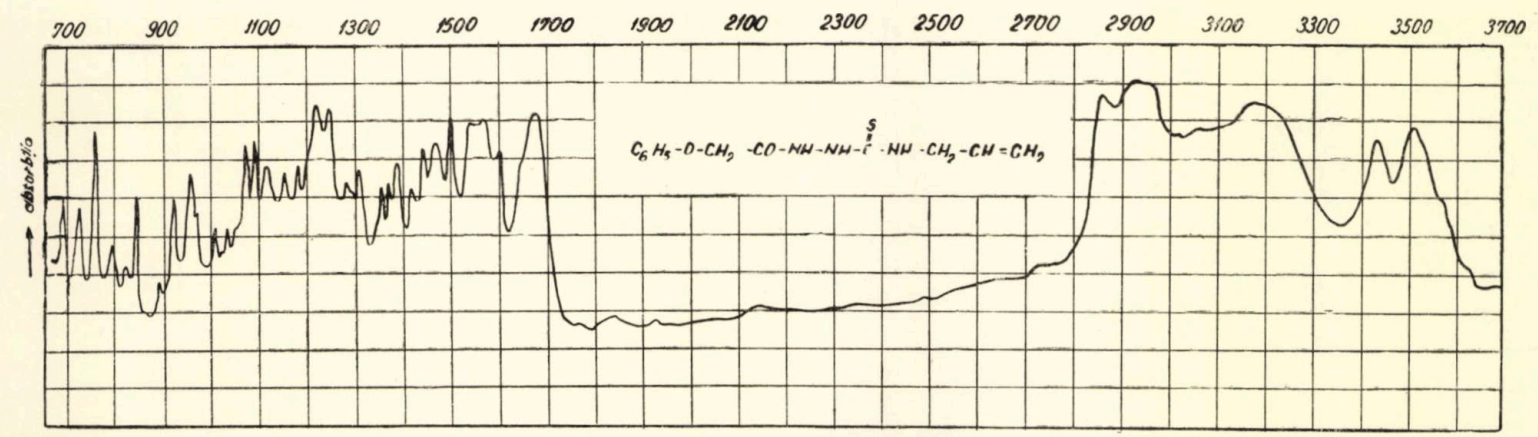


Fig. 2. — Spectrul IR al 1-fenoxiacetil-4-alil-tiosemicarbazidei.

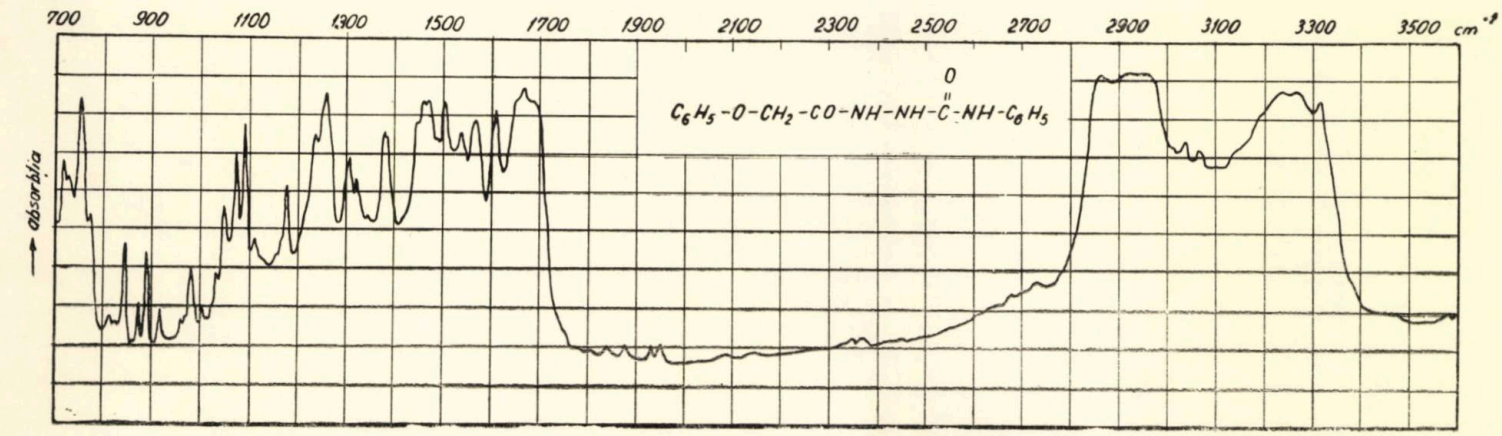
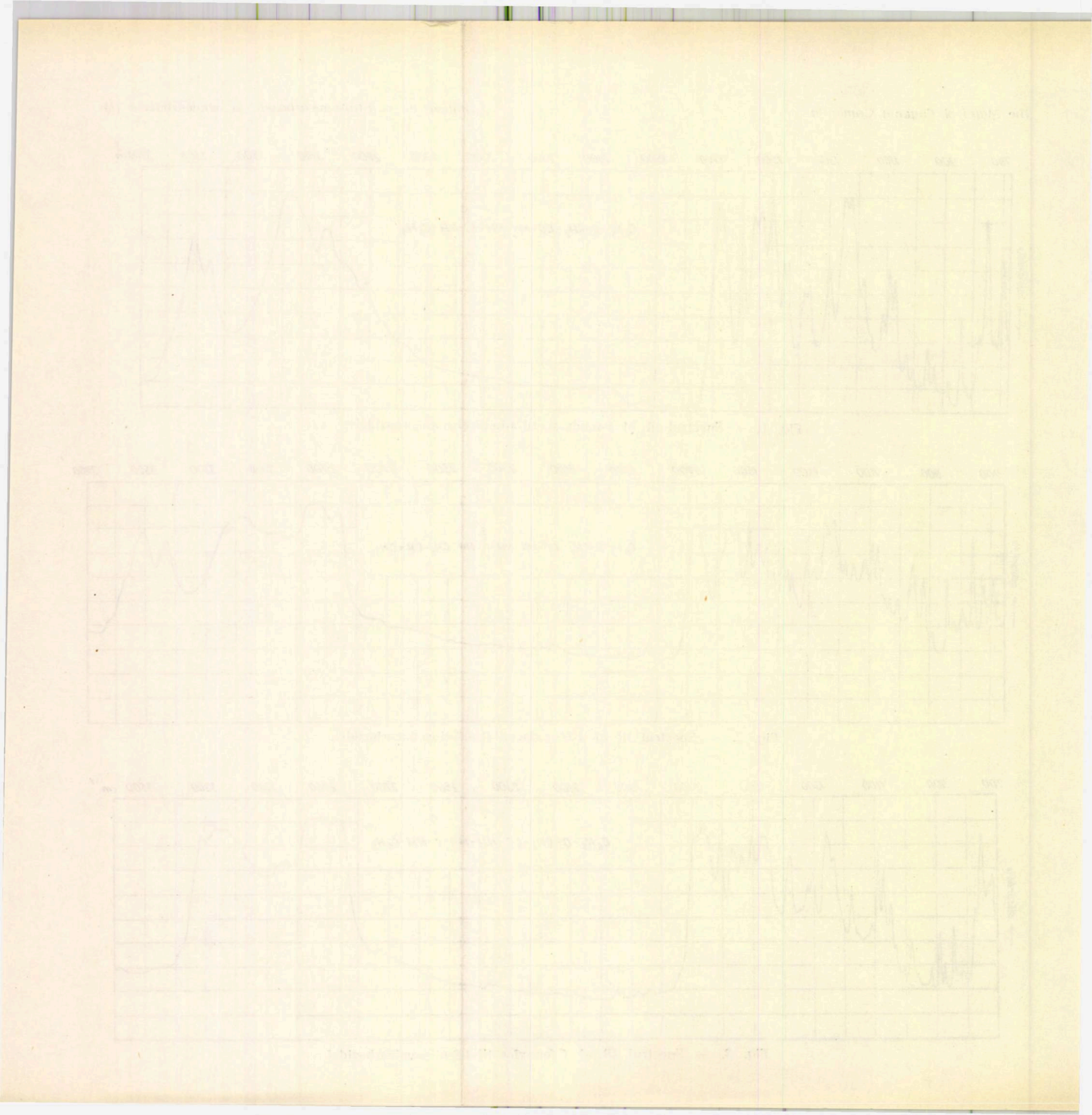
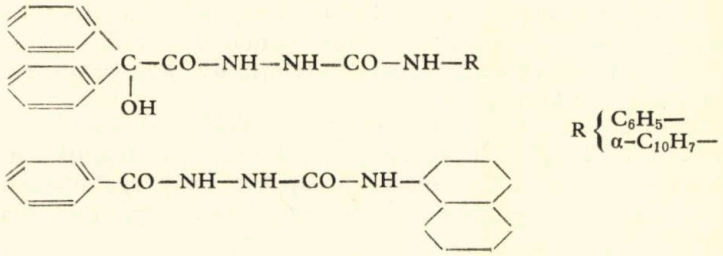


Fig. 3. — Spectrul IR al 1-fenoxiacetil-4-fenil-semicarbazidei.





1-Benzoil-4-α-naftil-semicarbazida a fost preparată în mediu de eter anhidru, deoarece în benzen produsul separă sub o formă necristalină, greu de filtrat.

Semicarbazidele sînt substanţe greu solubile în majoritatea solvenţilor. În alcool etilic se dizolvă mult mai greu decît analogii lor cu sulf, din care cauză unele purificări le-am efectuat cu ajutorul alcoolului amilic şi izoamilic. Ele au de asemenea puncte de topire mai ridicate decît tiosemicarbazidele şi sînt mai stabile decît acestea.

În continuare am cercetat *structura compuşilor sintetizaţi cu ajutorul spectrelor în infraroş* (IR) *şi ultraviolet* (UV).

3. Spectrele în infraroş şi ultraviolet ale compuşilor sintetizaţi

În literatură structura tiosemicarbazidelor şi în general a compuşilor care conţin gruparea tionică a început să fie studiată abia în ultimii ani. Preocuparea care se desprinde din cercetările efectuate şi anume, de a localiza vibraţia de valenţă a grupării C = S, s-a dovedit a fi o problemă greu de rezolvat, în special la compuşii la care funcţia tionică este legată de unul sau mai mulţi atomi de azot.

O parte din spectrele IR ale tiosemicarbazidelor preparate de noi au fost înscrise la un spectrofotometru Unicam SP-100, folosind tehnica pastilării cu KBr. Celelelte au fost efectuate la un spectrofotometru UR-10, în suspensie de nujol.

Ne-a interesat în mod deosebit să indentificăm, în măsura posibilităţilor care ne-au stat la dispoziţie, frecvenţa funcţiei C = S.

Cert este faptul că în domeniul 2 500... 2650 cm^{-1}, caracteristic vibraţiei funcţiei — SH, nu apare nici o bandă de absorbţie, de unde deducem că acil-tiosemicarbazidele preparate de noi au aceeaşi structură tioamidică ca ca şi cele cunoscute în literatură.

Cu titlu comparativ, am înregistrat şi cîteva spectre ale unor semicarbazide, care diferă de tiosemicarbazidele cercetate numai prin O carbonilic.

Comparînd spectrele tiosemicarbazidelor fenil şi alil-fenoxiacetice cu cel al semicarbazidei fenil-fenoxiacetice (fig. 1 ... 3), se constată că în domeniul 900... 1 000 cm^{-1} la tiosemicarbazide apar trei benzi la 920...930, 960 şi 980 cm^{-1}, în timp ce la semicarbazidă apar numai două benzi, cea de la 960 cm^{-1} fiind absentă.

Constatări asemănătoare s-au făcut şi în cazul tiosemicarbazidelor cu rest fenilacetil sau oxi-difenilacetil, dar urmărind banda de la aproximativ 960 cm^{-1} în toată seria de produşi cercetaţi, nu am regăsit-o totdeauna la aceeaşi valoare a frecvenţei.

Demnă de luat în considerare ni s-a părut şi banda descoperită de M. Mashima la 858 şi respectiv 837 cm^{-1} în formil- şi acetil-tiosemicarbazidă [14] ... [16]. Ea apare aproape în toate spectrele tio-semicarbazidelor preparate de noi, la circa 850 cm^{-1}, sub forma unei benzi intense, cu o alură caracteristică.

Nu putem trage totuşi vreo concluzie semnificativă, deoarece semicarbazidele prezintă şi ele benzi de intensitate slabă sau medie în acelaşi domeniu.

Cu precizie s-a putut identifica banda amid I în vecinătatea frecvenţei de 1 680 cm^{-1}, caracteristică amidelor monosubstituite, care în produşii de ciclizare, în urma eliminării apei, dispare complet. Banda amid I în semicarbazide devine mult mai largă şi uneori cu două maxime, deoarece se suprapune parţial cu banda corespunzătoare grupei carbonilice din semicarbazidă.

După indicaţiile găsite în literatură [17] ... [19] s-au putut stabili şi benzile amid II şi III, care apar constant în toţi produşii studiaţi, la aproximativ 1 560 şi respectiv 1 300 cm^{-1}.

În domeniul vibraţiilor de valenţă NH apar în general trei benzi, corespunzătoare celor trei NH existenţi în moleculă.

Mai putem adăuga că în spectrele tiosemicarbazidelor apar şi alte benzi în jurul frecvenţelor de 1 240; 1 380; 1 450; 1 470; 1 500 cm^{-1} etc., care sînt dificil de atribuit fără alte investigaţii.

Trecînd la *analiza spectrelor în UV*, amintim că în primul studiu comparativ al absorbţiei în UV, a semicarbazidei şi tiosemicarbazidei, se menţionează că spectrele acestor compuşi sînt în general asemănătoare, dar că înlocuirea O cu S se traduce printr-o deplasare batocromă accentuată de circa 75 mμ [20]. Aceeaşi asemănare se observă între spectrul tiosemicarbazidei şi cel al selenosemicarbazidei [21].

Literatura nu conţine informaţii asupra spectrelor în UV ale derivaţilor de semicarbazidă şi tiosemicarbazidă substituiţi în poziţia *1* cu radicali acil.

Noi am cercetat comparativ spectrele în UV ale unor tiosemicarbazide substituite în poziţia *4* cu radicali fenil şi alil iar în poziţia *1* cu diverşi radicali acil. Am studiat în paralel şi spectrele unor semicarbazide cu structură asemănătoare.

Spectrele au fost înscrise la un spectrofotometru Optica Milano CF-4. S-a lucrat în soluţie de alcool etilic la concentraţia de $10^{-6}/3$ moli la litru şi în clorură de metilen.

Din analiza spectrelor se pot trage o serie de concluzii, pe care le prezentăm mai jos.

Acil-tiosemicarbazidele prezintă curbe de absorbţie asemănătoare cu cea caracteristică tiosemicarbazidei nesubstituite.

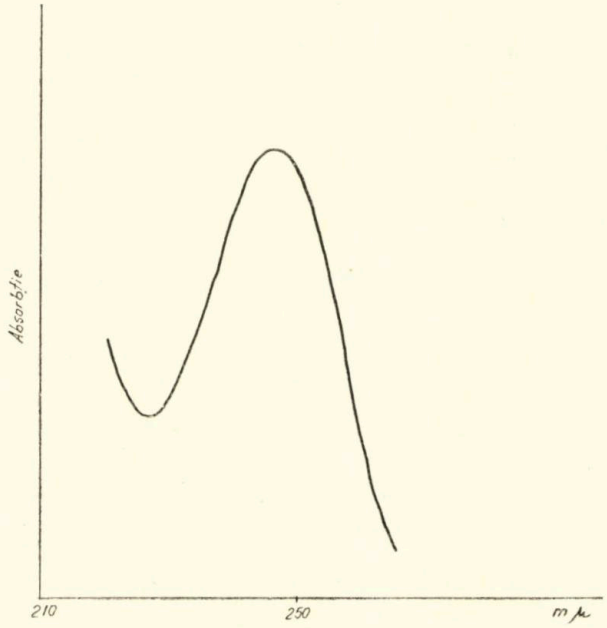


Fig. 4. — Spectrul UV al 1-fenilacetil-4-alil-tiosemicarbazidei.

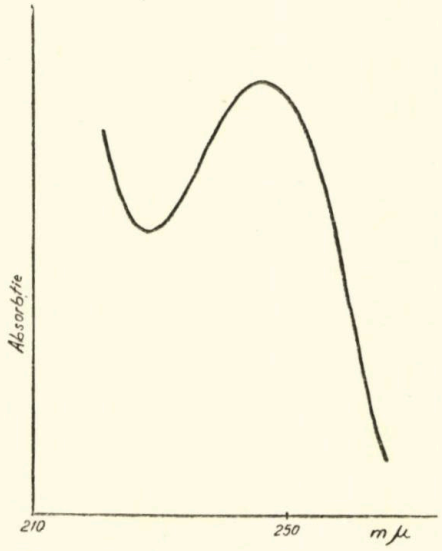
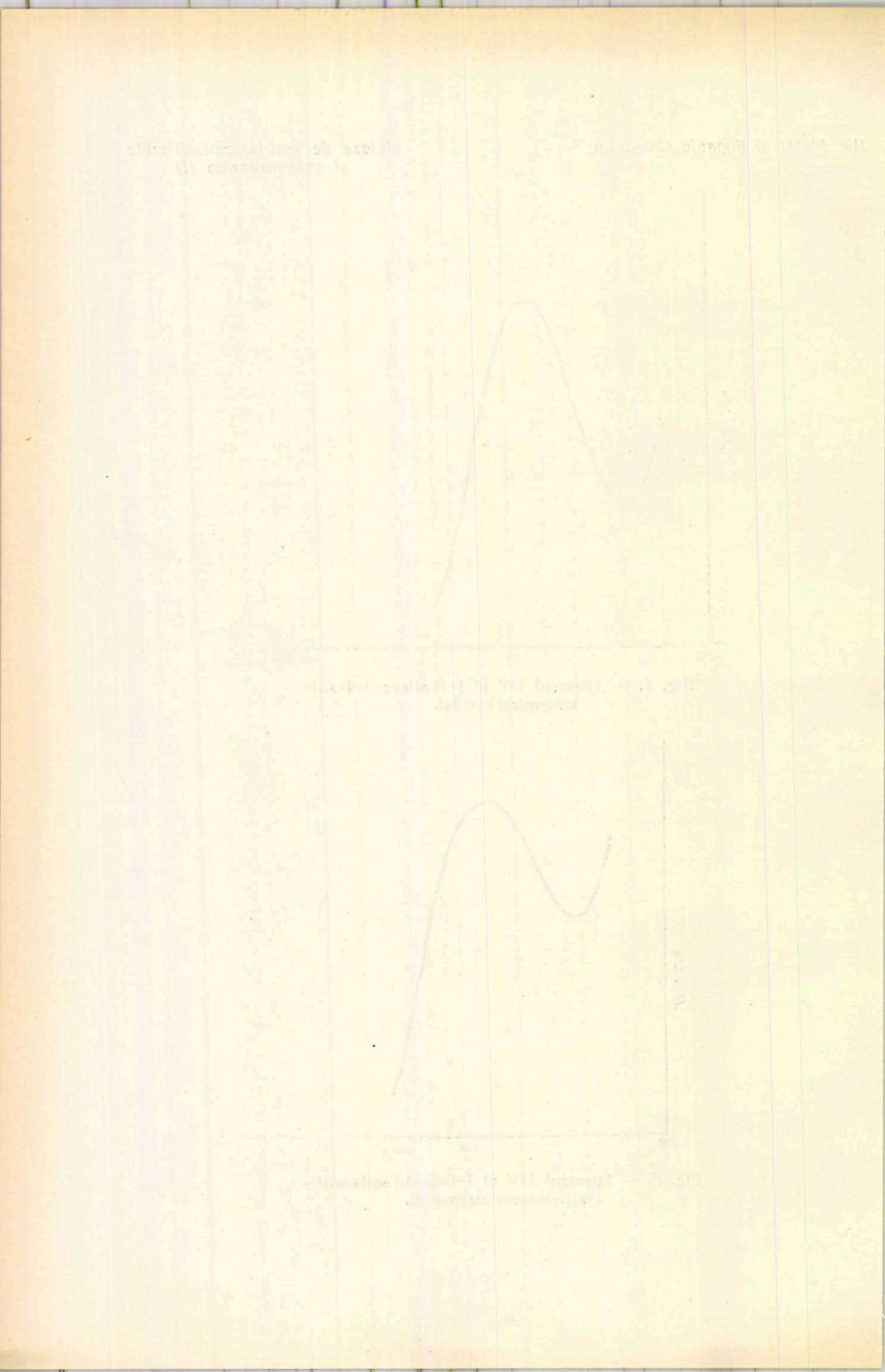


Fig. 5. — Spectrul UV al 1-(oxi-difenilacetil)-4-alil-tiosemicarbazidei.



Oprindu-ne asupra 1-fenilacetil-4-alil- şi 1-(oxi-difenilacetil)-4-alil-tiosemicarbazidelor, se constată prezenţa unei benzi de absorbţie la 246... 247 mμ (fig. 4, 5). Ţinînd seama că tiosemicarbazida absoarbe la 242 mμ, se observă că în raport cu produsul nesubstituit a avut loc numai o slabă deplasare batocromă. Legătura dublă din radicalul alil ca şi fenilul din grupa acil nu aduc nici o contribuţie spectrală, fiind în poziţie izolată faţă de cromoforul principal.

Înlocuirea radicalului alil din poziţia *4*, în substanţele mai sus amintite, cu radicalul fenil, modifică alura curbei de absorbţie, apărînd un nou maxim la 263 mμ respectiv 266 mμ. Credem că putem explica această nouă absorbţie prin conjugarea care se stabileşte datorită electronilor neparticipanţi ai N^4.

Consideraţii asemănătoare se pot face şi referitor la 1-fenoxiacetil-4-fenil şi 4-alil-tiosemicarbazide, în care însă prezenţa radicalului fenoxi se traduce prin apariţia unor absorbţii noi.

1-Fenilacetil şi 1-fenoxiacetil-semicarbazidele prezintă curbe de absorbţie cu un singur maxim, la 240 mμ, fiind asemănătoare cu cele întîlnite la tiosemicarbazide.

4. Partea experimentală

În cele ce urmează se prezintă numai detaliile de preparare a trei compuşi ((I), (II) şi (XX)), deoarece modul de lucru pentru obţinerea celorlalţi compuşi este asemănător. Pentru restul produselor se dau sub formă de tabel o serie de date, care caracterizează substanţele sintetizate.

I. *1-Fenilacetil-4-fenil-tiosemicarbazida*

Se solvă 3 g hidrazidă fenilacetică în circa 20 ml alcool etilic, sub uşoară încălzire. Se adaugă 2,7 g izosulfocianat de fenil şi se agită energic. Reacţia fiind exotermă, amestecul de reacţie se încălzeşte de la sine şi în cîteva minute începe să cristalizeze tiosemicarbazida. Se menţine la cald pe baie de apă 10 min, apoi se lasă să se răcească şi se filtrează, spălînd precipitatul pe filtru cu puţin alcool etilic. Rezultă 5,4 g (randament 94,7%). Se purifică prin recristalizare din alcool etilic. Ace albe cu p. t. 158°C.

Analize :

$C_{15}H_{15}N_3OS$ $M=285$

	C%	H%	N%
Calculat	63,15	5,26	14,73
Găsit	62,97	5,31	14,96
	62,83	5,42	14,87

II. *1-Fenilacetil-4-(p-tolil)-tiosemicarbazida*

2 g hidrazidă fenilacetică se solvă în 25 ml alcool etilic şi se tratează cu 1,98 g izosulfocianat de *p*-tolil. Se procedează ca la compusul anterior, obţinîndu-se 3,8 g produs brut (randament 95,4%). Se recristalizează din alcool etilic. P. t. 160°C.

Analize :

$C_{16}H_{17}N_3OS$ $M=299$

	C%	H%	N%
Calculat	64,21	5,68	14,04
Găsit	63,92	5,99	14,28
	63,87	5,90	14,35

XX. *1-Fenilacetil-4-fenil-semicarbazida*

2 g hidrazidă fenilacetică se tratează în mediu de benzen anhidru cu 1,58 g izocianat de fenil. Reacţia are loc imediat. Se încălzeşte puţin pe baie de apă apoi se lasă

1 ... 2 ore în repaus. Se separă produsul prin filtrare, spălîndu-l cu puţin benzen. S-a obţinut 3,5 g (randament 97,7%). Cristale cu p. t. 199° (din alcool amilic).

Analize

$C_{15}H_{15}N_3O_2$ $M = 269$

	N%
Calculat	15,61
Găsit	15,37
	15,49

Tabelul 1

Nr.	Produsul	Solvent recristalizat	P.t. °C	N %
I	1-Fenilacetil-4-fenil-tiosemicarbazida	C_2H_5OH	158	14,73 ; 14,96
II	1-Fenilacetil-4-(*p*-tolil)-tiosemicarbazida	C_2H_5OH	160	14,04 ; 14,28
III	1-Fenilacetil-4-alil-tiosemicarbazida	CH_3OH + apă	142	16,86 ; 17,04
IV	1-Fenoxiacetil-4-fenil-tiosemicarbazida	C_2H_5OH	147	13,95 ; 13,96
V	1-Fenoxiacetil-4-(*p*-tolil)-tiosemicarbazida	C_2H_5OH + apă	163	13,33 ; 13,48
VI	1-Fenoxiacetil-4-alil-tiosemicarbazida	CH_3OH + apă	153	15,84 ; 15,66
VII	1-(2,4-Diclor-fenoxiacetil-4-fenil-tiosemicarbazida	C_2H_5OH	156	11,35 ; 11,66
VIII	1-(2,4-Diclor-fenoxiacetil)-4-*p*-tolil-tiosemicarbazida	C_2H_5OH	165	10,93 ; 11,18
IX	1-(2,4-Diclor-fenoxiacetil)-4-alil-tiosemicarbazida	CH_3OH	160	12,57 ; 12,72
X	1-(2,4,5-Triclor-fenoxiacetil)-4-fenil-tiosemicarbazida	C_2H_5OH	176	10,38 ; 10,59
XI	1-(2,4,5-Triclor-fenoxiacetil)-4-alil-tiosemicarbazida	C_2H_5OH	175	11,39 ; 11,56
XII	1-(2-Metil-4-clor-fenoxiacetil)-4-fenil-tiosemicarbazida	C_2H_5OH	166	12,01 ; 12,26
XIII	1-(2-Metil-4-clor-fenoxiacetil)-4-(*p*-tolil)-tiosemicarbazida	C_2H_5OH	167	11,55 ; 11,78
XIV	1-(2-Metil-4-clor-fenoxiacetil)-4-alil-tiosemicarbazida	CH_3OH + apă	169	13,39 ; 12,64
XV	1-Amigdaloil-4-fenil-tiosemicarbazida	C_2H_5OH	173	13,95 ; 14,06
XVI	1-Amigdaloil-4-(*p*-tolil)-tiosemicarbazida	C_2H_5 + apă	168	13,33 ; 13,57
XVII	1-Amigdaloil-4-alil-tiosemicarbazida	CH_3OH + apă	151	15,84 ; 15,89
XVIII	1-(Oxi-difenilacetil)-4-fenil-tiosemicarbazida	C_2H_5OH + apă	168	11,14 ; 11,38
XIX	1-(Oxi-difenilacetil)-4-alil-tiosemicarbazida	C_2H_5OH + apă	157	12,31 ; 12,63
XX	1-Fenilacetil-4-fenil-semicarbazida	$C_5H_{11}OH$	199	15,61 ; 15,37
XXI	1-Fenilacetil-4-(α-naftil)-semicarbazida	$C_5H_{11}OH$	216	13,16 ; 12,85
XXII	1-Fenoxiacetil-4-fenil-semicarbazida	$C_5H_{11}OH$(izo)	207	14,73 ; 14,62
XXIII	1-Fenoxiacetil-4-(α-naftil)-semicarbazida	C_2H_5OH	215	12,53 ; 12,74
XXIV	1-(Oxi-difenilacetil)-4-fenil-semicarbazida	C_2H_5OH + apă	183	11,63 ; 11,85
XXV	1-(Oxi-difenilacetil)-4-(α-naftil)-semicarbazida	C_2H_5OH + apă	253	10,21 ; 10,48
XXVI	1-Benzoil-4-(α-naftil)-semicarbazida	$C_5H_{11}OH$	212	13,77 ; 14,01

5. Concluzii

Cercetările care stau la baza acestei lucrări au avut drept scop prepararea unor noi compuşi din clasa tiosemicarbazidelor, care prezintă interes ca substanţe antituberculoase. Din materialul expus se desprind următoarele concluzii:

1. Prin reacţia dintre hidrazidele unor acizi şi izosulfocianaţi s-au preparat acil-tiosemicarbazide-4-substituite. Acestea conţin în poziţia *1* un grup acetil substituit cu radicali aril legaţi direct sau prin intermediul grupării oxi-metil. Unii derivaţi conţin şi o funcţie alcoolică ataşată restului acetil în poziţia α. Prin folosirea izosulfocianaţilor corespunzători, N^4 al tiosemicarbazidelor este legat de radicali fenil, *p*-tolil sau alil.

2. Pentru a putea compara spectrele tiosemicarbazidelor cu cele ale derivaţilor carbonilici corespunzători, s-au sintetizat şi o serie de 1-acil-semicarbazide substituite în poziţia *4* cu radicali fenil şi α-naftil.

3. Structura compuşilor a fost studiată cu ajutorul spectrelor în IR şi UV.

Spectrele IR şi UV au fost înscrise de Maria Mocanu-Paraschiv, cercetător la Institutul de fizică atomică, Bucureşti, Iulian Gabe, cercetător principal la Institutul de chimie „P. Poni", Iaşi şi Elena Harnagea, chimist la Combinatul chimic Borzeşti, cărora cu această ocazie le aducem mulţumirile noastre.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de chimie organică

BIBLIOGRAFIE

1. Marckwald W., Bott A., Ber. dtsch. Ges., 1896, **29**, S. 2916.
2. Buu Hoi N. P., Xuong N. D., Nam N. H., C. R. Ac. Sci., Paris 1954, **238**, p. 295.
3. Runti C., Collino F., Boll. chim. farmac., 1961, **100**, p. 837.
4. Misra V. S., Varma R. S., J. Ind. Chem. Soc., 1962, **40**, p. 799.
5. Welsch M., Buu-Hoi N. P., Danthinne P., Xuong N. D., Experientia, 1956, **12**, p. 102.
6. Buu-Hoi N. P., Xuong N. D., Gazave J. M., Schembri L., Nam N. H., Long C. T., Bull. Soc. Chim. France, 1956, **23**, p. 365.
7. Buu-Hoi N. P., Xuong N. D., Lavit D., Rec. trav. chim., 1955, **74**, p. 729.
8. Dymek W., Ann. Univ. „M. Curie Sklodovska", 1954, **9**, p. 61.
9. Buu-Hoi N. P., Gley P., Xuong N. D., Bouffanais A., C. R. Ac. Sci., Paris 1954, **238**, p. 2582.
10. Постовский И., Верещагина Н., ЖОХ, 1956, **26**, стр. 2583.
11. Buu-Hoi N. P., Huong N. D., Lescot E., Bull. Soc. Chim. France, 1957, **24**, p. 441.
12. Ciorănescu E., *Medicamente de sinteză*. Ed. Tehn., Buc., 1957.
13. Jones R. G., Ainsworth C., J. Amer. Chem. Soc., 1955, **77**, p. 1538.
14. Suzuki I., Bull. Chem. Soc. Japan, 1962, **35**, p. 1286.
15. Mashima M., Bull. Chem. Soc. Japan, 1962, **35**, p. 332.
16. — Bull. Chem. Soc. Japan, 1964, **37**, p. 974.
17. Mecke R., Mecke R., Ber. dtsch. chem. Ges., 1956, **89**, S. 343.
18. Mecke R., Mecke R., Lüttrinhaus A., Ber. dtsch. chem. Ges., 1957, **90**, S. 975.
19. Collard-Charon C., Renson M., Bull. Soc. Chim. Belges, 1963, **72**, p. 291.
20. Grammaticakis P., Bull. Soc. Chim. France, 1950, **17**, p. 505.
21. Huls R., Renson M., Bul. Soc. Chim. Belges, 1957, **66**, p. 55.

NOUVELLES SYNTHÈSES D'ACYL-THIOSEMICARBAZIDES ET SEMICARBAZIDES

(Résumé)

Les recherches qui font l'objet de cette Note ont été effectuées dans le but de préparer de nouveaux composés, qui présentent intérêt comme substances tuberculostatiques. On a aboutit aux conclusions suivantes :

1. On a préparé une série de thiosemicarbazides de structure R—CO—NH—NH—CS—NH—R, substituées à l'atome de N dans la position *4*, aussi qu'à l'atome de N dans la position *1*.

Les substituents à N^4 proviennent des isothiocyanates correspondants, utilisés en réaction, tandis que les substituents à N^1 sont introduits avec les hydrazides employées en réaction.

On a effectué des réactions entre les substances suivantes:

a) Hydrazides des acides phénylacétique, mandélique, phénoxyacétique, 2,4-dichlorephénoxyacétique et 2-méthyl-4-chlorephénoxyacétique avec les isothiocyanates de phényle, *p*-tolyle et d'allyle.

b) Hydrazides des acides benzilique et 2,4,5-trichlorephénoxyacétique avec les isothiocyanates de phényle et d'allyle.

2. Pour établir une comparaison entre les spectres qui caractérisent les thiosemicarbazides et ceux correspondant aux dérivés carbonylés, on a synthetisé une série de 1-acyl-semicarbazides-4-substituées, de structure R—CO—NH—NH—CO—NH—R. Dans ce but on a utilisé la réaction des hydrazides des acides phénylacétique, phénoxyacétique, benzilique et benzoïque avec les isocyanates de phényle et α-naphtyle.

3. On a étudié la structure des composés à l'aide des spectres en infrarouge (IR) et en ultraviolet (UV).

Explications des figures

Fig. 1. — Spectre IR de 1-phénoxyacétyl-4-phényl-thiosemicarbazide.
Fig. 2. — Spectre IR de 1-phénoxyacétyl-4-allyl-thiosemicarbazide.
Fig. 3. — Spectre IR de 1-phénoxyacétyl-4-phényl-semicarbazide.
Fig. 4. — Spectre UV de 1-phénylacétyl-4-allyl-thiosemicarbazide.
Fig. 5. — Spectre UV de 1-(oxy-diphénylacétyl)-4-allyl-thiosemicarbazide.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 667.212

COLORANŢI AZOICI OBŢINUŢI DIN ACIDUL DIANISIDIN-*N* (2-NITROFENIL-4-SULFONIC) CU DIVERSE COMPONENTE DE CUPLARE

DE

GH. LUPUŞOR şi VETA SECURE

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

În cîteva lucrări anterioare am realizat: a) condensarea *o*-dianisidinei şi *o*-tolidinei cu 2, 4-dinitroclorbenzen, obţinînd patru produşi [1] care au servit la prepararea unor coloranţi de sulf [2]; b) condensarea acidului 4,4-diaminostilben-2,2-disulfonic cu 2,4-dinitroclorbenzen obţinînd doi coloranţi nitrici galbeni [3] şi mai mulţi coloranţi azoici cu însuşiri substantive [4], [5].

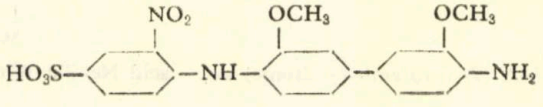
În condiţii mai energice s-a realizat condensarea *o*-dianisidinei şi *o*-tolidinei cu acidul 2-nitroclorbenzen-4-sulfonic.

În lucrarea de faţă, produsul obţinut prin condensarea *o*-dianisidinei cu acidul 2-nitroclorbenzen-4-sulfonic în raport molar de 1 : 1, respectiv acidul dianisidin-*N* (2-nitrofenil-4-sulfonic) (I) s-a folosit drept componentă diazotabilă pentru obţinerea de noi coloranţi azoici.

2. Partea teoretică

Acidul dianisidin-*N* (2-nitrofenil-4-sulfonic) (I) prezintă la grupa aminică o slabă bazicitate (fiind prezente în moleculă grupele nitrică şi sulfonică), neputînd forma cu acizii minerali sare solubilă în apă.

(I)

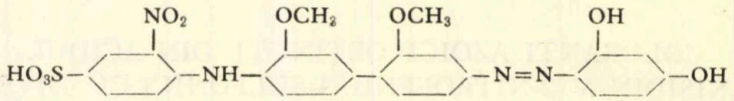


Diazotarea se face dizolvînd produsul (I) în prezenţa carbonatului de sodiu la cald, iar după răcire în soluţia coloidală se adaugă soluţia de nitrit de sodiu şi se acidulează cu acid clorhidric. Diazoderivatul (*D*) se prezintă ca o suspensie fină.

Cuplările s-au făcut în mediu alcalin cu următoarele componente de cuplare: resorcină, sare *G*, acid Schaeffer, acid Gama, acid Neville-Winther, acid *H*, acid Chicago *SS* şi acid Carbonil I.

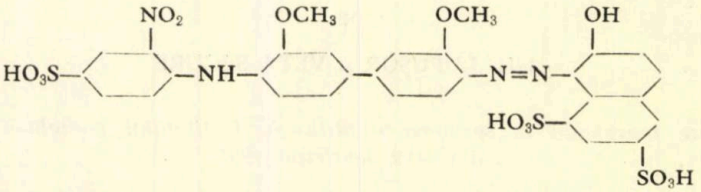
Diazoderivatul (*D*) s-a introdus în soluţia alcalină a componentelor de cuplare, obţinîndu-se coloranţii (II)···(X) redaţi mai jos:

(II)



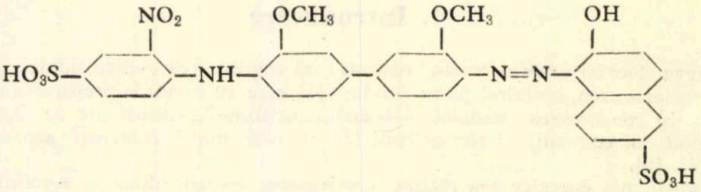
Acid dianisidin-*N* (2-nitrofenil-4-sulfonic) azo — resorcină

(III)



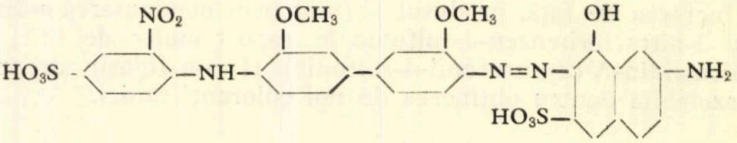
Acid dianisidin-*N* (2-nitrofenil-4-sulfonic) azo — acid *G*

(IV)



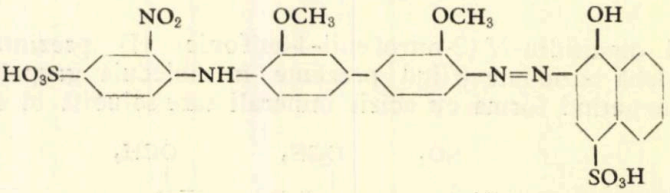
Acid dianisidin-*N* (2-nitrofenil-4-sulfonic) azo — acid Schaeffer

(V)



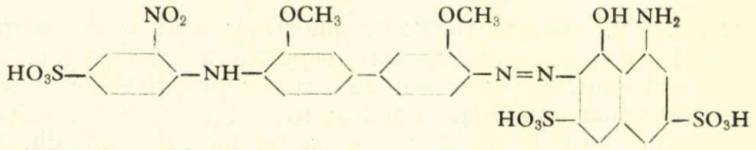
Acid dianisidin-*N* (2-nitrofenil-4-sulfonic) azo — acid Gama

(VI)



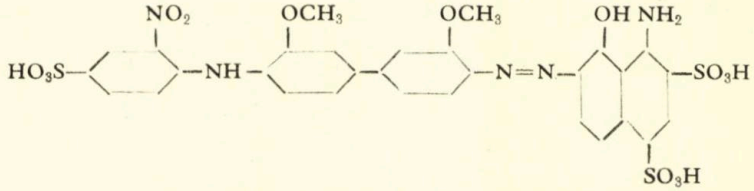
Acid dianisidin-*N* (2-nitrofenil-4-sulfonic) azo — acid Neville-Winther

(VII)



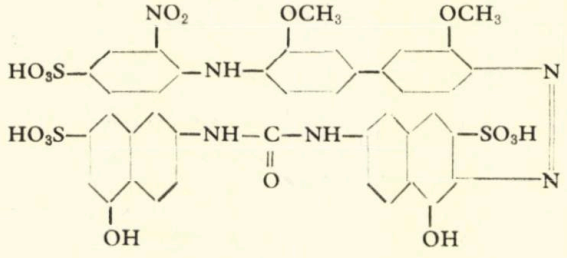
Acid dianisidin-*N* (2-nitrofenil-4-sulfonic) azo — acid *H*

(VIII)



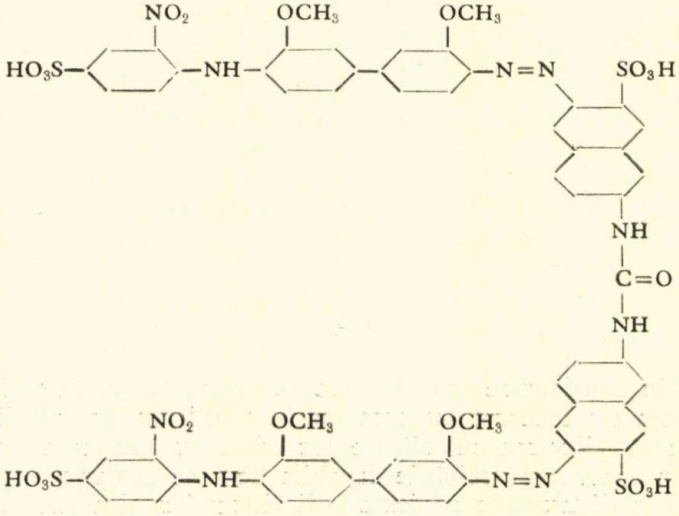
Acid dianisidin-*N* (2-nitrofenil-4-sulfonic) azo — acid Chicago *SS*

(IX)



Acid dianisidin-*N* (2-nitrofenil-4-sulfonic) azo — acid Carbonil I

(X)



Acid dianisidin-*N* (2-nitrofenil-4-sulfonic) azo — acid Carbonil I — azo acid dianisidin-*N* (2-nitrofenil-4-sulfonic)

Coloranții obținuți sînt substanțe amorfe, la cald se descompun fără a se topi. S-au purificat prin dispersări repetate în apă fierbinte și precipitări cu acid clorhidric. Cu scopul de a studia proprietățile coloranților obținuți s-au efectuat vopsiri pe bumbac, lînă și fibre poliamidice (relon) și s-au determinat curbele de absorbție cu fotometrul Pulfrich. Culorile probelor vopsite sînt redate cu multă aproximație prin dreptunghiurile haşurate din fig. 1.

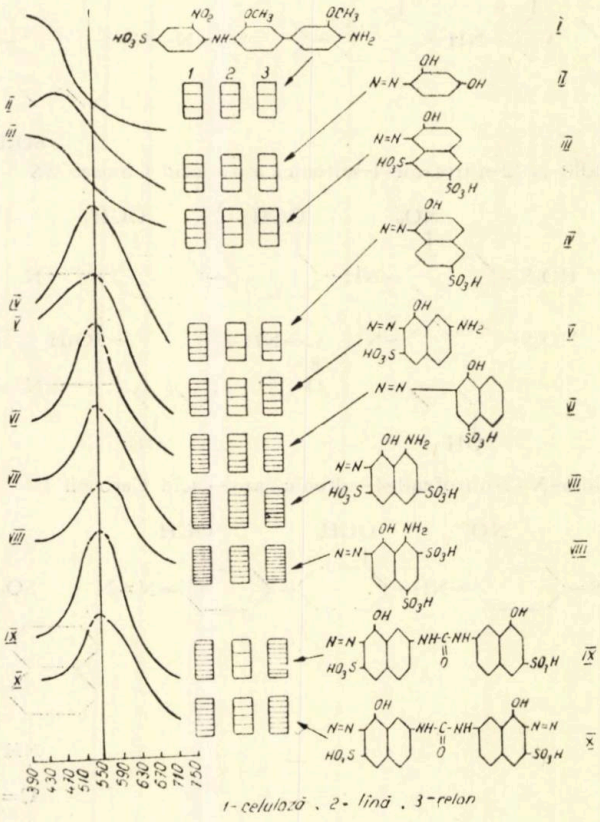


Fig. 1

Luînd în considerare teoriile care se referă la relațiile dintre structură și culoare s-a încercat punerea lor în acord cu coloranții obținuți.

Se știe că adîncirea culorii are loc odată cu creșterea energiei de conjugare, în acest scop unitățile capabile de a se conjuga trebuind să fie coplanare. Prin distrugerea coplanarității sistemelor din moleculă, norul electronic se divide în planuri separate, cu energii de conjugare mai mici, echivalînd cu distanțarea nivelelor energetice, cu efect hipsocrom.

Acidul dianisidin-*N* (2-nitrofenil-4-sulfonic) (I) avînd grupa cromoforă — NO_2, se comportă el însuşi ca un colorant care absoarbe la limita violetă a spectrului ($\lambda_{max} = 428$ mμ).

Modificările batocrome şi hipsocrome la coloranţii următori vor fi determinate succesiv de către componentele de cuplare care participă la formarea colorantului.

Colorantul (II), obţinut cu resorcină, indică o creştere a energiei de conjugare, deoarece comparativ cu produsul (I) participă la conjugare atît grupa azo cît şi nucleul benzenic al resorcinei, a cărui coplanaritate nu pare a fi influenţată de prezenţa substituenţilor din poziţiile *o*, *o'*-faţă de grupa azo ($\lambda_{max} = 496$ mμ).

Colorantul (III) este obţinut prin cuplare cu sare *G* în poziţia α. De regulă prin înlocuirea unui nucleu aromatic simplu cu un nucleu aromatic policiclic are loc adîncirea culorii. Contrar acestei reguli, la colorantul (III) se constată o deschidere a culorii. Anomalia este consecinţa faptului că nucleul naftalenic al acidului *G* nu poate fi coplanar cu nucleul benzidinic datorită împiedicării sterice produsă de grupa sulfonică din poziţia *8* a acidului *G* ($\lambda_{max} = 428$ mμ). Distrugerea coplanarităţii se reflectă şi în substantivitatea coborîtă faţă de bumbac. Prin înlăturarea grupei sulfonice din poziţia *8* trebuie să apară efectul batocrom.

Colorantul (IV), obţinut prin cuplarea cu acid Schaeffer, la care poziţia *8* este liberă, permite menţinerea coplanarităţii nucleului naftalenic avînd ca efect o pronunţată deplasare batocromă ($\lambda_{max} = 333$ mμ).

Colorantul (V) este obţinut cu acidul Gama cuplat în poziţia β. Deşi distanţa β — β este mai mare decît distanţa β — α, totuşi grupa sulfonică din poziţia β, avînd volumul ridicat, are un efect steric puternic asupra coplanarităţii, menţinînd absorbţia în domeniul lungimilor de undă scurte.

Absenţa grupei sulfonice din poziţia β trebuie să aibă ca efect o deplasare batocromă.

Colorantul (VI), obţinut cu acidul Neville-Winther, confirmă cele de mai sus. Prin absenţa grupei sulfonice din poziţia β a acidului Neville-Winther, se restabileşte coplanaritatea moleculei, cu efect batocrom ($\lambda_{max} = 550$ mμ), confirmată şi de vopsirile pe bumbac în culoare violetă

Colorantul (VII), obţinut cu acidul *H*, deşi posedă o grupă aminică ai cărei electroni participă la conjugare, încă nu posedă o nuanţă mai adîncă, la care ne-am aştepta, din cauza aceluiaşi efect de împiedicare sterică a coplanarităţii de către grupa sulfonică. Îndepărtarea acestei grupe va avea un efect batocrom.

Colorantul (VIII) este obţinut cu acidul Chicago *SS* cuplat în poziţia β, vecină cu grupa hidroxilică. Ambele grupe sulfonice se află în al doilea nucleu, mai îndepărtat de grupa cromoforă azo. Restabilirea coplanarităţii este în acord cu poziţia maximului de absorbţie ($\lambda_{max} = 575$ mμ) Vopsirile obţinute sînt albastre.

Colorantul (IX) s-a obţinut prin cuplarea diazocomponentei (I) cu. acidul Carbonil I în raport molar de 1 : 1, iar colorantul (X) prin cupla-

rea diazocomponentei (I) cu acidul Carbonil I în raport molar de 1 : 2. În ambii coloranți conjugarea sistemelor este întreruptă de grupa de izolare ureică și de efectul steric al grupelor sulfonice vecine cu grupa azo, fără a se observa o închidere remarcabilă a culorii.

Vopsirile obținute pe bumbac, lînă și fibre poliamidice oferă unele aspecte, care pot fi interpretate.

Vopsirile pe bumbac sînt în toate cazurile mai adînci și reflectă în oarecare măsură considerațiile teoretice urmărite mai sus.

Fixarea colorantului pe bumbac prin legături de hidrogen este posibilă fără distrugerea coplanarității; forma alungită a moleculei colorantului se poate orienta în paralel cu fibra celulozică, păstrînd culoarea care rezultă din structură.

Vopsirile obținute pe lînă ca și pe fibrele poliamidice se realizează prin legături chimice cu formare de sare între grupele sulfonice ale colorantului și grupele bazice ale fibrelor, colorantul și fibra căpătînd o structură comună.

Luînd ca bază concepțile lui Pauling și Corey [7], precum și cele ale lui H. Vasiliu [8], după care catena polipeptidică din lînă și alte proteine se desfășoară după un model elicoidal, putem admite că și molecula colorantului, prin legături puternic cu fibra, poate urma forma catenei polipeptidice, distrugîndu-și coplanaritatea și provocînd un efect hipsocrom. Polaritatea colorantului este micșorată și prin blocarea grupelor auxocrome, care intră în reacție cu fibra.

La fibrele poliamidice obținute prin alungirea firului pînă la solidificare, macromoleculele filiforme au o așezare paralelă, încît legăturile chimice dintre fibră și colorant nu provoacă torsiuni de natură a modifica sensibil coplanaritatea, fapt care se reflectă, în cele mai multe cazuri, printr-o păstrare a nuanței colorantului.

2. Partea experimentală

a) *Diazoderivatul acidului dianisidin-N (2-nitrofenil-4-sulfonic)* [1]).

Se prepară după cum urmează: 2 g acid dianisidin-*N* (2-nitrofenil-4-sulfonic) se dizolvă într-o soluție de carbonat de sodiu în apă pînă cînd pH-ul soluției devine alcalin pe hîrtie de indicator universal. Se încălzește; după răcire la 0° ... 5° C se adaugă azotit de sodiu 0,3 g și apoi, în picături, acid clorhidric $d = 1{,}19$ pînă la reacție acidă (indicator universal). Agitarea continuă 2 ore.

b) *Acidul dianisidin-N (2-nitrofenil-4-sulfonic) — azo resorcină*

Diazoderivatul (*D*) se adaugă sub agitare peste o soluție alcalină formată din 0,50 g resorcină. Se continuă agitarea încă o oră la temperatura camerei. Precipitarea se face prin acidulare cu acid clorhidric.

Analize:

$C_{26}H_{22}O_9N_4S_1$	N%
Calculat	9,89
Găsit	10,42

[1]) Numit în această Notă diazoderivatul (*D*).

c) *Acidul dianisidin-N (2-nitrofenil-4-sulfonic) — azo acid G*

Diazoderivatul (*D*) se introduce sub agitare peste o soluție alcalină formată din 1,68 g sare *G*. Se continuă agitarea la temperatura camerei timp de o oră. Se precipită prin acidulare cu acid clorhidric.

Analize:

$C_{30}H_{34}O_{14}N_4S_3$	N%
Calculat	7,36
Găsit	7,24

d) *Acidul dianisidin-N (2-nitrofenil-4-sulfonic) — azo acid Schaeffer*

Diazoderivatul (*D*) se introduce sub agitare peste soluția alcalină formată din 1 g acid Schaeffer. În tot timpul cuplării pH-ul rămîne alcalin. Se agită 1 ... 2 ore la temperatura camerei. Se precipită prin acidulare cu acid clorhidric.

Analize:

$C_{30}H_{24}O_{11}N_4S_2$	N%
Calculat	8,48
Găsit	8,42

e) *Acidul dianisidin-N (2-nitrofenil-4-sulfonic) — azo acid Gama*

Diazoderivatul (*D*) se introduce sub agitare peste soluția alcalină formată din 1,5 g acid Gama. Se continuă agitarea la temperatura camerei încă o oră. Cuplarea are loc în mediu bazic. Se precipită prin acidulare cu acid clorhidric.

Analize:

$C_{30}H_{25}O_{11}N_5S_2$	N%
Calculat	10,06
Găsit	9,55

f) *Acidul dianisidin-N (2-nitrofenil-4-sulfonic) — azo acid Neville-Winther*

Diazoderivatul (*D*) se introduce sub agitare peste o soluție alcalină formată din 1,91 g acid Neville-Winther. Cuplarea se realizează în mediu bazic. Se agită încă o oră la temperatura camerei. Se filtrează colorantul precipitat prin acidulare.

Analize:

$C_{30}H_{24}O_{11}N_4S_2$	N%
Calculat	8,48
Găsit	8,14

g) *Acidul dianisidin-N (2-nitrofenil-4-sulfonic) — azo acid H*

Diazoderivatul (*D*) se introduce sub agitare peste o soluție alcalină formată din 2 g acid *H*. Se continuă agitarea încă o oră la temperatura camerei. Cuplarea are loc în mediu alcalin. Se precipită prin acidulare cu acid clorhidric.

Analize:

$C_{30}H_{25}O_{14}N_5S_3$	N%
Calculat	9,26
Găsit	9,04

h) *Acidul dianisidin-N (2-nitrofenil-4-sulfonic) — azo acid Chicago SS*

Diazoderivatul (*D*) format prin diazotarea a 3 g acid dianisidin-*N* (2-nitrofenil-4-sulfonic) cu 0,46 g azotit de sodiu se introduce sub agitare peste o soluție alcalină formată din 2,2 g acid Chicago *SS*. Se continuă agitarea la temperatura camerei încă o oră. Cuplarea se realizează în mediu alcalin. Se precipită prin acidulare cu acid clorhidric.

Analize:

$C_{30}H_{25}O_{14}N_5S_3$	N%
Calculat	9,02
Găsit	9,11

i) *Acidul dianisidin-N (2-nitrofenil-4-sulfonic) — azo acid Carbonil I*

Diazoderivatul (*D*) format prin diazotarea a 1,6 g acid dianisidin-*N* (2-nitrofenil-4-sulfonic) cu 0,25 g azotit de sodiu se introduce sub agitare peste o soluţie alcalină formată din 2 g acid Carbonil I. Cuplarea are loc în mediu alcalin. Se continuă agitarea la temperatura camerei mai mult de 4 ore.

Analize:

$C_{41}H_{32}O_{16}N_6S_3$	N%
Calculat	8,92
Găsit	8,86

j) *Acidul dianisidin-N (2-nitrofenil-4-sulfonic) — azo acid Carbonil I — azo acid dianisidin-N (2-nitrofenil-4-sulfonic)*

Diazoderivatul (*D*) s-a preparat prin diazotarea a 3,5 g acid dianisidin-*N* (2-nitrofenil-4-sulfonic) cu 0,54 g azotit de sodiu în mediu acid. Reacţia de diazotare a durat 2 ore, după care s-a introdus sub agitare peste o soluţie alcalină formată din 2 g acid Carbonil I. Cuplarea are loc în mediu alcalin. S-a agitat continuu timp de 3 ore la temperatura camerei. Se precipită prin acidulare cu acid clorhidric.

Analize:

$C_{61}H_{46}O_{23}N_{10}S_4$	N%
Calculat	9,89
Găsit	9,83

4. Concluzii

1. Acidul dianisidin-*N* (2-nitrofenil-4-sulfonic) poate fi folosit drept componentă diazotabilă.

2. Diazoderivatul obţinut a fost cuplat în mediu alcalin cu resorcină, sare *G*, acid Schaeffer, acid Gama, acid Neville-Winther, acid Chicago *SS* şi acid Carbonil I, obţinîndu-se coloranţii (II)...(X).

3. Comparînd coloranţii obţinuţi, în funcţie de modificările care apar în componentele de cuplare, s-au tras concluziile corespunzătoare asupra relaţiilor care există între structură şi culoare, aplicînd teoriile fizice ale absorbţiei.

4. În baza aceloraşi consideraţii teoretice se furnizează o explicaţie raţională a modificărilor culorii colorantului, în funcţie de natura materialului care se vopseşte.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de industrii organice

BIBLIOGRAFIE

1. Lupuşor Gh., Dumitrescu Sv., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1956, **II** (**VI**), *1—2*, p. 131
2. Lupuşor Gh., Ifrim S., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1961, **VII** (**XI**), *1—2*, p. 125.
3. Lupuşor Gh., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1958, **IV** (**VIII**), *3—4*, p. 194.

4. Lupuşor Gh., Lixandru T., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1960, **VI** (**X**), *1—2*, p. 171.
5. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, **IX** (**XIII**), *3—4*, p. 143.
6. Коган И. М., *Химия красителей*. М., 1956, стр. 24.
7. Nenițescu C., *Tratat elementar de Chimie Organică*. Vol. **II**, Buc., 1958, p. 432.
8. Vasiliu H., Comunic. lab. de Chimie Agr., fac. agron., Iaşi, 1936/37, **1**, *3*.

AZOIC DYES OBTAINED FROM DIANISIDIN-*N* (2-NITROPHENIL-4-SULPHONIC) ACID COUPLED WITH DIFFERENT COUPLING COMPONENTS

(Abstract)

The dianisidin-*N* (2-nitrophenil-4-sulphonic) acid (I) prepared by the authors was diazotized and coupled in an alkalinous medium with resorcine, *G* salt, Schaeffer acid, Gama acid, Neville-Winther acid, *H* acid, Chicago *SS* acid, Carbonil I acid, obtaining dyes (II)...(X).

The absorbtion curves have been determined by the Pulfrich Photometer and dyeing has been carried out on cotton, wool, and synthetic polyamide (Relon) fibres.

By comparing the absorbtion curves and the dyeing colour, a number of relationships are established between structure and colour.

The diazotizable component (I) itself behaves like a dye, having $\lambda_{max} = 428$ mμ.

Dye (II) as compared to dye (I) has a deeper shade ($\lambda_{max} = 496$ mμ) because of the coplanary inclusion of the azo-group and the benzenic nucleus of resorcine.

Dye (III) obtained by coupling with a naphtalenic nucleus should have a deeper shade colour but because of the steric obstruction to coplanarity by the sulphonic group in position *8* of the *G* acid, a hypsochromic effect is observed ($\lambda_{max} = 428$ mμ).

Dye (IV) obtained with Schaeffer acid having position *8* of the naphtalenic nucleus loose, enable coplanarity to be restored followed by a bathochrome displacement of the absorbtion spectrum ($\lambda_{max} = 533$ mμ).

Dye (V) although possessing an aminic group in the naphtalenic nucleus, owing to the steric effect of the sulphonic group from β-position adjacent to the azo-group it has a lighter colour than dye (VI) obtained with the Neville-Winther acid in which coplanarity is not obstructed.

For the same reasons, dye (VIII) has a deeper shade than dye (VII).

The different shades in dyeing obtained on cotton, wool and polyamidic fibres can be interpreted as follows :

a) The deeper colours obtained on cotton show that the elongated form of the dye is orientated parallel to the cellulosic fibre without upsetting the coplanarity of the molecule.

b) The lighter or modified colours obtained on wool show that the elongated molecule of the dye is forced to be orientated according to the helicoidal shape of the polypeptidic chain to which it is linked by strong chemical bonds, destroying the coplanarity of the dye molecule, having consequently a hypsochrome effect.

c) With the polyamidic synthetic fibres the filiform macromolecules have a parallel arrangement so that by fixation the dye does not modify its coplanarity, the dyeing shades coming close to those obtained on cellulose.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 675.024.4 ; 675.024.47 ; 675.024 49

STUDII ASUPRA TĂBĂCIRII COMBINATE FORMOL-CROM-TANIN

DE

GH. ALEXA, GH. CHIRIŢĂ, ANATOLIE AGRATINA, I. BOTEZAN, AGLAIA CHIRIŢĂ şi ELISABETA BOŢI

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

Prin tăbăcirea combinată formol-crom-tanin, datorită pretăbăcirii în formol şi crom pielea este pătrunsă de substanţele tanante vegetale într-un timp mult mai scurt decît în cazul tăbăcirii vegetale, obţinîndu-se piei finite cu proprietăţi deosebit de favorabile.

Datorită formolării, creşte viteza de difuzie a taninurilor vegetale în structura pielii, iar afinitatea grupelor reactive ale colagenului faţă de taninurile vegetale scade, datorită faptului că acestea se fixează cu aceleaşi grupe cu care reacţionează şi formaldehida. Pretăbăcirea cu formaldehidă are drept efect fixarea structurii pielii gelatină în starea de umflare cu care a fost introdusă la tăbăcire, ceea ce face posibilă tăbăcirea vegetală cu soluţii mai concentrate, chiar de la început.

Tăbăcirea în crom sporeşte afinitatea pielii faţă de taninurile vegetale, intensificînd viteza de fixare şi legare ireversibilă a taninurilor cu grupele bazice ale colagenului.

La tăbăcirea combinată formol-crom-tanin, fixarea taninurilor vegetale se realizează în condiţii mai blînde decît în cazul tăbăcirii crom-tanin, dar mult mai energice decît în cazul tăbăcirii formol-tanin sau a tăbăcirii vegetale obişnuite [1]...[3].

2. Partea experimentală

Studiile de laborator, încercările în staţia pilot şi în faza industrială referitoare la procedeul de tăbăcire combinată formol-crom-tanin, au dus la rezultate foarte bune atît în ceea ce priveşte calităţile produsului finit cît şi a uşurinţei de conducere a procesului tehnologic.

Încercările de tăbăcire în faza industrială [3] s-au efectuat la fabrica de pielărie „8 Mai", Mediaş, pe o cantitate de aproximativ 11 vagoane de piei grele de bovine.

Procesul tehnologic aplicat în vederea obţinerii pieilor pentru talpă, în linii generale, a fost următorul:

Pieile gelatină, complet decalcificate, s-au pretăbăcit în formol, prin suspendare în bazine, cu 1% formol de 36%, flota de 450%, pH = 7,2...7,5, timp de 24 ore. După o spălare cu apă la butoi s-au piclat cu 1,8% acid clorhidric comercial, 8% clorură de sodiu şi 100% apă, timp de 2 ore, după care s-au tăbăcit în crom obişnuit cu 0,8% Cr_2O_3 raportat la greutatea pielii gelatină. Apoi pieile tăbăcite în crom, după o fixare pe boc de 24 ore şi o spălare intensă la butoi cu apă curgătoare, au fost supuse tăbăcirii vegetale, întîi la bazine şi apoi la butoi.

Tăbăcirea vegetală la bazine s-a efectuat într-un şir de 6 bazine, în fiecare bazin pielea rămînînd o singură zi. Pentru grăbirea difuziei taninului în piele, soluţiile tanante s-au încălzit progresiv de la 20° la 30°C. Amestecul de extracte tanante folosit la tăbăcire a fost următorul: 50% extract de stejar indigen, 10% extract de coajă de molid şi stejar—Orăştie, 5% extract de quebracho, 20% extract de stejar—Jugoslavia şi 15% extract de castan. S-a început tăbăcirea cu soluţii de 2° Bé şi s-a terminat cu soluţii de 7° Bé. După tăbăcirea la bazine pieile au fost pătrunse în proporţie de 80...90% din grosimea lor în partea de la crupon. Tăbăcirea la butoi s-a efectuat cu acelaşi amestec de extracte tanante. Pieile tăbăcite la bazine s-au introdus în butoaie cu 200% flotă şi s-au agitat 36...48 ore. Concentraţia iniţială a soluţiilor a fost de 8° Bé şi final de 12° Bé. Ridicarea concentraţiei soluţiilor la butoi s-a realizat prin adăugarea de extracte solide din 4 în 4 ore, astfel ca după 30...36 de ore să se realizeze concentraţia maximă.

Retanarea pieilor pentru talpă s-a realizat cu 5% extract de valonee. Finisarea a decurs normal.

Analiza chimică şi fizico-mecanică a pieilor finite (tabelele 1 şi 2) arată că s-au obţinut piei cu caracteristici superioare normelor prevăzute în standarde. Produsele finite au o culoare deschisă şi uniformă, fiind mai flexibile decît pieile de talpă tăbăcite vegetal. Randamentele în produs finit, raportate la greutatea pielii gelatină, sînt mult superioare celor obţinute în urma tăbăcirii vegetale.

În urma experienţelor efectuate pe scară semiindustrială şi industrială, cu scopul de a studia tăbăcirea combinată formol-crom-tanin [2], [3], s-a constatat că procesul tehnologic stabilit se poate adapta cu uşurinţă la utilajul existent în fabricile de pielărie. Ciclul de fabricaţie în vederea obţinerii pieilor pentru talpă este de 30 zile. Se pot utiliza la tăbăcirea vegetală extracte indigene într-o proporţie ridicată fără să se diminueze calitatea produsului finit.

Cercetînd în continuare intensificarea procesului de tăbăcire a pieilor pentru talpă flexibilă prin procedeul de tăbăcire combinată formol-crom-tanin, s-a urmărit eliminarea operaţiei de piclaj, care îngreuiază procesul tehnologic şi influenţează negativ proprietăţile fizico-mecanice ale pieilor, prin aplicarea unei pretăbăciri în formol la pH acid, iar apoi s-a experimentat tăbăcirea vegetală cu soluţii concentrate, numai la butoi, variind temperatura soluţiilor tanante.

Experimentările s-au efectuat în faza semiindustrială pe loturi de circa 60 kg crupoane rezultate de la piei indigene categoria 26...30 kg. Pentru a avea la dispoziţie probe de referinţă, fiecare crupon, din toate încercările, a fost tăiat în prealabil în două jumătăţi pe linia şirii spinării; o jumătate a fost tăbăcită vegetal la bazine şi la butoaie, respectîndu-se procesul tehnologic al fabricii „8 Mai", Mediaş.

Tabelul 1

Analiza chimică

Sortimentul	Umiditate %	Cenuşă %	Oxid de crom %	Substanţe grase %	Substanţe solub. tot. %	Substanţă dermică %	Tanin combinat %	Indice de tăbăcire %
Crupon talpă	14,79	2,99	0,87	2,68	16,23	45,62	30,60	80,88
Crupon talpă	12,46	2,15	0,84	3,39	15,37	41,27	34,50	98,85
Crupon talpă	13,80	3,36	1,08	2,56	19,20	46,20	26,01	67,00
Poale talpă	11,60	2,68	0,65	5,31	15,50	44,80	30,97	82,50
Poale CR	12,85	3,46	0,74	6,55	16,30	42,70	30,68	88,50
Gît CR	13,60	2,92	0,92	4,22	7,45	41,90	39,16	114,00

Tabelul 2

Analiza fizico-mecanică

Sortimentul	Densitate g/cm³	Rezistenţă la tracţiune kg/mm²	Alungire la rupere %	Absorbţie faţă de apă		Randament %
				după 2 ore %	după 24 ore %	
Crupon talpă	0,90	2,36	12	16,06	32,20	72,00
Crupon talpă	1,08	2,64	12	18,72	37,89	72,18
Crupon talpă	1,11	2,05	11	15,82	32,92	72,40
Poale talpă	0,97	2,90	15	—	—	51,92
Poale CR	1,04	2,68	13	—	—	50,99
Gît CR	0,98	2,25	19	—	—	52,88

Procesul tehnologic al metodei de tăbăcire combinată formol-crom-tanin, aplicat la încercările efectuate, a fost următorul:

Pieile gelatină, cenuşărite cu 1,8% sulfură de sodiu şi 14% var, timp de 2 zile, la bazine, s-au decalcificat complet cu 1,2% sulfat de amoniu şi 0,2% acid clorhidric. Crupoanele astfel decalcificate au fost tăbăcite în formol la pH acid [4], [5], la butoi, cu o flotă de 200%, cu 1% formol de 36%. Valoarea iniţială a pH-ului flotei a fost de 6,5; apoi după 90 minute de agitare s-a adăugat 1,2% acid sulfuric diluat în 4 rate, din oră în oră. Timpul total de agitare a fost de 6 ore. Pieile au rămas în butoi peste noapte. După pretăbăcirea în formol, pH-ul pieilor în secţiune a atins valoarea 4. Pieile au fost apoi tăbăcite în crom, în continuare, în flota de formolare, cu 0,8% oxid de crom. Bazicitatea soluţiilor a fost de 33,6° Schorlemmer. Durata agitării pieilor a fost de 7 ore, după care au rămas în soluţie peste noapte. A doua zi dimineaţa s-a ridicat bazicitatea sării de crom, prin adăugarea unei cantităţi de 0,8% bicromat de sodiu, în două rate, pieile agitîndu-se timp de 3 ore. Controlul tăbăcirii a arătat că pătrunderea cromului în secţiunea pieilor este uniformă, pieile au pH = 4,4, o faţă fină şi fără creţuri. Flota este complet epuizată în crom.

În scopul neutralizării, a fixării feţei şi a structurii pielii în general, pieile cromate au fost tratate în continuare cu 6% Romatan CF cu un conţinut de 20% tanin pur, adus la pH = 6,4 cu ajutorul unei soluţii de amoniac. Romatanul CF a fost adăugat în 2 rate, la interval de 30 min. Durata agitării a fost de 4 ore, după care pieile aveau pH = 4,5...4,6.

După tratarea cu Romatan CF pieile s-au stors la maşina de stors, în scopul deshidratării lor cît mai avansate. S-a reuşit ca după presare pieile să aibă o greutate cu 25% mai mică faţă de greutatea pielii gelatină. Tăbăcirea vegetală s-a efectuat în butoi, fără flotă, cu 24% tanin pur, dozat sub formă de extract de 26° Bé şi 12% tanin pur, dozat sub formă de extract praf. Prima porţiune de tanin a fost preparată după următorul amestec de extracte: 12% extract de stejar, 16% extract de mimoza, 15% extract de quebracho, 10% extract de valonee, 8% extract de molid, 8% Romatan B.C.F., 6% Romatan B.F.U. şi 10% Romatan D.D.B. A doua porţiune de tanin a avut compoziţia: 40% extract de valonee, 45% extract de stejar şi 15% extract de molid.

Pieile s-au agitat cu prima porţiune de tanin, sub formă de soluţie de 26° Bé, timp de 6 ore, după care pătrunderea era în medie de 30% din grosimea lor. S-a adăugat restul de extract praf, s-a agitat încă 6 ore, realizîndu-se o pătrundere de 60...70%. Tăbăcirea a continuat pînă la pătrunderea completă, prin agitări şi repaosuri succesive, timp de 3 zile, din care pieile au fost agitate 28 ore. Retanarea s-a efectuat cu 4% extract de valonee. Toate operaţiile de finisare au decurs normal.

a) *Influenţa pH-ului la tăbăcirea cu formaldehidă*

În cazul tăbăcirii în formol la pH slab alcalin, în tăbăcirea combinată formol-crom-tanin, este necesar ca pieile să fie în prealabil piclate. Operaţia de piclaj complică procesul tehnologic şi contribuie la relaxarea ţesutului dermic, ceea ce reprezintă un factor defavorabil pentru pieile de talpă.

Pe baza unor lucrări anterioare [4], [5] s-a dovedit posibilitatea tăbăcirii în formol la pH acid, cu aceleaşi rezultate ca şi în cazul tăbăcirii la pH slab alcalin.

Pentru a se studia posibilitatea eliminării piclajului s-au efectuat trei încercări de tăbăcire combinată formol-crom-tanin, în fază semiindustrială, pe loturi de circa 60 kg de jumătăţi de crupoane din piei de bovine de 26...30 kg, la care s-a aplicat procesul tehnologic menţionat mai sus, cu următoarele deosebiri:

Proba *1* s-a pretăbăcit cu formol la pH = 7,2...7,5 şi apoi s-a piclat cu acid clorhidric şi clorură de sodiu, după care a fost tăbăcită cu crom.

Proba *2* s-a pretăbăcit în formol la pH acid şi a urmat întocmai procesul tehnologic menţionat mai sus.

Tabelul 3

Influența modului de formolare a pielilor (analiza chimică)

Proba	Umiditate	Cenușă	Cr_2O_3	Substanțe solubile			Substanțe grase	Substanță dermică	Tanin combinat	Indice de tăbăcire
				totale	minerale	organice				
	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%
1	0	3,57	0,77	13,08	2,50	10,58	1,39	51,31	32,97	64,25
2	0	3,40	1,06	16,17	3,32	12,85	1,56	47,90	33,68	70,30
3	0	2,73	1,26	11,76	2,22	9,57	0,80	50,93	35,86	70,41
Probele martor										
1	0	3,05	—	18,15	2,17	15,98	2,35	46,18	32,78	70,97
2	0	3,76	—	18,71	2,39	16,34	2,03	45,13	32,74	72,54
3	0	3,62	—	16,24	2,19	14,05	1,31	47,79	33,23	69,95

Tabelul 4

Influența modului de formolare a pielilor (analiza fizico-chimică)

Proba	Grosime	Alungire la crăparea feții	Alungire la rupere	Rezistență la crăparea feții	Rezistență la rupere	Absorbție față de apă	
						după 2 ore	după 24 ore
	mm	%	%	kgf/mm²	kgf/mm²	%	%
1	4,75	13,70	13,70	2,52	2,52	34,10	42,32
2	4,39	10,00	10,00	2,73	2,73	37,08	42,81
3	4,38	14,20	15,20	2,31	2,31	33,69	41,07
Probele martor							
1	4,33	15,20	15,20	3,09	3,09	20,32	29,93
2	3,84	10,30	10,30	3,17	3,17	24,41	30,46
3	4,72	13,80	13,80	2,93	2,93	30,23	30,54

Proba *3* a fost supusă după decalcificare unei piclări cu acid clorhidric şi clorură de sodiu, astfel ca pieile să aibă în secţiune pH = 4, după care au fost pretăbăcite cu formol la pH = 4.

Toate cele trei probe au fost tăbăcite vegetal la temperatura de 45°C.

Perechile jumătăţilor de crupoane din cele trei probe au fost tăbăcite vegetal la bazine şi butoaie, după procedeul normal al fabricii „8 Mai", Mediaş.

În urma analizei chimice şi fizico-mecanice (v. tabelele 3 şi 4) a probelor de piele de talpă, rezultă că nu sînt de semnalat deosebiri importante între rezultate. Proba *2*, care a fost pretăbăcită în formol la pH acid, fără piclaj, prezintă cele mai bune rezultate, atît chimice cît şi fizico-mecanice, datorită probabil unei formolări mai moderate, în special în straturile superficiale ale pielii şi care permite o legare mai intensă de taninurile vegetale. Rezultă deci că printr-o pretăbăcire în formol la pH acid, astfel încît pH-ul pieilor formolate să fie cît mai apropiat de cel al soluţiilor bazice de crom cu care urmează ca pieile să fie tăbăcite, operaţia de piclare propriu-zisă nu-şi mai are rostul.

b) *Influenţa temperaturii la tăbăcirea vegetală*

În vederea accelerării difuziei substanţelor tanante vegetale în interiorul pielii s-a urmărit influenţa exercitată de temperatură la tăbăcire, cunoscut fiind faptul că odată cu creşterea temperaturii se măreşte polidispersitatea substanţelor tanante în soluţii şi afinitatea lor de a reacţiona cu grupele reactive ale colagenului.

Întrucît pielea formolată şi cromată, în condiţii experimentale, are o temperatură de contracţie de peste 80°C, s-a variat temperatura soluţiilor de tăbăcire de la 20°C la 45°C fără nici un pericol de degradare.

În vederea studiului influenţei temperaturii s-au efectuat cinci încercări de tăbăcire combinată formol-crom-tanin, în faza semiindustrială, pe loturi de circa 60 kg jumătăţi de crupoane din piei de bovine de 26...30 kg, la care s-a aplicat procesul tehnologic amintit mai sus, cu deosebirile menţionate în tabelul 5.

Tabelul 5

Temperatura şi durata de tăbăcire

Proba	Temperatura de tăbăcire vegetală °C	Durata de tăbăcire vegetală	
		Durata totală ore	Durata de agitare ore
1	20	76	28
2	25	76	27
3	30	76	25
4	40	48	15
5	45	48	15

Tăbăcirea vegetală s-a considerat terminată cînd pieile au fost pătrunse în toată secţiunea lor.

Perechile jumătăţilor de crupoane din cele cinci probe au fost tăbăcite vegetal la bazine şi butoaie, după procedeul normal de tăbăcirii al fabricii „8 Mai", Mediaş.

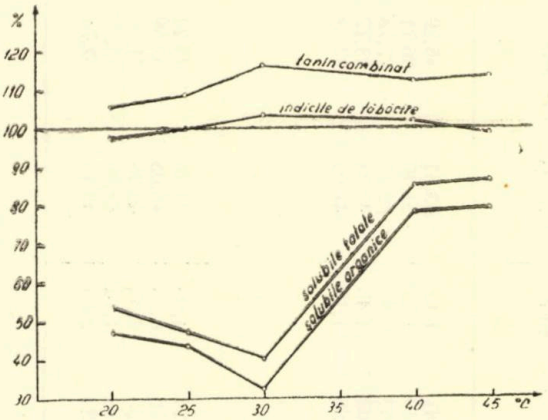


Fig. 1. — Influenţa temperaturii la tăbăcirea vegetală (analiza chimică).

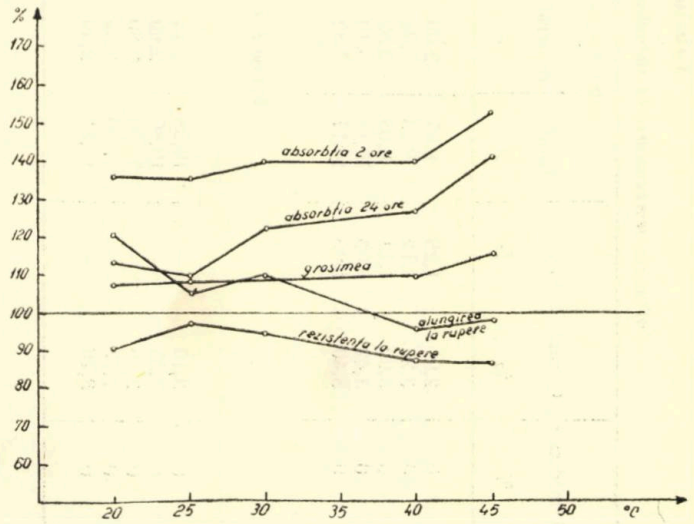


Fig. 2. — Influenţa temperaturii la tăbăcirea vegetală (analiză fizico-mecanică).

În general probele de piele tăbăcite formol-crom-tanin au o faţă fină, o culoare deschisă şi uniformă, un ţesut compact, des, şi un stand bun.

Probele de piele tăbăcite au fost analizate chimic şi fizico-mecanic, iar rezultatele sînt date în tabelele 6 şi 7.

Tabelul 6

Influența temperaturii la tăbăcirea vegetală (analiza chimică)

Proba	Temperatura la tăbăcirea vegetală °C	Umiditate %	Cenușă %	Cr_2O_3 %	Substanțe solubile			Substanțe grase %	Substanță dermică %	Tanin combinat %	Indice de tăbăcire %
					totale %	minerale %	organice %				
1	20	0	2,91	1,25	8,87	2,00	6,87	1,12	53,81	35,29	63,72
2	25	0	3,28	1,12	9,43	1,94	7,49	1,12	51,40	36,71	75,31
3	30	0	3,00	1,11	8,03	2,52	5,62	0,83	52,72	37,78	71,66
4	40	0	3,42	1,09	15,13	3,10	12,03	1,45	49,38	33,72	68,29
5	45	0	3,40	1,06	16,17	3,32	12,85	11,77	47,90	33,68	70,30
					Probele martor						
1	20	0	3,16	—	16,38	2,14	14,24	1,90	47,46	33,24	69,82
2	20	0	2,35	—	19,86	2,69	17,16	0,85	46,05	32,59	77,78
3	20	0	2,46	—	20,06	2,80	17,26	2,04	46,28	31,96	69,06
4	20	0	1,77	—	17,80	2,42	15,38	1,14	48,06	36,65	76,25
5	20	0	3,76	—	18,71	2,39	16,34	2,03	45,13	32,74	72,54

Tabelul 7

Influenţa temperaturii la tăbăcirea vegetală (analiza fizico-mecanică)

Proba	Temperatura de tăbăcire vegetală °C	Grosimea mm	Alungire la crăparea feţei %	Alungire la rupere %	Rezistenţă la crăparea feţei kgf/mm²	Rezistenţă la rupere kgf/mm²	Absorbţie faţă de apă după 2 ore %	Absorbţie faţă de apă după 24 ore %
1	20	5,24	19,0	19,0	2,61	2,61	50,93	52,53
2	25	5,06	17,00	17,00	2,26	2,26	48,73	51,44
3	30	4,65	20,00	20,00	2,63	2,63	49,71	52,35
4	40	4,76	14,33	14,33	2,35	2,35	42,92	47,80
5	45	4,39	10,00	10,00	2,73	2,73	37,08	42,81
Probele martor								
1	20	4,91	16,00	16,00	2,89	2,89	37,60	46,61
2	20	4,68	16,20	16,20	2,34	2,34	36,22	47,34
3	20	4,23	18,33	18,33	2,79	2,79	35,73	42,94
4	20	4,36	15,00	15,00	2,71	2,71	30,92	37,82
5	20	3,84	10,30	10,30	3,17	3,17	24,41	30,46

BUDAPESTI MUSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Tabelul 8

Analiza chimică

Proba	Temperatură de tăbăcire vegetală °C	Solubile totale	Solubile organice	Tanin combinat	Indicele de tăbăcire
1	20	53,35	47,2	105,4	97,3
2	25	47,30	43,40	108,5	99,90
3	30	40,00	32,10	116,50	103,80
4	40	84,80	78,00	102,30	101,40
5	45	86,6	79,00	103,6	98,20

Tabelul 9

Analiza fizico-mecanică

Proba	Temperatura de tăbăcire vegetală °C	Grosime	Alungire la rupere	Rezistență la rupere	Absorbție față de apă	
					după 2 ore	după 24 ore
1	20	106,7	119,9	90,3	135,4	112,7
2	25	108,1	104,9	96,5	134,5	108,8
3	30	109,9	109,1	94,2	139,1	121,8
4	40	109,1	95,5	86,6	138,8	126,3
5	45	114,3	97,00	86,10	151,90	140,50

Dacă se consideră 100 fiecare rezultat al analizei chimice şi fizico-mecanice a probelor martor (tăbăcite vegetal), se obţin pentru pieile tăbăcite formol-crom-tanin rezultatele trecute în tabelele 8 şi 9, cu ajutorul cărora ne putem face o imagine exactă a variaţiei caracteristicilor probelor tăbăcite combinat formol-crom-tanin datorită influenţei temperaturii la tăbăcirea vegetală.

Rezultatele analizelor chimice şi fizico-mecanice arată că toate probele de talpă tăbăcite formol-crom-tanin au caracteristici ce se încadrează în normele prevăzute în standarde.

Datorită creşterii temperaturii la tăbăcirea vegetală, în cadrul tăbăcirii combinate formol-crom-tanin, creşte cantitatea de tanin combinat, în comparaţie cu acelaşi indice obţinut la analiza chimică a probelor de piele tăbăcite numai vegetal. Cu creşterea temperaturii se măreşte procentul de solubile totale, care continuă să fie mai mic totuşi decît cel al solubilelor totale de la probele martor.

Analiza fizico-mecanică arată că rezistenţa la tracţiune, alungirea la rupere, absorbţia faţă de apă se înrăutăţesc la toate probele, în comparaţie cu probele de piele tăbăcite formol-crom-tanin la bazine şi apoi la butoi, într-o perioadă de 10...12 zile. Această situaţie este consecinţa, în primul rînd, a solicitărilor mecanice intense la care sînt supuse pieile în timpul tăbăcirii vegetale. În aceste condiţii, temperatura de tăbăcire vegetală contribuie la înrăutăţirea caracteristicilor fizico-mecanice ale pieilor.

3. Concluzii

Încercările de tăbăcire combinată formol-crom-tanin a pieilor pentru talpă, în care tăbăcirea vegetală decurge numai la butoi, cu soluţii concentrate, în timp de 2...3 zile, a arătat că se pot obţine piei cu caracteristici satisfăcătoare, corespunzătoare normelor prevăzute în standarde, dar care sînt inferioare celor obţinute în urma tăbăcirii combinate formol-crom-tanin la bazine şi apoi la butoi. În consecinţă nu ar fi lipsită de interes continuarea experimentărilor acestei metode de tăbăcire combinată, în care tăbăcirea vegetală să decurgă de asemenea numai la butoi, dar într-un timp mai îndelungat.

Temperatura, cum era de aşteptat, accelerează difuzia şi fixarea taninurilor vegetale în substanţa dermică.

Operaţia de piclaj precedentă tăbăcirii în crom poate fi eliminată prin aplicarea pretăbăcirii în formol la pH acid.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de tehnologia pielii,
înlocuitorilor de piele şi tananţilor

BIBLIOGRAFIE

1. Alexa Gh., Chiriţă Gh., Bul. Inst. polit., Iaşi, 1957, **III** (**VII**), *1—2*, p. 77.
2. — St. şi cerc. şt., Chimie, Acad. R.P.R., filiala Iaşi, 1957, **8**, 2, p. 2.

3. Alexa Gh., Chiriţă Gh., Năne scu V., Maior I., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1959, **V (IX)**, *1—2*, pp. 217—230.
4. Alexa Gh., Chiriţă Gh., Chiriţă A., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1960, **VI (X)**, *1—2*, pp. 194—202.
5. Alexa Gh., Chiriţă Gh., Hass H., Năne scu V., Năne scu G., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1960, **VI (X)**, *3—4*, pp. 169—180.

ÉTUDES CONCERNANT LA TANNAGE COMBINÉ FORMOLE-CHRÔME-TANIN

(Résumé)

On étudie une méthode extrarapide de tannage pour cuir à semelles, en appliquant le procédé combiné formol-chrôme-tanin.

La peau en tripe, complètement déchaulée, est prétanée avec 1% de formol à 36%, à pH acide, puis la peau formolée est tannée au chrôme avec 0,8% de Cr_2O_3.

Les peaux formolées et chrômées sont ensuite tannées au tanin en deux reprises dont la première avec des solutions tanniques très concentrées, en flote très réduite; dans la deuxième reprise on utilise des extraits en poudre.

La durée de tannage est de 2...3 jours, dont 24 les premières heures les peaux sont agitées au foulon.

On a étudié aussi l'influence de la température dans ce procédé, en effectuant des essais aux températures de 20...45°C.

La température accélère la diffusion du tanin et sa fixation sur la substance dermique.

D'après ce procédé on obtient du cuir à semelles dont les caractéristiques chimiques et physiques correspondent aux normes des standards en vigueur.

Explications des figures

Fig. 1. — Influence de la température au tannage végétal (analyse chimique).
Fig. 2. — Influence de la température au tannage végétal (analyse physico-mécanique).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z 675.024.49 ; 66.062

CONTRIBUŢII LA STUDIUL TĂBĂCIRII VEGETALE ÎN SOLUŢIE DE SOLVENŢI ORGANICI

DE

GH. CHIRIŢĂ, MARIA MANCIU şi ELISABETA BOŢI

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

Intensificarea procesului de tăbăcire vegetală sau cu taninuri sintetice, creşterea vitezei de difuzie a substanţelor tanante în scopul scurtării duratei de tăbăcire a pieilor, a fost şi constituie o preocupare permanentă a chimiştilor tăbăcari. În acest scop s-a folosit şi proprietatea ce o prezintă taninurile vegetale şi sintetice de a se solvi în unii solvenţi organici sau în amestecuri de solvenţi, obţinîndu-se soluţii tanante cu o viteză de difuzie sporită în pielea gelatină.

În Germania, în anul 1910, şi apoi în Anglia, în anul 1911, s-au efectuat încercări în care pieile gelatină se deshidratează în băi alcoolice, cu concentraţie crescîndă de la 50% la 90% şi apoi se supun tăbăcirii cu extracte apoase într-un timp mult mai scurt. Dacă tăbăcirea se face în soluţii alcoolice, pieile deshidratate sînt pătrunse într-un timp de 1...2 zile.

Se pot realiza tăbăciri cu substanţe tanante insolubile sau greu solubile în apă, dar care se solvă în solvenţi organici, aşa cum sînt unele taninuri sintetice, unele răşini fenolice foarte slab sulfonate, unele extracte tanante vegetale, ca extractul de quebracho care conţine părţi insolubile în apă rece şi tocmai acestea sînt foarte active la tăbăcire, cu condiţia ca ele să fie dispersate prin mijloace corespunzătoare.

A. Küntzel a constatat că novolacurile fenol-formaldehidice care se dizolvă în alcool pătrund foarte repede colagenul, iar produsele obţinute au caracter de piei tăbăcite, ajungînd la concluzia că răşinile fenolice insolubile în apă au proprietăţi tanante superioare novolacurilor sulfonate fiind practic identice celor ale tananţilor vegetali.

În practică fenomenul tăbăcirii se petrece exclusiv în soluţii apoase. Se pare că în realitate pentru tăbăcire este absolut necesară, pe lîngă un anumit caracter coloidal al soluţiei, o ionizare a pielii şi a substanţei tanante, aşa cum are loc în mediu apos [1], apa avînd capacitatea de a pune în libertate ioni de hidrogen. Dintre solvenţii organici ai substanţelor tanante vegetale şi sintetice, doar alcoolii posedă această proprietate, dar într-un grad mult mai mic. Tăbăcirea cu soluţii de taninuri vegetale în alcool metilic este întovărăşită de o oarecare absorbţie şi o legare a substanţelor tanante cu pielea [1], în timp ce tăbăcirea cu soluţii în alcool etilic absolut, alcool amilic, acetonă [1]...[3] este cu totul neînsemnată. După cercetările lui P. Chambard şi E. Mezey [4] şi cele ale lui F. Stather, R. Lauffmann şi T. B. Miau [5] pudra de piele absoarbe şi leagă mult mai puţine substanţe tanante din soluţiile obţinute cu solvenţi organici puri, decît din soluţiile apoase, indiferent de natura substanţelor tanante.

În lucrarea de față s-a studiat modul de comportare la tăbăcire a pieilor cu tananți vegetali în soluții de solvenți organici.

2. Partea experimentală

Ca solvenți organici s-au folosit alcoolul etilic și dimetilformamida, ultimul produs fiind un solvent excelent al flobafenelor [6]. Ea conține aceleași legături — CO — NH — ca și proteinele pielii și poate forma prin intermediul acestor legături punți de hidrogen cu grupele fenolice ale moleculelor de tanin. Din această cauză afinitatea taninului față de dimetilformamidă este mult mai mare decît față de apă.

În vederea experimentărilor s-au utilizat două extracte tanante: extractul de quebracho și extractul de castan, primul ca făcînd parte din grupa taninurilor pirocatehinice și al doilea din grupa taninurilor pirogalolice.

La încercările de tăbăcire efectuate s-au folosit soluții de tanin în amestecuri de apă și alcool etilic sau apă, alcool etilic și dimetilformamidă. Tăbăcirile cu soluții tanante rezultate din solvirea extractelor în alcool etilic absolut și în dimetilformamidă nu au dat rezultate satisfăcătoare în încercările preliminare, deoarece fixarea taninului în pielea gelatină este cu totul neînsemnată.

Un amestec miscibil de apă și solvent organic poate constitui, atunci cînd componentele sînt în anumite raporturi cantitative, un mediu de dispersie în care substanțele tanante se pot lega cu o anumită intensitate de grupele reactive ale colagenului. O explicație a acestui fenomen l-ar constitui faptul că mulți coloizi, care posedă în apă sarcini electrice negative, se încarcă pozitiv atunci cînd sînt dizolvați în lichide cu o constantă dielectrică mai mică (se știe că apa are constanta dielectrică cea mai mare $\varepsilon = 81$).

În prima parte a lucrării s-a urmărit solubilitatea extractelor de quebracho și castan la diferite concentrații, în amestecuri diferite de alcool etilic și apă, precum și în dimetilformamidă, iar în partea a doua a lucrării s-a studiat influența naturii solventului la tăbăcirea vegetală.

a) *Solubilitatea extractelor de quebracho și castan în diferite amestecuri de alcool etilic și apă precum și în dimetilformamidă*

S-a cercetat solubilitatea extractelor de quebracho și castan în dimetilformamidă și în următoarele amestecuri de alcool și apă: 30% alcool etilic + 70% apă, 60% alcool etilic + + 40% apă și 90% alcool etilic + 10% apă.

S-au luat în lucru cantități de extracte tanante care să corespundă la 2; 4; 8; 12; 16 și 20 g extract uscat, care s-au solvit în flacoane cotate de 100 ml cu solvenții sau amestecurile de solvenți menționați mai sus, încălziți în prealabil la 60° ... 70°C. După răcire soluțiile au fost aduse la marcă și au rămas în repaus pînă a doua zi în vederea sedimentării substanțelor nesolvite. A doua zi s-au supus evaporării, pe baie marină, în capsule de sticlă, cîte 25 ml soluție, iar reziduurile au fost uscate la etuvă, la temperatura de 105°C, pînă la greutatea constantă.

Pe baza rezultatelor obținute s-au trasat curbele din fig. 1 și fig. 2 care pun în evidență faptul că atît extractul de quebracho cît și cel de castan se solvă aproape complet în dimetilformamidă și în soluții alcoolice cu un conținut redus de alcool etilic. Pe măsura creșterii conținutului în alcool solubilitatea extractelor scade.

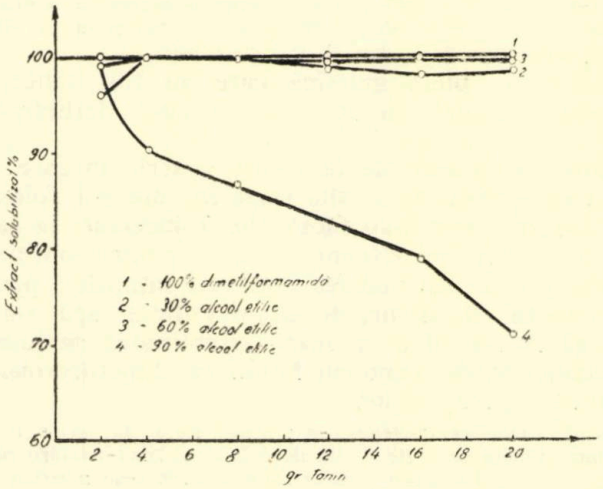


Fig. 1. — Solubilitatea extractului de quebracho în diferite amestecuri de alcool, apă și dimetilformamidă.

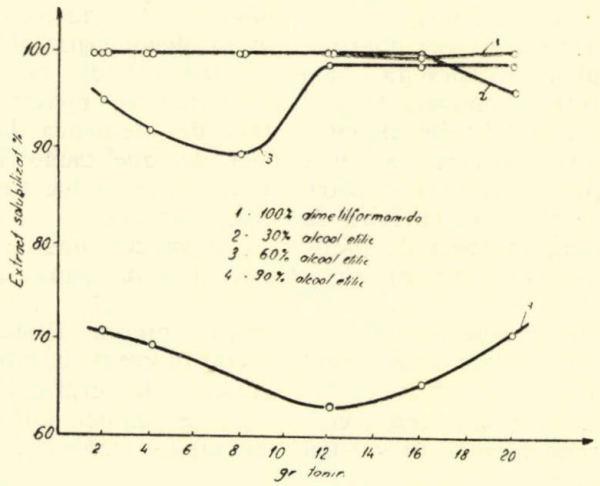


Fig. 2. — Solubilitatea extractului de castan în diferite amestecuri de alcool, apă și dimetilformamidă.

b) *Influența naturii solventului la tăbăcirea vegetală*

Solvenții organici care solvă satisfăcător taninurile vegetale sînt: alcoolul metilic, alcoolul etilic, alcoolul amilic, dimetilformamida, acetona etc. Dintre aceștia, în încercările efectuate au fost aleși alcoolul etilic și dimetilformamida, din motivele arătate mai sus.

Încercările s-au efectuat pe probe de piele gelatină crupon de bovine, categoria 30 kg bucata. Pieile, după înmuiere, s-au cenușărit la bazine, cu var și sulfură de sodiu, apoi s-au decalcificat complet cu clorură de amoniu și acid clorhidric.

Toate probele de piele gelatină care au fost tăbăcite vegetal în soluții de solvenți organici au fost în prealabil deshidratate în alcool etilic de 96%.

S-au efectuat două serii de încercări, o serie în care s-a folosit la tăbăcire extract de quebracho și altă serie în care s-a folosit extract de castan. Pentru fiecare serie s-au făcut cîte 7 încercări la care s-a variat solventul sau amestecul de solvenți utilizat pentru obținerea soluțiilor tanante (tabelele 1 și 2). În vederea obținerii soluțiilor pentru tăbăcirea a două probe (tabelul 2), alături de alcool etilic și apă s-a adăugat 20% dimetilformamidă cu scopul de a mări solubilitatea taninurilor vegetale în soluțiile alcoolice, fiind cunoscut faptul că dimetilformamida este un foarte bun solvent al taninurilor.

În toate cazurile, tăbăcirea vegetală s-a efectuat static, în bazine, cu o flotă de 300%. S-a început în soluții diluate de 1° Bé și din două în două zile s-a întărit concentrația soluției cu cîte 1° Bé, pînă la 6° Bé. La această concentrație soluțiile s-au menținut timp de 12 zile. Datorită faptului că densitatea soluțiilor a fost influențată de solvenții utilizați, adăugarea cantităților de tanin pentru creșterea concentrației soluțiilor s-a făcut în comparație cu cantitățile necesare în proba cu soluție apoasă de extract tanant.

După 21 de zile de la începerea tăbăcirii toate probele de piele au fost complet pătrunse. După cum se constată din graficele reprezentate în fig. 3, odată cu creșterea conținutului în alcool etilic al soluțiilor, atît pentru extractul de quebracho cît și pentru cel de castan, viteza de difuzie a substanțelor tanante în pielea gelatină se mărește. Dimetilformamida adăugată la soluțiile alcoolice duce de asemenea la mărirea vitezei de difuzie. La tăbăcirea cu extract de quebracho în soluție de 90% alcool etilic, pielea a fost pătrunsă în 7 zile în loc de 14 zile, cîte au fost necesare în cazul tăbăcirii în soluție apoasă.

După tăbăcire probele de piele au fost supuse unei spălări intense cu apă curgătoare, s-au gresat superficial și s-au uscat la temperatura camerei.

Pentru a se aprecia formarea volumului pieilor tăbăcite, plinătatea lor, s-a stabilit la fiecare probă randamentul în greutate, raportat la pielea gelatină, iar rezultatele obținute sînt trecute în graficele din fig. 4. Rezultă că pe măsura creșterii concentrației în alcool etilic a soluțiilor tanante scade randamentul în greutate al pieilor tăbăcite, se obțin piei finite mai puțin pline.

Analiza chimică a probelor de piele tăbăcite (tabelele 1 și 2) confirmă rezultatele prezentate în graficele din fig. 4. Taninul combinat și

Tabelul 1

Influenţa naturii solventului la tăbăcirea vegetală

Natura solventului		Umiditate	Cenuşă	Substanţe solubile totale	Substanţe solubile organice	Substanţe grase	Substanţă dermică	Tanin combinat	Indice de tăbăcire
apă %	alcool etilic %	%	%	%	%	%	%	%	%
Extract de quebracho sulfitat									
100	0	0	1,02	6,87	6,79	0,89	50,29	41,01	81,56
70	30	0	1,45	5,38	5,34	1,54	55,15	36,52	66,21
40	60	0	1,18	4,75	4,70	1,15	59,51	33,46	56,22
10	90	0	1,05	4,65	4,64	1,38	65,29	27,64	42,31
Extract de castan									
100	0	0	0,56	7,54	7,52	1,05	51,35	39,52	76,96
70	30	0	0,51	6,62	6,54	1,09	56,72	35,14	61,95
40	60	0	0,54	5,20	5,16	1,88	59,26	33,16	55,95
10	90	0	1,35	5,20	5,14	2,13	64,41	26,97	41,87

Tabelul 2

Intluenţa naturii solventului la tăbăcirea vegetală

Natura solventului			Umiditate	Cenuşă	Substanţe solubile totale	Substanţe solubile organice	Substanţe grase	Substanţă dermică	Tanin combinat	Indice de tăbăcire
apă %	alcool etilic %	dimetil-formamidă %	%	%	%	%	%	%	%	%
Extract de quebracho sulfitat										
100	0	0	0	1,02	6,87	6,79	0,89	50,29	41,01	81,54
30	50	20	0	1,10	3,82	3,77	1,09	68,85	25,19	36,58
10	70	20	0	1,09	4,25	4,21	1,00	66,61	27,09	40,66
Extract de castan										
100	0	0	0	0,56	7,54	7,52	1,05	51,33	39,54	77,03
30	50	20	0	0,58	4,90	4,89	1,76	60,61	32,16	53,06
10	70	20	0	0,39	4,65	4,58	1,27	64,30	29,46	45,81

indicele de tăbăcire scad pe măsură ce proporția de solvenți organici crește în soluțiile tanante. Această constatare este probabil și consecința faptului că solubilitatea substanțelor tanante scade odată cu creșterea concentrației în alcool a soluțiilor alcoolice.

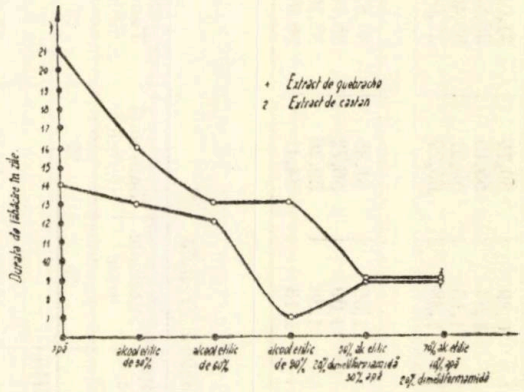


Fig. 3. — Variația vitezei de difuzie a substanțelor tanante în pielea gelatină.

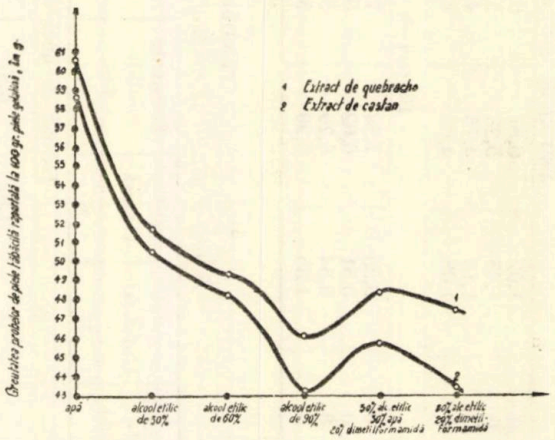


Fig. 4. — Variația randamentului în greutate a pielilor tăbăcite raportat la greutatea pielii gelatină.

Se poate remarca de asemenea faptul că substanțele solubile totale și solubile organice scad odată cu creșterea cantității de solvent organic în soluția tanantă. Acest aspect este probabil consecința faptului că la spălarea posterioară tăbăcirii, îndepărtarea substanțelor nelegate cu colagenul se realizează mult mai intens din pieile tratate cu soluții cu un conținut mai ridicat de solvent organic, în care taninurile vegetale au o afinitate mult mai mică față de grupele reactive ale pielii. Acest fapt

este confirmat și de graficele din fig. 5 și 6, din care rezultă variația în timp a substanțelor solubile organice din probele de piele tăbăcită. Din aceleași grafice se constată, atît în cazul tăbăcirii cu extract de quebracho cît și la tăbăcirea cu extract de castan, scăderea conținutului

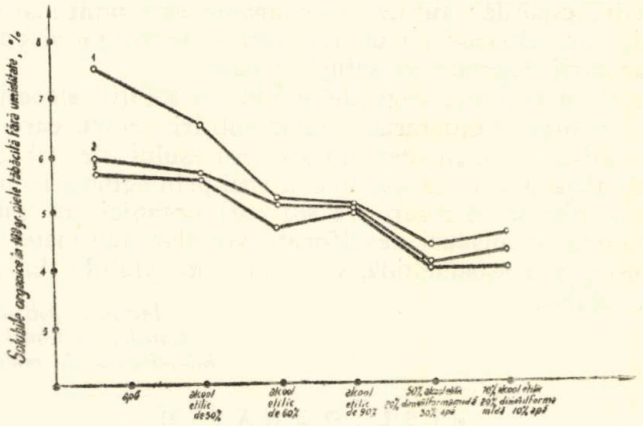


Fig. 5. — Variația în timp a conținutului de substanțe solubile organice, a probelor de piele tăbăcite cu extract de castan după: *1* — o lună, *2* — trei luni, *3* — cinci luni de tăbăcire.

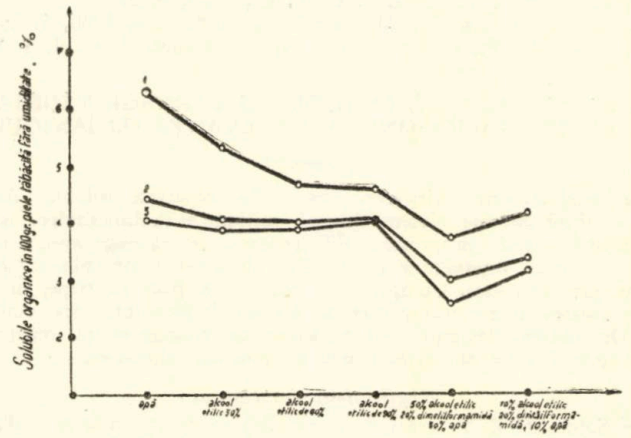


Fig. 6. — Variația în timp a conținutului în substanțe solubile organice, a probelor de piele tăbăcite cu extract de quebracho după: *1*—o lună, *2*—trei luni, *3*—cinci luni de tăbăcire.

în substanțe solubile organice. Această scădere se accentuează în cazul probelor care au fost tăbăcite cu soluții tanante în care cantitatea de apă folosită la solvirea extractelor tanante, în raport cu solventul organic, crește.

3. Concluzii

Tăbăcirea vegetală în soluții de solvenți organici se desfășoară într-un timp mult mai scurt decît în soluții apoase. În schimb, datorită faptului că nici pielea gelatină și nici taninurile vegetale nu sînt în stare de ionizare, legarea ireversibilă a substanțelor tanante este mult mai slabă.

Se obțin piei tăbăcite cu un randament de volum și cu o plinătate inferioare tăbăcirii vegetale în soluții apoase.

Tăbăcirea cu taninuri vegetale solvite în soluții alcoolice ar putea fi avantajoasă pentru prelucrarea pieilor subțiri pentru care nu se cere o plinătate deosebită. În acest caz durata procesului de tăbăcire poate fi mult scurtată, tăbăcirea fiind posibilă numai prin agitare la butoi.

Tăbăcirea pieilor în soluții de solvenți organici ar putea fi favorabilă cu anumite novolacuri nesulfonate sau slab sulfonate, pe bază de produse fenolice și formaldehidă, care nu sînt solubile în apă sau sînt foarte puțin solubile.

Institutul politehnic, Iași
Catedra de tehnologia pielii, înlocuitorilor de piele și tananților

BIBLIOGRAFIE

1. Stather F., *Gerbereichemie und Gerbereitechnologie*. Akad. Verlag, Berlin, 1957, S. 347.
2. Povarnin G. G., Collegium, 1914, S. 633, 659.
3. Михайлов А. Н., *Химия дубящих веществ и процессов дубления*. М., 1953.
4. Chambard P., Mezei E., J. I. S. L. T. C., 1925, p. 27.
5. Stather F., Lauffmann R., Miau T. B., Collegium, 1936, S. 66.
6. Endres H., Stadler P., v. d. Crone F., Das Leder, 1960, *1*, S. 1.

CONTRIBUTIONS À L'ÉTUDE DU TANNAGE VÉGÉTAL DANS LES SOLUTIONS DES SOLVANTS ORGANIQUES

(Résumé)

On étudie le tannage des cuirs avec des tanins végétaux solubles dans des solvants organiques. On a utilisé comme solvants l'alcool éthilique et la diméthylformamide en mélange avec de l'eau (en utilisant de proportions différentes). Le tannage avec des tanins végétaux solubles dans les solvents organiques se produit dans un temps plus court que celui avec des solutions tanniques aqueuses. Compte tenu que ni le peau en tripe, ni les tanins végétaux ne sont pas ionisés, il en resulte que la liaison irréversible des tanins avec le cuir est plus faible. On obtient des cuirs tannés, ayant un volume et un toucher plein du cuir, inférieurs par rapport à ceux des cuirs tannés en solutions aqueuses.

Explications des figures

Fig. 1. — Solubilité de l'extract de quebracho en divers mélanges d'alcool éthilique, eau et diméthylformamide.

Fig. 2. — Solubilité de l'extrait de chataignier en divers mélanges d'alcool éthilique, eau et diméthylformamide.

Fig. 3. — Variation de la vitesse de diffusion des tanins (des substances tannantes) dans la peau en tripe.

Fig. 4. — Variation du rendement en poids des cuirs par rapport au poids en tripe.

Fig. 5. — Variation du teneur en matières solubles organiques des cuirs tannés avec extrait de chataignier, après: *1* — un mois, *2* — trois mois, *3* — cinq mois de tannage.

Fig. 6. — Variation du teneur en matières solubles organiques des cuirs tannés avec extrait de quebracho, après: *1* — un mois, *2* — trois mois, *3* — cinq mois de tannage.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1—2, 1966

Electrotehnică. Electronică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XII (XVI), вып. 1—2, 1966

Электротехника. Электроника

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XII (XVI), 1—2, 1966

Electrical Engineering. Electronics

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 537.226

CONTRIBUŢII LA STUDIUL ELECTREŢILOR

DE

I. LUCA, EUGEN OSADEŢ şi EMIL LUCA

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Consideraţii generale

Primii electreţi, care sînt dielectrici cu proprietatea de a conserva un timp oarecare momentele electrice de polarizare apărute în timpul aplicării în anumite condiţii a unui cîmp electric, au fost obţinuţi dintr-un amestec de ceară şi răşini de către E g u c h i [1]. Cercetări ulterioare au permis obţinerea unor asemenea electreţi şi din alte produse organice [2] ... [8], sau chiar anorganice [9] ... [11], numărul acestora crescînd neîncetat.

Deoarece dintre produsele utilizate în vederea obţinerii de electreţi s-a constatat că polimetacrilatul de metil prezintă o comportare anormală [12], în sensul că intensitatea curentului de polarizare prezintă un maxim pronunţat chiar după ce temperatura este menţinută la o valoare constantă, ne-am propus să studiem îndeaproape această comportare anormală în cazul metacrilatului de metil de provenienţă românească şi să cercetăm dacă nu există şi alte produse care să prezinte asemenea comportări anormale.

2. Dispozitivul experimental

Instalaţia utilizată, redată în fig. 1, este constituită dintr-un redresor de înaltă tensiune, care asigură redresarea ambelor alternanţe pentru tensiuni cuprinse între 100 şi 10 000 V, o etuvă cu regim termic reglabil pînă la 250°C şi un sistem de măsurare a curenţilor de polarizare.

Pentru măsurarea curenţilor de polarizare de intensitate redusă, între 10^{-14} şi 10^{-8} A, se conectează în serie cu proba studiată rezistenţe electrice de ordinul a $10^{11} \dots 10^{8}$ Ω, iar căderile de tensiune de pe aceste rezistenţe sînt amplificate cu ajutorul unui amplificator de tensiune de tip G.V.-2, prevăzut cu o lampă electrometru T-113 şi apoi transmisă la un galvanometru cu zero la mijloc, prin intermediul unei rezistenţe de valoare ridicată.

Măsurarea curenţilor de polarizare de intensitate mai mare se face direct: pentru curenţii a căror intensitate este cuprinsă între 10^{-8} şi 10^{-5} A cu un galvanometru „Multiflex", iar pentru cei a căror intensitate este mai mare de 10^{-5} A, cu ajutorul unui miliampermetru cu scara de 1 mA.

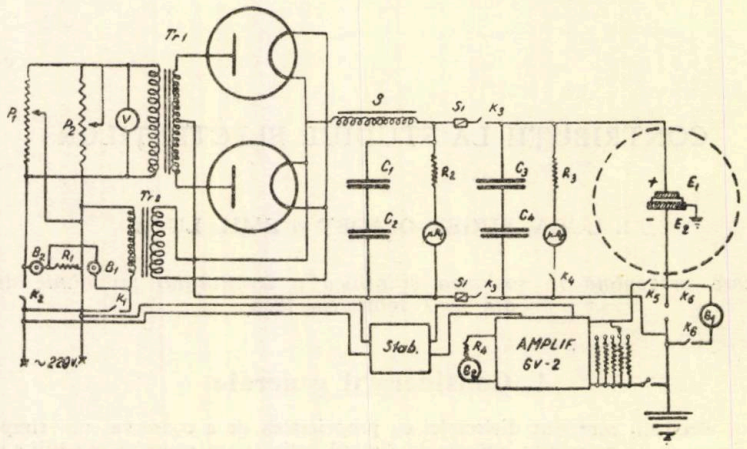


Fig. 1

În scopul asigurării unor indicaţii constante ale sistemului de măsurare a curenţilor de intensitate redusă, acesta este alimentat de la reţea prin intermediul unui stabilizator de tensiune. Un voltmetru electronic prevăzut cu sondă de înaltă tensiune permite verificarea tensiunii înalte direct pe electrozii între care este situată proba.

3. Polarizarea polimetacrilatului de metil de provenienţă românească

S-au folosit circa 30 de probe de polimetacrilat de metil produs în ţară. Diametrul probelor a fost de 3 cm iar grosimea cuprinsă între 2 şi 8 mm. Aceste probe au fost aşezate între electrozii de bronz cu diametrul de 25 mm.

Tensiunea între electrozi a fost de 500...5 000 V, realizîndu-se cîmpuri electrice cu intensităţi de 1 000...25 000 V/cm.

Măsurarea temperaturii probei şi a curentului ce trece prin probă s-a efectuat la intervale de cîte 5 min.

În fig. 2 sînt redate rezultatele măsurătorilor efectuate asupra unei asemenea probe de polimetacrilat de metil, supusă unui cîmp electric de intensitate 12 000 V/cm.

Din analiza curbelor de variație ale curentului de polarizare și a temperaturii probei, rezultă că intensitatea curentului ce trece prin probă și care avea o valoare foarte redusă atîta timp cît temperatura probei era sub 100°C, începe să crească brusc și foarte pronunțat cînd temperatura probei depășește 120°C, ceea ce denotă intensa polarizare a probei. Menținînd apoi temperatura probei constantă, la 190°C, se constată că intensitatea curentului care traversează proba continuă să crească, atinge o valoare maximă — aspect care pune în evidență comportarea anormală a polimetacrilatului de metil în procesul de polarizare — iar apoi curentul începe să scadă, la început foarte repede și apoi mai încet, stabilindu-se final la o valoare constantă, în momentul care reprezintă sfîrșitul procesului de polarizare.

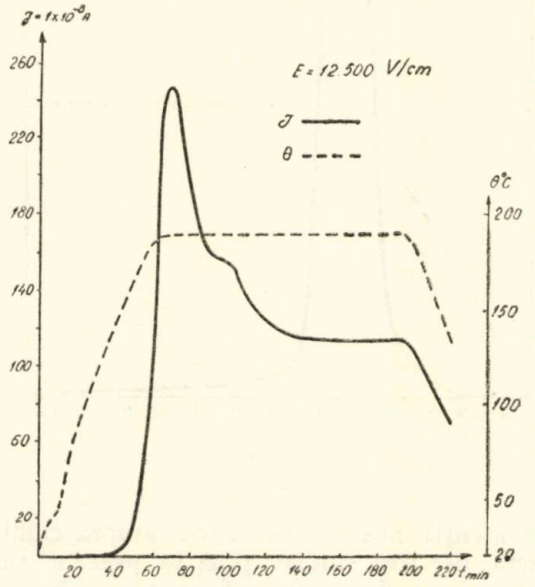


Fig. 2

Rezultatele la care am ajuns în studiul procesului de polarizare al polimetacrilatului de metil de proveniență românească se încadrează în cele obținute și de alți cercetători cu ocazia studierii procesului de polarizare al polimetacrilatului de metil de alte proveniențe, cu observația că, în cazul cercetărilor întreprinse de noi, descreșterea curentului după atingerea valorii maxime, nu are loc continuu, ci apare un mic palier, unde descreșterea este mult mai lentă, determinată eventual de compoziția sau structura, probabil diferită, a produsului românesc.

4. Polarizarea chihlimbarului

Deoarece în literatura referitoare la electreţi se menţionează numai polimetacrilatul de metil ca prezentînd anomalia menţionată mai sus şi care apare în timpul polarizării, ne-am propus a căuta şi alţi dielectrici care să se caracterizeze prin anomalii analoge.

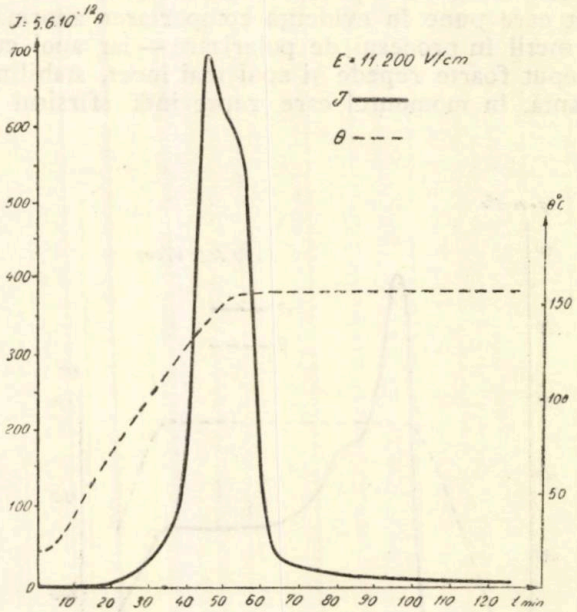


Fig. 3

În acest sens atenţia noastră s-a oprit asupra chihlimbarului, care, după cîte cunoaştem, n-a fost studiat pînă în prezent sub acest aspect.

Măsurările experimentale au fost efectuate pe 25 probe de chihlimbar de diferite provenienţe, tăiate sub formă de discuri mici, din diverse obiecte, ca ţigarete, mărgele etc. Discurile au avut diametrele de 10 ... 18 mm iar grosimea cuprinsă între 2 şi 4 mm.

În fig. 3 sînt trasate curbele de variaţie ale intensităţii curentului ce străbate proba de chihlimbar în procesul polarizării şi variaţiei temperaturii, la o probă cu diametrul de 1,5 cm şi grosimea de 2,5 mm, supusă acţiunii unui cîmp electric cu intensitatea de 11 200 V/cm, între electrozi cu diametrul de 1 cm.

Analiza curbelor arată apariţia, şi în cazul chihlimbarului, a anomaliei din procesul de polarizare, ce se manifestă printr-un maxim accentuat al intensităţii curentului ce traversează proba, care apare în jurul tempe-

raturii de 142°C, maxim care se pune în evidență printr-un salt foarte brusc. După atingerea valorii maxime intensitatea curentului scade, la început mai lent, apoi printr-un salt la fel de brusc coboară pînă la o valoare ce se menține constantă și care indică sfîrșitul procesului de polarizare.

Deși anomalia din procesul de polarizare a chihlimbarului este similară celei observate în cazul polimetacrilatului de metil, totuși se constată că în timp ce la polimetacrilatul de metil valoarea curentului maxim este de circa 2 ori mai mare decît a curentului normal, în cazul chihlimbarului ea este de circa 50 de ori mai mare, ceea ce arată că în cazul chihlimbarului are loc un proces de polarizare mult mai intens.

Deși probele de chihlimbar utilizate au provenit din diverse obiecte și deci au fost diferite din punct de vedere al purității lor, avînd diferite incluziuni străine ce pot eventual influența rezultatele, se constată totuși că anomalia din procesul de polarizare a apărut în cazul tuturor probelor, observîndu-se numai unele variații în ceea ce privește valoarea absolută a maximului curentului ce traversează proba, temperatura la care apare saltul și modul mai mult sau mai puțin brusc în care este atinsă valoarea maximă.

5. Concluzii

Proprietățile de electret ale polimetacrilatului de metil de proveniență românească, analoge celui de proveniență străină, confirmă anomalia observată la acest tip de dielectric în timpul polarizării efectuate în scopul obținerii de termoelectreți.

Chihlimbarul posedă remarcabile proprietăți de termoelectret, prezentînd anomalii la polarizare analoge celor observate la polimetacrilatul de metil, dar cu mult mai pronunțate.

Institutul agronomic „Ion Ionescu de la Brad", Iași,
Institutul politehnic, Iași,
Catedra de fizică

BIBLIOGRAFIE

1. Eguchi M., Phil. Mag., 1925, **49**, p. 178.
2. Padgelt H., Radio Electr., 1949, **20**, p. 20
3. Wiseman, Linden, Electr. Eng., 1963, **72**, *10*, p. 869.
4. Thiessen A., Winkel A., Herman K., Phys. Ztschr., 1936, **37**, S. 511.
5. Graetzinger G., Kretsch H., Ztschr. für Phys., 1936, **103**, S. 337.
6. Gerson R., Rohrbough H., J. Chem. Phys., 1955, **23**, p. 2381.
7. Gemant A., Phil. Mag., 1935, **20**, p. 229.
8. Petrescu V., Babei N., Antoniu M., Pogîngeanu P., Bul. Inst. polit. Iași, 1964, **X (XIV)**, *1—2*, p. 201.
9. Губкин Н., Сканави И., ИАН СССР, ОФН, 1958, **XXII**, стр. 3.
10. — ЖТФ, 1957, **32**, стр. 1.
11. Luca E., Bul. Inst. polit. Iași, 1964, **X (XIV)**, *3—4*, p. 183.
12. Губкин Н., *Электреты*. М., 1961.

CONTRIBUTIONS À L'ÉTUDE DES ÉLECTRETS

(Résumé)

On étudie les propriétés en tant qu'électrets des épreuves de polimétacrilat de métil roumain et des épreuves d'ambre.

On aboutit à la conclusion que tant les épreuves de polimétacrilat de métil roumain, que celles d'ambre, présentent sauf les propriétés connues des thermo-éléctrets, quelques anomalies dans le processus de polarisation, à savoir, l'intensité du courant de polarisation accuse un maximum prononcé et constant même si l'on maintient la temperature à une valeur constante.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 621.317.334 ; 621.317.335

DETERMINAREA PARAMETRILOR CIRCUITELOR CUPLATE MAGNETIC PRIN UTILIZAREA INDICATOARELOR SENSIBILE LA FAZĂ

DE

GH. SAVIN, N. RADU şi SAVEL MITREA

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

I. Principiul teoretic al metodelor de măsurare

1. Consideraţii generale

În schemele de măsurare şi reglaj automat se folosesc pe o scară tot mai largă indicatoarele sensibile la fază. Principalele tipuri de indicatoare sensibile la fază construite sînt cele pentru indicarea concordanţei sau opoziţiei de fază [1], precum şi cele pentru indicarea cuadraturii curenţilor sau tensiunilor sinusoidale [2], [3]. În regim nearmonic indicatoarele sensibile la fază funcţionează selectiv, în mod obişnuit pentru armonica fundamentală. Cele mai simple scheme de măsurare cu indicatoare sensibile la fază sînt cele pentru care expresiile folosite la determinarea parametrilor, la anumite relaţii de fază, sînt independente de frecvenţă.

În scopul măsurării parametrilor circuitelor cuplate inductiv se utilizează diferite scheme, de la cele mai simple (serie şi paralel) pînă la punţile cu mai mult de patru ramuri [4].

Indicatoarele sensibile la fază pot fi utilizate mult mai comod în schemele cele mai simple. În cele ce urmează vom arăta că pentru aceste scheme relaţiile de concordanţă de fază sînt independente de frecvenţă, iar cele de cuadratură sînt funcţie de frecvenţă.

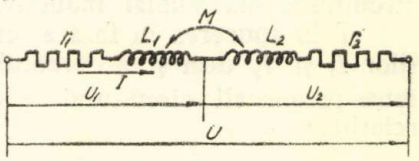


Fig. 1

2. Aducerea în fază a două tensiuni sau a doi curenţi

a) Circuit serie cuplat inductiv

Pentru circuitul serie (fig. 1) constituit din două bobine cuplate inductiv, tensiunile de la bornele bobinelor pot fi aduse în fază ($\underline{U}_1 = k\underline{U}_2$). În acest caz între parametrii circuitului se obţine relaţia:

(1) $$r_1(L_2 + M) = r_2(L_1 + M).$$

În montajul aditiv aducerea tensiunilor în fază este posibilă pentru orice valori ale lui M, iar în montajul diferenţial este necesar ca L_1, $L_2 > |M|$.

b) *Circuit paralel cuplat inductiv*

Utilizînd circuitul paralel (fig. 2), curenţii pot fi aduşi în fază pentru anumite valori ale parametrilor. Se poate remarca că dacă se aduc în fază curenţii $\underline{I}_1$ şi $\underline{I}_2$ în acelaşi timp aceştia sînt în fază şi cu $\underline{I}$ — curentul total.

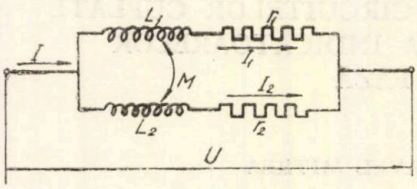


Fig. 2

Prin aducerea în fază a curenţilor $\underline{I}_1$ şi $\underline{I}_2$ ($\underline{I}_1 = k\underline{I}_2$), între parametrii circuitului se obţine relaţia:

(2) $$r_1(L_2 - M) = r_2(L_1 - M).$$

Din condiţia $\underline{I} = k\underline{I}_1$ rezultă:

(3) $$(r_1 + r_2)(L_2 - M) = r_2(L_1 + L_2 - 2M),$$

iar din condiţia $\underline{I} = k\underline{I}_2$ se obţine:

(4) $$(r_1 + r_2)(L_1 - M) = r_1(L_1 + L_2 - 2M).$$

Relaţiile (2)...(4) nu sînt distincte ci exprimă aceeaşi condiţie — concordanţa de fază dintre curenţii $\underline{I}$, $\underline{I}_1$ şi $\underline{I}_2$.

Aducerea curenţilor în fază se poate realiza în cazul montajului aditiv numai dacă L_1, $L_2 > |M|$, iar în montajul diferenţial pentru orice valori ale lui M.

c) *Circuit mixt cuplat inductiv*

În fig. 3 este prezentată schema circuitului mixt cuplat inductiv.

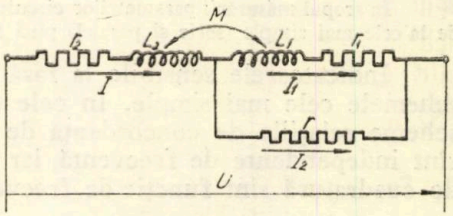


Fig. 3

Prin aducerea în fază a curenţilor $\underline{I}_1$ şi $\underline{I}_2$ deci şi a curentului $\underline{I}$, între parametrii circuitului se obţin relaţiile:

(5) $r_1 M = -r(L_1 + M)$, (5′) $r_2 M = -r(L_2 + M)$, pentru $\underline{I}_1 = k\underline{I}_2$,

(6) $rL_1 = -M(r_1 + r)$, (6′) $rL_2 = -M(r_2 + r)$, pentru $\underline{I} = k\underline{I}_1$,

(7) $r_1 L_1 = (r_1 + r)(L_1 + M)$, (7′) $r_2 L_2 = (r_2 + r)(L_2 + M)$, pentru $\underline{I} = k\underline{I}_2$.

Evident, relaţiile (5)...(7) nu sînt distincte şi pot fi satisfăcute numai în montajul diferenţial, cînd $L_1 > |M|$.

În cazul cînd rezistenţa r se montează în paralel cu bobina de inductanţă L_2, relaţiile (5')...(7') pot fi satisfăcute numai în montajul diferenţial, cînd $L_2 > |M|$.

Pentru acest tip de circuit aducerea curenţilor în fază se poate deci realiza numai în montajul diferenţial, dacă L_1, $L_2 > |M|$.

d) *Concluzii relative la folosirea aducerii în fază a tensiunilor şi curenţilor*

Un sistem de două bobine cuplate inductiv au cinci parametri şi anume: r_1, r_2, L_1, L_2 şi M. Determinarea cea mai precisă a rezistenţelor r_1 şi r_2 se face cu ajutorul punţilor în curent continuu.

Pentru determinarea inductivităţilor L_1, L_2 şi M sînt necesare deci trei relaţii independente. Pentru situaţia cea mai generală cînd L_1, $L_2 > |M|$ se pot folosi relaţiile (1) sau (2) pentru ambele montaje (aditiv sau diferenţial) şi relaţiile (5) şi (5') pentru montajul diferenţial, deci în total pentru relaţiile independente.

În cazul cînd $L_1 < |M| < L_2$ sau $L_2 < |M| < L_1$ se pot folosi două relaţii şi anume: (1) pentru montajul aditiv (care coincide cu (2) pentru montajul diferenţial) şi (5) sau (5') pentru montajul diferenţial. Ca urmare, prin realizarea concordanţei de fază este posibilă determinarea a doi parametri ai bobinelor cuplate inductiv, dacă $L_1 > |M| > L_2$.

3. Aducerea în cuadratură a două tensiuni sau a doi curenţi

a) *Circuit serie cuplat inductiv*

Considerînd circuitul serie cuplat inductiv (fig. 1), prin aducerea tensiunilor $\underline{U}_1$ şi $\underline{U}_2$ în cuadratură ($\underline{U}_1 = jk\underline{U}_2$), între parametrii circuitului se obţine relaţia:

$$r_1 r_2 = -\omega^2 (L_1 + M)(L_2 + M). \tag{8}$$

Relaţia (8) se poate folosi numai în montaj diferenţial ($M < 0$) cînd este satisfăcută şi una din condiţiile suplimentare: $L_2 < |M| < L_1$ sau $L_1 < |M| < L_2$. În acest caz relaţia (8) devine:

$$r_1 r_2 = \omega^2 (L_1 - M)(M - L_2). \tag{8'}$$

b) *Circuit paralel cuplat inductiv*

Considerînd circuitul paralel cuplat inductiv (fig. 2), prin aducerea în cuadratură a curenţilor $\underline{I}_1$ şi $\underline{I}_2$, $\underline{I}$ şi $\underline{I}_1$, $\underline{I}$ şi $\underline{I}_2$ se obţin respectiv relaţiile:

$$r_1 r_2 = \omega^2 (L_1 - M)(M - L_2), \tag{9}$$

$$r_2 (r_1 + r_2) = \omega^2 (M - L_2)(L_1 + L_2 - 2M), \tag{10}$$

$$r_1 (r_1 + r_2) = \omega^2 (M - L_1)(L_1 + L_2 - 2M). \tag{11}$$

Pentru un anumit circuit nu pot fi îndeplinite concomitent relaţiile (10) şi (11) deoarece nu este posibil ca simultan $|M| > L_1$ şi $|M| > L_2$.

Din expresiile (9), (10) şi (11) rezultă că aducerea curenţilor în cuadratură este posibilă numai în montajul adiţional cînd $L_1 < |M| < L_2$ sau $L_2 < |M| < L_1$.

c) *Circuit mixt cuplat inductiv*

Pentru circuitul mixt cuplat inductiv (fig. 3) se pot aduce în cuadratură, în mod independent, curenţii: $\underline{I}_1$ şi $\underline{I}_2$; $\underline{I}$ şi $\underline{I}_1$; $\underline{I}$ şi $\underline{I}_2$.

Impunînd condiţia de cuadratură a curenţilor $\underline{I}_1$ şi $\underline{I}_2$, între parametrii circuitului se obţine relaţia:

$$r_1 r = \omega^2 M (L_1 + M). \tag{12}$$

Din expresia (12) rezultă că aducerea curenţilor $\underline{I}_1$ şi $\underline{I}_2$ în cuadratură este posibilă în montajul aditiv pentru orice valori ale lui M.

În montajul diferenţial relaţia (12) devine:

$$r_1 r = \omega^2 M (M - L_1), \tag{12'}$$

valabilă numai cînd $|M| > L_1$.

Din condiţia $\underline{I} = jk\underline{I}_1$ rezultă relaţia:

$$r (r_1 + r) = \omega^2 M L_1, \tag{13}$$

care poate fi folosită numai în montajul aditiv, pentru orice valori ale lui M.

În sfîrşit din condiţia $\underline{I} = jk\underline{I}_2$ rezultă relaţia:

$$r_1 (r_1 + r) = -\omega^2 L_1 (L_1 + M), \tag{14}$$

care în montajul diferenţial devine:

$$r_1 (r_1 + r) = \omega^2 L_1 (M - L_1) \tag{14'}$$

putînd fi folosită numai cînd $|M| > L_1$.

Folosind schema analogă din fig. 4 se pot obţine alte două relaţii independente şi anume:

$$r_2 r = \omega^2 M (L_2 + M), \tag{15}$$

$$r (r_2 + r) = \omega^2 M L_2. \tag{16}$$

d) *Concluzii relative la folosirea aducerii în cuadratură a tensiunilor şi a curenţilor*

Prin aducerea curenţilor în cuadratură se dispune de patru relaţii independente (12), (13), (15) şi (16), care pot fi folosite pentru orice valori ale lui M, precum şi de încă patru relaţii independente (9), (10), (12') şi (14'), care sînt valabile numai cînd $L_1 < |M| < L_2$ sau $L_2 < |M| < L_1$.

Măsurarea parametrilor bobinelor cuplate inductiv prin aducerea în cuadratură pretinde cunoaşterea frecvenţei tensiunii de alimentare şi mai ales păstrarea constantă a acesteia.

Schemele indicate la pct. 3 pot fi însă folosite cu succes în scopul măsurării frecvenţei.

II. Măsurarea parametrilor circuitelor cuplate inductiv

Prin utilizarea punţilor în curent alternativ (c. a.) se determină, pe rînd, inductanţa L_1 şi rezistenţa proprie r_{p1}, apoi inductanţa L_2 şi rezistenţa proprie r_{p2} şi în sfîrşit inductivitatea mutuală M.

Pentru măsurarea inductanţelor se folosesc de obicei tipurile de punte cu echilibrul independent de frecvenţă (Maxwell, Anderson, Owen) sau tipurile de punte cu echilibrul dependent de frecvenţă (Pirani, Wien, Hay etc.), care necesită rezistenţe şi condensatoare etalon. Punţile care folosesc inductanţe etalon (Maxwell, Wien, Dolezalek etc.) sînt mai puţin utilizate din cauza dificultăţii realizării etaloanelor de inductivitate.

Pentru măsurarea inductivităţii mutuale se folosesc, mai ales, puntea Carey-Foster (în două variante), puntea Rowland şi puntea Maxwell-Wien.

În consecinţă, prin utilizarea punţilor în c. a., parametrii circuitelor cuplate inductiv se pot determina, echilibrînd de trei ori cel puţin două tipuri de punţi. Echilibrarea punţilor în c. a. se realizează, în general, prin variaţia a cel puţin doi parametri.

În cele ce urmează se vor arăta, comparativ, consecinţele ce decurg din măsurările efectuate cu schemele clasice în punte şi cele efectuate prin folosirea indicatoarelor sensibile la fază.

1. Aducerea curenţilor în fază

Se foloseşte un indicator capabil să indice concordanţa de fază pentru schema din fig. 4 şi se urmăreşte aducerea în fază a curenţilor $\underline{I}_1$ şi $\underline{I}_2$ prin variaţia unui singur parametru (R), presupunînd cunoscute rezistenţele proprii ale bobinelor r_{p1} şi r_{p2}. Relaţia care asigură concordanţa de fază a curenţilor $\underline{I}_1$ şi $\underline{I}_2$ este:

$$(R + r_{p2})(L_1 - M) = r_{p1}(L_2 - M). \tag{17}$$

Dacă nu este posibil să se realizeze aducerea în fază a curenţilor, atunci rezistenţa etalon variabilă (R) se comută pe ramura întîia. Dacă

nici în acest caz nu se poate realiza concordanţa de fază a curenţilor I_1 şi I_2 înseamnă că $L_1 < |M| < L_2$ sau $L_2 < |M| < L_1$ şi deci cuplajul este aditiv. În acest caz se modifică conexiunea uneia din bobine avîndu-se certitudinea realizării concordanţei de fază a curenţilor.

Dacă se constată experimental că $L_1, L_2 > |M|$, atunci este indicat a folosi schema din fig. 4 de două ori; prima dată pentru conexiunea aditivă şi a doua oară pentru conexiunea diferenţială.

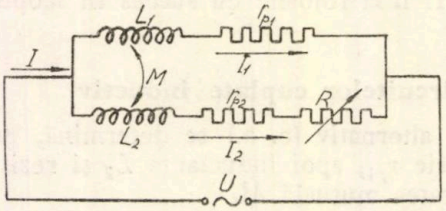


Fig. 4

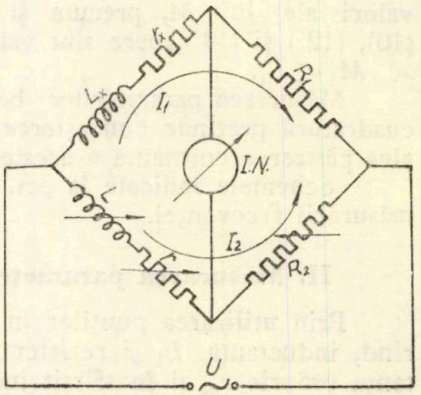


Fig. 5

Folosind acum schema din fig. 3 se urmăreşte din nou concordanţa de fază dintre curenţii I_1 şi I_2 în cuplajul diferenţial al bobinelor, obţinînd:

$$r_1 M = r(L_1 - M). \tag{18}$$

În cazul cînd $L_1, L_2 > |M|$, determinările experimentale efectuate după indicaţiile de mai sus sînt suficiente pentru determinarea celor trei parametri (L_1, L_2, M). Dacă însă $L_1 < |M| < L_2$ sau $L_2 < |M| < L_1$ este necesară obţinerea celei de a treia relaţii cu ajutorul unei alte scheme.

Dacă se utilizeaza schema din fig. 5, cunoscută sub denumirea de puntea Maxwell, pentru care, la echilibru, curenţii I_1 şi I_2 sînt de asemenea în fază, se pot face următoarele observaţii:

a) Pentru realizarea echilibrului trebuie îndeplinite concomitent relaţiile:

$$r_x R_2 = r R_1, \qquad L_x R_2 = L R_1. \tag{19}$$

Aşadar echilibrarea este posibilă prin variaţia uneia din rezistenţele R_1 sau R_2 precum şi prin variaţia rezistenţei r sau a inductanţei etalon L.

b) Puntea Maxwell necesită trei rezistenţe etalon şi o inductanţă etalon, din care — în cazul cel mai simplu — două rezistenţe etalon variabile.

Schemele propuse de noi folosesc o singură rezistenţă etalon variabilă şi permit din trei încercări determinarea celor trei parametri principali.

Folosirea indicatoarelor sensibile la fază prezintă, faţă de indicatoarele de nul clasice, şi alte avantaje [5].

2. Aducerea curenților în cuadratură

După cum s-a arătat la pct. 2 d) există suficiente relații de cuadratură care pot fi utilizate la determinarea tuturor parametrilor bobinelor cuplate. În toate schemele se folosește același indicator sensibil la fază pentru 90° și o singură rezistență variabilă etalon. Deși relațiile de determinare sînt simple, nu este recomandabilă măsurarea parametrilor bobinelor cuplate inductiv prin aducerea curenților sau a tensiunilor în cuadratură din cauza dependenței relațiilor ce se obțin de frecvența tensiunii de alimentare.

În schimb circuitele pot fi utilizate cu succes la măsurarea frecvenței. În acest scop este recomandabilă în special aducerea în cuadratură a curenților $\underline{I}_1$ și $\underline{I}_2$ folosind schema din fig. 2 și de asemenea aducerea în cuadratură a curenților $\underline{I}_1$ și $\underline{I}_2$ utilizînd schema din fig. 3.

Important de remarcat este faptul că dacă cele două rezistențe din ramurile derivate variază simultan avînd mereu valorile egale ($r_1 = r_2 = r$), frecvența se determină din relații ce se exprimă liniar funcție de rezistență:

$$f = \frac{r}{2\pi \sqrt{(L_1 - M)(M - L_2)}} \tag{20}$$

și respectiv

$$f = \frac{r}{2\pi \sqrt{M(L_1 + M)}}. \tag{21}$$

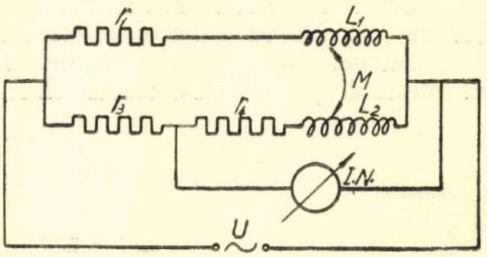


Fig. 6

În literatură se cunosc foarte puține circuite cu ajutorul cărora se poată determina frecvența printr-o relație liniară. Dintre acestea trebuie remarcată puntea K. Kurokava [4, p. 185] care folosește de asemenea două circuite cuplate inductiv (fig. 6).

Dacă $r_1 = r_4$ atunci rezultă că la echilibrare se poate scrie relația:

$$f = r_3 \frac{M}{2\pi (L_1 + L_2) \sqrt{L_1 L_2 - M^2}}.$$

Relația de determinare a frecvenței permite doar cu dificultate proiectarea unui circuit pentru care

$$\frac{M}{2\pi (L_1 + L_2) \sqrt{L_1 L_2 - M^2}} = 1,$$

cu alte cuvinte frecvența să se citească direct pe cutia de rezistențe r_3.

În cazul schemei propuse de noi această cerință este mult mai ușor de realizat.

Pentru determinări de frecvenţe în domeniul 20 Hz...1 000 Hz am folosit un indicator de fază electrodinamic (fig. 7) iar pentru domeniul 1 000 Hz...20 kHz un indicator de fază termoelectric (fig. 8).

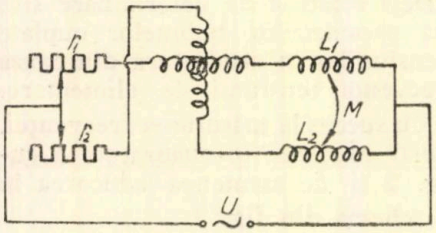


Fig. 7

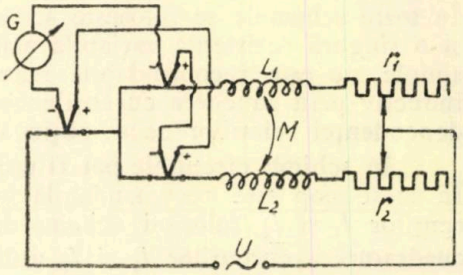


Fig. 8

Eroarea la măsurarea frecvenţei cu aparatul electrodinamic este în jur de 1%, iar cu indicatorul termoelectric sub $1^0/_{00}$.

Întrucît indicatorul termoelectric prezintă inerţie termică, considerăm că acesta se poate folosi numai în situaţiile în care frecvenţa variază lent.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de electrotehnică

BIBLIOGRAFIE

1. Nicolau Edm., *Măsurări în radiotehnică.* Vol. II, Ed. tehn., Buc., 1956.
2. Орнатский П. П., Изм. техн., 1960, *8*, стр. 24.
3. Turicin A. M., *Măsurarea electrică a mărimilor neelectrice.* Ed. tehn., Buc., 1957, (trad. din l. rusă).
4. Krönert J., *Messbrücken und Kompensatoren.* Bd. I, R. Oldenburg-Verlag, Berlin, 1935.
5. Savin Gh., *Metode pentru măsurarea inductanţelor şi capacităţilor în regim armonic şi nearmonic prin defazarea curenţilor la 90°.* Disertaţie, Inst. polit., Iaşi, 1961.

DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES DES CIRCUITS À COUPLAGE MAGNÉTIQUE, À L'AIDE DES INDICATEURS DE PHASE

(Résumé)

On propose une méthode qui permet à déterminer les paramètres des circuits à couplage magnétique, en réalisant soit la concordance de phase, soit la quadrature des tensions où bien des courants, pour un circuit à couplage magnétique, série où parallèle.

Les relations obtenues, utiles pour déterminer les paramètres, sont assez simples ; les méthodes préconiseés présentent une certe importance pratique, surtout en liaison avec l'essor récent des indicateurs de phase.

Parmi les schémas proposées on met en évidence deux de celles-ci qui sont utilisables pour la mesure simple et précise de la fréquence, qui s'éxprime comme fonction linéaire d'une résistance.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 538.23 ; 621.318.423

ASUPRA FENOMENULUI DE HISTEREZIS ÎN MODULATOARELE MAGNETICE

DE

I. BEJAN

1. Introducere

În funcţionarea modulatoarelor magnetice ca elemente de măusrare şi de amplificare, principala sursă de erori în mărimea de ieşire (t. e. m. de ordinul doi) o constituie fenomenul de histerezis şi anume, datorită magnetizării în curent continuu valorile mărimii de ieşire, la micşorarea cîmpului continuu, diferă de cele obţinute la creşterea acestuia. Ocupîndu-se de această problemă, M. A. Rozenblat a stabilit că erorile introduse de fenomenul de histerezis în cazul modulatoarelor magnetice, depinzînd de adîncimea fluxului electromagnetic de excitaţie, pot fi micşorate şi chiar complet eliminate prin alegerea corespunzătoare a amplitudinii acelui flux [1].

Pornind de la faptul că în cazul modulatorului magnetic procesul de magnetizare este mai complex şi că asemenea elemente se pot construi cu dimensiuni foarte variate, am reluat studiul problemei erorilor de măsurare datorită fenomenului de histerezis în modulatoarele magnetice ; în urma cercetărilor întreprinse [2]...[4] am stabilit că, spre deosebire de alte elemente, în a căror mărime de ieşire se manifestă fenomenul de histerezis (maşini electrice amplificatoare, amplificatoare magnetice etc.), în cazul modulatoarelor magnetice practic nu este posibil să se elimine complet erorile datorite acestui fenomen.

S-a găsit că pentru adîncimi mici de pătrundere a fluxului electromagnetic alternativ de excitaţie, erorile corespund fenomenului de histerezis cunoscut şi anume, mărimea de ieşire, la scăderea cîmpului continuu, este mai mare ca la creşterea acestuia (erorile fiind considerate pozitive). Cu creşterea adîncimii de pătrundere erorile scad şi chiar se anulează, dar începînd de la anumite valori (mari) ale acesteia, *fenomenul de histerezis se manifestă răsturnat în mărimea de ieşire,* la scăderea cîmpului continuu valorile mărimii de ieşire fiind mai mici ca cele corespunzătoare la creşterea acestuia (erorile în acest caz au fost considerate negative).

După cum este cunoscut, adîncimea de pătrundere a fluxului magnetic alternativ depinde de mai mulţi factori conform relaţiei [5]:

$$z = \frac{k}{\sqrt{\mu\sigma f}}, \tag{1}$$

unde : μ — permeabilitatea magnetică a circuitului magnetic, σ — conductibilitatea, iar f — frecvenţa fluxului alternativ.

În lucrările menţionate au fost determinate erorile introduse în mărimea de ieşire a modulatorului magnetic (t. e. m), a cărui expresie este [5]:

(2) $$u_2 = 2\sqrt{2}\,\omega\, n_2 S B_2 10^{-8} \text{ [V]},$$

unde : ω — pulsaţia fluxului magnetic alternativ, n_2 — numărul de spire ale înfăşurării de ieşire a modulatorului magnetic, S — secţiunea circuitului magnetic, B_2 — inducţia magnetică corespunzătoare armonicii de ordinul doi.

S-au luat în consideraţie toţi parametrii ce intervin în expresia (1) a adîncimii de pătrundere. Astfel, permeabilitatea magnetică a fost modificată pe de o parte prin intermediul cîmpului de excitaţie H_p de frecvenţă f [2], iar pe de altă parte, prin intermediul cîmpului de reacţie H_m de frecvenţă $2f$ [2], determinat de impedanţa de sarcină a modulatorului magnetic (toate cercetările au fost întreprinse considerînd că armonicile superioare (de ordin 4, 6, 8 ...) sînt neglijabile). S-a găsit că la modificarea permeabilităţii magnetice variaţia erorilor funcţie de intensitatea cîmpului alternativ H_p, la H_c = const., are forma din fig. 1, iar funcţie de curent (sau funcţie de intensitatea cîmpului continuu H_n) şi H_p = const. (= 3,02 Oe), are alura din fig. 2.

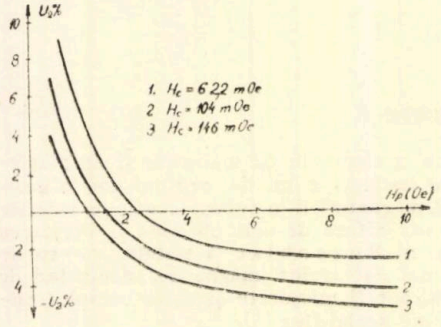


Fig. 1

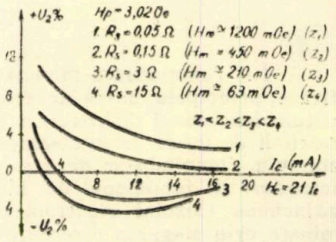


Fig. 2

Conductibilitatea electrică σ a fost modificată prin variaţia temperaturii mediului de lucru al modulatorului magnetic [4]; se constată că curbele de variaţie a erorilor au pentru două valori ale temperaturii şi H_p = 1,48 Oe, forma din fig. 3.

În afară de aceşti factori adîncimea de pătrundere a fost modificată şi prin variaţia frecvenţei cîmpului alternativ de excitaţie H_p [3]. Ca rezultate ale acestor încercări s-a găsit că erorile introduse de fenomenul de histerezis variază funcţie de intensitatea cîmpului continuu, pentru diferite frecvenţe şi intensitate constantă a cîmpului de excitaţie (H_p = 0,446 Oe), după curbe de forma celor din fig. 4.

Cu ocazia studiului întreprins s-a găsit că asupra valorilor şi semnului erorilor influenţează şi volumul circuitului magnetic (cantitatea de material conţinută în circuitul magnetic) [1]; variaţia erorilor introduse de fenomenul de histerezis funcţie de intensitatea cîmpului continuu, pentru două modulatoare magnetice din acelaşi material feromagnetic, de volum V (curba *1*) şi respectiv volum $2V$ (curba 2) este redată în fig. 5 [1]).

În cele ce urmează se încearcă ca, pe baza rezultatelor obţinute şi folosind ipotezele clasice de interpretare a fenomenului de histerezis în substanţele feromagnetice [6, pp. 238, 249—250, 276—294] ... [10], să se explice :

---

[1])-Curbele din fig. 1, 2, 3 şi 5 sînt ridicate pe modulatoare cu circuitul din fier electrotehnic, iar cele din fig. 4 — din mumetal.

a) modul în care se încadrează fenomenul de histerezis răsturnat în procesele cunoscute de magnetizare;

b) modul în care influenţează asupra acestui fenomen cîmpul de reacţie H_m, determinat de curentul de sarcină de frecvenţă pară;

c) mecanismul care determină apariţia fenomenului de histerezis inversat în mărimea de ieşire a modulatorului magnetic;

d) modul cum influenţează asupra erorilor volumul circuitului magnetic;

e) influenţa cîmpului continuu asupra modificării adîncimii de pătrundere.

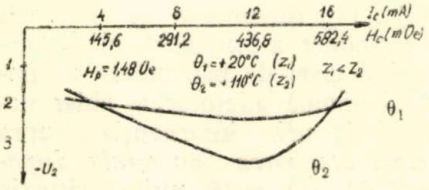


Fig. 3

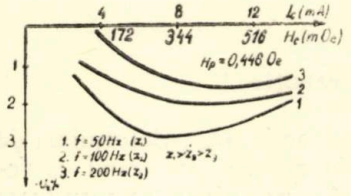


Fig. 4

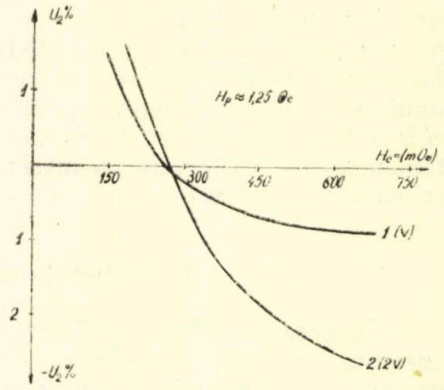


Fig. 5

2. Fenomenul de histerezis răsturnat

Conform relaţiei (2), tensiunea electromotoare de ordinul doi, indusă în înfăşurările de ieşire, pentru un modulator dat, este determinată de inducţia de ordinul doi. Aceasta, la rîndul ei, aşa cum a stabilit M. A. Rozenblat [5], este funcţie de intensitatea cîmpului de comandă (continuu) H_c, de intensitatea cîmpului de reacţie H_m şi depinde de materialul circuitului magnetic.

Faptul că t.e.m. de ordin par, la creşterea cîmpului de comandă, este mai mare ca la micşorarea acestuia (prezintă histerezis), înseamnă că *inducţia rezultantă de ordin par manifestă un asemenea histerezis;* prin urmare, *fenomenul de histerezis răsturnat*, ce a fost pus în evidenţă în mărimea de ieşire a modulatorului magnetic, *este legat de procesul intim de magnetizare a substanţei feromagnetice, în acest tip de amplificator magnetic. El constituie o extindere, o generalizare a modului de manifestare a fenomenului histerezis în modulatoarele magnetice.*

Cele de mai sus sînt confirmate de cercetările efectuate şi anume, la variaţia aceluiaşi parametru (adîncimea de pătrundere) fenomenul de histerezis inversat se supune aceloraşi relaţii (legi) de variaţie ca şi cele la care este supus fenomenul de histerezis clasic. La creşterea adîncimii de pătrundere *sensul de variaţie a erorilor este acelaşi;* erorile pozitive se micşorează în timp ce erorile negative cresc.

După cum s-a arătat mai sus, adîncimea de pătrundere a fluxului alternativ a fost modificată prin variaţia permeabilităţii, modificînd amplitudinea cîmpului alternativ (fig. 1) sau amplitudinea cîmpului de reacţie (fig. 2), prin variaţia conductibilităţii materialului feromagnetic (fig. 3) şi prin variaţia frecvenţei cîmpului de excitaţie (fig. 4).

Aşa cum s-a stabilit în lucrările [2] ... [4], fenomenul de histerezis răsturnat din modulatorul magnetic, ca extindere a fenomenului de histerezis normal, apare numai pentru adîncimi mari de pătrundere a cîmpului alternativ de excitaţie. Modificarea, şi anume micşorarea, chiar neînsemnată la prima vedere, a acestei adîncimi, prin intervenţia asupra unui factor de care depinde, are drept efect *atenuarea* sau *totala dispariţie* a fenomenului de histerezis inversat; de la această ultimă situaţie fenomenul de histerezis în mărimea de ieşire a modulatorului magnetic se manifestă normal.

3. Influenţa cîmpului de reacţie

În ceea ce priveşte influenţa cîmpului de reacţie H_m, determinat de curentul de ieşire al modulatorului magnetic, încercările au arătat că fenomenul de histerezis răsturnat (cînd erorile sînt negative), se manifestă cu atît mai accentuat, cu cît valoarea intensităţii cîmpului de reacţie H_m este mai mică (fig. 2). Erorile negative introduse de fenomenul menţionat au valorile cele mai mari în cazul cînd modulatorul magnetic lucrează la gol (rezistenţă de sarcină infinită sau de valoare ridicată şi deci H_m redus); ele se micşorează şi devin pozitive pe măsură ce valoarea impedanţei de sarcină scade (H_m creşte).

Faptul că intensitatea cîmpului de reacţie (fig. 2) influenţează erorile negative în acelaşi sens ca şi frecvenţa cîmpului de excitaţie [3] şi conductibilitatea electrică a circuitului magnetic [4] (cu cît acestea sînt mai mari erorile negative sînt mai mici) şi în sens invers cu amplitudinea cîmpului de excitaţie [2], ne îndreptăţeşte să credem că şi cîmpul de reacţie de frecvenţă dublă conduce la modificarea adîncimii de pătrundere a cîmpului electromagnetic alternativ, în tolele modulatorului magnetic.

După părerea noastră, modificarea adîncimii de pătrundere în acest caz are loc ca urmare a modificării stării de magnetizare a circuitului magnetic, prin efectul demagnetizant al cîmpului de reacţie. În prezenţa acestui cîmp are loc un proces de demagnetizare a materialului feromagnetic, aşa cum se întîmplă în transformatoarele de măsură obişnuite [7].

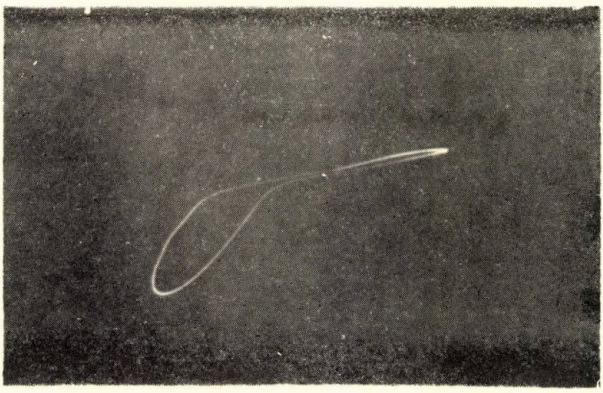


Fig. 1

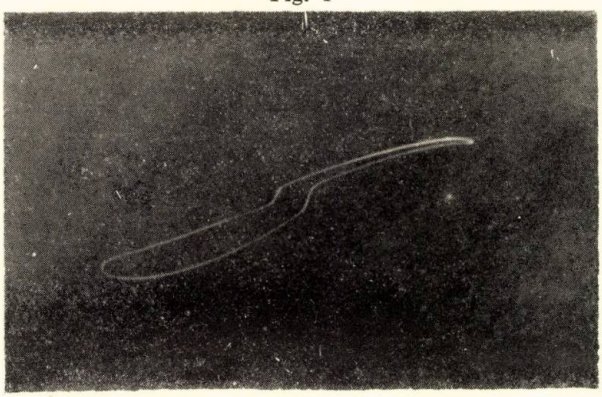


Fig. 2

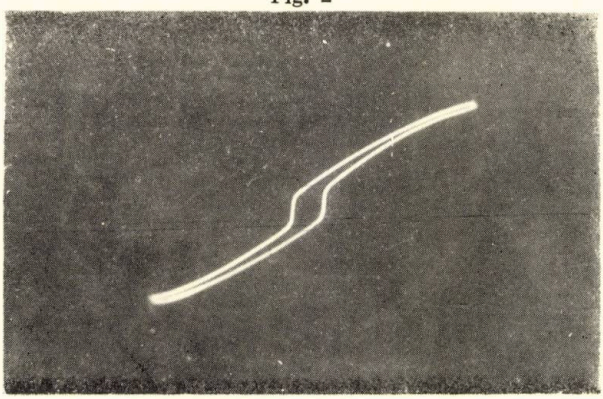


Fig. 3

Ca urmare a acestui proces are loc creşterea permeabilităţii magnetice şi deci micşorarea adîncimii de pătrundere a fluxului alternativ; în această situaţie erorile negative se micşorează şi chiar îşi schimbă sensul atunci cînd cîmpul de reacţie este intens, ceea ce corespunde fenomenului de histerezis normal.

Cele de mai sus se sprijină şi pe oscilogramele din fig. 6...8, în care sînt reprezentate ciclurile parţiale (dinamice) de histerezis pentru modulatorul magnetic din mumetal (pentru care s-au ridicat curbele din fig. 4). Aceste cicluri au fost ridicate pentru aceeaşi valoare a intensităţii cîmpului de excitaţie ($H_p = 0{,}6$ Oe), aceeaşi valoare a intensităţii cîmpului de comandă ($H_c = 0{,}95$ Oe) şi pentru diferite valori ale intensităţii cîmpului de reacţie, după cum urmează: $H_m \approx 0$ (fig. 6); $H_m = 0{,}3$ Oe (fig. 7) şi $H_m = 0{,}7$ Oe (fig. 8).

După cum rezultă din analiza fig. 6...8 cîmpul de reacţie H_m la intensităţi reduse are ca efect o tendinţă de simetrizare a ciclului dinamic de histerezis (fig. 7), iar pentru intensităţi mai ridicate, simetrizarea este practic completă. După cum este ştiut [12], [13], o asemenea simetrizare a ciclurilor dinamice corespunde unei stări de magnetizare mai puţin saturate şi deci unei adîncimi de pătrundere mai reduse.

4. Mecanismul apariţiei fenomenului de histerezis răsturnat

Cît priveşte mecanismul de apariţie a fenomenului de histerezis răsturnat, după părerea noastră acesta are loc pe seama energiei fluxului magnetic de frecvenţă de bază f [14, pp. 70—75], precum şi a celui corespunzător armonicilor pare ($2f$, $4f$,..., etc.), cînd acesta din urmă are valori ridicate. (Inducţia magnetică de ordin par are valori ridicate cînd rezistenţa de sarcină a modulatorului magnetic are valoare ridicată [15]). În afară de aceasta, este probabil ca într-un mod favorabil să contribuie şi componenta continuă a fluxului magnetic alternativ, ce apare (ca urmare a fenomenului de redresare magnetică) atunci cînd impedanţa de ieşire a modulatorului magnetic este mare [14, pp. 39—44].

Pe seama energiei acestor mărimi, în procesul de magnetizare complexă a modulatorului magnetic anumite domenii de magnetizare spontană, la micşorarea cîmpului continuu determină şi păstrează un moment magnetic rezultant mai mic ca la creşterea cîmpului continuu. Acest moment magnetic rezultant este pus în evidenţă de t.e.m. de ordin par, proporţională cu inducţiile de ordin par, fiind condiţionat de valoarea adîncimii de pătrundere a fluxului alternativ în materialul feromagnetic.

Acest mod deosebit de comportare a anumitor domenii credem că se justifică dacă se ţine seama de următoarele aspecte:

a) dimensiunile geometrice ale domeniilor de magnetizare spontană, pentru un anumit material feromagnetic, sînt diferite [8], [9], [14, p. 9];

b) dimensiunile acestor domenii depind de dimensiunile probei [6, p. 238];

c) cîmpul alternativ de excitaţie, pe lîngă faptul că pătrunde în tole la adîncimi diferite, funcţie de frecvenţă, permeabilitate şi conductibilitate, dar pentru anumite valori ale acestei mărimi are o repartiţie neuniformă în tole [10];

d) faptul că mărimile care intervin în procesul de magnetizare (cîmpuri şi inducţii magnetice) sînt nesinusoidale, ne face să presupunem că armonicile componente ale acestor mărimi participă în procesul de magnetizare cu efectele fiecăreia în parte şi fiecare dintre acestea poate determina o comportare proprie anumitor domenii.

Ca urmare, domenii de magnetizare de dimensiuni diferite pot avea comportări diferite în cîmpurile alternative de frecvenţe diferite, la anumite adîncimi de pătrundere, ceea ce poate da naştere la cele două tipuri de histerezis: normal şi răsturnat.

5. Influenţa volumului circuitului magnetic

Dependenţa fenomenului de histerezis răsturnat de cantitatea de material feromagnetic conţinută în circuitul magnetic (fig. 5), credem că se poate explica în modul următor. Repartiţia domeniilor de magnetizare spontană în tolă, care determină fenomenul de histerezis, este oarecum determinată [6, p. 257], iar numărul lor este puţin variabil în unitatea de volum [8] (socotit pe tolă). Pe de altă parte, de numărul acestor domenii depinde valoarea inducţiei rezultante de ordin par [11][2]) şi deci t. e. m. de ordin par. În aceste condiţii, evident, volumul circuitului magnetic al modulatorului poate influenţa valoarea erorilor introduse de fenomenul de histerezis; cu cît volumul este mai mare, cu atît erorile sînt mai importante. Probabil lucrurile se petrec ca şi în cazul transformatoarelor de măsură obişnuite; la aceste transformatoare, datorită magnetismului remanent al fierului, erorile introduse de aceasta sînt mai reduse la transformatoarele cu fier mai puţin [11, p. 504].

6. Influenţa cîmpului continuu

Toate încercările efectuate cu ocazia studiului întreprins au scos în evidenţă faptul că valorile erorilor introduse de fenomenul de histerezis în mărimea de ieşire a modulatorului depind de valoarea intensităţii cîmpului continuu pînă la care se realizează magnetizarea şi de valoarea acestuia la care se măsoară mărimea de ieşire.

S-a găsit că, la variaţia oricărui parametru de care depinde adîncimea de pătrundere (fig. 1 ... 4), erorile pozitive sînt cu atît mai reduse, iar cele negative sînt cu atît mai importante, cu cît valoarea intensităţii cîmpului continuu la care se măsoară t. e. m. de ordin par este mai ridicată. Aceasta înseamnă că intensitatea cîmpului continuu favorizează pătrunderea fluxului

[2]) v. cap. Feromagnetism.

alternativ în substanţa feromagnetică; el lucrează deci ca un cîmp de polarizare.

În plus s-a găsit că această acţiune a cîmpului continuu se manifestă numai pînă la anumite valori ale intensităţii sale, de la care dependenţa erorilor introduse de fenomenul de histerezis de acest cîmp devine neînsemnată (fig. 2 ... 4).

6. Concluzii

1. Fenomenul de histerezis răsturnat, care se manifestă în mărimea de ieşire a modulatorului magnetic, în anumite condiţii de lucru, pune în evidenţă existenţa unui asemenea fenomen în acele condiţii de lucru ce apar în procesul de magnetizare a acestuia.

2. La variaţia adîncimii de pătrundere a cîmpului electromagnetic de excitaţie, fenomenul de histerezis răsturnat se supune aceleiaşi legi de evoluţie ca şi fenomenul de histerezis normal. Aceasta înseamnă că el constituie o extindere, o generalizare, a modului de manifestare a fenomenului de histerezis în acest tip de amplificator magnetic.

3. Apariţia fenomenului de histerezis răsturnat are loc pe seama energiei fluxului magnetic de frecvenţă *f*, precum şi a fluxurilor magnetice de frecvenţă pară. Condiţiile de apariţie a acestui fenomen sînt favorizate probabil şi de prezenţa componentei continue a inducţiei, în urma fenomenului de redresare magnetică.

4. Fenomenul de histerezis răsturnat nu apare decît pentru adîncimi de pătrundere mari ale cîmpului magnetic; el este influenţat chiar de variaţii mici ale acesteia.

5. În acelaşi mod ca la transformatoarele obişnuite de măsură, şi în cazul modulatorului magnetic măsura în care fenomenul de histerezis se manifestă depinde de volumul circuitului magnetic; cu cît acesta este mai mare, cu atît erorile (pozitive şi negative în acest caz) introduse de fenomenul de histerezis sînt mai importante.

6. În cazul modulatoarelor magnetice cîmpul continuu acţionează ca un cîmp de polarizare. El favorizează (pînă la o anumită valoare) pătrunderea fluxului alternativ în materialul feromagnetic, cu toate consecinţele acestei pătrunderi.

Primit la 24 XII 1965

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de electroenergetică

BIBLIOGRAFIE

1. Розенблат М. А., Радиотехника, 1956, **11**, *8*, стр. 36—61.
2. Bejan I., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X (XIV)**, *1—2*, pp. 203 - 220.
3. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X (XIV)**, *3—4*, pp. 225—232.
4. Bejan I., Iliescu G., Bul. Inst. polit., Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *1—2*, pp. 241—246.
5. Розенблат М. А., *Магнитные усилители*. Т. **II**, Изд. Сов. Радио, М., 1960, стр. 152—159.

6. Vonsovschi S. V., *Teoria modernă a feromagnetismului.* Ed. tehn., Buc., 1956, (trad. din l. rusă).
7. Борзилович В. М., *Высоковолтные трансформаторы тока.* ГЭИ, М.—Л., 1956, стр. 145.
8. Рейнбот Г., *Технология и применение магнитных материалов.* ГЭИ, М.—Л., 1963, стр. 18, (trad. din l. germană).
9. Zaimovschi A. S., Usov V. V., *Metale şi aliaje electrotehnice.* EES, Buc., 1954, p. 38, (trad. din l. rusă).
10. * * * *Вопросы магнитных измерении.* Изд. АН УССР, Киев, 1961, стр. 4.
11. * * * *Manualul inginerului electrician.* Vol. I, Ed. tehn., Buc., 1953.
12. Attura G. M., *Magnetic Amplifier Engineering.* Cap. V, McGraw-Hill Book Comp. Inc., N. Y., 1959.
13. Geyger W. A., *Magnetic Amplifier Circuits.* McGraw-Hill Book Comp. Inc., N. Y., 1957.
14. Розенблат М. А., *Магнитные усилители.* т. I, Изд. Сов. Радио, М., 1960.
15. Бессонов Л. А., *Автомодуляция в электрических цепях с железным сердечником.* ГЭИ, М.—Л., 1958.

ABOUT HYSTERESIS IN MAGNETIC MODULATORS

(Abstract)

The Autor exposes the hypothesis concerning the existence of the reversed hysteresis phenomenon, manifested in double-frequency output magnetic modulators [2] ... [4], and established the following statements:

a) The reversed hysteresis phenomenon depends of the magnetization process developed in this kind of magnetic amplifier and represents a generalisation of the manifestation manner of the hysteresis in magnetic modulators.

The hysteresis in magnetic modulators appears reversed only for great penetration profondnesses of the alternative electromagnetic field [1].

b) The modification of the penetration profondness was obtained varying the magnetic permeability (Fig. 1 and 2), the frequency of the alternate magnetic field (Fig. 3), the electrical conductivity of the ferromagnetic material (Fig. 4), and was settled that the volume of the magnetic circuit too, has influence over the phenomenon of reversed hysteresis (Fig. 5).

c) The reversed hysteresis appears on account of the energy of the magnetic field containing fundamental frequency f and his pair multiples ($2f$, $4f$, a. s. a.), and depends of the value of the direct field. In the presence of those, some magnetization domains determine, by the decrease of the commande magnetic field, a smaller magnetic torque than by his growth. This magnetic torque is proved by the pair harmonics of the e. m. f., whose amplitude is proportional with those of the pair order magnetic induction [2].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

УДК 621.395.34

АНАЛОГО-ЦИФРОВОЙ КОМПАРАТОР

И. С. ЕРЕМЕЕВ

Большинство существующих компараторов работает в режиме нуль-органов: они фиксируют просто равенство или неравенство сравниваемых величин. Однако такое качественное определение часто является недостаточным. В последнее время в системах контроля и управления все чаще возникает потребность в индикации и регистрации величины разности с достаточно высокой точностью. Подобная операция может быть осуществлена с помощью цифровых схем обработки информации. Однако при этом несколько усложняются схемы компараторов, так как обычно необходимо сначала преобразовать непрерывную величину в дискретную, а затем уже осуществлять операцию сравнения. Ниже приведена схема, позволяющая сравнивать непрерывные по форме сигналы и представляющая результат сравнения в виде числа импульсов, т. е. в цифровом виде. В основе работы схемы лежит метод преобразования непрерывных входных сигналов в импульсы переменной длительности с последующим их сравнением в логическом блоке [1], [2].

В схеме компаратора (рис. 1) в качестве широтно-импульсных модуляторов (*ШИМ*) использованы магнитно-транзисторные блоки с сердечниками из материала с прямоугольной петлей гистерезиса [3], питаемые от генератора прямоугольных несимметричных импульсов (*ГПИ*) [4]. В качестве логических элементов использованы универсальные магнитные логические элементы [5], питаемые от источника тактовых импульсов частоты 10 *кгц*.

Работает компаратор следующим образом. Импульсы от *ГПИ* поступают на входы транзисторов T_3 и T_5 и в зависимости от полярности открывают или запирают эти транзисторы. Когда транзисторы открыты, по коллекторным обмоткам w_{k1} и w_{k2} протекают токи, значение которых определяется величинами входных сигналов $U_{вх1}$ и $U_{вх2}$. При этом сердечники $ШИМ_1$ и $ШИМ_2$ перемагничиваются до некоторых значений. В процессе перемагничивания сердечников в базовых обмот-

ках $w_{б1}$ и $w_{б2}$ индуктируются э. д. с., запирающие транзистор T_4 и T_6. Когда полярность импульса на выходе *ГПИ* меняется, транзисторы T_3 и T_5 запираются. Так как токи в обмотках w_{k1} и w_{k2} в момент отсечки транзисторов резко спадают до нуля, в обмотках $w_{б1}$ и $w_{б2}$ индуктируются э. д. с. такой полярности, что транзисторы T_4 и T_6 открываются. При этом к считывающим обмоткам $w_{\text{счит 1}}$ и $w_{\text{счит 2}}$ прикладывается практически все напряжение считывания $U_{\text{счит}}$. Благодаря наличию положительной обратной связи транзисторы остаются открытыми в

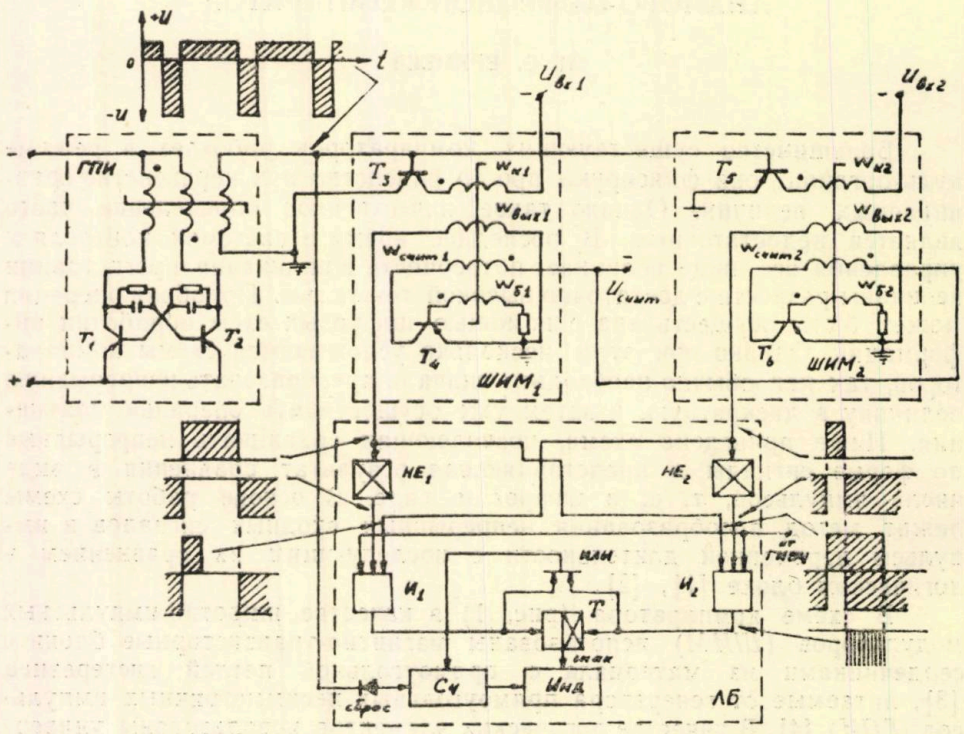


Рис. 1 — Принципиальная схема аналого-цифрового компаратора и сигналы на выходах модуляторов, инверторов и схем совпадения.

течение всего времени перемагничивания сердечников в исходное состояние. В течение этого же времени на выходных обмотках $w_{\text{вых 1}}$ и $w_{\text{вых 2}}$ индуктируются э. д. с., поступающие на логический блок (*ЛБ*). Амплитуда считывающего напряжения выбирается такой, чтобы в течение интервала считывания $\tau_{\text{счит макс}}$ определяемого длительностью импульса отрицательной полярности на выходе *ГПИ*, сердечник моду-

лятора мог перемагнититься полностью из состояния — B_r в состояние $+ B_s$.

Действительно, если $\Delta B = B_s + B_r = B_s(1 + \alpha)$, где $\alpha = B_r/B_s$, то согласно закону Фарадея

$$\Delta B = \frac{10^4}{w_{\text{счит}} S} \int_0^{\tau} U_{\text{счит}} \, dt$$

и, так как $U_{\text{счит}} = \text{const.}$,

$$\Delta B = \frac{10^4}{w_{\text{счит}} S} U_{\text{счит}} \tau_{\text{счит макс}},$$

откуда

$$U_{\text{счит}} = \frac{B_s(1 + \alpha) w_{\text{счит}} S}{\tau_{\text{счит макс}}} 10^{-4} \quad [6]. \tag{1}$$

Так как сердечники после прохождения считывающих импульсов возвращаются всегда в исходное состояние, т. е. состояние, предшествующее записи в сердечниках входной информации, то изменение индукции под воздействием входного сигнала равно изменению индукции в интервале считывания, т. е.

$$\frac{U_{\text{вх}} \tau_{\text{вх}}}{w_{\text{вх}} S} = \frac{U_{\text{счит}} \tau_{\text{счит}}}{w_{\text{счит}} S}.$$

При $U_{\text{счит}} = \text{const.}$ и $\tau_{\text{вх}} = \text{const.}$,

$$\tau_{\text{счит}} = U_{\text{вх}} \frac{w_{\text{счит}} \tau_{\text{вх}}}{w_{\text{вх}} U_{\text{счит}}} = F(U_{\text{вх}}). \tag{2}$$

Импульсы переменной длительности с выходов модуляторов поступают на входы инверторов $НЕ_1$ и $НЕ_2$ и схем совпадения $И_1$ и $И_2$ таким образом, что производится сравнение длительностей импульсов. На третьи входы схем совпадения подаются импульсы от генератора импульсов высокой частоты (*ГИВЧ*). Поэтому при частичном перекрытии во времени прямого импульса от одного *ШИМ* и инвертированного импульса от другого *ШИМ* на выходе схем совпадения появляются импульсы, число которых пропорционально времени этого перекрытия, т. е. в конечном счете, разности в длительности сравниваемых импульсов. Импульсы с выхода $И_1$ (или $И_2$) запускают (сбрасывают) триггер *Т*, сигнализируя тем самым о знаке разности. В то же время импульсы через схему разделения *ИЛИ* поступают на счет-

чик *Сч*, где и запоминаются. Со счетчика информация вводится в индикатор *Инд.*

Нетрудно убедиться, что разрешающая способность описанного дискриминатора определяется, в первую очередь, отношением длительности периода квантующего импульса высокой частоты к длительности импульса отрицательной полярности *ГПИ*, т. е.

$$\Delta x = \frac{1/f_{\text{квант}}}{\tau_{\text{счит макс}}} = \frac{1}{f_{\text{квант}}\,\tau_{\text{счит макс}}}.$$

Вторым фактором, влияющим на разрешающую способность компаратора, является постоянная времени модулятора, перемагничиваемого в начале считывающего импульса по пологой части петли гистерезиса до достижения восходящей боковой ветви петли, и при спаде считывающего импульса переходящего из состояния насыщения B_s в состояние остаточного намагничивания B_r. В первом приближении можно считать, что наклон пологой нижней ветви частной петли гистерезиса и наклон пологих нижней и верхней ветвей полной петли гистерезиса одинаковы, а следовательно равны и магнитные проницаемости материала сердечника на этих участках, и поэтому постоянная времени модулятора во всех интересующих нас режимах работы неизменна. Учитывая это, можно предположить, что для максимально возможной при прочих равных условиях разрешающей способности необходимо, чтобы переходный процесс в модуляторе завершился до того, как начнет спадать квантующий импульс, т. е. за время, в течение которого сигнал на считывающей обмотке модулятора достигнет значения не менее 95% от номинального. Это время определяется из следующего выражения:

$$3T_M \leqslant \frac{1}{2f_{\text{квант}}} - t_{\text{зф}},$$

или

$$T_M \leqslant \frac{1}{6f_{\text{квант}}} - \frac{t_{\text{зф}}}{3}, \tag{3}$$

где:

$$T_M = \frac{L}{R} = \frac{0{,}4\pi w^2_{\text{счит}}\,\mu S\,10^{-4}}{Rl} = \frac{0{,}4\pi w^2_{\text{счит}}\,SB_s(1-\alpha)\,10^{-4}}{H_m Rl}$$

— постоянная времени модулятора, $\mu = \dfrac{B_m - B_r}{H_m} = \dfrac{B_s(1-\alpha)}{H_m}$ — магнитная проницаемость сердечника на пологом участке петли гистерезиса,

S — сечение сердечника, l — длина средней магнитной силовой линии в сердечнике, R — полное активное сопротивление цепи считывания, H_m — м. д. с., соответствующая значению B_s, при котором определен коэффициент прямоугольности петли гистерезиса α, $t_{зф}$ — длительность заднего фронта квантующего импульса.

Следует заметить, что на разрещающую способность и точность компараторов существенное влияние оказывает дискретный характер процессов перемагничивания магнитных сердечников модуляторов (т. н. „скачки Баркгаузена"). Поэтому в настоящее время точность этих устройств ограничивается значениями порядка 0,05%. Коэффицент нелинейных искажений компараторов определяется в основном степенью линейности восходящей боковой ветви петли гистерезиса и для существующих материалов составляет величину порядка 0,3...0,5%.

С целью устранения влияния флюктуаций частот *ГПИ* и *ГИВЧ* на точность работы компаратора необходимо синхронизировать работу этих генераторов, либо питать модуляторы через делитель частоты от *ГИВЧ*.

Благодаря дифференциальному включению модуляторов в схеме компаратора изменения напряжения считывания, а также флюктуации температуры окружающей среды не оказывают практически никакого влияния на точность работы устройства.

Простота схемы, возможность сравнения непрерывных входных сигналов весьма низкого уровня (порядка $10^{-3}...10^{-4}$ *вт* и менее) с представлением сигнала разности в цифровой форме, высокая точность, разрешающая способность и линейность в сочетании с небольшим весом и габаритами, а также малым потреблением энергии позволяют расчитывать, что компараторы описанного типа найдут широкое применение в системах автоматического контроля и управления.

Поступила в 4 V 1965 г.

Научно-исследовательский и конструкторско-технологический институт городского хозяйства
Киев, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Crayford R. M., Instruments and control systems, 1962, **35**, *1*.
2. Еремеев И. С., Приборостроение, 1965, *1*.
3. Каплан, Шульц, *Модулятор ширины импульсов на полупроводниковых триодах и магнетиках.* В книге *Управление и измерение на расстоянии*, ИЛ, М., 1960, (пер. с англ.).
4. Харли Р. Б., *Логические схемы на транзисторах.* Изд. Мир, М., 1965, (пер. с англ.).
5. Еремеев И. С., Приборостроение, 1962, *12*.

COMPARATOR ANALOGIC-CIFRIC

(Rezumat)

Se expune o metodă combinînd tehnici analogice şi cifrice pentru a compara două semnale de intrare. În comparatorul hibrid semnalele analogice de intrare sînt convertite în impulsuri cu ajutorul unui modulator magnetic tranzistorizat. Impulsurile sînt comparate în blocurile logice. Diferenţa dintre duratele impulsurilor este cuantificată cu ajutorul unor impulsuri de înaltă frecvenţă şi reprezintă semnalul cifric de ieşire al comparatorului. Conversia cifric-analogic în comparator este realizată cu un dispozitiv translator adecvat. Este descrisă structura electrică a reţelei comparatorului şi sînt prezentate cîteva idei privind creşterea stabilităţii, precizia şi gama de funcţionare a comparatorului hibrid.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Schema de principiu a comparatorului analogic-cifric şi semnalele de la ieşirea modulatoarelor, invertoarelor şi schemelor de coincidenţă.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 621.317.755 ; 621.3.015.3

DESPRE POSIBILITATEA ÎNREGISTRĂRII OSCILOGRAFICE A PROCESELOR DE UNDĂ DIRECT FUNCŢIE DE DISTANŢĂ

DE

DORIN CRISTESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

Studiul fenomenului de propagare a undelor de supratensiune în circuite cu constante repartizate—linii lungi, înfăşurări de transformatoare sau de maşini rotative—poate fi întreprins pe cale analitică, pornind de la ecuaţiile lui Maxwell scrise pentru un element de circuit. Rezolvarea completă a acestui sistem de ecuaţii pentru obţinerea funcţiilor $u(x, t)$ şi $i(x, t)$ este posibilă—cu excepţia cîtorva rare cazuri particulare—numai prin considerarea unor ipoteze simplificatoare din care cea mai importantă este aceea a elementului zis „fără pierderi". (În cele de mai sus x reprezintă distanţa, iar t—timpul). Rezolvarea problemei pentru elementul „fără pierderi" furnizează în multe cazuri o idee generală asupra desfăşurării fenomenului, care trebuie însă completată cu observaţii experimentale cît mai aprofundate şi care de multe ori sînt greu de efectuat.

2. Metode experimentale

Problema propagării undelor de impuls în transformatoare, rezolvată analitic pe un circuit echivalent ideal, permite unele completări substanţiale rezultate din cercetarea experimentală, pe model, a procesului. În acest scop se face apel la înregistrările oscilografice (fig. 1) ale variaţiei tensiunii în diverse puncte ale înfăşurării.

Schimbînd punctul de sondă pe diverse prize ale modelului de transformator se obţin curbele din figură. Se remarcă faptul că se obţine în fiecare punct de priză o variaţie a tensiunii $u = f(t)$ în urma aplicării tensiunii de studiat, pe plăcile de fenomen ale oscilografului şi a unei tensiuni de baleiere cu variaţia proporţională cu timpul, pe celelalte plăci.

Pentru dimensionarea diverselor izolaţii ale transformatorului este esenţială cunoaşterea curbelor $u = f(x)$ la diverse momente de la aplicarea impulsului (fig. 1 b; curba *1*—repartiţia la $t = 0$; curba *4*—înfăşurătoarea maximelor etc.). Aceste curbe de variaţie se construiesc folosind curbele din fig. 1 a la diverse momente. Uneori se lucrează şi cu o reprezentare în trei dimensiuni, alăturîndu-se curbele $u = f(t)$ şi obţinîndu-se un „munte al tensiunii".

Ambele metode prezintă dezavantajul unor dificultăţi de manevrare precum şi al erorilor inerente unor determinări grafice. Apare pregnantă utilitatea unei metode de măsură în care pe ecranul oscilografic să apară direct variaţia tensiunii funcţie de loc, $u = f(x)$, la un moment oarecare. P. A. Abetti a propus în 1954 folosirea unui dispozitiv de măsurare prevăzut cu un comutator pas cu pas. În ultima parte a prezentei lucrări se propune o schemă de măsură, bazată pe ideia lui Abetti, cu posibilitatea suplimentară a reglării frecvenţei impulsurilor.

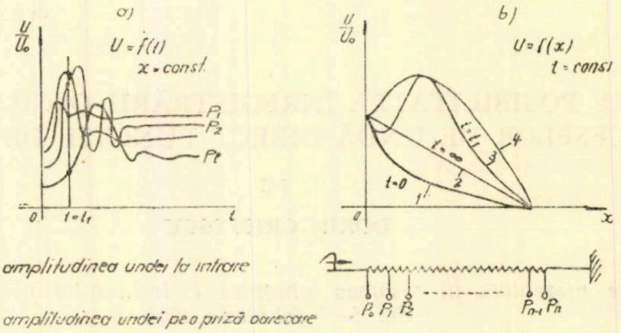


Fig. 1. — Procese de undă în transformator.

În timp ce procesul de propagare în transformator are o fundamentare teoretică suficientă, nu acelaşi lucru se poate spune despre propagarea undelor de impuls în maşinile electrice. Aici apar dificultăţi deosebite legate de multiplele reflexii în punctele de schimbare a impedanţei caracteristice, la trecerea conductorului din crestătură în aer şi invers. Realizarea aparaturii necesară metodei ce se expune ar permite studierea comodă şi a acestui proces care pînă azi ridică probleme deosebit de grele.

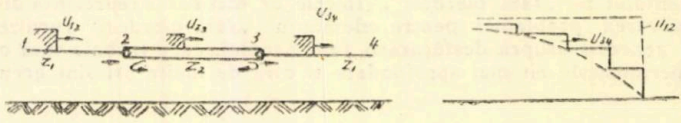


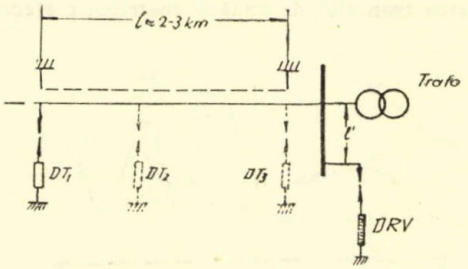
Fig. 2. — Propagarea undelor pe linie.

Un loc aparte îl ocupă studiul fenomenelor de undă în liniile de transport. Justificarea constă în faptul că pe liniile aeriene apar aceste fenomene periculoase care apoi se propagă spre instalaţiile electroenergetice din staţii. Analizele obişnuite se efectuează pentru elemente considerate „fără pierderi". În fig. 2 se prezintă un caz tipic de propagare în care, datorită fenomenelor de reflexie şi transmitere la punctele de joncţiune linie-cablu şi cablu-linie, unda, ce se propagă mai departe, are frontul mult schimbat faţă de unda incidentă.

Cunoaşterea elementelor de deformare a undei în procesele de reflexii succesive poate fi făcută analitic şi grafic (metoda Bergeron), această cunoaştere fiind deosebit de importantă în determinarea schemelor de protecţie ale instalaţiilor energetice. Determinările experimentale directe sînt dificile şi de aceea s-a făcut apel, ca şi la transformatoare, la modele. În 1960 Frieder Hoppadietz a propus folosirea principiului de măsură a lui Abetti la studiul propagării pe liniile „fără pierderi" şi a

prezentat trei cazuri particulare: linie scurtcircuitată la capăt, linie în gol şi linie cu o rezistenţă concentrată racordată în derivaţie. Metoda se pretează la analizarea unor cazuri mult mai complexe, la care calculul analitico-grafic se efectuează cu multă trudă.

Pentru fundamentarea unor scheme sigure de protecţie a staţiilor contra supratensiunilor şi în particular pentru stabilirea distanţei necesare admisibile l' între descărcătorul cu rezistenţă variabilă şi aparatul de protejat, în speţă transformatorul, şi pentru alegerea lungimii l necesare (fig. 3) pentru protejarea liniilor cu conductoare de protecţie la intrarea în staţii, ipoteza elementului „fără pierderi" nu mai este suficientă.



DRV - descărcător cu rezistenţă variabilă
DT - descărcător tubular

Fig. 3. — Schema de principiu a unei protecţii de staţie contra supratensiunilor atmosferice.

Oscilografierea undelor care au parcurs o anumită distanţă în lungul conductoarelor unei linii aeriene a arătat că există o puternică deformare a frontului undei (fig. 4). Această deformare este datorată în principal efectului corona de impulsie ce apare în jurul conductorului, precum şi, în mai mică măsură, efectului pelicular — sensibil la pante mari ale undei, de ordinul 100...200 kV/μs — şi influenţei rezistenţei pământului.

Spre deosebire de efectul corona în regimul permanent de funcţionare, ale cărui aspecte fizice şi teoretice sînt bine studiate, fenomenul corona de impulsie nu are încă teoria sa proprie, iar datele experimentale pe baza cărora s-ar putea elabora o astfel de teorie sînt foarte incomplete. Pentru studiul teoretic al procesului de propagare cu considerarea fenomenului corona, trebuie să se pornească de la ecuaţiile lui Maxwell, în care nu se neglijează termenii pierderilor transversale; se obţine astfel un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale sarcini-curenţi ($q-i$). Dacă se ţine seamă şi de caracterul neliniar al proceselor corona, integrarea acestui sistem se poate spune că este posibilă numai numeric şi doar în cîteva cazuri particulare.

Materialul experimental existent era concretizat în formula lui Faust şi Manger:

$$-\frac{dU}{dt} = kU^2,$$

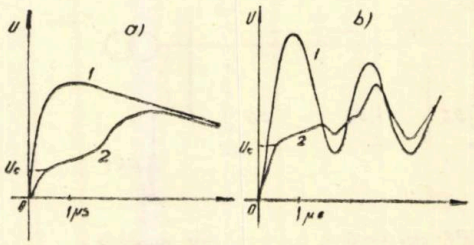
care integrată conducea la

$$U_1 = \frac{U_0}{\alpha l U_0 + 1},$$

cu semnificaţiile: U_0 — amplitudinea undei iniţiale de tensiune, [MV]; l — lungimea parcursului de unde, [km]; U_1 — amplitudinea undei după parcurgerea lungimii l, [MV]; $\alpha = kz/2 = 0{,}04 + 0{,}4$ [1/kmMV], coeficient empiric determinat pe baza clidonogramelor; z — impedanţa de undă a liniei.

Folosirea unei astfel de formule este însă nesatisfăcătoare, deoarece s-a constatat că procesul amortizării şi deformării undelor pe linie este puternic influenţat de parametrii undei iniţiale (durata frontului şi a spatelui) precum şi de polaritatea ei, elemente de care coeficientul k nu ţine seama.

S-a afirmat la începutul acestui paragraf că deformarea se datoreşte, pe lingă efectului corona de impulsie, şi efectului pelicular şi al rezistenţei solului. Analiza procesului de deformare, pe cale teoretică, datorită acestor ultime efecte, a fost prezentată în literatură pentru cîteva cazuri particulare. În legătură cu problemele de modelare, ce-şi propune să le atace prezenta lucrare, este interesant de făcut distincţie între contribuţia lor la deformarea frontului de undă şi contribuţia efectului corona de impulsie.



a. deformarea unei unde aperiodice
b. deformarea unei unde oscilante după parcurgerea a 189 km (după Zaveri, Kostenco)
U_c - tensiunea critică de apariţie a efectului Corona (cca 96 kv pt. linia respectivă)
1. curba tensiunii iniţiale
2. curba tensiunii deformate

Fig. 4. — Exemple de unde cu frontul deformat datorită elementelor rezistive şi fenomenului corona de impulsie.

Pe oscilograme procesele pot fi distinse ţinîndu-se seamă că deformarea datorită elementelor rezistive începe de la valoarea zero a tensiunii, în timp ce prezenţa fenomenului corona de impulsie este posibil a fi sesizată numai dincolo de pragul critic la care apare cîmpul de 30 kV/cm, la suprafaţa conductorului. Analiza oscilogramelor prezentate în literatură permite să se facă, destul de clar, distincţia între aceste două procese (spre exemplu deformarea unei unde care nu depăşeşte pragul critic corona). În fig. 4a depărtarea curbei 2 de curba tensiunii iniţiale înainte de pragul critic U_c nu se poate datora decît efectelor pelicular şi al rezistenţei solului.

În literatura cercetată se prezintă o serie de date comparative (tabelul 1) pentru aprecierea ponderei celor două procese (precizăm că datele se referă la unele formule aplicabile numai undelor dreptunghiulare).

Tabelul 1

Fenomenul	Lungimea parcursului km		
	1	2	5
Efect corona de impulsie (%)	95	91,1	80,7
Elemente rezistive (%)	5	8,8	19,3

În aceste date procentele se referă la 100% deformare totală a frontului undei dreptunghiulare.

Aspectul oscilogramelor existente arată că şi în cazul undelor de altă formă decît dreptunghiulară, proporţia anterioară nu se schimbă, factorul preponderent rămînînd efectul corona de impulsie; o altă concluzie nesemnalată de autorii oscilogramelor şi care totuşi apare suficient de clar este scăderea rapidă a efectului rezistiv cu creşterea duratei frontului undei iniţiale.

Din cele discutate mai sus se desprinde interesul practic deosebit pe care îl prezintă determinările experimentale ale amortizării şi deformării undelor pe linii. În mai multe ţări ale globului s-au întreprins astfel de experimentări şi rezultatele au dus la obţinerea unor prime formule de calcul. În literatură, o ultimă serie, destul de importantă, de astfel de rezultate, a fost comunicată în 1958 de S. L. Zaienţ, M. P. Kostenko şi A. G. Liapin de la laboratorul de tehnica tensiunilor înalte din Leningrad. Concluziile din prezenta lucrare cu privire la influenţa efectelor rezistive sînt deduse pe baza analizei oscilogramelor prezentate de aceşti autori.

Este necesar să subliniem costul deosebit de ridicat al unor astfel de experimentări şi, cu toate acestea, caracterul lor relativ rigid, ele nepermiţînd, prin însăşi felul cum au fost deduse, obţinerea unor date suficiente ale dependenţei de lungimea parcursă de undă.

Au fost prezentate pînă aici cîteva din cele mai importante domenii în care apar procese de undă în instalaţiile electroenergetice. Caracterul complex al fenomenelor cere o analiză experimentală atentă, care efectuată în instalaţiile reale ridică probleme deosebit de grele de execuţie şi uneori sînt imposibile din punct de vedere economic (cum ar fi de exemplu determinarea proceselor de undă în transformatoarele reale).

3. Cercetări pe modele

Multe din inconvenientele arătate pot fi eliminate dacă se folosesc modele corespunzătoare, de fabricaţie ieftină, şi pe care măsurătorile se pot efectua în condiţii sigure.

Folosirea unor astfel de modele prezintă în primul rînd avantajul unei economicităţi deosebite şi al unei supleţi ce se cere subliniată. Diversele efecte suplimentare, care ar putea apare în procesul respectiv, pot fi relativ uşor luate în considerare prin alegerea unei scheme adecvate. În plus, o alegere corespunzătoare a scării capacităţilor şi inductanţelor duce practic la eliminarea influenţei capacităţilor parazite şi deci la creşterea preciziei rezultatelor.

O cercetare riguroasă şi completă a problemei modelării trebuie să apornească la deducerea legilor modelelor de la ecuaţiile lui Maxwell. Din economie de expunere precizăm că se poate pleca de la ecuaţia lu Thomson

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

i de la ecuaţiile de legătură între tensiuni, curenţi, inductanţe, numere le spire, lungimi etc. Se consideră că aceste ecuaţii sînt valabile atît pentru procesul original, cît şi pentru model.

Se introduce noţiune de scară m_X a unei mărimi X, ca raportul

$$m_x = \frac{X_{\text{original}}}{X_{\text{model}}}.$$

Se pun astfel în evidenţă scările capacităţii (m_C), inductanţei (m_L), tensiunii (m_u), timpului (m_t) etc. Din mărimile modelului, trei pot fi alese arbitrar, celelalte deducîndu-se prin legile precizate mai sus.

Tabelul 2 cuprinde formulele de calcul pentru diverse scări, precum şi două exemple numerice pentru un model de linie şi un model de transformator, existente în laboratorul de tehnica tensiunilor înalte din Institutul politehnic, Bucureşti.

Tabelul 2

Mărimea	Simbol	Model trafo	Model linie	Exemple	
				Trafo	Linie
Lungime	l	m_l *)	$m_l = m_u^{1/3} m_i^{1/3} m_t^{1/3}$	2×10^{-1}	$76,9\times10^{-1}$
Număr de spire	w	m_w *)	$m_w = m_u^{1/3} m_i^{-2/3} m_t^{1/3}$	1	$1,41\times10^{2}$
Timp	t	m_t *)	m_t *)	1	30
Tensiune	u	$m_u = m_l^2 m_w m_t^{-1}$	m_u *)	4×10^{-2}	273×10^{-6}
Curent	i	$m_i = m_l m_w^{-1}$	m_i *)	2×10^{-1}	$54,6\times10^{-6}$
Capacitate	C	$m_C = m_l^{-1} m_w^{-2} m_t^2$	$m_C = m_u^{-1} m_i m_t$	5	6
Inductanţă	L	$m_L = m_l m_w^2$	$m_L = m_u m_i^{-1} m_t$	2×10^{-1}	150
Rezistenţă	R	$m_R = m_l m_w^2 m_t^{-1}$	$m_R = m_u m_i^{-1}$	2×10^{-1}	5

*) valori arbitrare.

Oricare ar fi modelul care se cercetează, generatorul de unde de impulsie, folosit drept sursă de alimentare a instalaţiei în cauză, cu şocuri de o formă dorită, este, în genere, un element comun tuturor modelelor.

După cum se observă din fig. 5 (porţiunea desenată cu linii groase) schema de principiu a generatorului de modelare diferă de cea a unui generator obişnuit prin următoarele elemente:

a) Dispozitivul de amorsare este reprezentat de un tiratron comandat cu impulsuri de o frecvenţă dorită.

b) Inductanţa L şi comutatorul K_2 sînt utile pentru obţinerea unor unde oscilante necesare studierii fenomenului corona de impulsie. Inductanţa este şuntată prin K_2 atunci cînd generatorul trebuie să producă o undă aperiodică.

e) Rezistenţele R_1 şi R_2 precum şi capacitatea C_2 sînt variabile pentru a se putea produce o gamă cît mai variată de forme de impulsuri (front lung, front scurt etc.).

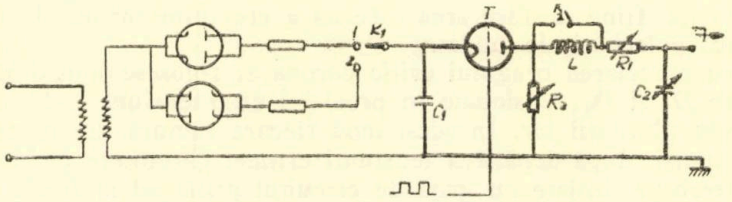


Fig. 5. — Schema de principiu a unui generator de impulsuri pentru alimentarea modelului.

Întrucît la studierea deformării undelor datorită procesului corona polaritatea impulsului prezintă o deosebită importanţă, în schema din fig. 5 se pot obţine impulsuri de semnul dorit, cu ajutorul comutatorului K_1.

Problema modelării transformatoarelor este larg analizată în literatură. Pentru modelarea liniilor, în analizoarele de procese tranzitorii curente se foloseşte lanţul de cuadripoli π (în fig. 6 inductanţa L_l şi capacitatea C_g). Mult mai puţin cercetată este problema liniilor cu pierderi, în speţă pierderi transversale. În fig. 6 se propune o astfel de schemă pentru un cuadripol elementar, cu scopul de a modela propagarea, ţinîndu-se seamă şi de efectul corona.

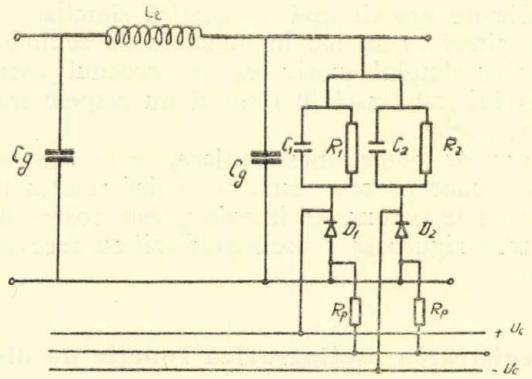


Fig. 6. — Schema unui cuadripol elementar de linie, cu posibilitatea modelării efectului corona de impulsie.

Dat fiind aportul redus al efectului pelicular şi al rezistenţei solului la deformarea undelor, s-a renunţat în această etapă la includerea lor într-o eventuală schemă echivalentă. În schema din fig. 6, C_g este capa-

citatea geometrică a conductorului, iar C_1, respectiv C_2, sînt capacităţile ce simulează creşterea capacităţii geometrice la apariţia efectului corona la o anumită polaritate, iar R_1, respectiv R_2, sînt rezistenţele transversale ale procesului corona. Se lucrează cu două valori de capacităţi şi rezistenţe, dată fiind desfăşurarea diferită a efectului corona de impulsie la cele două polarităţi ale undei.

Pentru modelarea pragului critic corona se folosesc două diode semiconductoare D_1 şi D_2, tensionate în prealabil cu o tensiune $\pm U_c$ în sensul invers conductibilităţii lor. În acest mod fiecare ramură din circuit intră în lucru numai după depăşirea tensiunii critice. Circuitele de tensionare prealabile trebuie izolate cu grijă de circuitul principal al liniei (R_p sînt rezistenţe de protecţie, de valoare foarte mare, a sursei de tensionare).

Determinarea corectă a valorilor rezistenţelor şi capacităţilor schemei, precum şi a tensiunii U_c, se realizează în funcţie de scopul modelării şi de valorile coeficienţilor de scară aleşi. Se poate simula efectul dispoziţiei diferite a conductoarelor în coronamentul stîlpului precum şi folosirea sau nu a sistemelor fasciculare. În ultima situaţie pragul critic corona trebuie modificat în mod corespunzător.

Nu întîmpină dificultăţi modelarea altor elemente ale unei scheme cum ar fi modelarea cablelor, a descărcătorilor cu rezistenţă variabilă, a descărcătorului tubular şi a altor aparate din staţii.

Modele fără pierderi alimentate cu unde de impuls de o frecvenţă constantă, de obicei 50 Hz, s-au realizat, şi un astfel de model există şi în laboratorul de tehnica tensiunilor înalte al Institutului politehnic din Bucureşti. Folosirea oscilografului drept aparat de măsură pentru cunoaşterea formei de variaţie în timp în diversele puncte ale staţiei este pe deplin posibilă. Ele nu permit însă o analiză detaliată a proceselor de reflecţii şi transmiteri ce au loc în punctele de schimbare a impedanţei caracteristice, pentru simplul motiv că pe ecranul oscilografului apare procesul în forma lui stabilizată în timp şi nu etapele tranzitorii prin care se ajunge la acest regim.

Obţinerea acestor etape intermediare, care sînt deosebit de utile pentru înţelegerea unor procese cum ar fi deformarea undelor pe liniile cu pierderi transversale corona de impulsie, este foarte dificilă, ele necesitînd o sincronizare riguroasă a oscilografierii cu frecvenţa şi polaritatea undelor.

4. Înregistrarea oscilografică funcţie de distanţă

Toate problemele prezentate precum şi totalitatea dificultăţilor enunţate pot fi rezolvate cu o precizie deosebită şi cu dificultăţi de lucru relativ modeste în cazul folosirii unei scheme de măsură cu care se obţine pe ecranul osciloţrafului variaţia tensiunii ca o funcţie directă a locului. Caracterul mai precis al măsurătorilor este accentuat prin folosirea unor modele cu mai multe prize de măsură (instalaţia în curs de execuţie la

Institutul politehnic, Bucureşti, permite măsurarea în 100 de puncte ale modelului).

Obţinerea unei oscilograme obişnuite se realizează aplicînd plăcilor de fenomen ale tubului oscilografic tensiunea de măsură, iar la plăcile de deplasare orizontală a unei tensiuni de baleiere de o formă corespunzătoare fenomenului studiat. În acest mod deplasarea orizontală a spotului este proporţională cu viteza de creştere a tensiunii de baleiere, şi deci cu timpul.

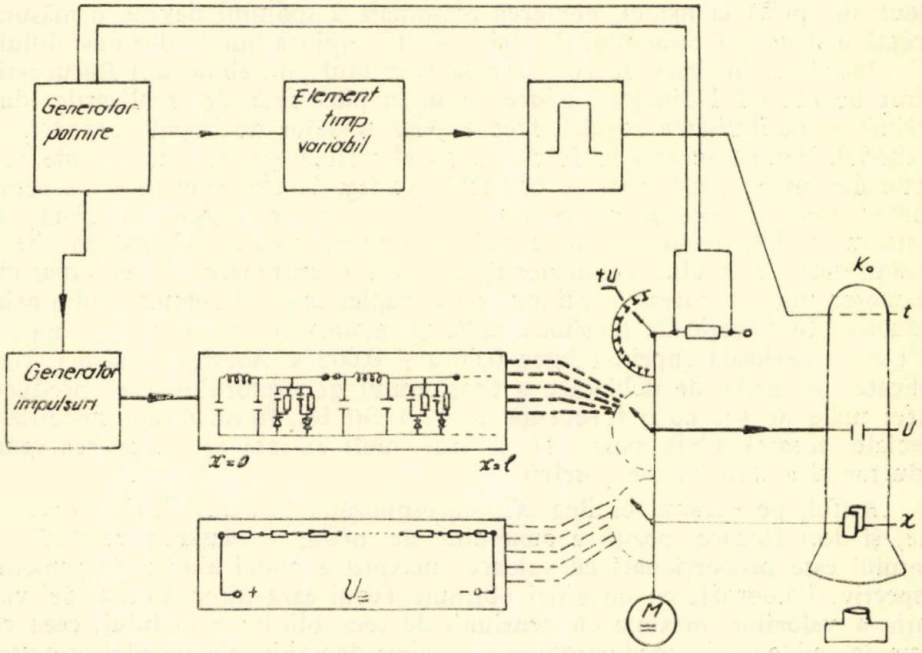


Fig. 7. — Schema de principiu a înregistrării oscilografice, direct funcţie de distanţă.

În schema prezentată în fig. 7 plăcile de fenomen sînt conectate la contactul mobil al unui comutator pas cu pas, cu motor. La contactele lui fixe, în număr de 100, se leagă punctele de priză ale modelului. În acest mod se aplică plăcilor de deviere verticală tensiunile preluate de la fiecare priză, după poziţia contactului mobil al comutatorului.

Devierea pe cealaltă axă a spotului electronic se obţine prin aplicarea unei tensiuni proporţionale cu distanţa punctului de priză de la originea lungimilor (capătul modelului). Aceasta se realizează prin construirea unui divizor de tensiune, avînd acelaşi număr de trepte ca şi numărul de prize al modelului. Instalaţia realizată cuprinde 100 de rezistenţe

de cîte 1 KΩ. Acestui divizor i se aplică o tensiune continuă de o valoare necesară obţinerii unei deplasări complete pe ecran stînga-dreapta. Fiecare treaptă a divizorului este legată la un alt şir de contacte al comutatorului iar contactul mobil respectiv al şirului este conectat la plăcile de baleiere orizontală. Contactul din mijloc al selectorului — al 50-lea — se leagă la pămînt pentru obţinerea unei deviaţii simetrice.

În acest mod, pentru o anumită poziţie a contactului mobil al selectorului se obţine, pe ecranul oscilografic, o anumită poziţie a spotului electronic. Dar fiecare poziţie a selectorului corespunzînd unui anumit punct de priză la model, devierea orizontală a spotului devine o măsură directă a distanţei punctului de priză de la originea lungimilor modelului.

Instalaţia în curs de realizare la Institutul politehnic din Bucureşti, prima de acest fel din ţară, aduce nou, în plus faţă de realizările din străinătate, posibilitatea reglării frecvenţelor undelor de impuls ce se trimit în model. Pentru aceasta se foloseşte un al treilea şir de contacte ale selectorului care, după cum se constată din fig. 7, sînt şuntate şi în acest mod se poate culege de pe o rezistenţă de valoare mare, înseriată cu contactul mobil, o tensiune în impulsuri, cu frecvenţa reglabilă după viteza de antrenare a axului comutatorului. Această antrenare s-a efectuat cu un motor mic de curent continuu, serie, cuplat la axul comutatorului prin reductor. În funcţie de tensiunea aplicată motorului se pot obţine impulsuri cu o perioadă cuprinsă între 0,08 s şi 0,002 s. Aceste impulsuri sînt aplicate pe grila de deblocare a tiratronului generatorului, care produce astfel unde de şoc cu o frecvenţă de 12,5...50 Hz. În cazul unor necesităţi speciale această plajă poate fi şi mai mult extinsă prin alegerea unui reductor şi a unui motor potrivit.

Astfel, pe ecranul oscilografic corespunzător fiecărei devieri orizontale, şi deci fiecărei poziţii a punctului de priză, deplasarea verticală a spotului este proporţională cu valoarea maximă a undei ajunse în punctul respectiv. Fotografierea imaginei obţinute furnizează direct curba de variaţie a valorilor maxime ale tensiunii de şoc aplicate modelului, ceea ce pune în evidenţă în mod pregnant avantajele deosebite ale metodei propuse. Astfel pentru obţinerea acestei curbe de variaţie ar fi necesare mai multe oscilograme (circa 100), şi anume cîte prize are modelul.

Schema de măsură permite însă şi înregistrarea aspectului undei în diverse etape ale propagării: la începutul unei linii, într-o secţiune oarecare etc., adică permite determinarea repartizării tensiunii pe diferitele prize succesive ale modelului după un anumit timp de la aplicarea impulsului.

În mod obişnuit, spotul electronic este blocat prin aplicarea pe grila tubului catodic a unei tensiuni de negativare. Deblocarea spotului este realizată pentru o durată foarte mică (circa 0,2...0,3 μs) prin aplicarea pe grilă a unui impuls pozitiv la timpul dorit a se face analiza. În acest mod nu se mai obţine imaginea amplitudinii maxime pe fiecare punct de priză, ci numai valoarea tensiunii la timpul corespunzător celui aplicării impulsu-

lui pozitiv. Pe ecran apare o imagine compusă dintr-o succesiune de puncte corespunzătoare repartiţiei tensiunii de-a lungul modelului la diverse timpuri, adică a curbei $u = f(x)$, la $t = \text{const}$.

Compararea şi analiza unor oscilograme astfel obţinute, pentru diverse timpuri de deplasare, poate furniza o parte din precizările necesare cu privire la procesul de deformare a undelor pe o linie sub acţiunea efectului corona de impulsie.

În rezumat funcţiile atribuite tubului catodic în schema prezentată, sînt :

a) plăcile de deflecţie verticală . . . . tensiunea u,
b) plăcile de deflecţie orizontală . . . . punctul de priză x,
c) grila tubului . . . . . momentul t.

Pentru obţinerea deblocării spotului la momentul dorit, se foloseşte un generator de timp variabil şi un generator de impulsuri, organe care sînt în curs de realizare la Institutul politehnic din Bucureşti. Impulsul de sincronizare, preluat de la al treilea şir de contacte al comutatorului pas cu pas, este trimis la un generator de pornire ce comandă declanşarea undei de impulsie şi la dispozitivul de timp variabil.

5. Concluzii

Folosirea instalaţiei şi sistemului de măsurare prezentate mai sus este posibilă chiar în faza actuală şi aplicarea ei la studiul modelelor de transformator construite la Uzinele „Electroputere", Craiova, ar fi foarte potrivită, conferind o mare operativitate experienţelor.

Instalaţia completă va permite obţinerea unui bogat material experimental cu privire la propagarea şi deformarea undelor pe modele de linii şi luarea în considerare a influenţei diverşilor parametri ai problemei. Precizarea acestor elemente este foarte utilă pentru o protecţie corespunzătoare a instalaţiilor electroenergetice împotriva supratensiunilor.

Institutul politehnic, Bucureşti,
Catedra de tehnica tensiunilor înalte

SUR LA POSSIBILITÉ D'ENREGISTREMENT OSCILLOGRAPHIQUE DES PROCESSUS D'ONDE, DIRECTEMENT EN FONCTION DE DISTANCE

(Résumé)

On présente les principales domaines dans lesquels apparaissent des processus d'onde dans les installations électroénergetiques (enroulements des transformateurs et des machines rotatives, lignes électriques etc.). On souligne que les considérations théoriques nécessitent des hypothèses simplificatrices en négligeant les résistances et les conductances transversales. C'est par ces raisons là qu'il est nécessaire un très grand nombre de déterminations expérimentales.

L'utilisation des modèles s'avère, pour les expériences, plus économique, et plus commode, en offrant, en même temps, des posibilités de travail et de précision remarquables.

On propose une schéma équivalente pour l'étude expérimentale par modèle des processus de déformations des ondes de surtension sous l'action du phénomène corona d'impulsion.

Les déterminations expérimentales quant aux phénomènes de propagation, en tenant compte des pertes, ont pour but la détermination de la courbe $u = f(x)$. On présente une méthode de mesure pour l'enregistrement par voie directe de la tension comme fonction de distance et le stade de la réalisation d'un tel dispositif à l'Institut Polytechnique de Bucarest.

Explication des figures

Fig. 1. — Processus d'onde dans le transformateur.

Fig. 2. — Propagation des ondes le long d'une ligne.

Fig. 3. — Schéma de principe d'une protection de station contre les surtensions atmosphériques.

Fig. 4. — Exemples d'ondes ayant le front déformé par la présence des éléments résistifs et le phénomène corona d'impulsion.

Fig. 5. — Schéma de principe d'un générateur d'impulses pour l'alimentation du modèle.

Fig. 6. — Schéma d'un quadripôle élémentaire d'une ligne, ayant la possibilité de modéler l'effet corona d'impulsion.

Fig. 7. — Schéma de principe de l'enregistrement oscillographique, directement, en fonction de distance.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

УДК 621.396.611.3

О ТЕОРИИ ТРАНЗИСТОРНЫХ *LC*-ГЕНЕРАТОРОВ С *n* КОЛЕБАТЕЛЬНЫМИ КОНТУРАМИ

И. Д. БОЯНОВ, Д. Д. БАЙНОВ, Ю. П. МАРИНОВ и Н. А. ПАРТИНОВА

В последние годы транзисторы нашли широкое применение в радиоэлектронных схемах, включительно и при конструировании автогенераторов.

В литературе, как например [1]...[3], рассматриваются некоторые вопросы теоретического анализа процессов в одноконтурных транзисторных автогенераторах и инженерного вычисления.

Настоящая работа посвещается вопросам теории n-контурных транзисторных LC-автогенераторов с индуктивной обратной связью, находящихся под действием внешних гармонических напряжений. В результате теоретического анализа установлены критерии существования устойчивого колебательного процесса в автогенераторе.

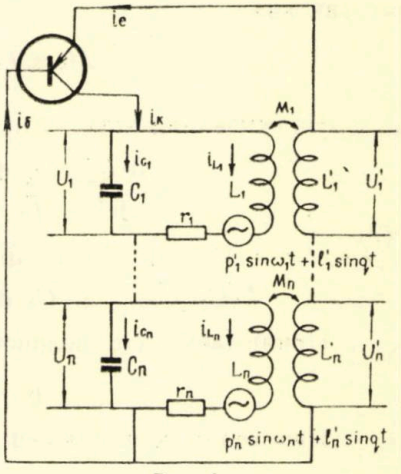


Рис. 1

На рис. 1 приведена принципиальная схема исследуемого транзисторного автогенератора. Здесь транзистор связан по схеме с общей базой, причем колебательные контуры связаны в его коллекторной цепи. Через i_e, i_k и $i_б$ обозначены токи протекающие соответственно через эмиттерную, коллекторную и базовую цепь транзистора, а через i_{L_k} и i_{C_k}, $(k = 1, 2, ..., n)$ — токи через индуктивное и соответственно емкостное разветвление колебательных контуров с индуктивностями L_k, емкостями C_k и сопротивлениями r_k.

Используя для каждого из колебательных контуров закон Кирхгофа и при положении, что между их катушками нет индуктивной связи, получаем следующую систему дифференциальных уравнений

$$L_k\frac{\mathrm{d}i_{L_k}}{\mathrm{d}t}+r_k i_{L_k}+U_k=M_k\frac{\mathrm{d}i_e}{\mathrm{d}t}+p'_k\sin\omega_k t+l'_k\sin qt. \tag{1}$$

При дальнейшем рассмотрении учтем, что

а) $$u_k=-\frac{1}{C_k}\int i_{C_k}\mathrm{d}t=-\frac{1}{C_k}\int(\alpha i_e-i_{L_k})\mathrm{d}t=\frac{1}{C_k}\int i_{L_k}\mathrm{d}t-\frac{1}{C_k}\int\frac{\beta u_e}{R_{\text{вх}}}\mathrm{d}t,$$

где: $\alpha=\Delta i_{L_k}/\Delta i_e$ — коэффициент усиления транзистора по току, $\beta=f(u_e)$ — коэффициент усиления транзистора по напряжению, а $R_{\text{вх}}\approx\text{const}$. (для малых u_e) — входное сопротивление транзистора;

б) $$u'_k=M_k\frac{\mathrm{d}i_{L_k}}{\mathrm{d}t}-L'_k\frac{\mathrm{d}i_e}{\mathrm{d}t}\approx M_k\frac{\mathrm{d}i_{L_k}}{\mathrm{d}t},$$

так как в реальных автогенераторах при малом рассеивании в трансформаторе для обратной связи выполнено условие

$$M_k\frac{\mathrm{d}i_{L_k}}{\mathrm{d}t}\gg L'_k\frac{\mathrm{d}i_{L_k}}{\mathrm{d}t};$$

в) так как

$$M_k\ll L_k,\quad M_k\frac{\mathrm{d}i_e}{\mathrm{d}t}\ll L_k\frac{\mathrm{d}i_{L_k}}{\mathrm{d}t}.$$

На основании этих соотношений систему (1) можно записать в виде

$$\frac{\mathrm{d}^3 i_{L_k}}{\mathrm{d}t^3}+\frac{r_k}{L_k}\frac{\mathrm{d}^2 i_{L_k}}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\beta}{R_{\text{вх}}L_kC_k}\cdot\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}t}-$$
$$-\frac{1}{L_kC_k}u_e\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{L_kC_k}\frac{\mathrm{d}i_{L_k}}{\mathrm{d}t}=p'_k\sin\omega_k t+l'_k\sin qt,\ \left(u_e=\sum_{k=1}^{n}u_k\right). \tag{2}$$

Принимаем, что нелинейная функция $\beta=f(u_e)$ имеет вид

$$\beta=\beta_0+au_e+bu_e^2.$$

Переходим к напряжениям и система (2) принимает вид

$$\frac{1}{M_k}\ddot{u}_k+\frac{r_k}{L_kM_k}\dot{u}_k-\frac{1}{R_{\text{вх}}L_kC_k}\left[\beta_0+a\sum_{\nu=1}^{n}u_\nu+b\left(\sum_{\nu=1}^{n}u_\nu\right)^2\right]\sum_{\nu=1}^{n}\dot{u}_\nu+$$
$$+\frac{1}{L_kC_kM_k}u_k-\frac{1}{L_kC_k}\left[a\sum_{\nu=1}^{n}u_\nu+2b\left(\sum_{\nu=1}^{n}u_\nu\right)^2\right]\sum_{\nu=1}^{n}\dot{u}_\nu=p'_k\sin\omega_k t+l'_k\sin qt, \tag{3}$$
$$(k=1,2\ldots n).$$

Предполагаем, что r_k, β_0 и a являются величинами малости. Полагаем: $r_k = \lambda b'_k$, $\beta_0 = \lambda m$, $a = \sqrt{\lambda}C$, $1/L_k C_k = \omega_k^2$, $M_k p'_k = \lambda^{3/2} p_k$, $M_k l'_k = \sqrt{\lambda} l_k$; здесь $\lambda > 0$ является малым параметром.

После подстановки $u_k = \sqrt{\lambda} x_k, (k = 1, 2, ..., n)$, система (2) принимает вид

$$\ddot{x}_2 + \omega_k^2 x_k = \lambda \left\{ b_k \dot{x}_k + \left[v_k + s_k \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu + d_k \left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \right)^2 \right] \sum_{\nu=1}^{n} \dot{x}_\nu + \right.$$

$$\left. + p_k \sin \omega_k t \right\} + l_k \sin qt, \quad (k = 1, 2, ..., n), \tag{4}$$

где

$$b_k = \frac{b'_k}{L_k}, \quad v_k = \frac{mM_k}{R_{вх} L_k C_k}, \quad s_k = \frac{cM_k (1 + R_{вх})}{R_{вх} L_k C_k}, \quad d_k = \frac{bM_k (1 + 2R_{вх})}{R_{вх} L_k C_k}.$$

Прежде всего остановимся на нерезонансном случае. Предполагаем, что ни одно из чисел ω_k, $(k = 1, 2, ..., n)$, не является целым.

Для порождающего решения выбираем частный интеграл порождающей системы (4)

$$x_{k0} = l_k \sin qt, \quad l_k = \frac{l_k}{\omega_k^2 - q^2}, \quad (k = 1, 2, ..., n). \tag{5}$$

Для удобства вводим обозначение $E = \sum_{\nu=1}^{n} l_\nu$. Порождающему решению (5) отвечает единственное периодическое с периодом 2π решение системы (4). Условиями асимптотической устойчивости этого решения являются

$$\int_0^{2\pi} \left[b_k + v_k + s_k \sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu 0} + d_k \left(\sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu 0} \right)^2 \right] dt < 0, \quad (k = 1, 2, ..., n), \tag{6}$$

или в развернутом виде

$$2b_k + 2v_k + d_k E^2 < 0, \quad (k = 1, 2, ..., n). \tag{7}$$

Из (7) видно, что для получения устойчивых колебаний в рассматриваемом случае необходимо при конструировании автогенератора таким образом подобрать элементы колебательных контуров и рабочего режима транзистора чтобы r_k, $(k = 1, 2, ..., n)$, были очень малыми, а β_0 и b — отрицательными.

Сейчас рассмотрим периодические колебания рассмотренного автогенератора при наличии одной резонансной частоты. Предпола-

гаем, что ω_1 и q, $\omega_1 \neq q$, являются целыми числами, а $\omega_s, (s = 2,3,\ldots n)$ — нецелыми.

Для порождающего решения выбираем частный интеграл порождающей системы (4)

$$(8)\qquad \begin{cases} x_{10} = A_0 \cos\omega_1 t + \dfrac{B_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t + l_1 \sin qt, \\ x_{s0} = l_s \sin qt, \quad (s = 2,3,\ldots n). \end{cases}$$

Искомое периодическое с периодом 2π решение системы (3) можно представить степенными рядами вида [4]

$$(9)\qquad \begin{cases} x_1(t) = x_{10}(t) + \beta_1 \cos\omega_1 t + \dfrac{f_1}{\omega_1}\sin\omega_1 t + \\ \quad + \sum\limits_{m=1}^{\infty}\left[C_{1m}(t) + \dfrac{\partial C_{1m}(t)}{\partial A_0}\beta_1 + \dfrac{\partial C_{1m}(t)}{\partial B_0}f_1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 C_{1m}(t)}{\partial A_0^2}\beta_1^2 + \ldots\right]\lambda^m, \\ x_s(t) = x_{s0}(t) + \psi_s \cos\omega_s t + \dfrac{\varphi_s}{\omega_s}\sin\omega_s t + \\ \quad + \sum\limits_{m=1}^{\infty}\left[C_{sm}(t) + \dfrac{\partial C_{sm}(t)}{\partial A_0}\beta_1 + \dfrac{\partial C_{sm}(t)}{\partial B_0}f_1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 C_{sm}(t)}{\partial A_0^2}\beta_1^2 + \ldots\right]\lambda^m, \\ \qquad (s = 2,3,\ldots,n). \end{cases}$$

Величины β_1 и f_1 являются функциями λ, которые при $\lambda = 0$ обращаются в нуль, величины φ_s, ψ_s, $(s = 2,3,\ldots n)$, являются функциями λ, β_1 и f_1, которые при $\lambda = 0$ также аннулируются.

При сделанных предположениях необходимым условием чтобы решение (9) соответствовало решению (8) и было бы периодическим с периодом 2π является [4]

$$(10)\qquad C_{11}(2\pi) = 0, \quad \dot{C}_{11}(2\pi) = 0.$$

Условия (10) являются уравнениями основных амплитуд A_0 и B_0. После известных вычислений, условия (10) принимают вид

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{d_1}{4}A_0^3 + \dfrac{d_1}{4\omega_1^2}A_0 B_0^2 + \left(b_1 + v_1 + \dfrac{1}{2}d_1 E^2\right)A_0 + p_1 = 0, \\ \dfrac{d_1}{4\omega_1^2}B_0^3 + \dfrac{d_1}{4}A_0^2 B_0 + \left(b_1 + v_1 + \dfrac{1}{2}d_1 E^2\right)B_0 = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим решение $B_0 = 0$, $A_0 = A_0$, где A_0 действительный корень кубического уравнения

$$(12)\qquad \frac{d_1}{4}A_0^3+\left(b_1+v_1+\frac{1}{2}d_1E^2\right)A_0+p_1=0.$$

Достаточным условием для осуществления периодических с периодом 2π решений системы (4), развертываемых в ряды по целым степеням малого параметра согласно [4] является

$$(13)\quad \Delta=\pi^2\left(\frac{3d_1}{4}A_0^2+b_1+v_1+\frac{1}{2}d_1E^2\right)\left(\frac{d_1}{4}A_0^2+b_1+v_1+\frac{1}{2}d_1E^2\right)\neq 0.$$

Условие (13) легко можно осуществить при подходящем выборе амплитуды p_1'.

Условиями асимптотической устойчивости рассмотренного решения являются

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{D[C_{11}(2\pi),\dot{C}_{11}(2\pi)]}{D[A_0,B_0]}>0, \quad \dfrac{\partial C_{11}(2\pi)}{\partial A_0}+\dfrac{\partial \dot{C}_{11}(2\pi)}{\partial B_0}<0, \\ \displaystyle\int_0^{2\pi}\left[b_p+v_p+s_p\sum_{\nu=1}^{n}x_{\nu 0}+d_p\left(\sum_{\nu=1}^{n}x_{\nu 0}\right)^2\right]dt<0, \quad (p=2,3,\ldots n), \end{cases}$$

или в развернутом виде

$$(15)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{3d_1}{4}A_0^2+b_1+v_1+\dfrac{1}{2}d_1E^2\right)\left(\dfrac{d_1}{4}A_0^2+b_1+v_1+\dfrac{1}{2}d_1E^2\right)>0, \\ 2b_k+2v_k+d_k(A_0^2+E^2)<0, \quad (k=1,2,\ldots,n). \end{cases}$$

Из условий (15) видно, что и при резонансном случае для получения устойчивого автоколебательного процесса необходимо конструировать автогенератор и подбирать режим его транзистора так, чтобы r_k, $(k=1,2,\ldots,n)$, были величинами очень малыми, а β_0 и b получались отрицательными.

Поступила в 8 XI 1965 г.

Машинно-электротехнический институт,
София, Н. Р. Болгария

ЛИТЕРАТУРА

1. Капцов Л. Н., Яблонский В. В., Радиотехника и электроника, 1957, **11**, *9*.
2. Кобзарев В. В., Берегнев П. Д., *К вопросу о расчете высокочастотных автогенераторов на плоскостных триодах*. В Сб. статей *Полупроводниковые приборы и их применение* (под ред. Я. А. Федотова), вып. *2*, Сов. Радио, М., 1957.

3. Капцов Л. Н., Абдюханов М. А., Калинин А. А., Радиотехника и электроника, 1957, **11**, *9*.
4. Плотникова Г. В., Байнов Д. Д., Rev. Roum. Sci. Techn, S. Méc., appl. 1965, **10**, *2*, стр. 471—378.

ASUPRA TEORIEI GENERATORILOR *LC* TRANZISTORIZAŢI CU *n* REŢELE OSCILANTE

(Rezumat)

Se expun condiţiile de existenţă şi stabilitate a oscilaţiilor periodice ale generatorului *LC* tranzistorizat, alimentat sub tensiuni sinusoidale exterioare.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 621—83

ASPECTE NOI PRIVIND EXTINDEREA APLICĂRII ALGEBREI LOGICII LA PROIECTAREA SCHEMELOR DE ACŢIONARE ELECTRICĂ

DE

EUGEN BALABAN şi N. V. BOŢAN

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

Într-o lucrare anterioară [1] am studiat unele posibilităţi de aplicare a algebrei logicii la proiectarea schemelor de acţionare electrică.

În cele ce urmează ne propunem să extindem aceste posibilităţi şi asupra altor scheme, mai complexe, întîlnite în practică.

2. Pornirea automată a unui motor sincron

Vom considera la început cazul pornirii automate a unui motor sincron în asincron, folosind două trepte de pornire.

Pentru realizarea pornirii vor fi necesare două contactoare A şi B. Comanda pornirii se face cu un buton de pornire P, iar oprirea se comandă cu un buton O. La începutul pornirii, curentul indus în înfăşurarea de excitaţie este limitat de o rezistenţă care în apropierea vitezei de sincronism trebuie să fie scurtcircuitată de contactul unui contactor de sincronizare S. Controlul sincronizării, adică comanda contactorului S, se realizează cu ajutorul unui releu de minimă tensiune Rs, a cărui bobină este alimentată la tensiunea indusă în înfăşurarea de excitaţie.

Trecerea de la prima treaptă de pornire la cea de a doua, se face în funcţie de timp, cu ajutorul releului Rt_1. Pentru a evita încălzirea maşinii în cazul întîrzierii sincronizării, este necesar ca atunci cînd sincronizarea nu se realizează la timpul impus t_2, fixat cu ajutorul unui releu Rt_2, întreaga schemă să fie deconectată de la reţea, iar pornirea să fie reluată din nou.

Din cele arătate rezultă că pentru realizarea schemei sînt necesare următoarele elemente:

$$P, O, A, B, S, Rt_1, Rt_2, Rs.$$

Alimentarea bobinei contactorului A, de cuplare a motorului la tensiunea scăzută, depinde de elementele P, O, A, dar în acelaşi timp depinde şi de Rt_1, în sensul că după timpul t_1, motorul fiind cuplat la tensiunea normală prin intermediul contactorului B, alimentarea bobinei A trebuie să fie întreruptă.

Prin urmare:

$$f(A) = f_1(P, O, A, Rt_1).$$

Alimentarea bobinei contactorului A trebuie să aibă loc numai în următoarele situaţii:

$$f(1, 0, 0, 0) = 1, \quad f(1, 0, 1, 0) = 1, \quad f(0, 0, 1, 0) = 1.$$

Funcţionarea contactorului B trebuie să fie precedată de funcţionarea contactorului A şi de funcţionarea releului Rt_2. Totodată, întrucît la acţionarea contactorului B, bobina contactorului A este decuplată de la reţea, asigurarea continuităţii în alimentarea bobinei B se realizează cu ajutorul unui contact de autoreţinere B.

Prin urmare:

$$f(B) = f_2(A, B, Rt_1).$$

Deoarece releul Rt_1 nu poate acţiona înintea contactorului A, rezultă că:

$$f_2(0, 0, 1) = 0 \tag{1}$$

şi prin urmare bobina contactorului B va fi pusă sub tensiune numai după timpul t_1 de la acţionarea contactorului A, deci:

$$f_2(1, 0, 1) = 1.$$

Întrucît releul Rt_1 comandă atît întreruperea circuitului bobinei contactorului A cît şi închiderea circuitului bobinei contactorului B, rezultă un interval de timp intermediar scurt, cînd contactele contactoarelor A şi B sînt simultan deschise, adică:

$$f_2(0, 0, 1) = 1, \tag{2}$$

deoarece alimentarea bobinei contactorului B trebuie păstrată.

După trecerea acestui interval de timp intermediar avem situaţia:

$$f_2(0, 1, 1) = 1.$$

Comparînd însă relaţiile (1) şi (2) se observă că ele sînt incompatibile, ceea ce face necesar, pentru îndeplinirea condiţiilor impuse, să se utilizeze în plus un contactor intermediar C.

În această situaţie, elementele schemei vor fi:

$$P, O, A, B, C, S, Rt_1, Rt_2, Rs.$$

Păstrînd rolurile impuse iniţial contactoarelor A şi B, contactorul C va fi utilizat pentru cuplarea la reţea a circuitului de comandă. Prin urmare alimentarea bobinei contactorului A nu va mai depinde de poziţiile butoanelor P şi O, de acestea depinzînd direct numai funcţionarea contactorului intermediar C. Funcţionarea contactorului C mai este condiţionată însă şi de faptul dacă sincronizarea, adică acţionarea contactorului S, se produce în intervalul de timp impus, t_2.

Rezultă deci că:

$$f(C) = f_1(P, O, C, Rt_2, S).$$

Se poate observa cu uşurinţă, că alimentarea bobinei contactorului C are loc în următoarele situaţii:

$$f_1(1,0,0,0,0) = 1, \quad f_1(1,0,1,0,0) = 1, \quad f_1(0,0,1,0,0) = 1,$$
$$f_1(0,0,1,0,1) = 1, \quad f_1(1,0,1,0,1) = 1, \quad f_1(0,0,1,1,1) = 1,$$
$$f_1(1,0,1,1,1) = 1.$$

Aplicînd formula de interpolare a lui Lagrange şi efectuînd calculele rezultă:

$$f(C) = \bar{O} \cdot \bar{Rt}_2 \cdot \bar{S} \cdot (P \vee C) \vee \bar{O} \cdot C \cdot S. \tag{3}$$

În această situaţie, funcţionarea contactorului A va depinde de starea contactorului C şi a releului de timp Rt_1:

$$f(A) = f_2(C, Rt_1) = C \cdot \bar{Rt}_1.$$

De asemenea funcţionarea contactorului B depinde de aceleaşi elemente:

$$f(B) = f_3(C, Rt_1) = C \cdot Rt_1.$$

Deoarece releul Rt_1 trebuie să funcţioneze după intervalul de timp t_1 de la anunţarea comenzii, deci de la intrarea în funcţie a contactorului C, rezultă:

$$f(Rt_1) = f_4(C) = C.$$

După cum s-a arătat mai sus, funcţionarea contactorului S depinde de starea releului Rs şi bineînţeles şi de cea a contactorului C:

$$f(S) = f_5(C, Rs) = C \cdot \bar{Rs}. \tag{4}$$

Releul Rt_2 fixează intervalul de timp în care trebuie să se realizeze sincronizarea şi prin urmare este pus în funcţie odată cu contactorul C, putînd fi chiar asociat acestuia ca releu pendular:

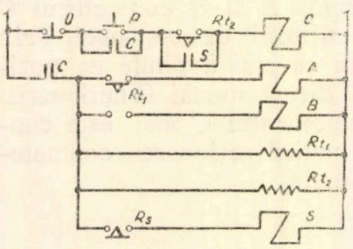


Fig. 1

$$f(Rt_2) = f_6(C) = C.$$

Revenind la relaţia (3) se poate scrie:

$$f(C) = \bar{O}.[(P \vee C)\,\overline{Rt_2}.\bar{S} \vee C.S] =$$

$$= \bar{O}.[(P \vee C)\,\overline{Rt_2} \vee C.S].(\bar{S} \vee C.S).$$

Ţinînd seama de relaţia (4), se obţine în final:

$$f(C) = \bar{O}.[(P \vee C)\,\overline{Rt_2} \vee C.S].$$

Trecînd la reprezentarea expresiilor stabilite rezultă schema circuitului de comandă din fig. 1.

3. Pornirea şi inversarea sensului de rotaţie a unui motor derivaţie de curent continuu

Să considerăm acum cazul pornirii şi inversării sensului de rotaţie a unui motor derivaţie de curent continuu, cu frînare prin cuplare inversă.

Întrucît este vorba de inversarea sensului de rotaţie, pornirea trebuie realizată cu ajutorul a două contactoare I şi N, alimentarea cărora va fi comandată de două butoane de pornire Pi şi Pn şi un singur buton de oprire O.

Considerînd două trepte de pornire cu rezistenţele $1R$ şi $2R$, pentru scurtcircuitarea acestora sînt necesare două contactoare de accelerare $1A$ şi $2A$, a căror intrare în funcţie o considerăm comandată de releele de timp $1Rt$ şi $2Rt$.

Deoarece frînarea motorului are loc în regim de cuplare inversă este necesară folosirea unei rezistenţe de cuplare inversă Rci, care va fi scurtcircuitată de contactul unui contactor de cuplare inversă Ci.

La realizarea schemei se mai pune condiţia ca rezistenţa de cuplare inversă să nu intervină decît în regimul de cuplare inversă.

În aceste condiţii, funcţionarea motorului va depinde de următoarele elemente:

$$f(M) = f_1(I, N, 1R, 2R, Rci, 1A, 2A, Ci). \tag{5}$$

Întrucît elementele componente ale schemei nu sînt independente, în cele ce urmează vom scrie expresiile fiecărui element în parte:

$$(6)\quad \begin{cases} f(I) = f_2(Pi, O, I, N) = (Pi \vee I).\overline{O}.\overline{N}, \\ f(N) = f_3(Pn, O, I, N) = (Pn \vee N).\overline{O}.I, \\ f(1A) = f_4(I, N, 1Rt) = (I \vee N).1Rt, \\ f(2A) = f_5(I, N, 1A, 2RT) = (I \vee N).1A.2Rt, \\ f(1Rt) = f_6(I, N) = I \vee N, \\ f(2Rt) = f_7(I, N, 1A) = (I \vee N).1A. \end{cases}$$

Primele două expresii ale celor două elemente au fost deduse într-o lucrare anterioară [1].

În ceea ce priveşte funcţionarea contactorului *Ci*, acesta trebuie să scurtcircuiteze rezistenţa de cuplare inversă la pornirea normală a motorului într-un sens sau altul şi trebuie să menţină rezistenţa *Rci* în circuitul motorului în regimul de cuplare inversă. Pentru a asigura contactorului *Ci* această funcţionare este necesară folosirea a două relee de tensiune $1Rn$ şi $2Rn$ care să acţioneze pentru sensuri de rotaţie diferite, corespunzătoare funcţionării contactoarelor I şi N. Cele două relee vor fi montate deci în paralel cu indusul, prin intermediul a două redresoare de sens opus.

În aceste condiţii, expresia care determină funcţionarea contactorului *Ci* este de forma:

$$f(Ci) = f_8(1Rn, 2Rn, I, N).$$

Se poate constata că această funcţie poate lua următoarele valori:

$$f_8(0,0,1,0) = 1, \quad f_8(1,0,1,0) = 1, \quad f_8(1,0,0,0) = 0,$$
$$f_8(1,0,0,1) = 0, \quad f_8(0,0,0,1) = 1, \quad f_8(0,1,0,1) = 1,$$
$$f_8(0,1,0,0) = 0, \quad f_8(0,1,1,0) = 0.$$

Aplicînd formula de interpolare a lui Lagrange rezultă:

$$f(Ci) = \overline{1Rn}.\overline{2Rn}.I.\overline{N} \vee 1Rn.\overline{2Rn}.I.\overline{N} \vee \overline{1Rn}.\overline{2Rn}.\overline{I}.N \vee$$
$$\vee \overline{1Rn}.2Rn.\overline{I}.N =$$
$$= (I \vee N).\overline{1Rn}.\overline{2Rn} \vee I.1Rn.\overline{2Rn} \vee N.\overline{1Rn}.2Rn.$$

Deoarece $1Rn = \overline{2Rn}$, rezultă în final:

$$f(Ci) = (I \vee N).\overline{1Rn}.\overline{2Rn} \vee I.1Rn \vee N.2Rn.$$

Revenind la relaţia (5), care determină funcţionarea motorului, se constată că motorul va funcţiona în următoarele condiţii:

$$f_1(1,0,1,1,0,0,0,1) = 1, \quad f_1(0,1,1,1,1,0,0,0) = 2,$$

$$f_1(1,0,0,1,0,1,0,1) = 1, \quad f_1(0,1,1,1,0,0,0,1) = 2,$$

$$f_1(1,0,0,0,0,1,1,1) = 1, \quad f_1(0,1,0,1,0,1,0,1) = 2,$$

$$f_1(0,0,0,0,0,0,0,0) = 0, \quad f_1(1,0,1,1,1,0,0,0) = 1.$$

S-a atribuit valoarea 1 alimentării motorului în sensul înainte şi valoarea 2 alimentării motorului în sensul înapoi.

Întrucît funcţionarea motorului în cele două sensuri este analogă, vom aplica formula de interpolare a lui Lagrange numai pentru funcţionarea motorului în sensul înainte.

În această situaţie:

$$f'(M) = I.\overline{N}.1R.2R.Rci.\overline{1A}.\overline{2A}.\overline{Ci} \vee I.\overline{N}.1R.2R.\overline{Rci}.\overline{1A}.\overline{2A}.Ci \vee$$

$$\vee I.\overline{N}.\overline{1R}.2R.\overline{Rci}.1A.\overline{2A}.Ci \vee I.\overline{N}.\overline{1R}.\overline{2R}.\overline{Rci}.1A.2A.Ci.$$

Ţinînd seama că $1R = \overline{1A}$, $2R = \overline{2A}$, $Rci = \overline{Ci}$ şi întrucît contactul I nu poate fi acţionat decît dacă contactul N este neacţionat, rezultă final:

$$f'(M) = I[1R.2R.Rci \vee 1R.2R.Ci \vee 1A.2R.Ci \vee 1A.2A.Ci].$$

Reprezentarea acestei expresii este redată în fig. 2.

Această schemă s-a obţinut ţinînd seama şi de ordinea de scurtcircuitare a rezistenţelor din circuitul indusului. Întrucît, însă, această ordine este fixată prin relaţiile (6), schema din fig. 2 se poate reduce la cea reprezentată în fig. 3.

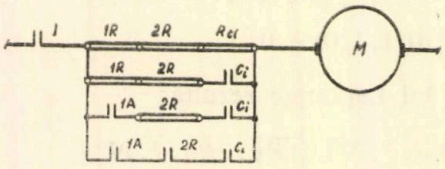


Fig. 2

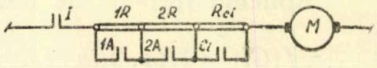


Fig. 3

Deoarece inversarea sensului de rotaţie al motorului este asigurată cu ajutorul contactorului N, care schimbă polaritatea indusului, ţinînd seama şi de condiţiile de funcţionare impuse releelor $1Rn$ şi $2Rn$, precum şi de funcţiile celorlalte elemente, schema completă de acţionare a motorului este reprezentată în fig. 4.

În această schemă funcţionarea impusă contactorului de cuplare inversă Ci a fost obţinută folosind releele $1Rn$ şi $2Rn$.

Aceeaşi funcţionare poate fi asigurată şi cu ajutorul unui singur releu de sens de mers Rn. Acest releu este prevăzut cu un contact normal închis R_n^0 şi două contacte normal deschise, corespunzătoare celor două sensuri de rotaţie, pe care le notăm R_n^1 şi R_n^2.

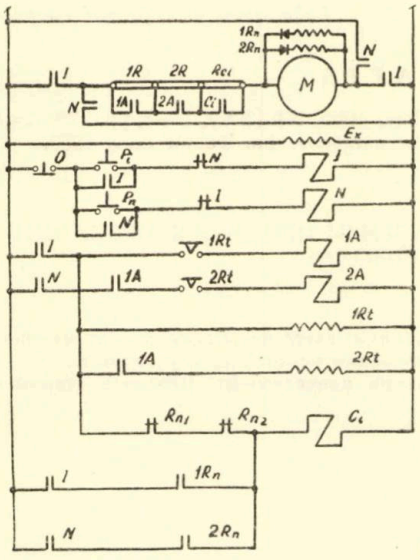


Fig. 4

În acest caz, alimentarea bobinei contactorului C este o funcţie de următoarele elemente:

$$f(Ci) = f_8'(R_n,\ I,\ N).$$

Întrucît releul R_n poate avea trei stări distincte, vom atribui releului în starea de repaos valoarea 0, în sensul de mers înainte valoarea 1 şi în sensul de mers înapoi valoarea 2.

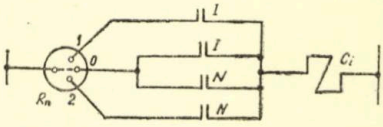


Fig. 5

În aceste condiţii funcţia $f(Ci)$ poate lua următoarele valori:

$$f_8'(0,0,0)=0,\quad f_8'(0,1,0)=1,\quad f_8'(1,1,0)=1,\quad f_8'(1,0,0)=0,$$
$$f_8'(1,0,1)=0,\quad f_8'(0,0,1)=1,\quad f_8'(2,0,1)=1,\quad f_8'(2,0,0)=0,$$
$$f_8'(2,1,0)=0,\quad f_8'(0,1,1)=0,\quad f_8'(1,1,1)=0,\quad f_8'(2,1,1)=0.$$

Aplicînd formula de interpolare a lui Lagrange se obţine:

$$f(Ci) = R_n^0 . I . \bar{N} \vee R_n^1 . I \cdot \bar{N} \vee R_n^0 . \bar{I} . N \vee R_n^2 . \bar{I} . N =$$
$$= R_n^0 . (I . \bar{N} \vee \bar{I} . N) \vee R_n^1 . I . \bar{N} \vee R_n^2 . \bar{I} . N.$$

Ţinînd seama că contactorul I nu poate fi acţionat simultan cu contactorul N, rezultă că $I = \bar{N}$ şi deci:

$$f(Ci) = R_n^0 . (I \vee N) \vee R_n^1 . I \vee R_n^2 . N$$

Această expresie este reprezentată în fig. 5.

În rest schema completă de acţionare a motorului rămîne aceeaşi ţinînd seama că circuitele bobinelor releelor $1R_n$ şi $2R_n$ nu mai sînt necesare.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de utilizări electrice,
Laboratorul de acţionări electrice

BIBLIOGRAFIE

1. Boţan N. V., Balaban E., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *3—4*, pp. 229—240.
2. Moisil Gr. C., *Teoria algebrică a mecanismelor automate.* Ed. Tehn., Buc., 1959.

НОВЫЕ ВИДЫ ПРИМЕНЕНИЯ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ СХЕМ ЭЛЕКТРОПРИВОДА

(Резюме)

Продолжая исследования в связи с применением алгебры логики при проектировании командных схем электропривода, авторы приводят некоторые случаи схем.

Указывается также и возможность применения приведенного метода к схемам с трехтактными элементами.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XI (XV), Fasc. 3–4, 1965

C. Z. 658.5

ORGANIZAREA ÎN FLUX A LUCRĂRILOR LA EXECUŢIA LINIILOR ELECTRICE AERIENE DE 15 kV DE ELECTRIFICĂRI RURALE

DE

LAURIAN PREDA, M. NICULAE şi GH. POPA

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

Directivele Congresului al IX-lea al P.C.R., privind planul de 10 ani pentru dezvoltarea energeticii, prevăd construirea unui număr de aproximativ 25 000 km linii electrice de 110 kV şi de tensiuni mai mici.

Din acestea un volum important se va executa în cadrul acţiunii de electrificare pentru nevoile agriculturii.

Congresul al IX-lea al P.C.R. a stabilit de asemenea ca sarcină principală pentru constructori, realizarea lucrărilor la un înalt nivel tehnic, scurtarea duratelor de execuţie, creşterea productivităţii muncii şi reducerea preţului de cost, pentru a obţine în acest mod o creştere continuă a eficienţei investiţiilor.

La construirea liniilor electrice vor trebui să se obţină indicii tehnico-economici cei mai ridicaţi, la nivelul tehnicii mondiale celei mai avansate.

Îndeplinirea în bune condiţii a acestor sarcini importante cere aplicarea celor mai înaintate procedee tehnologice, însoţite însă şi de cele mai superioare forme de organizare a lucrărilor şi în primul rînd de organizarea lor în flux.

În lucrarea de faţă ne propunem să aducem unele contribuţii la organizarea în flux a lucrărilor la liniile electrice aeriene de 15 kV de electrificări rurale, să îmbunătăţim metodologia de întocmire a proiectului de organizare a execuţiei lucrărilor, aplicată în prezent, în scopul obţinerii unei încărcări cît mai uniforme a forţelor de muncă şi a utilajelor pe şantiere.

Aceasta conduce la realizarea de indici tehnico-economici superiori şi la scurtarea timpilor de execuţie a lucrărilor de electrificări rurale.

2. Descrierea procesului tehnologic

În majoritatea cazurilor, la construcţia liniilor electrice aeriene este folosită metoda de lucru în flux tehnologic.

La liniile de 15 kV de electrificări rurale, lucrările se realizează cu ajutorul formaţiilor de lucru complexe, care execută toate operaţiile. Aceste formaţii de lucru (echipe) trebuie să respecte în timpul execuţiei, procesul tehnologic normal.

Majoritatea liniilor de 15 kV pentru electrificări rurale sînt aeriene şi se execută cu stîlpi de beton armat centrifugat sau vibrat. Schema fluxului tehnologic normal la execuţia liniilor electrice aeriene de 15 kV pe stîlpi de beton armat centrifugaţi sau vibraţi este dată în fig. 1.

Se constată că un volum important de operaţii se pot executa în paralel cu altele (asamblarea stîlpilor, execuţia instalaţiei de punere la pămînt etc.).

Această particularitate importantă permite coordonarea lucrărilor astfel încît să se realizeze o încărcare constantă a muncitorilor echipei complexe de execuţie.

În prezenta lucrare s-au analizat numai operaţiile de bază, deoarece celelalte (de exemplu transportul materialelor) sînt funcţie de acestea.

3. Posibilităţile de îmbunătăţire a metodei actuale de organizare a lucrărilor de execuţie

În vederea organizării în condiţii superioare a execuţiei lucrărilor, pentru obţinerea unor indici tehnico-economici superiori şi scurtarea duratei de execuţie, executanţii întocmesc din timp proiectul de organizare a lucrărilor.

Metodologia utilizată în prezent în ţara noastră pentru întocmirea proiectului de organizare a execuţiei lucrărilor [1] pleacă de la planul calendaristic de execuţie a lucrărilor. Acesta se întocmeşte pe baza respectării termenului de dare în folosinţă, a succesiunii tehnologice a lucrărilor şi asigurării continuităţii lucrului pe şantier.

Pe această bază se întocmesc apoi celelalte elemente ale proiectului de organizare ca: necesarul de forţe de muncă pe diverse perioade, graficul aprovizionării cu materiale, necesarul de utilaje etc.

Considerăm că metodologia aplicată în prezent se poate îmbunătăţi prin: a) organizarea procesului de execuţie pe baza unei formaţii optime de muncitori pe un km de linie, continuu folosită; b) întocmirea planului calendaristic de execuţie a lucrărilor, aplicîndu-se în plus şi principiul uniformităţii folosirii în timp a forţei de muncă şi a utilajului.

Pe baza normelor de timp pentru montarea liniilor electrice aeriene (întocmite de M.E.E. în 1963, prin fotografierea tuturor operaţiilor procesului tehnologic) am studiat volumul de muncă necesar pentru execuţia unui km de linie de 15 kV pe diferite categorii de personal.

Studiul a fost efectuat în diverse variante, pentru diferite tipuri de terenuri (normal, mijlociu, accidentat, foarte accidentat). S-a ajuns la concluzia că volumul de muncă necesar pentru un km de linie este cu atît mai mare cu cît terenul este mai accidentat şi raportul

$$K = \frac{N_s}{N_t}$$

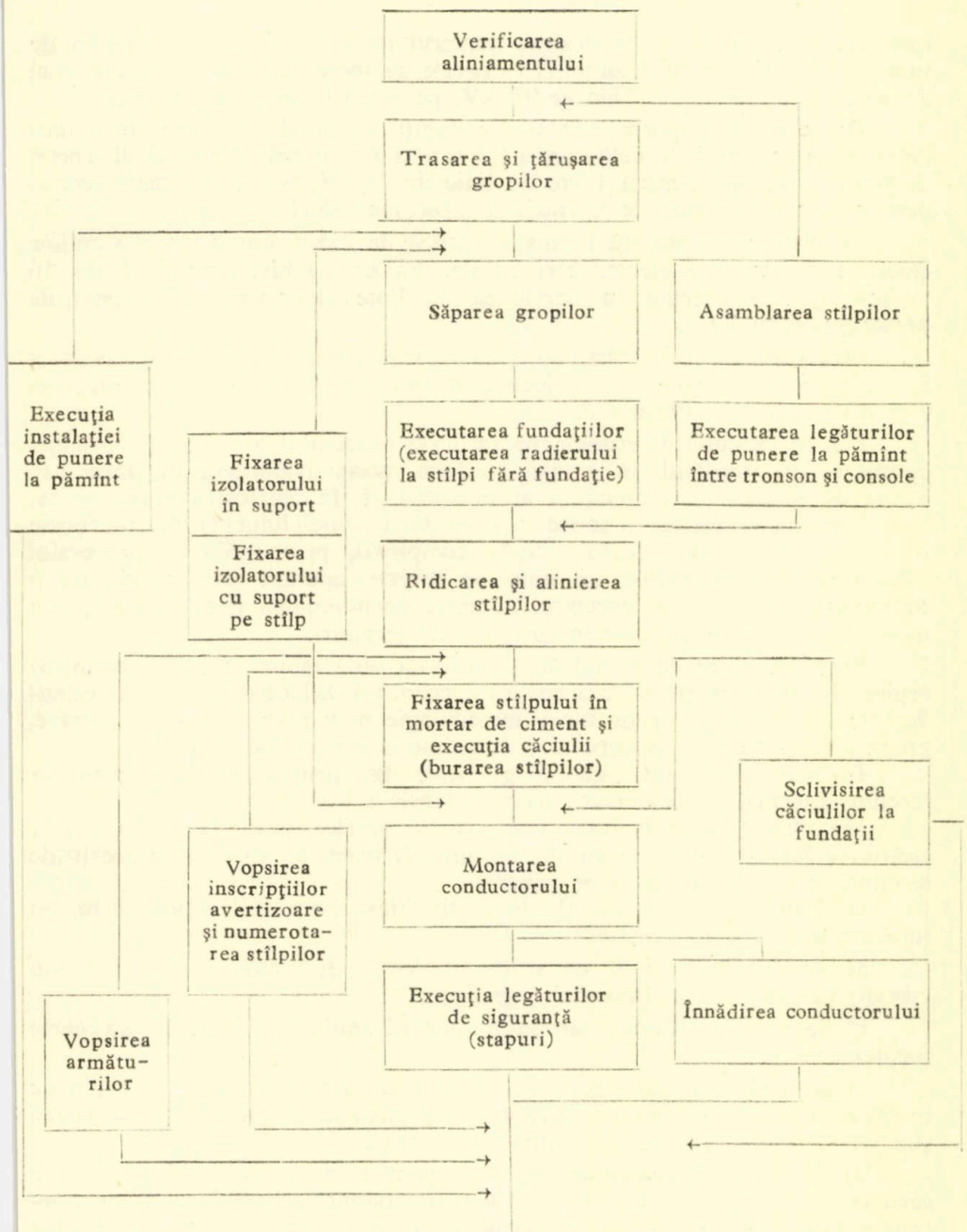


Fig. 1. — Schema fluxului tehnologic la L.E.A. de 15 kV cu stîlpi de beton

este mai mare, unde N_s reprezintă numărul total de stîlpi speciali pe km de linie de 15 kV pentru o anumită categorie de teren iar N_t — numărul total de stîlpi al unui km de linie de 15 kV, pe aceeaşi categorie de teren.

Deosebit de important însă este faptul că ponderea forţei de muncă de diferite categorii de calificare (*3, 4, 5, 6* şi *7*), în volumul total al forţei de muncă necesară pentru 1 km de linie de 15 kV, este aproximativ aceeaşi pentru diferitele tipuri de terenuri şi diferitele valori ale lui *K*.

Ca urmare s-a stabilit formaţia optimă de lucru pentru execuţia liniilor electrice aeriene de electrificări rurale. Ea este echipa complexă de 10 muncitori, care execută în porţiunea de linie respectivă toate operaţiile procesului tehnologic.

Structura acestei formaţii optime este următoarea: 1 electrician categoria *7*, 1 electrician categoria *6*, 2 electricieni categoria *5*, 3 electriceni categoria *4* şi 3 electricieni categoria *3*.

Pentru execuţia diferitelor operaţii ale procesului tehnologic, formaţia optimă a fost împărţită în grupe, conform normativelor M.E.E., ţinîndu-se seama de gradul de tehnicitate al operaţiei şi de calificarea muncitorilor.

Datorită necesităţii practice, a respectării principiului folosirii uniforme în timp a forţei de muncă (echipa complexă), prin studierea procesului tehnologic şi a normelor de timp pe diverse operaţii, care precizează şi componenţa grupelor de execuţie (numărul de muncitori şi calificarea), s-au întocmit *grafice tip* pe diverse categorii de terenuri.

Spre deosebire de metodologia utilizată pînă în prezent la întocmirea proiectului de execuţie a lucrărilor, care pornea de la alcătuirea planului calendaristic de execuţie, prin noua metodologie prezentată în această lucrare, propunem ca baza de plecare să o constitue aceste grafice tip.

În acest scop am elaborat graficele tip pentru două categorii de terenuri (normal şi accidentat), date în tabelele 1 şi 2.

Metodica folosită la întocmirea acestor grafice poate fi utilizată şi la alcătuirea lor pentru orice alt tip de linii electrice, pe diverse categorii de terenuri, ea avînd un caracter general.

Graficul tip pe 1 km de linie electrică, pe care îl propunem, se întocmeşte în modul următor:

a) Se stabileşte tipul de stîlpi (de lemn, de beton centrifugaţi sau vibraţi) pentru care se întocmeşte graficul.

b) Se apreciază natura terenului (normal, mijlociu, accidentat sau foarte accidentat).

c) Se stabileşte numărul mediu total de stîlpi ce revin la 1 km de linie electrică aeriană pentru categoria respectivă de teren şi cîţi din aceştia sînt de susţinere sau speciali (întindere şi colţ).

d) Pe baza normativelor de timp pentru montarea liniilor electrice aeriene de 6 ... 15 kV ale M.E.E./1963, se stabileşte pentru fiecare operaţie a procesului tehnologic, numărul de om-ore necesar pe 1 km de linie şi formaţia de lucru.

Tabelul 1

Graficul de execuţii tip pentru linii electrice aeriene de 15 kV pe stîlpi de beton armat centrifugat, în teren normal

L.E.A. 15 kV
Stîlpi de beton armat centrifugat

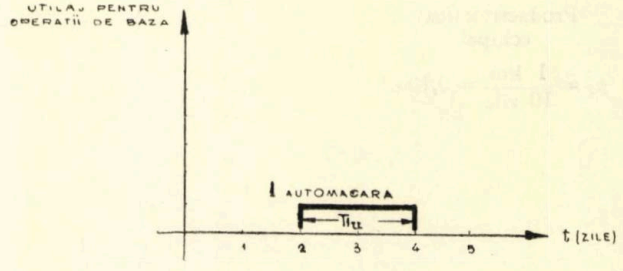
Grafic de execuţie pentru 1 km de linie nr. 1

Teren normal
$N_t = 13{,}5$ stîlpi

Nr. crt.	Denumirea lucrării	Formaţia numărul muncitorilor / categoria de calificare	Plan de lucru calendaristic (ziua) 1	2	3	4	5	6
1	Verificarea aliniamentului. Trasarea şi ţăruşarea gropilor.	1/7; 1/4 1/3	1/7;1/4;1/3					
2	Săparea gropilor. Executarea radierului.	2/3...3/3	2/3	3/3				
3	Asamblarea stîlpilor.	1/6; 2/5; 2/4	1/6; 2/5; 2/4					
4	Executarea legăturilor de punere la pămînt între tronson şi consolă.	1/7 resp. 1/6 + 1/4		1/7 + 1/4	1/6+1/4			
5	Ridicarea stîlpilor (cu automacara) şi alinierea lor. Burarea stîlpilor.	1/7; 1/5; 1...2/4; 0...1/3			1/7; 1/5; 2/4	1/7; 1/5; 1/4; 1/3		
6	Fixarea izolatorului în suport. Fixarea izolatorului cu suport pe stîlp. Vopsirea armăturilor. Vopsirea inscripţiilor avertizoare şi numerotarea stîlpilor. Executarea instalaţiei de punere la pămînt.	Echipa disponibilă de 1...6 muncitori			1/5; 1/6; 1/5; 1/4	1/6; 1/5; 2/4; 2/3		
7	Montarea conductorului (tracţiune manuală).	Toată echipa de 10 muncitori					1/7; 1/6; 3/4	2/5, 3/3'
8	Executarea legăturilor de siguranţă. Înădirea conductorului. Remedieri.	Toată echipa de 10 muncitori						10 muncit.

Productivitatea echipei

$$p_1 = \frac{1 \text{ km}}{6 \text{ zile lucru}} = 0{,}166$$



Tabelul 2

Graficul de execuţie tip pentru linii electrice aeriene de 15 kV pe stîlpi de beton armat centrifugat, în teren accidentat

L.E.A. 15 kV
Stîlpi de beton armat centrifugat

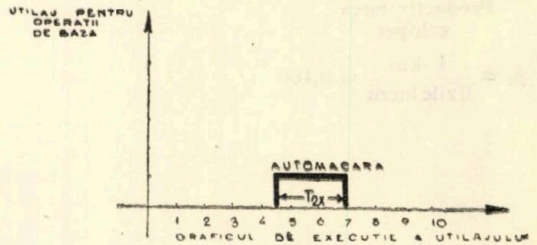
Grafic de execuţie pentru 1 km de linie nr. 2

Teren accidentat
$N_t = 14$ stîlpi
$N_s = 3$ stîlpi
$N_{fundaţii} = 5$ bucăţi

Nr. crt.	Denumirea lucrării	Formaţia numărul muncitorilor — categoria de calificare	Plan de lucru calendaristic: 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Verificarea aliniamentului. Trasarea şi ţăruşarea gropilor.	1/9 ; 1/4 ; 1/3	1/9;1/4;1/3									
2	Săparea gropilor. Executarea radierului la stîlpii fără fundaţie.	2/3 ; 3/3	2/3		3/3							
3	Asamblarea stîlpilor. Execuţia legăturilor de punere la pămînt între tronson şi consolă.	1/6 ; 2/5 ; 2/4	1/6 ; 2/5 ; 2/4									
4	Executarea fundaţiilor.	2 ... 7 muncitori		1/7 ; 1/4; 1/7;1/6;2/5;3/4			1/6 ; 1/5 ; 2/4 ; 3/3					
5	Ridicarea şi alinierea stîlpilor. Fixarea stîlpilor şi execuţia căciulilor.	1/7 ; 1/5; 1/4 ; 1/3					1/7; 1/5; 1/4; 1/3					
6	Executarea instalaţiei de punere la pămînt. Fixarea izolatorilor în suporţi. Fixarea izolatorilor cu suporţi pe stîlpi.	1/6 ; 1/5; 2/4 ; 2/3						1/8;1/5;2/4;2/3				
7	Montarea conductorului.	toată echipa								1/7 ; 1/6 ; 2/5 ; 3/4 ; 3/3		
8	Executarea legăturilor de siguranţă. Înădirea conductorului. Vopsirea inscripţiilor avertizoare şi numerotarea stîlpilor. Vopsirea armăturilor. Sclivisirea căciulilor la fundaţii.	toată echipa									1/7;1/6;2/5; 3/4;3/3	

Productivitatea echipei

$$p_2 = \frac{1 \text{ km}}{10 \text{ zile}} = 0{,}100$$



De exemplu, pentru 1 km de L.E.A. de 15 kV, pe stîlpi beton armat centrifugat, în teren normal, la operaţia de asamblare a stîlpilor, formaţia de lucru este : 1 electrician categoria $6 + 1$ electrician categoria $5 + 1$ electrician categoria $4 + 1$ electrician categoria $3 = 4$ electricieni ; numărul de om-ore necesar este 60,8, deci 15,2 pentru fiecare muncitor în parte).

e) Se studiază cu atenţie toate operaţiile procesului tehnologic ţinîndu-se seama de eventualele paralelisme şi de formaţiile cerute de normative pentru diversele operaţii.

f) Se întocmesc diverse variante ale graficului tip de execuţie pe km de linie, pornind de la principiul folosirii muncitorilor echipei la operaţiile stabilite de normative, dar şi de la necesitatea continuităţii în executarea lucrărilor.

Pentru aceasta se folosesc particularităţile procesului tehnologic (fig. 1), care permit executarea multor operaţii în paralel cu altele. Astfel, de exemplu, execuţia prizelor de pămînt se poate face oricînd după trasarea şi ţăruşarea gropilor, pînă la sfîrşitul lucrării.

g) Se alege din aceste variante cea care asigură în cea mai mare măsură continuitatea în execuţie a tuturor membrilor echipei şi încărcarea lor uniformă.

Cu ajutorul graficelor tip se determină imediat, pentru lucrările de bază, productivitatea normală şi graficul de utilizare a utilajelor principale. Astfel productivitatea în teren normal, la execuţia L.E.A. de 15 kV pe stîlpi de beton armat centrifugat, a rezultat:

$$p = \frac{1 \text{ km}}{6 \text{ zile lucrătoare}} \text{ pentru echipa de 10 muncitori.}$$

Folosind caracteristicile graficelor tip am stabilit relaţii de calcul privind numărul total de echipe pentru o lungime dată de L.E.A. de 15 kV, timpul de execuţie pe echipă funcţie de termenul total de execuţie a lucrării, mărimea frontului optim de lucru pe fiecare echipă în parte, modele de planuri de lucru ale echipelor precum şi o nouă metodologie de întocmire a planului calendaristic de execuţie a lucrărilor.

Cu ajutorul graficelor tip pe 1 km de L.E.A. se determină imediat graficul de execuţie pentru fiecare echipă în parte, dacă frontul de lucru este cunoscut. Pentru aceasta este suficient să se înmulţească timpii de execuţie pe fiecare operaţie în parte, cu lungimea, exprimată în km, a frontului de lucru.

Dacă frontul de lucru are terenuri cu diverse grade de accidentare se utilizează graficele tip corespunzătoare, se determină graficele de execuţie pe tipuri de terenuri, iar apoi se întocmeşte graficul de execuţie al echipei pe întregul front de lucru. Cu ajutorul acestuia se întocmeşte apoi planul de lucru al echipei pe oameni şi zile, notîndu-se pentru fiecare zi în parte numărul operaţiei (sau chiar operaţia) ce trebuie executată de fiecare muncitor.

În tabelele 3 şi 4 sunt date planurile de lucru ale echipelor pentru cazul utilizării graficelor tip din tabelele 1 şi 2, frontul de lucru avînd lungimea de 1 km.

Tabelul 3

Planul de lucru al echipei pentru 1 km de L.E.A. de 15 kV pe stîlpi de beton armat centrifugat, în teren normal

Operaţia 1: Verificarea aliniamentului + trasarea gropilor; operaţia 2: săparea gropilor + executarea radierului; operaţia 3: asamblarea stîlpilor etc.

Nr. crt.	Calificarea personalului	Numărul operaţiei (conform graficului tip)						
		ziua 1	ziua 2	ziua 3	ziua 4	ziua 5	ziua 6	
1	Electrician categoria *7*	1	4	5	5	7	7	8
2	Electrician categoria *6*	3	3	4 | 6	6	7	7	8
3	Electrician categoria *5*	3	3	5	5	7	7	8
4	Electrician categoria *5*	3	3	6	6	7	7	8
5	Electrician categoria *4*	1	4	4 | 6	6	7	7	8
6	Electrician categoria *4*	3	3	5	6	7	7	8
7	Electrician categoria *4*	3	3	5	5	7	7	8
8	Electrician categoria *3*	1	2	2	5	7	7	8
9	Electrician categoria *3*	2	2	2	6	7	7	8
10	Electrician categoria *3*	2	2	2	6	7	7	8

Tabelul 4

Planul de lucru al echipei pentru 1 km de L.E.A. de 15 kV pe stîlpi de beton armat centrifugat, în teren accidentat

Nr. crt.	Calificarea personalului	Numărul operaţiei (conform graficului tip)									
		ziua 1	ziua 2	ziua 3	ziua 4	ziua 5	ziua 6	ziua 7	ziua 8	ziua 9	ziua 10
1	Electrician categoria *7*	1	1 | 4	4	4	4 | 5	5	5	7	7	8
2	Electrician categoria *6*	3	3	3	4	4	6	6	7	7	8
3	Electrician categoria *5*	3	3	3	4	4	6	6	7	7	8
4	Electrician categoria *5*	3	3	3	4	4 | 5	5	5	7	7	8
5	Electrician categoria *4*	1	1 | 4	4	4	4	6	6	7	7	8
6	Electrician categoria *4*	3	3	3	4	4 | 5	5	5	7	7	8
7	Electrician categoria *4*	3	3	3	4	4	6	6	7	7	8
8	Electrician categoria *3*	1	1 | 2	2	2	2 | 5	5	5	7	7	8
9.	Electrician categoria *3*	2	2	2	2	2 | 4	6	6	7	7	8
10	Electrician categoria *3*	2	2	2	2	2 | 4	6	6	7	7	8

Cu ajutorul planurilor de muncă ale echipelor, întocmite conform modelelor din tabelele 3 şi 4 , şeful de echipă cunoaşte în fiecare zi operaţiile ce trebuie executate de fiecare muncitor, pentru a obţine organizarea în flux a lucrărilor, şi deci timpul minim de execuţie.

Numărul total de echipe N necesar execuţiei întregii L.E.A. de 15 kV în timpul planificat şi funcţie de productivitatea echipei complexe pe diverse categorii de terenuri (cunoscută din graficele tip) se determină cu relaţia

$$N = \frac{1}{T_e}\left(\frac{L_1}{p_1} + \frac{L_2}{p_2} + \ldots + \frac{L_n}{p_n}\right), \tag{1}$$

în care $L = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$ reprezintă lungimea totală a traseului exprimată în km, $L_1, L_2, \ldots, L_n$ — lungimile totale exprimate în km, corespunzătoare diverselor categorii de terenuri din traseul liniei respective, T_e — timpul planificat de lucru exprimat în zile lucrătoare a unei echipe, iar $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — productivităţile echipelor de 10 muncitori, exprimate în km/număr de zile lucrătoare, de asemenea corespunzătoare diverselor categorii de terenuri din traseul liniei respective.

Lungimile $L_1, L_2, \ldots, L_n$ se află din studiul traseului întregii linii:

$$L_1 = l_1^1 + l_1^2 + l_1^3,\ L_2 = l_2^1 + l_2^2 + l_2^3,\ L_3 = l_3^1 + l_3^2,$$
$$L_4 = l_4^1 + l_4^2,\ L_6^1 = l_6, \text{ iar } L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_6 = L.$$

Productivităţile $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sînt date de graficele tip, însă timpul T_e nu este cunoscut. Pentru a-l afla s-a studiat timpul de începere a lucrului de către fiecare echipă în parte.

Pentru obţinerea unei încărcări uniforme a utilajelor folosite la operaţiile de bază, este necesar să existe decalaje între începerea lucrului de către diversele echipe. În fig. 2 s-a reprezentat în principiu graficul timpului de lucru pe echipe.

Practic se iau timpi de execuţie egali pe fiecare echipă, adică $T_1 = T_2 = \ldots = T_n = T_e$, unde $T_1, T_2, \ldots, T_n$ sînt timpii de execuţie ai fiecărei echipe în parte pe loturile corespunzătoare, repartizate.

Timpul total de folosire al utilajului (de exemplu automacara) pentru operaţii de bază, T_u, se calculează cu $T_u = T_{u1} + T_{u2} + \ldots + T_{un}$, unde $T_{u1}, T_{u2}, \ldots, T_{un}$ sînt timpii de lucru ai utilajului la fiecare echipă.

Din fig. 2 rezultă timpul de lucru al unei echipe $T_e = T - (N-1)R$, unde T este timpul planificat de execuţie pentru întreaga linie, iar R — ritmul de începere al lucrărilor de către fiecare echipă. Deoarece el este egal cu ritmul de începere a lucrărilor de către utilaj rezultă $R = T_u/N$, deci

$$T_e = T - \frac{(N-1)}{N} T_u. \tag{2}$$

Timpul total de folosire a utilajului T_u la operaţiile de bază se determină cu ajutorul graficelor tip ce cuprind şi timpii de folosire a utilajului pe km de linie în diverse categorii de terenuri $T_{1u}, T_{2u}, \ldots, T_{nu}$, cu relaţia:

(3) $$T_u = L_1 T_{1u} + L_2 T_{2u} + \ldots + L_n T_{nu};$$

în conformitate cu tabelele 1, 2 şi fig. 2 $T_{u1} \neq T_{1u}, T_{u2} \neq T_{2u}, \ldots, T_{un} \neq T_{nu}$.

Rezultă deci un sistem de două ecuaţii (1) şi (2) din care se obţine:

(4) $$N = \frac{K - T_u}{T - T_u} \quad \text{şi} \quad (5)\ T_e = \frac{T - T_u}{K - T_u} K,$$

în care $K = \frac{L_1}{p_1} + \frac{L_2}{p_2} + \ldots + \frac{L_n}{p_n}$.

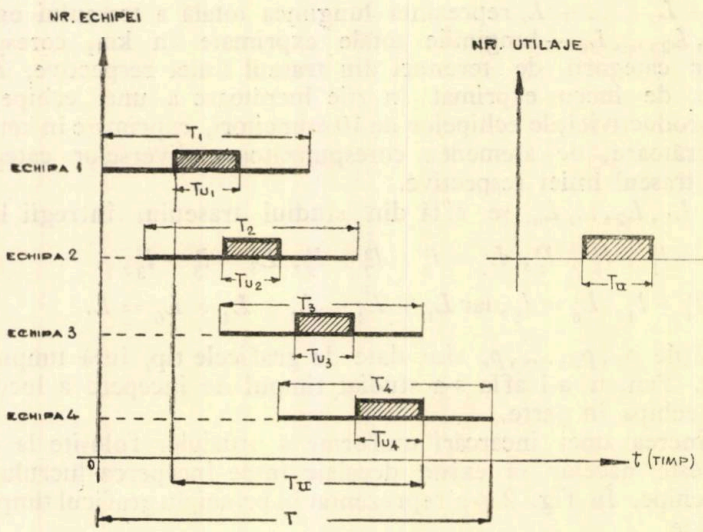


Fig. 2

Deci, cu ajutorul relaţiilor (4) şi (5), pe baza termenului planificat de execuţie pentru întreaga lucrare T şi a graficelor tip (cu care se calculează T_u şi K) se obţine numărul optim de echipe N şi timpul de execuţie pe echipă T_e, în condiţiile organizării în flux a lucrărilor.

Stabilirea frontului de lucru pentru fiecare echipă în parte se face cunoscîndu-se numărul de echipe şi timpul de execuţie a lucrărilor de către fiecare echipă. Se pleacă de la condiţia:

(6) $$T_1 = T_e = \frac{l_1}{p_a} + \frac{l_2}{p_b} + \ldots + \frac{l_k}{p_k},$$

unde $l_1, l_2, \ldots, l_k$ — lungimile de linie de diverse categorii, considerate de la primul stîlp, iar $p_a, p_b, \ldots, p_k$ — productivităţile corespunzătoare porţiunilor de linie $l_1, l_2, \ldots, l_k$.

Astfel, în cazul exemplului anterior avem $l_1 = l_1^1, l_2 = l_3^1, l_3 = l_4^1, l_4 = l_2^1$, $l_5 = l_1^2$, iar $p_a = p_1$, $p_b = p_3$, $p_a = p_4$, $p_d = p_2$, $p_e = p_1$.

Se calculează rapoartele l_1/p_a, l_2/p_b, l_3/p_e şi se determină ultimul raport K din condiţia (6).

Mărimea frontului de lucru optim al primei echipe va fi $F_1 = l_1 + l_2 + \ldots + l_k$. Pentru echipa a doua se pune condiţia $T_2 = T_e = l_{k+1}/p_l + l_{k+2}/p_m + \ldots + l_r/p_k$ şi se găseşte $F_2 = l_{k+1} + l_{k+2} + \ldots l_r$. Se procedează în acelaşi mod cu toate echipele.

Calculele sînt corecte dacă la ultima echipă va reveni ultima porţiune de linie (pînă la stîlpul de capăt) iar timpul de execuţie al ei, T_u, va fi de asemenea egal cu T_e.

Deci metodologia propusă de întocmire a planurilor calendaristice de execuţie a lucrărilor este următoarea: a) se studiază proiectul de execuţie al L.E.A.; b) se împarte întregul traseu în porţiuni de teren de acelaşi fel, la care se pot aplica diferite grafice tip (se procedează ca în exemplul anterior); c) se calculează lungimile $L_1, L_2, \ldots, L_n$ corespunzătoare diverselor categorii de terenuri din traseul liniei respective; cu ajutorul lor şi al valorilor productivităţilor $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (stabilite în graficele tip) se calculează K; d) se calculează timpul total de folosire al utilajului la operaţiile de bază T_u cu ajutorul lui (3) şi a graficelor tip obţinînd $T_{1u}, T_{2u}, \ldots, T_{nu}$); e) se determină cu (4) şi (5) numărul optim de echipe N şi timpul optim de execuţie pe echipă T_e în condiţiile organizării în flux a lucrărilor; f) cu ajutorul acestor date se stabilesc mărimile fronturilor de lucru optime pentru fiecare echipă în parte ($F_1, F_2, \ldots, F_n$) deoarece T_e este acelaşi pentru toate echipele, frontul de lucru va fi cu atît mai mic cu cît terenul este mai accidentat); g) cunoscînd pe T_u şi N se calculează ritmul de începere al lucrărilor R de către fiecare echipă; h) se întocmeşte graficul timpului de lucru pe echipe (conform modelului din fig. 2) dispunînd de toate elementele necesare (adică T, T_e, T_u şi R); i) cunoscînd fronturile de lucru se determină graficele de execuţie pentru fiecare echipă în parte, în conformitate cu metodologia stabilită anterior; j) pe baza termenelor planificate de începere şi terminare a lucrărilor, a planurilor de lucru pe echipe şi a graficelor de execuţie pe fiecare echipă în parte, se întocmeşte *planul calendaristic de execuţie a lucrărilor*, care indică zilnic stadiul planificat de execuţie pe întreaga linie.

Pe baza planului calendaristic de execuţie a lucrărilor se întocmesc celelalte părţi ale proiectului de organizare a execuţiei lucrărilor ca: graficul livrării pe şantier a stîlpilor şi materialelor principale, necesarul de mijloace de transport interne, necesarul de forţe de muncă etc.

4. Concluzii

1. Se analizează metodologia actuală de întocmire a proiectelor de organizare a lucrărilor la liniile electrice aeriene de 15 kV şi se stabileşte o etapă premergătoare întocmirii planului calendaristic de execuţie a lucrărilor;

ea este absolut necesară şi foarte utilă din punct de vedere teoretic şi practic, conducînd la organizarea în flux a lucrărilor.

2. Implicînd un număr redus de elemente şi anume normele de timp de execuţie şi termenul calendaristic de execuţie a lucrării, cu metoda propusă se pot determina cu uşurinţă celelalte elemente necesare unei bune organizări în flux a lucrărilor (numărul optim de echipe, timpul de lucru al unei echipe, ritmul etc.)

3. Întocmirea şi folosirea graficelor tip propuse uşurează considerabil organizarea în flux a lucrărilor de execuţie a liniilor electrice aeriene.

4. Aplicarea metodei propuse asigură reducerea duratei ciclului de fabricaţie, folosirea judicioasă şi continuă a utilajului, folosirea continuă şi ritmică a forţei de muncă, stabileşte structura optimă a echipelor de execuţie şi ca urmare, asigură o desfăşurare a întregii activităţi de execuţie a liniilor electrice aeriene în flux continuu şi constant.

5. Metodologia prezentată, privind organizarea în flux a execuţiei la liniile electrice aeriene de 15 kV de electrificări rurale, poate fi extinsă la execuţia liniilor electrice de orice tip, ceea ce necesită însă un studiu prealabil, care va face subiectul unei altei lucrări.

Institutul politehnic Iaşi,
Catedra de organizare şi planificare
şi
Întreprinderea de construcţii şi
montaje energetice nr. 2, Bacău

BIBLIOGRAFIE

1. Vicol P. ş. a., *Construcţia liniilor aeriene.* Ed. Tehn., Buc., 1962.

ОРГАНИЗАЦИЯ РАБОТ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПОТОКА ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЭЛЕКТРОВОЗДУШНЫХ ЛИНИЙ МОЩНОСТЬЮ В 15 КВ В СЕЛЬСКОЙ ЭЛЕКТРИФИКАЦИИ

(Резюме)

Изучается методология используемая в настоящее время при составлении плана организации выполнения работ, а также предлагается новая система равномерного использования рабочих сил и оборудования на стройках. Для этой цели устанавливается метод наивыгоднейшей организации бригад и составляются графики тип для выполнения работ на электровоздушных линиях мощностью в 15 *кв*. При помощи предлагаемой системы с двумя уравнениями и двумя неизвестными высчитывается необходимое число бригад и кратчайший срок выполнения работы по бригаде.

На основании этого исчисления определяется необходимая величина рабочего участка для смешанных бригад и устанавливается график выполнения всей работы.

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Схема технологического потока в электровоздушных линиях мощностью в 15 *кв* на железобетонных столбах.

Рис. 2. — График времени выполнения работы бригадой.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 621.392.5

DOMENIILE DE EXISTENŢĂ ALE COEFICIENŢILOR DE TRANSFER AI UNUI CUADRIPOL DIPORT LINIAR, PASIV ŞI RECIPROC, ALIMENTÎND UN RECEPTOR PASIV

DE

HUGO ROSMAN

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

I. Introducere

1. Este cunoscut faptul că impunînd unui cuadripol diport liniar, pasiv şi reciproc, restricţia de a alimenta un receptor *pasiv*, impedanţa echivalentă la poarta de intrare a cuadripolului poate avea, în regim permanent sinusoidal, numai valori situate în interiorul şi pe frontiera unui anumit domeniu, în general finit.

Anume, considerînd un astfel de cuadripol, alimentat pe la perechea de borne primare, ecuaţiile sale fundamentale fiind (de ex. [1])

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

cu

$$\det |\underline{A}_{st}| = 1, \quad (s = 1, 2), \tag{2}$$

relaţia dintre impedanţa echivalentă la poarta de intrare (primară)

$$\underline{Z}_{e1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = R_{e1} + \mathrm{j}\, X_{e1} \tag{3}$$

i cea a receptorului

$$\underline{Z}_2 = R_2 + \mathrm{j}\, X_2 \tag{4}$$

este

$$\underline{Z}_{e1} = \frac{\underline{A}_{11}\, \underline{Z}_2 + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\, \underline{Z}_2 + \underline{A}_{22}}. \tag{5}$$

Relaţia (5) reprezintă o transformare liniară [2] care transformă conform cercuri din planul variabilei complexe $\underline{Z}_2$ în cercuri din planul variabilei complexe $\underline{Z}_{e1}$.

Folosind proprietăţile cunoscute ale grupului de trasformări de tipul (5), A. Weissfloch [3], [4] elaborează teoria generală a transformărilor circulare la cuadripoli, stabilind un şir de teoreme de transformare a curbelor din planul Z_2 în planul Z_{e1}. În această ordine de idei autorul citat arată, după cunoştinţa noastră, pentru prima dată în literatură[1]) că dacă receptorul este pasiv, impedanţa echivalentă la poarta de intrare a cuadripolului are valori situate în interiorul şi pe frontiera unui cerc C_{pierd}, numit de autorul citat cerc limită sau cerc de pierderi. Acest cerc se află situat totdeauna în semiplanul $R_{e1} \geqslant 0$, sau coincide cu axa $R_{e1} = 0$ (în cazul cuadripolilor nedisipativi).

Făcînd apel la construcţii geometrice elementare, bazate pe utilizarea transformării (5), J. Schérer [5] regăseşte ulterior şi independent rezultatul obţinut de Weissfloch, adăugînd şi unele precizări suplimentare printre care cea mai interesantă pare cea relativă la procedeul experimental de determinare a cercului care delimitează domeniul de existenţă al impedanţei echivalente de intrare.

Procedeul utilizat se bazează în special pe o teoremă stabilită de autor (v. şi [6]), care afirmă că dacă un cuadripol diport liniar, pasiv şi reciproc, alimentează un receptor de impedanţă variabilă, a cărei diagramă loc-geometric este o dreaptă, atunci diagrama loc-geometric a impedanţei echivalente la poarta de intrare a cuadripolului considerat este un cerc. Această teoremă a mai făcut ulterior şi independent obiectul unor cercetări întreprinse J. G. Tarboux [7] şi C. E. Moorhouse [8], relative la unele reţele electronice de tip cuadripol.

Utilizînd procedee asemănătoare, K. Ogushi [9], într-un studiu dedicat diagramelor circulare ale circuitelor electrice de transfer a puterii electromagnetice, regăseşte din nou rezultatul obţinut iniţial de Weissfloch, îmbogăţindu-l cu unele date suplimentare privitoare la delimitarea în interiorul acestui domeniu a subdomeniilor corespunzătoare sarcinilor pasive inductive sau capacitive ale cuadripolului considerat.

Într-o lucrare anterioară [10] am stabilit, pentru prima dată, expresia analitică a ecuaţiei cercului care delimitează domeniul în chestiune. Cunoaşterea ecuaţiei acestui cerc s-a dovedit a fi ulterior deosebit de utilă şi fructuoasă, permiţînd, printre altele, formularea riguroasă a condiţiilor necesare şi suficiente de realizare a rezonanţei la poarta de intrare a unui cuadripol diport liniar, pasiv şi reciproc, în regim permanent sinusoidal, alimentînd un receptor pasiv [11]...[14].

Chiar mai recent, V. M. Drugov [15] întreprinzînd un studiu al diagramelor loc-geometric ale impedanţei echivalente la poarta de intrare a unui cuadripol diport liniar pasiv şi reciproc, în regim permanent sinusoidal, atunci cînd fie modulul fie argumentul impedanţei receptorului variază, regăseşte pe această cale rezultatul obţinut de Weissfloch şi stabileşte, în mod independent, ecuaţia cercului care delimitează domeniul de existenţă a impedanţei echivalente la poarta de intrare a cuadripolului, funcţie numai de impedanţele echivalente la gol şi în scurtcircuit, precum şi de impedanţele caracteristice ale cuadripolului.

2. Rezultatul remarcabil obţinut de Weissfloch, relativ la domeniul de existenţă al impedanţei echivalente la poarta de intrare a unui cuadripol diport liniar, pasiv şi reciproc, alimentînd un receptor pasiv, poate fi extins cu uşurinţă şi la alte mărimi importante ale cuadripolului, graţie faptului că acestea se pot exprima în funcţie de impedanţa receptorului prin intermediul unor relaţii de tipul (5), reprezentînd de asemene transformări liniare [2]. Semnalăm în acest sens expresiile (de ex. [16])

a) coeficientului de transmisie a tensiunii

$$k_U = \frac{U_2}{U_1}; \tag{6}$$

[1]) Un rezultat similar fusese obţinut anterior de R. Feldtkeller [24], [25], în cazul particular al cuadripolilor diporţi liniari, pasivi şi reciproci, simetrici.

b) coeficientului de transmisie a curentului

$$\underline{k}_I = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}; \tag{7}$$

c) impedanței de transfer (mutuală)

$$\underline{Z}_m = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}. \tag{8}$$

Dacă se ține seama de ecuațiile (1) ale cuadripolului expresiile (6)...(8) devin:

$$\underline{k}_U = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{A}_{11}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{12}}, \tag{6'}$$

$$\underline{k}_I = \frac{1}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{22}}, \tag{7'}$$

$$\underline{Z}_m = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{22}}. \tag{8'}$$

Se constată cu ușurință că relațiile (5), (6')...(8') sînt de același tip, al căror ansamblu formează un subgrup de prima speță al grupului liniar omogen [17]. Acest aspect, relevat de L. Ia. Nagornîi într-o suită de studii dedicate analizei schemelor amplificatoare liniare [18], [19], face accesibilă utilizarea metodei transformărilor conforme în scopul trasării diagramelor loc-geometric ale grupului de mărimi $\underline{Z}_{e1}$, $\underline{k}_U$, $\underline{k}_I$, $\underline{Z}_m$, pentru valori constante ale modulului sau argumentului impedanței $\underline{Z}_2$ a receptorului. În particular este posibilă și obținerea diagramelor loc-geometric pentru $Z_2 = \text{var.}$, $\arg Z_2 = 0$ [19], permițînd în esență delimitarea domeniilor de existență ale mărimilor respective ($\underline{Z}_{e1}$, $\underline{k}_U$, $\underline{k}_I$, $\underline{Z}_m$), atunci cînd sarcina receptorului este pasivă.

Pentru a putea delimita aceste domenii se are în vedere că

$$\underline{Z}_2 = \mathrm{j}\lambda X_2, \quad \lambda \in [-\infty, +\infty]. \tag{9}$$

Substituind impedanța Z_2 din (5) cu expresia (9) rezultă:

$$\underline{Z}_{e1} = \frac{\underline{A}_{12} + \mathrm{j}\lambda \underline{A}_{11} X_2}{\underline{A}_{22} + \mathrm{j}\lambda \underline{A}_{21} X_2}, \tag{10}$$

care reprezintă în planul complex al impedanței echivalente la poarta de intrare a cuadripolului, ecuația unui cerc care nu trece prin origine [20]. Se regăsește astfel, pe o cale extrem de simplă, rezultatul obținut de Weissfloch (*op. cit.*).

Pe o cale asemănătoare este posibil să se procedeze în vederea delimitării domeniilor de existenţă ale coeficienţilor $\underline{k}_U$, $\underline{k}_I$ şi al impedanţei $\underline{Z}_m$. Studiul amănunţit al acestor probleme face obiectul paragrafelor ce urmează.

Pentru conciziune vom lua în considerare numai cazul în care cuadripolul este alimentat pe la bornele primare. Rezultatele, în cazul cînd cuadripolul este alimentat pe bornele secundare, sînt asemănătoare.

II. Domeniul de existenţă $\mathfrak{D}_{\underline{k}_U}$ al coeficientului de transmisie a tensiunii

3. Dacă se substituie în (6′) expresia (9) a impedanţei receptorului, rezultă

$$\underline{k}_U = \frac{\mathrm{j} X_2}{\mathrm{j}\underline{A}_{11} X_2 + \underline{A}_{12}/\lambda}, \tag{11}$$

sau, introducînd notaţia $1/\lambda = \mu$,

$$k_U = \frac{\mathrm{j} X_2}{\mathrm{j}\underline{A}_{11} X_2 + \mu\underline{A}_{12}}, \tag{11′}$$

care reprezintă ecuaţia unui cerc care trece prin origine [20].

Din relaţia (6′) se pot obţine expresiile rezistenţei R_2 şi a reactanţei X_2 ale receptorului, în funcţie de $k'_U = \mathcal{R}e(\underline{k}_U)$, $k''_U = \mathcal{I}m(\underline{k}_U)$ şi coeficienţii fundamentali ai cuadripolului, utile în cele de mai jos şi anume:

$$R_2 = \frac{1}{|1 - \underline{A}_{11}\underline{k}_U|^2}[-\mathcal{R}e(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{12})(k'^2_U + k''^2_U) + \mathcal{R}e(\underline{A}_{12})\underline{k}'_U - \mathcal{I}m(\underline{A}_{12})\underline{k}''_U], \tag{12}$$

$$X_2 = \frac{1}{|1 - \underline{A}_{11}\underline{k}_U|^2}[-\mathcal{I}m(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{12})(k'^2_U + k''^2_U) + \mathcal{I}m(\underline{A}_{12})k'_U + \mathcal{R}e(\underline{A}_{12})k''_U]. \tag{13}$$

Graţie relaţiei (12) este posibil să se găsească expresia analitică a ecuaţiei cercului (11′) în sistemul de coordonate cartezian k'_U, k''_U, anume

$$k'^2_U + k''^2_U - \frac{\mathcal{R}e(\underline{A}_{12})}{\mathcal{R}e(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{12})}k'_U + \frac{\mathcal{I}m(\underline{A}_{12})}{\mathcal{R}e(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{12})}k''_U = 0, \tag{14}$$

cu centrul în

$$k'_{U_c} = \frac{\mathcal{R}e(\underline{A}_{12})}{2\,\mathcal{R}e(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{12})}, \quad k''_{U_c} = -\frac{\mathcal{I}m(\underline{A}_{12})}{2\,\mathcal{R}e(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{12})} \tag{15}$$

şi raza

$$r_{\underline{k}_U} = \frac{A_{12}}{2k_c\,|\,\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}^{*}\,\underline{A}_{12})\,|}, \tag{16}$$

k_c fiind scara de reprezentare a unității.

Poziția cercului de ecuație (14) în planul $\underline{k}_U$ depinde de semnele componentelor reală și imaginară ale lui $\underline{A}_{12}$ (fig. 1).

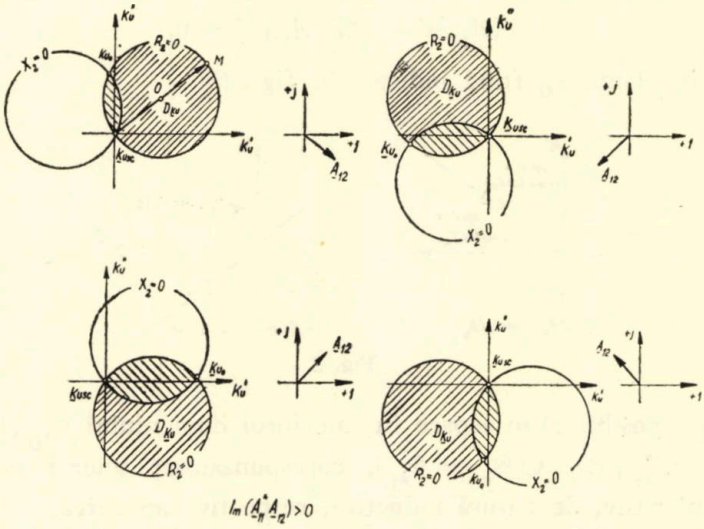


Fig. 1

Substituind în (12) coordonatele (15) ale centrului cercului (14), se obține :

$$R_2(k'_{U_c},\ k''_{U_c}) = \frac{1}{4\,|\,1-\underline{A}_{11}\,\underline{k}_{U_c}\,|^2} \cdot \frac{1}{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}/\underline{A}_{12})}, \tag{17}$$

unde $\underline{k}_{U_c} = k'_{U_c} + \mathrm{j}k''_{U_c}$.

Așadar în interiorul domeniului delimitat de cercul (14) se găsesc transformatele punctelor din planul Z_2 corespunzătoare unor rezistențe ale receptorului de același semn cu $\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}/\underline{A}_{12})$, iar în exteriorul lui transformatele punctelor corespunzătoare unor rezistențe de semn opus, adică

$$\operatorname{sign} R_{2\,\mathrm{int}} = \operatorname{sign} \mathcal{R}e\left(\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{12}}\right),\quad \operatorname{sign} R_{2\,\mathrm{ext}} = -\operatorname{sign} \mathcal{R}e\left(\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{12}}\right). \tag{18}$$

Or, receptorul fiind pasiv $R_2 \geqslant 0$, iar în cazul unui cuadripol diport liniar, pasiv și reciproc fiind satisfăcută relația $\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{11}/\underline{A}_{12}) = G_{e2sc} \geqslant 0$,

rezultă aşadar că *coeficientul de transmisie a tensiunii al unui cuadripol diport liniar, pasiv şi reciproc, în regim permanent sinusoidal, avînd un receptor pasiv, poate lua valori situate numai în interiorul şi pe frontiera unui domeniu* $\mathfrak{D}_{\underline{k}_U}$, *delimitat de cercul* (14).

4. În cazul particular în care $\mathcal{R}e\,(\underline{A}^*_{11}\,\underline{A}_{12}) = 0$ (echivalentă cu $P_{2sc} = 0$, căci $\mathcal{R}e\,(\underline{A}^*_{11}\,\underline{A}_{12}) = P_{2sc}/I_1^2$), cercul (14) degenerează în dreapta de ecuaţie:

$$\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{12})\,k'_U - \mathcal{I}m\,(\underline{A}_{12})\,k''_U = 0, \tag{19}$$

poziţia sa în planul $\underline{k}_U$ fiind indicată în fig. 2.

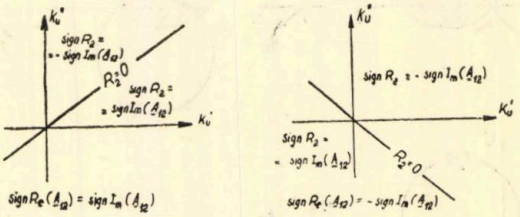


Fig. 2

5. Este posibil să se separe în interiorul domeniului $\mathfrak{D}_{\underline{k}_U}$, subdomeniile $\mathfrak{D}'_{\underline{k}_U}$, $\mathfrak{D}''_{\underline{k}_U}$, $(\mathfrak{D}'_{\underline{k}_U} \cup \mathfrak{D}''_{\underline{k}_U} = \mathfrak{D}_{\underline{k}_U})$, corespunzătoare unor impedanţe ale receptorului pasiv, de natură inductivă, respectiv capacitivă.

Pentru delimitarea acestor subdomenii se determină în planul k_U transformata dreptei $X_2 = 0$, în cadrul grupului de transformări (6′). Ţinînd seama de (13) rezultă că curba de delimitare a subdomeniilor $\mathfrak{D}'_{\underline{k}_U}$, $\mathfrak{D}''_{\underline{k}_U}$ este un cerc de ecuaţie:

$$k'^2_U + k''^2_U - \frac{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{12})}{\mathcal{I}m\,(\underline{A}^*_{11}\,\underline{A}_{12})}\,k'_U - \frac{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{12})}{\mathcal{I}m\,(\underline{A}^*_{11}\,\underline{A}_{12})}\,k''_U = 0, \tag{20}$$

avînd centrul în

$$\bar{k}'_{U_c} = \frac{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{12})}{2\,\mathcal{I}m\,(\underline{A}^*_{11}\,\underline{A}_{12})}, \qquad \bar{k}''_{U_c} = \frac{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{12})}{2\,\mathcal{I}m\,(\underline{A}^*_{11}\,\underline{A}_{12})} \tag{21}$$

şi raza

$$\bar{r}_{\underline{k}_U} = \frac{A_{12}}{2k_c\,|\mathcal{I}m\,(\underline{A}^*_{11}\,\underline{A}_{12})|}. \tag{22}$$

Poziţia acestui cerc în planul $\underline{k}_U$ depinde de semnele componentelor reală şi imaginară ale lui $\underline{A}_{12}$, precum şi de semnul expresiei $\mathcal{I}m\,(\underline{A}^*_{11}\,\underline{A}_{12})$ (fig. 1).

Dacă se substituie în (13) coordonatele (21) ale centrului cercului (20), rezultă:

$$X_2(\bar{k}'_{U_c}, \bar{k}''_{U_c}) = \frac{1}{4|1 - \underline{A}_{11}\bar{k}_{U_c}|^2} \cdot \frac{1}{\mathcal{J}m\,(\underline{A}^*_{11}/\underline{A}^*_{12})}, \tag{23}$$

unde $\bar{k}_{U_c} = \bar{k}'_{U_c} + j\bar{k}''_{U_c}$.

Cu alte cuvinte în interiorul domeniului delimitat de cercul (20) sînt situate transformatele punctelor din planul Z_2 corespunzătoare unor reactanțe ale receptorului de același semn cu $\mathcal{J}m\,(\underline{A}^*_{11}/\underline{A}^*_{12})$, iar în exteriorul său transformatele punctelor corespunzătoare unor reactanțe de semn contrar, adică

$$\operatorname{sign} X_{2\,\text{int}} = \operatorname{sign} B_{e2\text{sc}}, \quad \operatorname{sign} X_{2\,\text{ext}} = -\operatorname{sign} B_{e2\text{sc}}, \tag{24}$$

unde s-a ținut seama că $\mathcal{J}m\,(\underline{A}^*_{11}/\underline{A}^*_{22}) = B_{e2\text{sc}}$.

Este interesant de relevat faptul că cercurile (14) și (20) se intersectează în două puncte, unul corespunzînd regimului de funcționare la gol ($\underline{k}_{U_0}$), celălalt — regimului de funcționare în scurtcircuit ($\underline{k}_{U_{sc}} = 0$).

6. În cazul particular în care coeficienții fundamentali ai cuadripolului satisfac egalitatea $\mathcal{J}m\,(\underline{A}^*_{11}\,\underline{A}_{12}) = 0$ (echivalentă cu $Q_{2\text{sc}} = 0$ deoarece $\mathcal{J}m\,(\underline{A}^*_{11}\,\underline{A}_{12}) = Q_{2\text{sc}}/I_1^2$), cercul (20) degenerează în dreapta de ecuație:

$$\mathcal{J}m\,(\underline{A}_{12})\,k'_U + \mathcal{R}e\,(\underline{A}_{12})\,k''_U = 0, \tag{25}$$

perpendiculară pe dreapta (19).

Poziția dreptei (25) în planul $\underline{k}_U$ este redată în fig. 3.

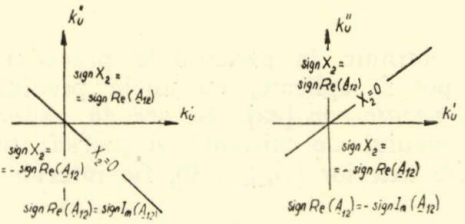


Fig. 3

7. O analiză amănunțită a domeniului de existență $\mathcal{D}_{\underline{k}_U}$ permite precizarea condițiilor în care un cuadripol diport liniar, pasiv și reciproc, este apt de a amplifica tensiunea cu sarcini pasive. Se pot distinge două cazuri posibile:

a) Coeficienții fundamentali ai cuadripolului satisfac relația $\mathcal{R}e(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{12}) \neq 0$; există atunci un regim de funcționare la care modulul coeficientului

de transmisie a tensiunii este maxim. Acest regim, obţinut la o sarcină pur reactivă, este caracterizat de puntul de funcţionare M (fig. 1 a), cu:

$$\max k_U = \frac{\underline{A}_{12}}{\mathcal{R}e(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{12})}. \tag{26}$$

Se regăseşte astfel un rezultat obţinut pe o altă cale într-o lucrare anterioară [21]. Acelaşi rezultat fusese semnalat anterior, incidental şi fără amănunte, de Schérer (*op. cit.*).

Ca o consecinţă a relaţiei (26) se poate formula, în acest caz, o condiţie necesară şi suficientă de amplificare a tensiunii, anume

$$A_{12} > \mathcal{R}e(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{12}), \tag{27}$$

echivalentă cu

$$G_{e2sc} < \frac{1}{A_{12}}. \tag{27'}$$

Pentru o structură invariabilă a cuadripolului considerat, coeficienţii săi fundamentali fiind funcţii exclusiv de frecvenţa tensiunii (sinusoidale) aplicate la poarta de intrare, rezultă că în general inegalitatea (27) este satisfăcută numai în anumite benzi de frecvenţă, pe care le vom denumi *benzi de frecvenţă de amplificare a tensiunii* (BFAT).

b) Coeficienţii fundamentali ai cuadripolului satisfac relaţia $\mathcal{R}e(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{12}) = 0$. În acest caz există un regim, caracterizat prin sarcina pur reactivă $\underline{Z}_2 = -\mathrm{j}\,\mathcal{I}m(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{12})$, la care se realizează $k_U = \infty$. Cu alte cuvinte, acest tip de cuadripoli este totdeauna apt de a realiza amplificarea tensiunii.

8. Rezultatele obţinute în paragrafele precedente, valabile pentru cuadripolii pasivi, pot fi aplicate, cu unele precizări suplimentare, şi cuadripolilor activi *neautonomi* [22]. Se are în vedere că în acest caz $G_{e2sc} \gtrless 0$ şi deci domeniul de existenţă al coeficientului de transmisie a tensiunii poate fi, fie exterior ($G_{e2sc} \leqslant 0$), fie interior ($G_{e2sc} \geqslant 0$) cercului de ecuaţie (14).

Există posibilitatea de a clasifica cuadripolii activi neautonomi, în raport cu aptitudinea lor de a amplifica tensiunea în regimuri cu impedanţe pasive ale receptorului. Această clasificare prezintă un interes evident în teoria amplificatoarelor electronice şi semiconductoare, funcţionînd în domeniul liniar (de ex. [23]). Se disting trei cazuri posibile, după cum $\mathcal{R}e(\underline{A}^*_{11}\underline{A}_{12})$ (sau G_{e2sc}) > 0, $= 0$, < 0. În timp ce în primul caz realizarea regimurilor de amplificare a tensiunii este condiţionată de satisfacerea inegalităţii (27), în celelalte două cazuri există totdeauna posibilitatea de a realiza astfel de regimuri.

Este important de relevat faptul că în timp ce eventual în primul și cu certitudine în al treilea caz este posibil de a realiza amplificarea tensiunii cu asigurarea unui defazaj nul sau de 180° între tensiunile de la porțile cuadripolului, ceea ce prezintă utilitate în schemele liniare de amplificare a tensiunii, în al doilea caz această situație nu este posibilă.

În primul caz ($\mathcal{R}e\,(\underline{A}^*_{11}\,\underline{A}_{12}) > 0$), realizarea unei amplificări a tensiunii este posibilă în situația în care tensiunile la cele două porți ale cuadripolului sînt: a) simfazice, dacă

$$\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{12}) > \mathcal{R}e\,(\underline{A}^*_{11}\,\underline{A}_{12})\,; \tag{28}$$

b) în opoziție de fază, dacă

$$\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{12}) < 0\,,\quad |\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{12})| > \mathcal{R}e\,(\underline{A}^*_{11}\,\underline{A}_{12})\,. \tag{29}$$

III. Domeniul de existență $\mathfrak{D}_{\underline{k}_I}$ al coeficientului de transmisie a curentului

9. Introducînd în (7′) expresia (9) a impedanței receptorului se obține:

$$\underline{k}_I = \frac{1}{\underline{A}_{22} + \mathrm{j}\lambda\,\underline{A}_{21}\,X_2}\,, \tag{30}$$

care reprezintă ecuația unui cerc care trece prin origine [20].

Relația (9′) permite obținerea expresiilor rezistenței R_2 și a reactanței X_2 ale receptorului, în funcție de $k'_I = \mathcal{R}e\,(\underline{k}_I)$, $k''_I = \mathcal{I}m\,(\underline{k}_I)$ și coeficienții fundamentali ai cuadripolului, prezentînd interes în cele ce urmează și anume:

$$R_2 = \frac{1}{A^2_{21}\,k^2_I}\,[-\mathcal{R}e\,(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22})\,(k'^2_I + k''^2_I) + \mathcal{R}e\,(\underline{A}_{21})\,k'_I - \mathcal{I}m\,(\underline{A}_{21})\,k''_I]\,, \tag{31}$$

$$X_2 = \frac{1}{A^2_{21}\,k^2_I}\,[-\mathcal{I}m\,(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22})\,(k'^2_I + k''^2_I) - \mathcal{I}m\,(\underline{A}_{21})\,k'_I - \mathcal{R}e\,(\underline{A}_{21})\,k''_I]\,. \tag{32}$$

Expresia analitică a ecuației cercului (30) în planul k'_I, k''_I este posibil de determinat cu ajutorul relației (31). Se obține:

$$k'^2_I + k''^2_I - \frac{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{21})}{\mathcal{R}e\,(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22})}\,k'_I + \frac{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{21})}{\mathcal{R}e\,(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22})}\,k''_I = 0\,, \tag{33}$$

coordonatele centrului fiind:

$$k'_{I_c} = \frac{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{21})}{2\,\mathcal{R}e\,(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22})}\,,\quad k''_{I_c} = -\frac{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{21})}{2\,\mathcal{R}e\,(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22})}\,, \tag{34}$$

iar raza

$$r_{\underline{k}_1} = \frac{\underline{A}_{21}}{2k_c\,|\mathcal{R}e(\underline{A}^*_{21}\underline{A}_{22})|}. \tag{35}$$

Poziţia cercului (33) în planul k_1 depinde de semnele componentelor reală şi imaginară ale lui $\underline{A}_{21}$ (fig. 4).

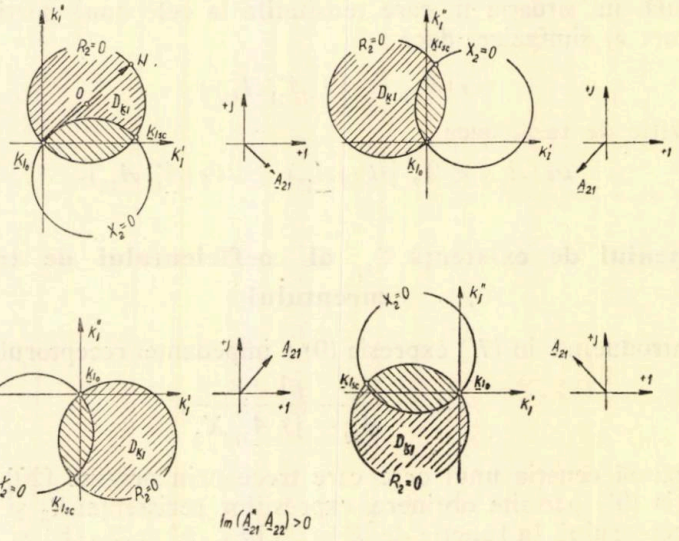


Fig. 4

Dacă se substituie în (31) coordonatele (34) ale centrului cercului (33), rezultă:

$$R_2(k'_{I_c},\ k''_{I_c}) = \mathcal{R}e\left(\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}}\right). \tag{36}$$

În consecinţă, în interiorul domeniului delimitat de cercul (33) se află situate transformatele punctelor din planul Z_2 corespunzătoare unor rezistenţe ale receptorului de acelaşi semn cu $\mathcal{R}e(\underline{A}_{22}/\underline{A}_{21})$, iar în exteriorul lui transformatele punctelor corespunzătoare unor rezistenţe de semn contrar, adică

$$\text{sign}\,R_{2\,\text{int}} = \text{sign}\,\mathcal{R}e\left(\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}}\right),\quad \text{sign}\,R_{2\,\text{ext}} = -\,\text{sign}\,\mathcal{R}e\left(\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}}\right). \tag{37}$$

În cele ce urmează se consideră numai cazurile în care receptorul este pasiv ($R_2 \geqslant 0$), iar cuadripolul, diport şi liniar, este pasiv şi reciproc ($\mathcal{R}e(\underline{A}_{22}/\underline{A}_{21}) = R_{e20} \geqslant 0$). Cu alte cuvinte *coeficientul de transmisie a curentului al unui cuadripol diport liniar, pasiv şi reciproc, poate lua valori situate numai în interiorul şi pe frontiera unui domeniu* $\mathfrak{D}_{\underline{k}_1}$ *delimitat de cercul* (33).

10. Dacă coeficienții fundamentali ai cuadripolului satisfac relația $\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{21}^{*}\,\underline{A}_{22}) = 0$ (echivalentă cu $P_{20} = 0$ căci $\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{21}^{*}\,\underline{A}_{22}) = P_{20}/U_1^2$), cercul (33) degenerează în dreapta:

$$\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{21})\,k_I' - \mathcal{I}m\,(\underline{A}_{21}\,k)_I'' = 0, \tag{38}$$

reprezentată în fig. 5.

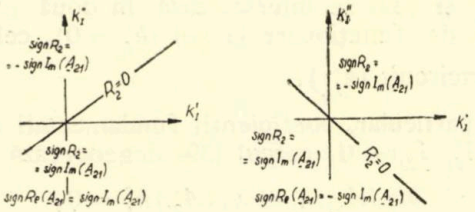


Fig. 5

11. În interiorul domeniului $\mathfrak{D}_{\underline{k}_I}$ pot fi delimitate subdomeniile $\mathfrak{D}'_{\underline{k}_I}$, $\mathfrak{D}''_{\underline{k}_I}$, $(\mathfrak{D}'_{\underline{k}_I} \cup \mathfrak{D}''_{\underline{k}_I} = \mathfrak{D}_{\underline{k}_I})$, corespunzătoare unor impedanțe (pasive) ale receptorului, de natură inductivă, respectiv capacitivă.

Delimitarea acestor subdomenii este asigurată, în planul k_I, de transformata dreptei $X_2 = 0$, în cadrul grupului de transformări (7'). Avînd în vedere (32) se ajunge la concluzia că curba care delimitează subdomeniile $\mathfrak{D}'_{\underline{k}_I}$, $\mathfrak{D}''_{\underline{k}_I}$ este un cerc de ecuație:

$$k_I'^2 + k_I''^2 + \frac{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{21})}{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{21}^{*}\,\underline{A}_{22})}\,k_I' + \frac{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{21})}{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{21}^{*}\,\underline{A}_{22})}\,k_I'' = 0, \tag{39}$$

cu centrul în

$$\bar{k}_{I_c}' = -\frac{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{21})}{2\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{21}^{*}\,\underline{A}_{22})},\quad \bar{k}_{I_c}'' = -\frac{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{21})}{2\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{21}^{*}\,\underline{A}_{22})} \tag{40}$$

și de rază

$$r_{\underline{k}_I} = \frac{A_{21}}{2k_c\,|\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{21}^{*}\,\underline{A}_{22})|}. \tag{41}$$

Poziția acestui cerc în planul $\underline{k}_I$ depinde de semnele componentelor reală și imaginară ale lui $\underline{A}_{21}$, precum și de semnul expresiei $\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{21}^{*}\,\underline{A}_{22})$ (fig. 4).

Substituind în (32) coordonatele (40) ale centrului cercului (39), se obține:

$$X_2(\bar{k}_{I_c}',\ \bar{k}_{I_c}'') = \mathcal{I}m\left(\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}}\right). \tag{42}$$

Așadar în interiorul domeniului delimitat de cercul (39) sînt situate transformatele punctelor (din semiplanul $R_2 \geqslant 0$) corespunzătoare unor

reactanţe ale receptorului de acelaşi semn cu $\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{22}/\underline{A}_{21})$, iar în exteriorul său transformatele punctelor corespunzătoare unor reactanţe de semn contrar, adică

(43) $$\text{sign } X_{2\,\text{int}} = \text{sign } X_{e20}, \quad \text{sign } X_{2\,\text{ext}} = -\text{sign } X_{e20},$$

unde s-a avut în vedere că $\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{22}/\underline{A}_{21}) = X_{e20}$.

Cercurile (33) şi (39) se intersectează în două puncte, unul corespunzînd regimului de funcţionare la gol ($\underline{k}_{I_0} = 0$), celălalt regimului de funcţionare în scurtcircuit ($\underline{k}_{I_{sc}}$).

11. Dacă, în particular, coeficienţii fundamentali ai cuadripolului satisfac relaţia $\mathcal{I}m\,(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22}) = 0$, cercul (39) degenerează în dreapta:

(44) $$\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{21})\,k'_I + \mathcal{R}e\,(\underline{A}_{21})\,k''_I = 0,$$

perpendiculară pe dreapta (38) şi reprezentată în fig. 6.

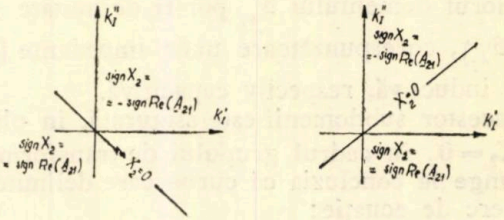


Fig. 6

12. Supunînd domeniul de existenţă $\mathcal{D}_{\underline{k}_I}$ unui examen minuţios este posibil să se formuleze condiţiile în care un cuadripol diport liniar, pasiv şi reciproc, este capabil de a amplifica curentul cu sarcini pasive. Se disting două cazuri posibile:

a) Coeficienţii fundamentali ai cuadripolului satisfac relaţia $\mathcal{R}e\,(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22}) \neq 0$; se pune în evidenţă un regim de funcţionare la care modulul coeficientului de transmisie a curentului este maxim. Acest regim, realizat la o sarcină pur reactivă, este caracterizat de punctul de funcţionare N (fig. 4a), cu:

(45) $$\max \underline{k}_I = \frac{\underline{A}_{21}}{\mathcal{R}e\,(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22})}.$$

Se regăseşte şi de data aceasta un rezultat obţinut pe o cale diferită într-o lucrare precedentă [21].

În baza relaţiei (45) este posibil să se formuleze o condiţie necesară şi suficientă de amplificare a curentului, anume:

(46) $$\underline{A}_{21} > \mathcal{R}e\,(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22}),$$

echivalentă cu

$$R_{e20} < \frac{1}{A_{21}}. \tag{46'}$$

Dacă structura cuadripolului considerat este invariabilă, ținînd seama că coeficienții fundamentali ai cuadripolului sînt funcții numai de frecvența tensiunii aplicate la poarta de intrare, rezultă că în general inegalitatea (46) este verificată doar în anumite benzi de frecvență, pe care le vom denumi *benzi de frecvență de amplificare a curentului* (BFAC).

b) Coeficienții fundamentali ai cuadripolului satisfac relația $\mathcal{R}e\,(\underline{A}^*_{21}\underline{A}_{22}) = 0$. Există, în acest caz, un regim, caracterizat prin sarcina pur reactivă $\underline{Z}_2 = -\mathrm{j}\,\mathcal{I}m\,(\underline{A}^*_{21}\underline{A}_{22})$, la care se realizează $k_I = \infty$. Rezultă așadar că un astfel de cuadripol este totdeauna capabil de a realiza amplificarea curentului.

13. Ca și în cazul coeficientului de transmisie a tensiunii, rezultatele obținute în paragrafele precedente pot fi extinse și la cazul cuadripolilor neautonomi. Se ține seama că în acest caz $R_{e20} \gtrless 0$ și deci domeniul de existență al coeficientului de transmisie a curentului poate fi exterior ($R_{e20} \leqslant 0$) sau interior ($R_{e20} \geqslant 0$) cercului de ecuație (33).

Rezultă de aici posibilitatea de a clasifica cuadripolii activi neautonomi în raport cu posibilitățile lor de a amplifica curentul în regimurile în care impedanța receptorului este pasivă. Anume, se disting trei cazuri posibile, după cum $\mathcal{R}e\,(\underline{A}^*_{21}\underline{A}_{22})$ (sau R_{e20}) $> 0, = 0, < 0$. În timp ce în primul caz realizarea regimurilor de amplificare a curentului este condiționată de satisfacerea inegalității (46), în celelalte două cazuri există totdeauna posibilitatea de a realiza astfel de regimuri.

IV. Domeniul de existență $\mathfrak{D}_{\underline{Z}_m}$ al impedanței de transfer

14. Substituind în (8') expresia (9) a impedanței receptorului rezultă:

$$\underline{Z}_m = \frac{\mathrm{j}X_2}{\mathrm{j}\underline{A}_{21}X_2 + \underline{A}_{22}/\lambda}, \tag{47}$$

sau, introducînd notația $1/\lambda = \mu$,

$$\underline{Z}_m = \frac{\mathrm{j}X_2}{\mathrm{j}\underline{A}_{21}X_2 + \mu\underline{A}_{22}}, \tag{47'}$$

care reprezintă ecuația unui cerc care trece prin origine [20].

Cu ajutorul relației (6') se determină expresiile rezistenței R_2 și reactanței X_2 ale receptorului, în funcție de $R_{2m} = \mathcal{R}e\,(\underline{Z}_m)$, $X_{2m} = \mathcal{I}m\,(\underline{Z}_m)$ și coeficienții fundamentali ai cuadripolului, utile în cele ce urmează, și anume:

$$R_2 = \frac{1}{|1 - \underline{A}_{21}\underline{Z}_m|^2}[-\mathcal{R}e\,(\underline{A}^*_{21}\underline{A}_{22})(R_m^2 + X_m^2) + \mathcal{R}e(\underline{A}_{22})R_m - \mathcal{I}m\,(\underline{A}_{22})X_m], \tag{48}$$

$$(49)\quad X_2 = \frac{1}{|1-\underline{A}_{21}\underline{Z}_m|^2}[-\mathcal{I}m(\underline{A}_{21}^*\underline{A}_{22})(R_m^2+X_m^2)+\mathcal{I}m(\underline{A}_{22})R_m+\mathcal{R}e(\underline{A}_{22})X_m].$$

Este posibil să se determine expresia analitică a ecuației cercului (47') în planul R_m, X_m, cu ajutorul relației (48), anume

$$(50)\quad R_m^2 + X_m^2 - \frac{\mathcal{R}e(\underline{A}_{22})}{\mathcal{R}e(\underline{A}_{21}^*\underline{A}_{22})}R_m + \frac{\mathcal{I}m(\underline{A}_{22})}{\mathcal{R}e(\underline{A}_{21}^*\underline{A}_{22})}X_m = 0,$$

coordonatele centrului fiind:

$$(51)\quad R_{m_c} = \frac{\mathcal{R}e(\underline{A}_{22})}{2\mathcal{R}e(\underline{A}_{21}^*\underline{A}_{22})},\quad X_{m_c} = -\frac{\mathcal{I}m(\underline{A}_{22})}{2\mathcal{R}e(\underline{A}_{21}^*\underline{A}_{22})}$$

și raza

$$(52)\quad r_{\underline{Z}_m} = \frac{A_{22}}{2k_Z|\mathcal{R}e(\underline{A}_{21}^*\underline{A}_{22})|},$$

unde k_Z scara de reprezentare a impedanțelor.

Poziția cercului (50) în planul $\underline{Z}_m$ depinde de semnele componentelor reală și imaginară ale coeficientului $\underline{A}_{22}$ (fig. 7).

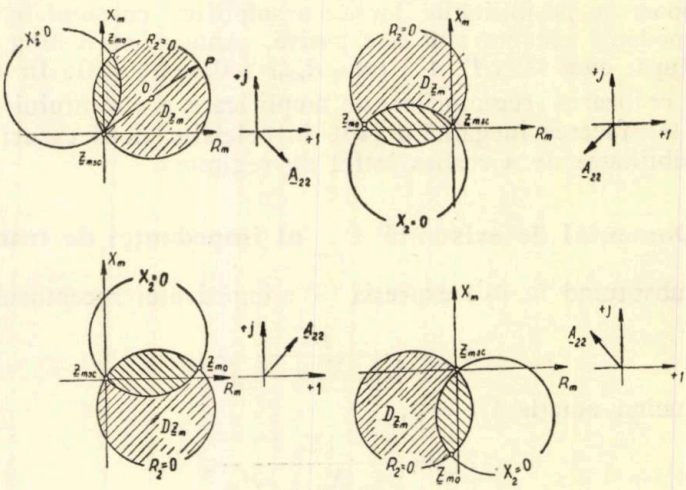


Fig. 7

Substituind în (48) coordonatele (51) ale centrului cercului (50) rezultă:

$$(53)\quad R_2(R_{m_c}, X_{m_c}) = \frac{1}{4|1-\underline{A}_{21}\underline{Z}_{m_c}|^2}\cdot\frac{1}{\mathcal{R}e(\underline{A}_{11}/\underline{A}_{22})},$$

unde $\underline{Z}_{m_c} = R_{m_c} + jX_{m_c}$.

Rezultă că în interiorul domeniului delimitat de cercul (50) sînt situate transformatele punctelor din planul Z_2 corespunzătoare unor rezistențe ale receptorului de același semn cu $\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{21}/\underline{A}_{22})$ iar în exteriorul lui transformatele punctelor corespunzătoare unor rezistențe de semn opus, adică

$$\text{(54)} \qquad \operatorname{sign} R_{2\,\text{int}} = \operatorname{sign} \mathcal{R}e\left(\frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{22}}\right), \quad \operatorname{sign} R_{2\,\text{ext}} = -\operatorname{sign} \mathcal{R}e\left(\frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{22}}\right).$$

Dacă se consideră numai cazurile în care receptorul este pasiv ($R_2 \geqslant 0$) și deoarece în cazul unui cuadripol diport liniar, pasiv și reciproc $\mathcal{R}e\,(A_{21}/A_{22}) = G_{e20} \geqslant 0$, rezultă că *impedanța de transfer a unui cuadripol diport liniar, pasiv și reciproc, în regim permanent sinusoidal, alimentînd un receptor pasiv, poate lua valori numai în interiorul și pe frontiera domeniului* $\mathfrak{D}_{\underline{Z}_m}$ *delimitat de cercul* (50), *cuadripolul fiind alimentat în sens direct.*

15. În situația particulară în care $\mathcal{R}e\,(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22}) = 0$ (echivalentă cu $P_{20} = 0$ căci $\mathcal{R}e\,(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22}) = P_{20}/U_1^2$), cercul (50) degenerează în dreapta de ecuație:

$$\text{(55)} \qquad \mathcal{R}e\,(\underline{A}_{22})\,R_m - \mathcal{I}m\,(\underline{A}_{22})\,X_m = 0,$$

reprezentată în fig. 8.

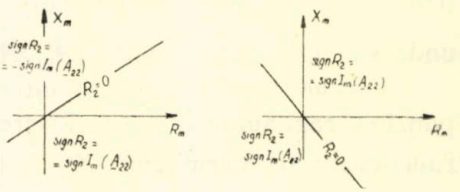


Fig. 8

16. Ca și în cazurile precedente, există posibilitatea de a separa în interiorul domeniului $\mathfrak{D}_{\underline{Z}_m}$, subdomeniile $\mathfrak{D}'_{\underline{Z}_m}$, $\mathfrak{D}''_{\underline{Z}_m}$, $(\mathfrak{D}'_{\underline{Z}_m} \cup \mathfrak{D}''_{\underline{Z}_m} = \mathfrak{D}_{\underline{Z}_m})$, corespunzătoare unor impedanțe (pasive) ale receptorului, de natură inductivă, respectiv capacitivă.

Pentru a putea delimita aceste subdomenii se determină în planul $\underline{Z}_m$ transformata dreptei $X_2 = 0$ în cadrul grupului de transformări (8′). Ținînd seama de (49) rezultă că curba care delimitează subdomeniile $\mathfrak{D}'_{\underline{Z}_m}$, $\mathfrak{D}''_{\underline{Z}_m}$ este cercul de ecuație:

$$\text{(56)} \qquad R_m^2 + X_m^2 - \frac{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{22})}{\mathcal{I}m\,(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22})}\,R_m - \frac{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{22})}{\mathcal{I}m\,(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22})}\,X_m = 0.$$

Coordonatele centrului acestui cerc sînt:

$$\text{(57)} \qquad \overline{R}_{m_c} = \frac{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{22})}{2\,\mathcal{I}m\,(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22})}, \qquad \overline{X}_{m_c} = \frac{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{22})}{2\,\mathcal{I}m\,(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22})},$$

raza sa fiind

$$\text{(58)} \qquad \overline{r}_{\underline{Z}_m} = \frac{A_{22}}{2\,k_Z\,|\,\mathcal{I}m\,(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22})|},$$

Poziția acestui cerc în planul $\underline{Z}_m$ depinde de semnele componentelor reală și imaginară ale coeficientului $\underline{A}_{22}$, precum și de semnul expresiei $\mathcal{I}m\,(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22})$ (fig. 7).

Dacă se substituie în (49) coordonatele (57) ale centrului cercului (56) se obține

$$X_2(\overline{R}_{m_c}, \overline{X}_{m_c}) = \frac{1}{4\,|\,1 - \underline{A}_{21}\,\overline{\underline{Z}}_m\,|^2} \cdot \frac{1}{\mathcal{I}m\,(\underline{A}^*_{21}/\underline{A}^*_{22})}, \tag{59}$$

unde $\overline{\underline{Z}}_m = \overline{R}_m + \mathrm{j}\,\overline{X}_m$.

Așadar, în timp ce în interiorul domeniului delimitat de cercul (56) sînt situate transformatele punctelor corespunzătoare unor reactanțe ale receptorului de același semn cu $\mathcal{I}m\,(\underline{A}^*_{21}/\underline{A}^*_{22})$, în exteriorul său se află transformatele punctelor care corespund unor reactanțe de semn opus, adică:

$$\operatorname{sign} X_{2\,\mathrm{int}} = \operatorname{sign} B_{e20}, \quad \operatorname{sign} X_{2\,\mathrm{ext}} = -\operatorname{sign} B_{e20}, \tag{60}$$

unde s-a ținut seama că $\mathcal{I}m\,(\underline{A}^*_{21}/\underline{A}^*_{22}) = B_{e20}$.

Cercurile (50) și (55) se intersectează în două puncte, unul corespunzînd regimului de funcționare la gol $(\underline{Z}_{m_0})$, celălalt — regimului de funcționare în scurtcircuit $(\underline{Z}_{m_{sc}} = 0)$.

17. În cazul particular în care parametrii fundamentali ai cuadripolului satisfac relația $\mathcal{I}m\,(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22}) = 0$ (echivalentă cu $Q_{20} = 0$), cercul (56) degenerează în dreapta:

$$\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{22})\,R_m + \mathcal{R}e\,(\underline{A}_{22})\,X_m = 0, \tag{61}$$

perpendiculară pe dreapta (55) și reprezentată în fig. 9.

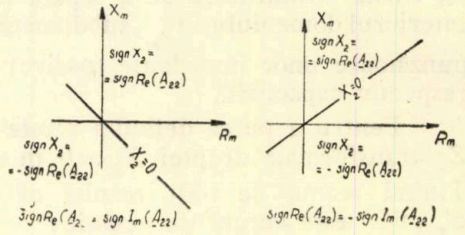


Fig. 9

18. Rezultatele obținute, valabile pentru cuadripoli diporți liniari, pasivi și reciproci, pot fi extinse și asupra clasei cuadripolilor diporți liniari, activi, neautonomi, în acele benzi de frecvență în care este satisfăcută inegalitatea $G_{e20} \geqslant 0$. În caz contrar domeniul de existență al impedanței de transfer, corespunzător unor receptori pasivi ai cuadripolului, acoperă întreg planul $\underline{Z}_m$, cu excepția suprafeței delimitate de cercul (56).

Din analiza fig. 7 rezultă că în cazul unui cuadripol diport liniar, pasiv și reciproc, alimentînd un receptor pasiv, există un regim de funcționare caracterizat prin o valoare maximă a modulului impedanței de transfer (punctul P — fig. 7 a).

V. Concluzii

1. Coeficienții de transfer (coeficientul de transmisie a tensiunii, coeficientul de transmisie a curentului, impendanța de transfer) ai unui cuadripol diport liniar, pasiv și reciproc, alimentînd un receptor pasiv, pot lua valori numai în interiorul și pe frontiera anumitor domenii, în general finite.

2. Domeniul de existență $\mathfrak{D}_{\underline{k}_U}$ al coeficientului de transmisie a tensiunii este delimitat de cercul (14); domeniul de existență $\mathfrak{D}_{\underline{k}_I}$ al coeficientului de transmisie a curentului este delimitat de cercul (33); domeniul de existență $\mathfrak{D}_{\underline{Z}_m}$ al impedanței de transfer este delimitat de cercul (50).

3. În interiorul fiecăruia din domeniile $\mathfrak{D}_{\underline{k}_U}$, $\mathfrak{D}_{\underline{k}_I}$, $\mathfrak{D}_{\underline{Z}_m}$ este posibil să se delimiteze subdomeniile $\mathfrak{D}'_{\underline{k}_U}$, $\mathfrak{D}''_{\underline{k}_U}$, $(\mathfrak{D}'_{\underline{k}_U} \cup \mathfrak{D}''_{\underline{k}_U} = \mathfrak{D}_{\underline{k}_U})$; $\mathfrak{D}'_{\underline{k}_I}$, $\mathfrak{D}''_{\underline{k}_I}$, $(\mathfrak{D}_{\underline{k}_I} \cup \mathfrak{D}''_{\underline{k}_I} = \mathfrak{D}_{\underline{k}_I})$; $\mathfrak{D}'_{\underline{Z}_m}$, $\mathfrak{D}''_{\underline{Z}_m}$, $(\mathfrak{D}'_{\underline{Z}_m} \cup \mathfrak{D}''_{\underline{Z}_m} = \mathfrak{D}_{\underline{Z}_m})$, corespunzătoare unor impedanțe (pasive) ale receptorului, de natură inductivă, respectiv capacitivă.

4. Subdomeniile $\mathfrak{D}'_{\underline{k}_U}$, $\mathfrak{D}''_{\underline{k}_U}$ sînt delimitate de arcul de cerc (20), subdomeniile $\mathfrak{D}'_{\underline{k}_I}$, $\mathfrak{D}''_{\underline{k}_I}$ — de arcul de cerc (39), iar subdomeniile $\mathfrak{D}'_{\underline{Z}_m}$, $\mathfrak{D}''_{\underline{Z}_m}$ — — de arcul de cerc (56).

5. Se stabilesc condițiile necesare și suficiente (27) și (46) pentru ca un cuadripol diport liniar, pasiv și reciproc, să fie capabil de a amplifica cu receptori pasivi, tensiunea, respectiv curentul.

6. Pentru un cuadripol diport liniar, pasiv și reciproc, de structură invariabilă, amplificarea tensiunii sau a curentului cu receptori pasivi, este posibilă numai în anumite benzi de frecvență.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de electrotehnică

BIBLIOGRAFIE

1. Șora C., *Cuadripolul electric.* Ed. tehn., Buc., 1964, p. 131.
2. Stoilow S., *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă.* Vol. **I**, Ed. Acad. R.P.R., Buc., 1954, p. 94.
3. Weissfloch A., ENT, **19**, S. 259.
4. — *Schaltungstheorie und Messtechnik der Dezimeter- und Zentimeterwellengebietes.* Birkhäuser Verlag, Basel u. Stuttgart, 1958.
5. Schérer J., RGÉ, 1951, **60**, *9*, p. 359.
6. Fallou J., *Leçons d'Électrotechnique générale.* Vol. **I**, Gauthier-Villars, Paris, 1939.
7. Tarboux J. G., Trans. of the AIEE, 1954, **66**, p. 88.
8. Moorhouse C. E., Proceed. of the IEE, 1957, **104 C**, *6*, p. 265.
9. Ogushi K., Mem. of the of Eng., Hokkaido Univ., 1955, **X**, *1* (*43*), p. 11.

10. Rosman H., Braier A., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1957, **III** (**VII**), *1-2*, p. 129.
11. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1961, **VII** (**XI**), *3-4*, p. 243.
12. Rosman H., Braier A., Saal C., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X** (**XIV**), *3-4*, p. 233.
13. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI** (**XV**), *1-2*, p. 247.
14. — Lucr. şt., Inst. polit. Braşov, fac. mecanică, 1965, **VII**, p. 69.
15. Другов В. М., Электросвязи, 1958, **12**, *3*, стр. 49.
16. Атабеков Г. И., *Теоретические основы электротехники*. Ч. **I**, ГЭИ, М.-Л., 1962, стр. 131.
17. Kuroş A. G., *Teoria Grupurilor*. Ed. tehn., Buc., 1959, § **5**, (trad. din l. rusă).
18. Нагорный Л. Я., Радиотехника, 1958, *4*.
19. — *Анализ и расчет усилительных схем*. ГИТЛ, Киев 1963, стр. 158.
20. Ots-Chevalier L., RGÉ, 1920, **VII**, *10*, pp. 315, 347.
21. Rosman H., Braier A., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, **IX** (**XIII**), *1-2*, p. 231.
22. Зелях Э. В., Авт. и телемех., 1949, **X**, *2*, стр. 135.
23. Ризкин А. А., *Основы теории и расчета электронных усилителей*. Изд. Энергия, М.-Л., 1965.
24. Feldtkeller R., TFT, 1925, **14**, S. 189.
25. — WV Siemens, 1928, **7** (**1**), S. 254.

DOMAINES D'EXISTENCE DES COEFFICIENTS DE TRANSFERT D'UN QUADRIPÔLE DIPORTE LINÉAIRE, PASSIF ET RÉCIPROQUE, ALIMENTANT UN RÉCEPTEUR PASSIF

(Résumé)

1. Les valeurs des coefficients de transfert (coefficient de transmission de la tension. coefficient de transmission du courant, impédance de transfert) d'un quadripôle diporte linéaire, passif et réciproque, ayant un récepteur passif, sont toujours situées dans l'intérieur et sur la frontière de certaines domaines, en général finis.

2. Le domaine d'existence $\mathfrak{D}_{\underline{k}_U}$ du coefficient de transmission de la tension est délimité par le cercle (14); le domaine d'existence $\mathfrak{D}_{\underline{k}_I}$ du coefficient de transmission du courant est délimité par le cercle (33); le domaine d'existence $\mathfrak{D}_{\underline{Z}_m}$ de l'impédance de transfert est délimité par le cercle (50).

3. Il est possible de délimiter à l'intérieur de chacun des domaines $\mathfrak{D}_{\underline{k}_U}$, $\mathfrak{D}_{\underline{k}_I}$ et $\mathfrak{D}_{\underline{Z}_m}$ les sous-domaines $\mathfrak{D}'_{\underline{k}_U}$, $\mathfrak{D}''_{\underline{k}_U}$, $(\mathfrak{D}'_{\underline{k}_U} \cup \mathfrak{D}''_{\underline{k}_U} = \mathfrak{D}_{\underline{k}_U})$, $\mathfrak{D}'_{\underline{k}_I}$, $\mathfrak{D}''_{\underline{k}_I}$, $(\mathfrak{D}'_{\underline{k}_I} \cup \mathfrak{D}''_{\underline{k}_I} = \mathfrak{D}_{\underline{k}_I})$, $\mathfrak{D}'_{\underline{Z}_m}$, $\mathfrak{D}''_{\underline{Z}_m}$, $(\mathfrak{D}'_{\underline{Z}_m} \cup \mathfrak{D}''_{\underline{Z}_m}) = \mathfrak{D}_{\underline{Z}_m})$, qui correspondent à des impédances (passives) du récepteur de nature inductive ou bien capacitive.

4. Les sous-domaines $\mathfrak{D}'_{\underline{k}_U}$, $\mathfrak{D}''_{\underline{k}_U}$ sont délimités par l'arc de cercle (20), les sous-domaines $\mathfrak{D}_{\underline{k}_I}$, $\mathfrak{D}_{\underline{k}_I}$ — par l'arc de cercle (39), tandis que les sous-domaines $\mathfrak{D}''_{\underline{Z}_m}$, $\mathfrak{D}''_{\underline{Z}_m}$ — par l'arc de cercle (56).

5. On établit les conditions nécessaires et suffisantes (27) et (46) qui assurent l'amplification de la tension, respectivement du courant, par un quadripôle diporte linéaire, passif et réciproque, ayant un récepteur passif.

6. Pour un quadripôle diporte linéaire, passif et réciproque, de structure donnée, l'amplification de la tension ou bien du courant sont possibles seulement dans certaines bandes de fréquence, lorsque le récepteur est passif.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1—2, 1966

Mecanică tehnică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XII (XVI), вып. 1—2, 1966

Техническая механика

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XII (XVI), 1—2, 1966

Mechanical Engineering

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. D. 531.132—2 ; 621—231

ACCÉLÉRATIONS COMPOSÉES-RÉDUITES D'ORDRES SUPÉRIEURS

PAR

CHRISTIAN PELECUDI

Dans l'étude des chaînes cinématiques planes, la détermination des accélérations d'ordres supérieurs (n) s'effectue en base des équations vectorielles, similaires aux équations des accélérations du premier ordre. Lors du mouvement d'un seul corps, la liaison entre les accélérations de deux points A et B est:

$$\bar{a}_B^{(n)} = \bar{a}_A^{(n)} + \bar{a}_{BA}^{(n)n} + \bar{a}_{BA}^{(n)t}, \tag{1}$$

où l'accélération normale de la rotation relative est:

$$\bar{a}_{BA}^{(n)n} = -A_n \overline{AB} \tag{2}$$

et l'accélération tangentielle dans le même mouvement:

$$\bar{a}_{BA}^{(n)t} = B_n \overline{AB}\, i, \tag{3}$$

$\overline{AB}$ étant le vecteur de position entre les points A et B, et i l'opérateur de la rotation positive de $\pi/2$. Les coefficients A_n et B_n dépendent de la vitesse angulaire ω et des premières $n-1$ et respectivement n dérivées. Ces coefficients sont liés par les relations de récurrence:

$$A_{n+1} = \dot{A}_n + \omega B_n, \quad B_{n+1} = \dot{B}_n - \omega A_n. \tag{4}$$

Pour les accélérations de deux points C_1 et C_2, confondus en le point géométrique C mais liés à de corps différents, entre lesquels il existe un mouvement relatif, la relation de liaison est:

$$\bar{a}_{C_2}^{(n)} = \bar{a}_{C_1}^{(n)} + \bar{a}_{C_{21}}^{c(n)} + \bar{a}_{C_{21}}^{r(n)}, \tag{5}$$

où apparaissent l'accélération relative d'ordre n, $\bar{a}_{C_{21}}^{r(n)}$, et l'accélération complémentaire d'ordre n, $\bar{a}_{C_{21}}^{c(n)}$, exprimées en fonction des accélérations relatives d'ordres inférieurs

$$\bar{a}^{c(n)}_{C_{21}} = \sum_{k=0}^{n-1} D^{(k)}_n \bar{a}^{r(n)}_{C_{21}}, \tag{6}$$

les coefficients $D^{(k)}_n$ étant exprimés par les relations du récurrence

$$D^{(k)}_{n+1} = \dot{D}^{(k)}_n + \omega D^{(k)}_n i + D^{(k-1)}_n, \tag{7}$$

avec

$$D^{(-1)}_n = -(A_n - B_n i), \quad D^{(n)}_n \equiv 1, \quad D^{(0)}_1 = 2\omega i. \tag{8}$$

Dû à l'apparition des termes complémentaires dans les équations des accélérations, quoi qu'ils soient connus de l'étude des accélérations inférieures, les propriétés des accélérations sont moins évidentes que celles des vitesses. Quelques modifications des vecteurs d'accélérations mettent en évidence leurs propriétés. Les accélérations réduites, d'ordres divers, utilisées dans nombre de travaux très valeureux redevables au Prof. D. Mangeron [1]...[4], jouissent de propriétés remarquables. Dans le plan du corps, la droite des extrémités des accélérations réduites de deux points est perpendiculaire à la droite des points respectifs, ce qui rend possible l'utilisation de la méthode des projections à peu près dans les mêmes conditions que dans le cas des vitesses. Les accélérations composées ont les mêmes propriétés dans le plan des accélérations [5], [6] tout comme les vitesses. Par rapport à un point K, arbitraire, du corps, l'accélération composée d'un point est définie par (fig. 1):

$$\tilde{a}^{(n)}_A = \bar{a}^{(n)}_A + A_n \overline{KA} = \bar{a}^{(n)}_k + B_n \overline{KA}\, i, \tag{9}$$

ce qui assure:

$$\tilde{a}^{(n)}_B = \tilde{a}^{(n)}_A + \tilde{a}^{(n)}_{BA}, \tag{10}$$

avec

$$\tilde{a}^{(n)}_{BA} = B_n \overline{AB}\, i, \tag{11}$$

similaire à l'équation vectorielle Euler pour les vitesses.

Le centre instantané H de l'accélération composée est lié au point caractéristique K, à l'aide duquel on forme le système d'accélérations composées, en utilisant le vecteur de l'accélération réduite d'ordre n

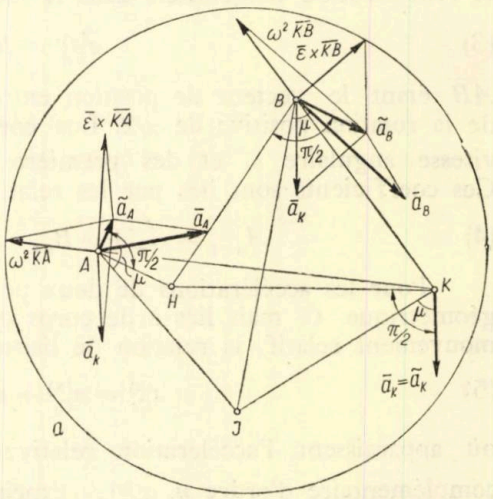


Fig. 1

$$(12) \qquad \tilde{a}_H^{(n)} = 0, \quad \overline{HK} = \frac{\bar{a}_H^{(n)}}{A_n} = -\frac{\bar{a}_k^{(n)}}{B_n} i,$$

de sorte que tout point H peut devenir un centre instantané si l'on choisit convenablement le point caractéristique K.

Également, dans le mouvement relatif de deux corps, la relation vectorielle entre les accélérations de ces corps est:

$$(13) \qquad \tilde{a}_{C_2}^{(n)} = \tilde{a}_{C_1}^{(n)} + \tilde{a}_{C_{21}}^{(n)}$$

avec

$$(14) \qquad \tilde{a}_{C_{21}}^{(n)} = [B_n(\omega_2) - B_n(\omega_1)]\,\overline{HC}\,i.$$

Le centre instantané relatif $H_{21} \equiv H_{12}$ est unique, mais entre les vecteurs des points K_1 et K_2 des deux systèmes d'accélérations composées il y a la relation

$$(15) \qquad A_n(\omega_2)\,\overline{HK}_2 = A_n(\omega_1)\,\overline{HK}_1 + \bar{a}_{H_{21}}^{c(n)} + \bar{a}_{H_{21}}^{r(n)}.$$

Cette relation contient seulement des accélérations d'ordres inférieurs si le centre relatif des accélérations composées d'ordre n correspond au centre relatif des accélérations simples d'ordre $m < n$, à savoir

$$(16) \qquad \bar{a}_H^{(m)} = 0, \quad \tilde{a}_H^{(n)} = 0, \quad n > m,$$

$$(17) \qquad \bar{a}_{H_{21}}^{r(n)} = \sum_{p=1}^{n-m} C_{n-m}^{p} [A_m^r(\omega_{21}) - B_m^r(\omega_{21})\,i]^{(n-m-p)} \cdot (\bar{u}_{H_{21}}^{(p)} - \bar{v}_{H_{21}}^{(p)}),$$

où C_{n-m}^{p} est le symbole des combinaisons, $\omega_{21} = \omega_2 - \omega_1$, l'exponent représente la dérivée, $\bar{u}_{H_{21}}^{(p)}$ est la vitesse de changement relative d'ordre p et $\bar{v}_{H_{21}}^{(p)}$ est la vitesse relative de déplacement d'ordre p (accélération d'ordre $p-1$).

Les accélérations composées-réduites sont définies par:

$$(18) \qquad \tilde{a}_{rA}^{(n)} = \frac{\tilde{a}_A^{(n)}}{A_n(\omega)}$$

et puisque l'accélération réduite simple est

$$(19) \qquad \bar{a}_{rA}^{(n)} = \frac{\bar{a}_A^{(n)}}{A_n(\omega)}$$

il en résulte:

$$\tilde{a}^{(n)}_{rA} = \bar{a}^{(n)}_{rA} + \overline{KA}. \tag{20}$$

On remarque que les extrémités des accélérations réduites d'ordre n du plan de l'élément correspondent aux extrémités des accélérations composées réduites d'ordre n du plan des accélérations (point de concurence K). On garde:

$$\tilde{a}^{(n)}_{rB} = \tilde{a}^{(n)}_{rA} + \tilde{a}^{(n)}_{rBA} \tag{21}$$

avec

$$\tilde{a}^{(n)}_{rBA} = \frac{B_n}{A_n}\overline{AB}i,$$

et le centre instantané H est donné par la même relation:

$$\overline{HK} = \bar{a}^{(n)}_{rH}. \tag{23}$$

Par conséquent, dû à la similitude qui existe entre les équations des accélérations composées et celles des vitesses, elles jouissent de propriétés particulières, qui permettent la simplification des constructions graphiques et analytiques, en appliquant les méthodes usuelles des vitesses.

Reçu le 28 XII 1965

Institut de Mécanique Appliquée „Traian Vuia", Académie de la République Socialiste de Roumanie, Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. Mangeron D., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1957, **III (VII)**, *1—2*, pp. 43—46.
2. Mangeron D., Ciobanu Gh., Braier A., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1956, **II (VI)**, *1—2*, pp. 29—39.
3. Mangeron D., Drăgan C., *Aplicarea teoriei acceleraţiilor reduse de ordin oarecare la studiul mecanismelor plane şi spaţiale* (sous presse).
4. Mangeron D., An. şt. Univ. „Al. I. Cuza", Iaşi, s. I, 1960, **VI**, *3*, pp. 739—745.
5. Pelecudi Chr., Rev. Mec. Appl., 1965, **10**, *2*, pp. 379—420.
6. — St. cerc. Mec. Apl., 1965, **19**, *4*, pp. 933—948.

ACCELERAŢII COMPUSE-REDUSE DE ORDIN SUPERIOR

(Rezumat)

Autorul, luînd ca bază şirul de studii elaborat de prof. D. Mangeron relative la teoria şi practica acceleraţiilor reduse, plane şi spaţiale, de ordin şi specie oarecare [1]...[4], introduce noţiunea de acceleraţie compusă-redusă, care, datorită similitudinii între ecuaţiile acceleraţiilor compuse-reduse şi ecuaţiile vitezelor, permite o serie de simplificări în construcţiile grafice şi analitice referitoare la cîmpurile plane.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 531.391.3 ; 512.91

MIŞCAREA FORŢATĂ A OSCILATORULUI LINIAR SUPUS LA PERTURBAŢII MODULATE ARMONIC ÎN AMPLITUDINE

DE

ALFRED BRAIER şi HUGO ROSMAN

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. În [1] s-a arătat că funcţiei

$$f(t) = Ae^{\gamma t} \sin(\omega t + \alpha) \sin(pt + \beta) =$$

(1)

$$= e^{\gamma t}(a_1 \sin \omega t \sin pt + a_2 \cos \omega t \sin pt + a_3 \sin \omega t \cos pt + a_4 \cos \omega t \cos pt)$$

i se poate ataşa numărul hipercomplex (denumit polinion $\mathcal{P}$)

$$\hat{\hat{P}} = a_1 + a_2 \mathrm{i} + a_3 \mathrm{j} + a_4 \mathrm{ij} \quad \text{cu} \quad \mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = -1, \quad \mathrm{ij} = \mathrm{ji}, \quad (\mathrm{ij})^2 = 1, \tag{2}$$

astfel încît numărul ataşat derivatei $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$ a lui (1) se obţine prin înmulţirea comutativă şi asociativă a lui (2) cu polinionul

$$\hat{d} = \gamma + \omega \mathrm{i} + p\mathrm{j}. \tag{3}$$

Mărimile reale a_i, $(i = 1, ..., 4)$, ce caracterizează funcţia (1) şi intervin în reprezentarea sa simbolică (2), sînt date de

$$a_1 = A \cos\alpha \cos\beta, \quad a_2 = A \sin\alpha \cos\beta, \quad a_3 = A \cos\alpha \sin\beta, \quad a_4 = A \sin\alpha \sin\beta \tag{4}$$

şi satisfac evident relaţia

$$a_1 a_4 = a_2 a_3 . \tag{5}$$

Polinionii $\mathcal{P}$ (2) ce satisfac relaţia (5) s-au denumit in [1] polinioni speciali. Polinionul rezultat din înmulţirea sau împărţirea a doi polinioni este special numai dacă amîndoi factorii au simultan acest caracter. De remarcat că (3), care joacă rolul de operator de derivare pentru funcţiile (1), nu este polinion de tip special.

În lucrarea de faţă se utilizează reprezentarea simbolică a lui (1) prin (2) pentru studiul mişcării forţate a oscilatorului liniar amortizat, sub acţiunea unor perturbaţii de tipul (1). În particular, pentru $\gamma = 0$, (1) are caracterul de perturbaţie armonică, cu pulsaţia p, modulată armonic în amplitudine, cu pulsaţia $\omega (< p)$; astfel de perturbaţii intervin, de pildă, în sistemele de reglaj automat [2]. Procedeul utilizat permite punerea în evidenţă cu uşurinţă a unor particularităţi specifice mişcării forţate studiate, printre care existenţa unor regimuri speciale de mişcare, cînd răspunsul sistemului este nedistorsionat. De asemenea se obţin pe o cale simplă şi condiţiile de rezonanţă.

2. În vederea studierii mişcării forţate se reproduc în continuare, cu anumite modificări reclamate de scopul propus, unele din rezultatele obţinute în [1].

Astfel, un polinion special $\mathcal{P}_s$ (2), (5), ce reprezintă simbolic pe (1), se poate pune sub forma exponenţială

$$\hat{\hat{A}} = A e^{i\alpha} e^{j\beta}, \tag{6}$$

în care

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}, \tag{7}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_4}{a_3}, \qquad \operatorname{tg} \beta = \frac{a_3}{a_1} = \frac{a_4}{a_2}. \tag{8}$$

Cadranele cercului trigonometric în care sînt plasate unghiurile α şi β (8), adică defazajele din expresia (1) a funcţiei reprezentate prin polinionul (2), (5), se precizează pe cale directă, ţinînd seama de semnele a trei din cele patru mărimi (4) (legate prin (5)), precum şi de faptul că $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ (deoarece intervine în (1) la funcţia sinus care descrie modulaţia amplitudinii) [1]).

Un polinion $\mathcal{P}$ oarecare, ce nu verifică relaţia (5), fie

$$\hat{B} = b_1 + b_2 \mathrm{i} + b_3 \mathrm{j} + b_4 \mathrm{ij}, \qquad b_1 b_4 \neq b_2 b_3, \tag{9}$$

se scrie sub formă exponenţială

$$\hat{B} = (B_1 + B_2 \mathrm{ij}) e^{i\varphi} e^{j\psi} = B e^{\mathrm{ij}\chi} e^{i\varphi} e^{j\psi}, \tag{10}$$

care corespunde exprimării lui (9) ca sumă de doi polinioni speciali (2), (5), anume

[1]) De exemplu, dacă a_1, a_2, $a_3 > 0$, $0 < \alpha$, $\beta < \pi/2$; dacă a_1, $a_3 > 0$ şi $a_2 < 0$, $\pi/2 < \alpha < \pi$, $\pi \leqslant \beta \leqslant 3\pi/2$ etc.

$$(11)\qquad \begin{cases} b_1 = B_1 \cos\varphi \cos\psi + B_2 \sin\varphi \sin\psi, \\ b_2 = B_1 \sin\varphi \cos\psi - B_2 \cos\varphi \sin\psi, \\ b_3 = B_1 \cos\varphi \sin\psi - B_2 \sin\varphi \cos\psi, \\ b_4 = B_1 \sin\varphi \sin\psi + B_2 \cos\varphi \cos\psi. \end{cases}$$

Mărimile ce intervin în (10) se exprimă prin relaţiile

$$(12)\qquad B_1,\ B_2 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(b_1+b_4)^2+(b_2+b_3)^2} \pm \sqrt{(b_1-b_4)^2+(b_2+b_3)^2}\right],$$

$$(13)\qquad B^2 = B_1^2 - B_2^2 = \sqrt{(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2)^2 - 4\,(b_1 b_4 - b_2 b_3)^2},$$

$$(14)\qquad \operatorname{th}\chi = \frac{B_2}{B_1} = \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}} \quad \text{cu} \quad \varepsilon = \frac{2\,(b_1 b_4 - b_2 b_3)}{b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2},$$

$$(15)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b_2 B_1 + b_3 B_2}{b_1 B_1 - b_4 B_2} = \dfrac{b_4 B_1 - b_1 B_2}{b_3 B_1 + b_2 B_2}, \\ \operatorname{tg}\psi = \dfrac{b_3 B_1 + b_2 B_2}{b_1 B_1 - b_4 B_2} = \dfrac{b_4 B_1 - b_1 B_2}{b_2 B_1 + b_3 B_2}. \end{cases}$$

Se constată că

$$(12')\qquad B_1 > 0, \quad \operatorname{sign} B_2 = \operatorname{sign}(b_1 b_4 - b_2 b_3), \quad |B_2| \leqslant B_1.$$

Egalitatea $|B_2| = B_1$ corespunde celor două tipuri de polinioni (9) care sînt divizori ai lui zero [1] şi care au forma generală

$$(16)\qquad \Delta_1 = c + d\,\mathrm{i} - d\,\mathrm{j} + c\,\mathrm{ij} \quad \text{şi} \quad \Delta_2 = e + g\,\mathrm{i} + g\,\mathrm{j} - e\,\mathrm{ij}.$$

Ţinînd seama de (11) şi de corespondenţa dintre polinionii speciali (2), (5) şi funcţiile (1), se poate scrie funcţia pe care este capabil să o reprezinte simbolic (9), anume

$$(17)\qquad F(t) = \mathrm{e}^{\gamma t}\left[B_1 \sin(\omega t+\varphi)\sin(pt+\psi) + B_2 \cos(\omega t+\varphi)\cos(pt+\psi)\right];$$

($B_2 < 0$ înseamnă evident opoziţie de fază la nivelul oscilaţiei de pulsaţie p).

Precizarea cadranelor în care sînt conţinute unghiurile φ şi ψ din (10), (17) se face în mod similar celui descris pentru polinionii speciali, cu deosebirea că mărimile analoge lui (4) rezultă în acest caz din soluţionarea sistemului (11), fiind notate, de pildă, prin $b'_1,\ldots,b'_4$ şi avînd expresiile

$$(18)\qquad \begin{cases} b'_1 = B^2\cos\varphi\cos\psi = b_1 B_1 - b_4 B_2, \quad b'_2 = B^2\sin\varphi\cos\psi = b_2 B_1 + b_3 B_2, \\ b'_3 = B^2\cos\varphi\sin\psi = b_3 B_1 + b_2 B_2, \quad b'_4 = B^2\sin\varphi\sin\psi = b_4 B_1 - b_1 B_2. \end{cases}$$

Conjugatul polinionului (10) $\hat{B}^*$, ($\hat{B}\hat{B}^* = B^2$) are expresia

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

$$\hat{B}^{\star} = Be^{-ij\chi}\, e^{-i\varphi}\, e^{-j\psi} = (B_1 - ij\,B_2)\, e^{-i\varphi}\, e^{-j\psi} =$$

$$(19) \quad = \frac{1}{B^2}[(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) - 2(b_1 b_4 - b_2 b_3)\,ij]\,(b_1 - b_2 i - b_3 j + b_4 ij).$$

Se remarcă cu uşurinţă faptul că suma a doi polinioni de tip special (5) este un polinion ce nu verifică în general relaţia (5). Aceasta reflectă faptul cinematic că suprapunerea a două oscilaţii modulate de tipul (1), avînd pulsaţiile ω şi p respectiv egale, precum şi γ evident acelaşi, dar faze distincte, α_1, β_1 şi α_2, β_2, nu are ca efect o oscilaţie modulată unică, de acelaşi tip (1) cu cele componente. Mişcarea rezultată, descrisă de (17), se prezintă ca o suprapunere de două oscilaţii modulate de tipul (1), una de amplitudine B_1 şi faze respectiv φ şi ψ, cealaltă de amplitudine $|B_2|$, în cuadratură cu prima, avînd cele două funcţii armonice defazate cu $\pi/2$.

3. Fie

$$(20) \qquad a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = Ae^{\gamma t} \sin(\omega t + \alpha) \sin(pt + \beta),$$

ecuaţia care descrie mişcarea forţată a unui oscilator liniar amortizat, sub acţiunea unei perturbaţii de tipul (1), în care a este coeficientul inerţial, b — coeficientul de rezistenţă, c — coeficientul cuasielastic, p şi β — pulsaţia şi faza iniţială a perturbaţiei, $Ae^{\gamma t} \sin(\omega t + \alpha)$ — legea de variaţie a amplitudinii perturbaţiei ($\omega < p$).

Cu notaţiile uzuale

$$(21) \qquad \frac{b}{a} = 2\delta, \quad \frac{c}{a} = \Omega^2, \quad \frac{A}{a} = h,$$

în care δ este factorul de amortizare şi Ω — pulsaţia proprie a oscilatorului în absenţa disipaţiilor, ecuaţia (20) devine

$$(20') \qquad \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \Omega^2 x = he^{\gamma t} \sin(\omega t + \alpha) \sin(pt + \beta).$$

Fie (v. (6))

$$(22) \qquad \hat{\hat{h}} = he^{i\alpha}\, e^{j\beta}$$

reprezentarea simbolică printr-un polinion (special) a perturbaţiei (de tipul (11)). Ţinînd seama de caracterul ecuaţiei diferenţiale (20') şi de tipul funcţiei din membrul doi, soluţia sa particulară, care se referă la mişcarea forţată a oscilatorului, se prezintă în general sub aceeaşi formă şi este deci reprezentabilă printr-un polinion $\hat{X}$. El se obţine din egalitatea

$$(23) \qquad \hat{X} = \frac{\hat{\hat{h}}}{\hat{W}},$$

cu

$$(24) \qquad \hat{W} = \hat{d}^2 + 2\delta\hat{d} + \Omega^2,$$

în care s-a ţinut seama că operaţiei de derivare în raport cu timpul îi corespunde înmulţirea polinionului ataşat funcţiei cu polinionul $\hat{d}$ (3).

Polinionul $\hat{W}$, care poartă proprietăţile răspunsului oscilatorului liniar la acţiunea perturbaţiei (1), se va denumi *impedanţă polinionică*. Punîndu-l sub forma (9) se obţine

$$(25)\qquad \begin{cases} w_1 = \Omega^2 + 2\delta\gamma + \gamma^2 - (\omega^2 + p^2), & w_2 = 2\omega(\gamma + \delta), \\ w_3 = 2p(\gamma + \delta), & w_4 = 2\omega p. \end{cases}$$

În cazul perturbaţiilor de tipul (1) fără factor exponenţial ($\gamma = 0$)

$$(26)\qquad f(t) = A\sin(\omega t + \alpha)\sin(pt + \beta),$$

impedanţa polinionică a oscilatorului liniar amortizat devine

$$(27)\qquad w_1 = \Omega^2 - (\omega^2 + p^2), \quad w_2 = 2\omega\delta, \quad w_3 = 2p\delta, \quad w_4 = 2\omega p.$$

Pentru studiul răspunsului oscilatorului liniar neamortizat ($\delta = 0$) la acţiunea perturbaţiei (1) se obţine impedanţa polinionică

$$(28)\qquad w_1 = \Omega^2 + \gamma^2 - (\omega^2 + p^2), \quad w_2 = 2\omega\gamma, \quad w_3 = 2p\gamma, \quad w_4 = 2\omega p,$$

iar pentru acelaşi oscilator, perturbat de (26),

$$(29)\qquad w_1 = \Omega^2 - (\omega^2 + p^2), \quad w_2 = 0, \quad w_3 = 0, \quad w_4 = 2\omega p.$$

Expresiile (25) şi (29) denotă că pentru $\gamma = -\delta$ mişcarea forţată a oscilatorului liniar amortizat (20'), cu mişcare liberă pseudoperiodică ($\Omega > \delta$)

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \Omega^2 x = he^{-\delta t}\sin(\omega t + \alpha)\sin(pt + \beta),$$

decurge la fel cu cea a oscilatorului liniar neamortizat

$$\ddot{x} + (\Omega^2 - \delta^2)x = h\sin(\omega t + \alpha)\sin(pt + \beta).$$

4. Atunci cînd impedanţa polinionică $\hat{W}$ (24) este divizor al lui zero, răspunsul (23) al oscilatorului nu se mai găseşte în clasa de funcţii reprezentabile prin polinioni. Modulul (13) al impedanţei polinionice este atunci nul, ceea ce corespunde rezonanţei la nivelul mişcării forţate, cu valori infinite ale amplitudinilor răspunsului $\hat{X}$ (23).

Ţinînd seama de tipurile de divizori ai lui zero (16), condiţiile de rezonanţă se scriu sub forma

$$(30)\qquad w_1 = w_4, \quad w_2 = -w_3 \quad \text{sau} \quad w_1 = -w_4, \quad w_2 = w_3.$$

Dearece $\omega < p$, se obţin cu uşurinţă pentru impedanţa (27), corespunzătoare oscilatorului liniar amortizat perturbat de (1), condiţiile de rezonanţă cu valori infinite ale răspunsului

$$(31)\qquad \gamma = -\delta, \quad p + \omega = \Omega_1 \quad \text{sau} \quad \gamma = -\delta, \quad p - \omega = \Omega_1,$$

în care $\Omega_1 = \sqrt{\Omega^2 - \delta^2}$ este, ca de obicei, pulsaţia mişcării libere pseudoperiodice a oscilatorului; rezonanţa (31) poate avea loc numai dacă $\Omega > \delta$, deci numai la oscilatorul liniar amortizat, caracterizat prin mişcare liberă de tip pseudoperiodic.

Dacă perturbaţia nu prezintă factorul exponenţial, adică are forma (26), ea nu poate produce rezonanţă cu valori infinite la oscilatorul liniar amortizat ($\delta \neq 0$). E capabilă însă să producă acest efect la oscilatorul liniar neamortizat ($\delta = 0$), cînd pulsaţiile ω şi p ale perturbaţiei (26) satisfac condiţiile

$$p + \omega = \Omega \quad \text{sau} \quad p - \omega = \Omega. \tag{31'}$$

5. Dacă se ţine seama acum de observaţia de la § 1, $\hat{X}$ dat de (23) este polinion special numai dacă $\hat{W}$ are acest caracter, adică (v. (5)) dacă $w_1 w_4 = w_2 w_3$. Utilizînd (25) se obţine relaţia dintre elementele caracteristice ale forţei perturbatoare (1) (γ, ω, p) şi cele ale oscilatorului liniar amortizat (δ, Ω), anume

$$\omega^2 + p^2 + (\gamma + \delta)^2 = \Omega_1^2, \tag{32}$$

care presupune $\gamma < \Omega_1 - \delta$.

Deci numai în cazul (32) răspunsul sistemului are aceeaşi formă ca şi perturbaţia. Impedanţa polinionică (24) şi răspunsul (23) se scriu respectiv (v. şi (22))

$$\hat{\hat{W}} = W e^{i\varphi} e^{j\psi}, \quad \hat{\hat{X}} = \frac{h}{W} e^{i(\alpha - \varphi)} e^{j(\beta - \psi)}. \tag{33}$$

Utilizarea lui (7) şi (8), cu condiţia (32), conduce la

$$W = 2\sqrt{\Omega_1^2(\gamma + \delta)^2 + \omega^2 p^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega}{\gamma + \delta}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{p}{\gamma + \delta}. \tag{34}$$

Atunci mişcarea forţată a lui (20'), cînd mărimile ω, p şi γ verifică condiţia (32), este descrisă de

$$x_f = \frac{h}{2\sqrt{\Omega_1^2(\gamma + \delta)^2 + \omega^2 p^2}} \sin(\omega t + \alpha - \varphi) \sin(pt + \beta - \psi), \quad (\omega^2 + p^2 + (\gamma + \delta)^2 = \Omega_1^2). \tag{35}$$

Deoarece $w_1 \geqslant 0$, $w_4 > 0$, caracterul defazajelor φ şi ψ se deduce cu uşurinţă; astfel

$$\begin{cases} \text{pentru} \quad \gamma < -\delta, \quad \dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi, \ \psi < \pi; \\ \text{pentru} \quad \gamma > -\delta, \quad 0 < \varphi, \ \psi \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{36}$$

În cazul particular $\gamma = -\delta$, mișcarea (35) și condiția (32) devin

$$(35') \quad x_f = \frac{h}{2\omega p}\cos(\omega t + \alpha)\cos(pt + \beta), \quad (\gamma = -\delta,\ \omega^2 + p^2 = \Omega_1^2),$$

iar atunci cînd perturbația este strict modulată armonic în amplitudine (26), adică $\gamma = 0$,

$$(37) \quad x_f = \frac{h}{2\sqrt{\Omega_1^2\delta^2 + \omega^2 p^2}}\sin\left(\omega t + \alpha - \operatorname{arctg}\frac{\omega}{\delta}\right)\sin\left(pt + \beta - \operatorname{arctg}\frac{p}{\delta}\right),$$
$$(\omega^2 + p^2 = \Omega_1^2 > \delta^2).$$

Deci regimul special de mișcare forțată semnalat, pe care îl denumim *regim nedistorsionat*, poate apărea ca răspuns la perturbația (26) numai la oscilatorul liniar amortizat ce prezintă disipații foarte mici ($\Omega_1 > \delta$), adică $\delta < \Omega/\sqrt{2}$ (aceasta, după cum se știe [3], indică prezența unui maxim pe caracteristica de frecvență a oscilatorului, corespunzătoare unei perturbații armonice pure).

6. Pentru studiul general al mișcării forțate a lui (20'), cînd condiția (32) nu este satisfăcută, $\hat{W}$ dat de (24) se scrie ținînd seama de (10), (12)...(15). Calcule simple dau

$$(38) \quad W_1,\ W_2 = \frac{1}{2}\{\sqrt{[\Omega_1^2 + (\gamma+\delta)^2 - (\omega - p)^2]^2 + 4(\gamma+\delta)^2(\omega^2 - p^2)} \pm$$
$$\pm \sqrt{[\Omega_1^2 + (\gamma+\delta)^2 - (\omega + p)^2 + 4(\gamma+\delta)^2(\omega^2 + p^2)}\},$$

$$(39) \quad W^2 = W_1^2 - W_2^2 = \sqrt{[\Omega_1^2 + (\gamma+\delta)^2]^2 - (\omega - p)^2]^2 + 4(\gamma+\delta)^2(\omega^2 - p^2)} \times$$
$$\times \sqrt{[\Omega_1^2 + (\gamma+\delta)^2 - (\omega + p)^2]^2 + 4(\gamma+\delta)^2(\omega^2 + p^2)},$$

cu ajutorul cărora se pot obține φ și ψ dați de (15).

Atunci (v. (23))

$$(40) \quad \hat{X} = \frac{h e^{i\alpha} e^{j\beta}}{(W_1 + ij\, W_2)\, e^{i\varphi} e^{j\psi}} = (X_1 + ij\, X_2)\, e^{i(\alpha-\varphi)} e^{j(\beta-\psi)},$$

în care

$$(40') \quad X_1 = \frac{h W_1}{W_1^2 - W_2^2}, \quad X_2 = -\frac{h W_2}{W_1^2 - W_2^2}.$$

Mișcarea forțată este descrisă de legea de mișcare (v. (17))

$$(41) \quad x_f = e^{\gamma t}[X_1 \sin(\omega t + \alpha - \varphi)\sin(pt + \beta - \psi) +$$
$$+ X_2 \cos(\omega t + \alpha - \varphi)\cos(pt + \beta - \psi)].$$

Dacă se notează $\lambda = X_2/X_1$, atunci (40′) şi (38) permit să se scrie

$$\lambda = \{\sqrt{[\Omega_1^2 + (\gamma+\delta)^2 - (\omega+p)^2]^2 + 4(\gamma+\delta)^2(\omega^2+p^2)} - \sqrt{[\Omega_1^2 + (\gamma+\delta)^2 - (\omega-p)^2]^2 + 4(\gamma+\delta)^2(\omega^2-p^2)}\}: \{\sqrt{[\Omega_1^2 + (\gamma+\delta)^2 - (\omega+p)^2]^2 + 4(\gamma+\delta)^2(\omega^2+p^2)} + \sqrt{[\Omega_1^2 + (\gamma+\delta)^2 - (\omega-p)^2]^2 + 4(\gamma+\delta)^2(\omega^2-p^2)}\}. \tag{42}$$

Comparaţia lui (41) cu regimul special de mişcare forţată (35) denotă prezenţa în plus a unei componente cu ambele funcţii trigonometrice în cuadratură în raport cu componenta care are forma perturbaţiei (1). De aceea regimul de mişcare forţată (41) se poate numi *regim de mişcare distorsionat*, λ (42) fiind măsura distorsionării, $|\lambda| \leqslant 1$. Cazurile $|\lambda| = 1$ corespund rezonanţei (31).

7. Expresiile obţinute permit studiul dependenţei mărimilor ce caracterizează oscilaţiile care compun mişcarea (41), de mărimile ce caracterizează forţa perturbatoare şi oscilatorul liniar. Cu notaţiile

$$\frac{\omega}{\Omega} = u, \quad \frac{p}{\Omega} = v, \quad \frac{\gamma}{\Omega} = z, \quad \frac{\delta}{\Omega} = \mu, \quad (v > u), \tag{43}$$

şi

$$\nu_1 = \frac{X_1}{h/\Omega_1^2}, \quad \nu_2 = \frac{X_2}{h/\Omega_2^2}, \tag{44}$$

şi ţinînd seama de (38), (39) şi (40′) se obţine

$$\nu_1, \nu_2 = \{\sqrt{[(1-\mu^2) + (z+\mu)^2 - (u+v)^2]^2 + 4(z+\mu)^2(u^2+v^2)} \pm \sqrt{[(1-\mu^2) + (z+\mu)^2 - (u-v)^2]^2 + 4(z+\mu)^2(u^2-v^2)}\}: \{2\sqrt{[(1-\mu^2) + (z+\mu)^2 - (u+v)^2]^2 + 4(z+\mu)^2(u^2+v^2)} \times \sqrt{[(1-\mu^2) + (z+\mu)^2 - (u-v)^2]^2 + 4(z+\mu)^2(u^2-v^2)}\}, \tag{45}$$

în timp ce (42) devine

$$\lambda = \{\sqrt{[(1-\mu^2) + (z+\mu)^2 - (u+v)^2]^2 + 4(z+\mu)^2(u^2+v^2)} - \sqrt{[(1-\mu^2) + (z+\mu)^2 - (u-v)^2]^2 + 4(z+\mu)^2(u^2-v^2)}\}: \{\sqrt{[(1-\mu^2) + (z+\mu)^2 - (u+v)^2]^2 + 4(z+\mu)^2(u^2+v^2)} + \sqrt{[(1-\mu^2) + (z+\mu)^2 - (u-v)^2]^2 + 4(z+\mu)^2(u^2-v^2)}\}. \tag{46}$$

În particular pentru $z = 0$, adică o perturbaţie de forma (26),

$$(45') \quad \nu_1, \nu_2 = \frac{\sqrt{[1-(u+v)^2]^2 + 4\mu^2(u^2+v^2)} \pm \sqrt{[1-(u-v)^2]^2 + 4\mu^2(u^2-v^2)}}{2\sqrt{\{[1-(u+v)^2]^2 + 4\mu^2(u^2+v^2)\}\{[1-(u-v^2]^2 + 4\mu^2(u^2-v^2)\}}}$$

şi

$$(46') \quad \lambda = \frac{\sqrt{[1-(u+v)^2]^2 + 4\mu^2(u^2+v^2)} - \sqrt{[1-(u-v)^2]^2 + 4\mu^2(u^2-v^2)}}{\sqrt{[1-(u+v)^2]^2 + 4\mu^2(u^2+v^2)} + \sqrt{[1-(u-v)^2]^2 + 4\mu^2(u^2-v^2)}},$$

iar dacă oscilatorul este şi neamortizat ($\mu = 0$), rezultă

$$(47) \quad \nu_1, \nu_2 = \frac{|1-(u+v)^2| \pm |1-(u-v)^2|}{2|1-(u+v)^2||1-(u-v)^2|}$$

şi

$$(48) \quad \lambda = \frac{|1-(u+v)^2| - |1-(u-v)^2|}{|1-(u+v)^2| + |1-(u-v)^2|}.$$

Pentru oscilatorul liniar neamortizat, perturbat de (26), s-a reprezentat în fig. 1 dependenţa de v a lui ν_1 (47), pentru unele valori ale lui u, deci pentru o pulsaţie a modulaţiei fixată. În fig. 2 s-a reprezentat,

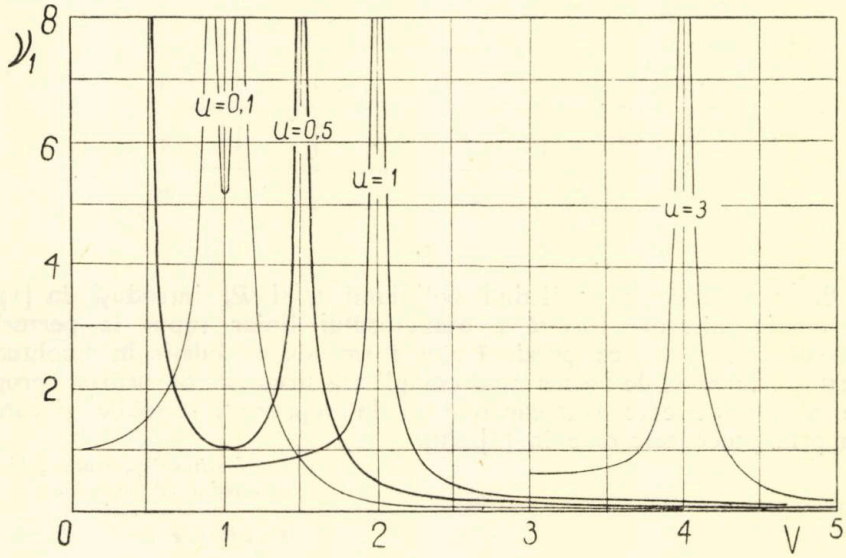


Fig. 1

în aceleaşi condiţii, dependenţa factorului de distorsiune (48) $\lambda = \nu_2/\nu_1$. Se remarcă intensităţile relative mici ale amplitudinilor (40') ale oscilaţiilor ce compun mişcarea forţată, cu excepţia unei zone înguste de pulsaţii, în imediata vecinătate a valorilor de rezonanţă (31'). Pentru pulsaţii ale

oscilaţiei mai mari decît cea de a doua valoare de rezonanţă ($p' > \omega + \Omega$), răspunsul sistemului este foarte slab.

De asemenea rezultă că amplitudinea X_2 a componentei în cuadratură a mişcării forţate (41) este foarte mică în raport cu amplitudinea X_1, la pulsaţii ale modulaţiei mici în raport cu cea proprie a oscilatorului ($\omega \ll \Omega$). În general însă, la pulsaţii mari ale oscilaţiei ($p \gg \Omega$), componenta în cuadratură devine neglijabilă în raport cu cealaltă, care de altfel, după cum s-a observat, are ea însăşi intensitate redusă.

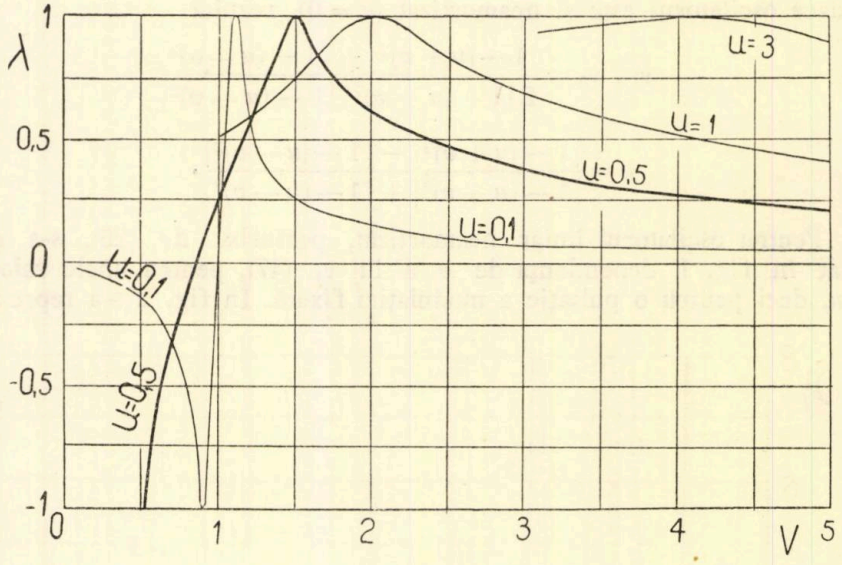


Fig. 2

8. În mod similar, utilizînd polinionii Q şi $\mathcal{R}$, introduşi în [1], se poate studia mişcarea forţată a oscilatorului liniar supus la perturbaţii asemănătoare lui (1), ce prezintă alte forme de modulaţie în amplitudine. Pentru perturbaţii de formă mai complicată urmează de utilizat proprietăţile algebrelor care sînt capabile să le reprezinte simbolic şi care se obţin prin procedeele date în [4]...[6].

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de mecanică teoretică
şi
Catedra de bazele electrotehnicii

BIBLIOGRAFIE

1. Braier A., Rosman H., *Utilizarea polinionilor pentru studiul unor mişcări forţate ale sistemelor liniare.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XVI)**, *1-2*, pp. 309-320.
2. Gille J. C., Decaulne P., Pelegrin M., *Théorie et technique des asservissements.* Dunod, Paris, 1956.

3. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И., *Курс теоретической механики*. Т. **II**, Изд. V, ГИТТЛ, М., 1965.
4. Braier A., *Sur la représentation par des nombres hypercomplexes des fonctions réelles d'une variable*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XVI)**, *1–2*, pp. 89–96.
5. — *La représentation symbolique des fonctions qui vérifient des équations différentielles linéaires à coefficients constants*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XVI)**, *3–4*, pp. 93–100.
6. — *La représentation symbolique des produits de fonctions*. Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *3–4* (sub tipar).

MOUVEMENT FORCÉ DE L'OSCILLATEUR LINÉAIRE SOUS L'ACTION DES PERTURBATIONS À MODULATION HARMONIQUE DE L'AMPLITUDE

(Résumé)

On utilise la représentation symbolique de (1) (en particulier (26)) par le nombre hypercomplexe (2) (polynion $\mathcal{P}$, v. [1]) pour étudier l'équation du mouvement de l'oscillateur (20'). L'image (23) du réponse contient le polynion $\hat{W}$ (24), ou *impédance polynionique*, donnée par (25). Si $\hat{W}$ est diviseur du zéro (30), on obtient la résonance de l'oscillateur (v. les conditions (31)).

À l'aide de $\hat{W}$, écrit en vertu de (10), (11), (12)...(15) sous la forme (38), (39), on obtient (40) et l'expression de la loi du mouvement forcé (41). En utilisant les propriétés des polynions spéciaux [1], qui satisfont (5), on met en évidence l'existence du régime de mouvement (35), quand est vérifiée la condition (32), régime caractérisé par un réponse de la même forme que la perturbation. Dans tous les autres mouvements intervient une seconde composante (v. (41)), qu'on caractérise par le quotient (42), ou *facteur de distorsion*.

En utilisant (33) on obtient les expressions (45) et (46) qui permettent l'étude de l'influence exercée sur les éléments du reponse, par les éléments caractéristiques de la perturbation et de l'oscillateur. Les fig. 1, 2 sont valables pour un oscillateur linéaire nonamorti, soumis à la perturbation (26).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

УДК 539.389

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В КОЛЬЦЕОБРАЗНОЙ УПРУГОНАСЛЕДСТВЕННОЙ ПЛАСТИНКЕ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

В. Т. ГЛУШКО и М. И. РОЗОВСКИЙ

Исходными физическими зависимостями будут служить модифицированные уравнения В. Вольтерра [1], связывающие напряжения σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$ и деформации ε_r, ε_θ, $\gamma_{r\theta}$, записанные в интегральных операторах:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{\bar{E}_r}\sigma_r - \frac{\bar{\nu}_\theta}{E_\theta}\sigma_\theta, \quad \varepsilon_\theta = -\frac{\bar{\nu}_r}{\bar{E}_r}\sigma_r + \frac{1}{\bar{E}_\theta}\sigma_\theta, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{G_{r\theta}}\tau_{r\theta}, \tag{1}$$

где

$$\begin{cases} \bar{E}_r f = E_{r0}[1 - \chi_r \vartheta_\alpha^*(-\beta_r)]f, \quad \bar{E}_\theta = E_{\theta 0}[1 - \chi_\theta \vartheta_\alpha^*(-\beta_\theta)]f, \\ \bar{\nu}_r f = \nu_{r0}[1 + \chi_r' \vartheta_\alpha^*(-\beta_r)]f, \quad \bar{\nu}_\theta f = \nu_{\theta 0}[1 + \chi_\theta' \vartheta_\alpha^*(-\beta_\theta)], \\ \bar{G}_{r\theta} = G_{r\theta 0}[1 \chi_{r\theta} \vartheta_\alpha^*(-\beta_{r\theta})]. \end{cases} \tag{2}$$

В формулах (2) E_{r0} и $E_{\theta 0}$ — мгновенные модули Юнга для растяжения (сжатия) по главным направлениям r и θ, ν_{r0} и $\nu_{\theta 0}$ — мгновенные коэффициенты Пуассона и $G_{r\theta 0}$ — мгновенный модуль сдвига для главных направлений r, θ, соответствующими реологическими параметрами являются

$$\chi_r, \beta_r, \chi_\theta, \beta_\theta, \chi_{r\theta}, \beta_{r\theta}, \chi_r', \chi_\theta'.$$

Интегральный оператор ϑ_α^*, воздействующий на некоторую функцию $f(r, \theta, t)$ координат и времени t, имеет вид:

$$\vartheta_\alpha^*(-\beta)f = \int_0^t \vartheta_\alpha(-\beta;\ t, \tau) f(\tau)\, d\tau. \tag{3}$$

Здесь

$$э_{\alpha}(-\beta; t, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-S)^{n(1-\alpha)-\alpha}}{\Gamma[(n+1)(1-\alpha)]},$$

где $э^{\alpha}(-\beta; t, \tau)$ — экспоненциальная функция дробного порядка Ю. Н. Работнова [2], $0<\alpha<1$, Γ — гамма-функция.

Случай $\alpha = 0$ соответствует упруго-вязкому телу, отвечающему аналитической трактовке А. Ю. Ишлинского [3] и А. Р. Ржаницына [4].

Рассмотрим пластинку, имеющую форму полного кругового концентрического кольца, обладающего цилиндрической анизотропией и сжатую по внешнему и внутреннему контурам равномерно распределенными нормальными усилиями.

Будем считать, что полюс анизотропии совпадает с центром кольца. Пусть p и q величины внутреннего и внешнего давления на единицу поверхности, a и b — внутрений и внешнний радиусы кольца. Тогда, как известно [5], для случая идеально упругого материала радиальное σ_r и окружное σ_θ напряжения имеют вид:

$$(4)\quad \begin{cases} \sigma_r = \dfrac{pc^{k+1}-q}{1-c^{2k}}\left(\dfrac{r}{b}\right)^{k-1} - \dfrac{p-qc^{k-1}}{1-c^{2k}}c^{k+1}\left(\dfrac{b}{r}\right)^{k+1}, \\ \sigma_\theta = \dfrac{pc^{k+1}-q}{1-c^{2k}}k\left(\dfrac{r}{b}\right)^{k-1} + \dfrac{p-qc^{k-1}}{1-c^{2k}}kc^{k+1}\left(\dfrac{b}{r}\right)^{k+1}, \quad \tau_{r\theta}=0, \end{cases}$$

где

$$(5)\quad c = \frac{a}{b}, \quad k = \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}}.$$

Перемещения точек пластинки в радиальном u_r и тангенциальном u_θ направлениях определяются так

$$(6)\quad u_r = \frac{b}{E_\theta(1-c^{2k})}\left[(pc^{k+1}-q)(k-\nu_\theta)\left(\frac{r}{b}\right)^k + (p-qc^{k-1})c^{k+1}(k+\nu_\theta)\left(\frac{b}{r}\right)^k\right], \quad u_\theta = 0.$$

Для определения напряжений и перемещения с учетом влияния наследственных (реологических) свойств материала применим принцип В. Вольтерра в формулировке Ю. Н. Работнова [2]. Заменим в (4)...(6) величины E_θ, E_r и ν_θ операторами $\bar{E}_\theta$, $\bar{E}_r$ и $\bar{\nu}_\theta$, определенными в (2).

Вся трудность состоит в расшифровке трансцендентных операторных выражений. Известны только два случая применения принципа Вольтерра к расшифровке трансцендентных операторных выражений, приводящие к необходимости построения новых трансцендентных функций. Первый принадлежит самому автору теории [6], второй

— Ю. Н. Работнову [2]. В последнем случае осуществлена расшифровка показательной функции оператора для изотропной сферы. Результат представлен в виде обобщенного ряда Неймана.

Решение поставленной задачи будет осуществлено путем привлечения нижеследующих свойств $э_\alpha^*$-операторов:

$$\frac{1}{1-\chi э_\alpha^*(-\beta)} = 1 + \chi э_\alpha^*(\chi-\beta), \tag{7}$$

$$э_\alpha^*(-\beta_1)\, э_\alpha^*(-\beta_2) = \frac{э_\alpha^*(-\beta_1) - э_\alpha^*(-\beta_2)}{\beta_2-\beta_1}, \tag{8}$$

$$э_\alpha^{*m}(x_1)\, э_\alpha^{*n}(x_2) = \frac{1}{(m-1)!\,(n-1)!}\frac{\partial^{m+n-2}}{\partial x_1^{m-1}\partial x_2^{n-1}}\left[э_\alpha^*(x_1)\, э_\alpha^*(x_2)\right]. \tag{9}$$

Свойства (7) и (8) установлены Ю. Н. Работновым [2]. Частный случай формулы (9) при $n=0$ доказан в работе [7]. Опираясь на последний, свойство (9) можно установить следующим образом. Пользуясь формулой

$$э_\alpha^{*m}(x_1) = \frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1} э_\alpha^*(x_1)}{\partial x_1^{m-1}}, \tag{10}$$

установленный в работе [7], а также ассоциативным свойством, как дифференциальных, так и интегральных операторов [8], получим:

$$\begin{aligned} э_\alpha^{*m}(x_1)\, э_\alpha^{*n}(x_2) &= \frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1} э_\alpha^*(x_1)}{\partial x_1^{m-1}}\frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1} э_\alpha^*(x_2)}{\partial x_2^{n-1}} = \\ &= \frac{1}{(m-1)!\,(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial x_2^{n-1}}\left\{\frac{\partial^{m-1}}{\partial x_1^{m-1}}\left[э_\alpha^*(x_1)\, э_\alpha^*(x_2)\right]\right\} = \\ &= \frac{1}{(m-1)!\,(n-1)!}\frac{\partial^{m+n-2}}{\partial x_1^{m-1}\partial x_2^{n-1}}\left[э_\alpha^*(x_1)\, э_\alpha^*(x_2)\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом справедливость формулы (9) установлена. Для решения поставленной задачи достаточно располагать свойствами (7)...(10). При решении других задач может потребоваться формула, содержащая большее количество операторов, чем в формуле (9).

В общем случае будем иметь

$$\prod_{i=1}^{n} э_\alpha^{*m_i}(x_i) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(m_i-1)}\frac{\partial^{m_1+m_2+\ldots m_n-n}}{\partial x_1^{m_1-1}\partial x_2^{m_2-1}\ldots\partial x_n^{m_n-1}}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{э_\alpha^*(x_i)}{\prod_{j=1}^{n}(x_i-x_j)}\right]. \tag{12}$$

Здесь

$$x_i \neq x_j, \quad \mathfrak{э}_\alpha^{*0}(x_i) = \frac{1}{(-1)!}\frac{\partial^{-1}\mathfrak{э}_\alpha^*(x_i)}{\partial x_i^{-1}} \equiv 1.$$

Формула (12) и ее доказательство, в числе других результатов, были доложены одним из авторов [9] на втором всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике в 1964 году.

Если внутреннее и внешнее давления не изменяются во времени, то при конкретных расчетах целесообразно воспользоваться представлением [10]:

$$\mathfrak{э}_\alpha^*(-\beta).1 = \frac{1}{\beta}\left[1 - E_{1-\alpha}(-\beta t^{1-\alpha})\right], \tag{13}$$

где $E_\mu(-\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\xi)^n}{\Gamma[\mu(n+1)]}$ — целая функция Миттаг-Леффлера. Согласно [11] оператор $\mathfrak{э}_\alpha^*(-\beta).1$ аппроксимируется

$$\mathfrak{э}_\alpha^*(-\beta).1 \approx \frac{1}{\beta}\left[1 - \frac{1}{1+\beta t^{1-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)}\right], \tag{14}$$

при $\beta t^{1-\alpha} < 1$ и α близком к единице (опыты над полимерами и металлами показывают, что α стабильно и принимает значение близкое к 0,8);

$$\mathfrak{э}_\alpha^*(-\beta).1 \approx \frac{1}{\beta}\left(1 - e^{-\beta\gamma t^{1-\alpha}}\right), \tag{15}$$

при $\beta t^{1-\alpha} > 1$, где $\gamma = (1-\alpha)^{1-\alpha}$.

При изменяющихся во времени давлениях, после того, как в результате расшифровки функции операторов по правилам (7)...(10), образуется равномерно-сходящийся степенной ряд относительно реологических параметров, содержащий только первые степени интегральных операторов типа Вольтерра и их производные по реологическим параметрам, каждый из последних расшифровывается путем привлечения исходной формулы (3).

Однако, если определять значения напряжений и перемещение через достаточно большой промежуток времени после приложения нагрузки, то можно воспользоваться асимптотическим представлением

$$\mathfrak{э}_\alpha^*(-\beta)f(t) \approx \frac{1}{\beta}f(t), \tag{16}$$

полученным в работе [12], если $f(t) = a_0 + a_1 t^\delta$, где $0 < \delta < 2$. Заметим, что точное предельное значение $\mathfrak{э}_\alpha^*(-\beta).1$ при $t \to \infty$ получается из (13), исходя из того, что

(17) $$\lim_{t\to\infty} E_{1-\alpha}(-\beta t^{1-\alpha}) = 0.$$

Будем иметь

(18) $$\lim_{t\to\infty} \ni_{\alpha}^{*}(-\beta).1 = \frac{1}{\beta}.$$

Таким образом при $a_1 = 0$ соотношение (16) при $t \to \infty$ обращается в точное представление.

Представим отдельные элементы формул (4) в виде разложения по степеням k:

(19) $$v_i = \gamma_i \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{in}^{m}}{m!} k^m, \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

где

(20) $$\begin{cases} \gamma_1 = \gamma_4 = \dfrac{cb}{r}, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = \dfrac{b}{r}, \quad a_{1n} = \ln \dfrac{rc^{2n+1}}{b}, \\ a_{2n} = \ln \dfrac{bc^{2n+2}}{r}, \quad a_{3n} = \ln \dfrac{rc^{2n}}{b}, \quad a_{4n} = \ln \dfrac{bc^{2n+1}}{r}. \end{cases}$$

Так как $0 < c < 1$, то ряд (19) сходится при всяком конечном значении k.

Тогда в соответствии с принципом Вольтерра получим, привлекая представления (19) и (20), операторные выражения искомых напряжений:

(21) $$\bar{\sigma}_r = (\bar{v}_1 - \bar{v}_4)p + (\bar{v}_2 - \bar{v}_3)q, \quad \bar{\sigma}_\theta = \bar{k}(\bar{v}_1 + \bar{v}_4)p - \bar{k}(\bar{v}_2 + \bar{v}_3)q,$$

где оператор $\bar{k}$, согласно (5) и (2), имеет вид

(22) $$\bar{k} = \sqrt{\frac{E_{\theta 0}[1 - \chi_\theta \ni_{\alpha}^{*}(-\beta_\theta)]}{E_{r0}[1 - \chi_r \ni_{\alpha}^{*}(-\beta_r)]}}.$$

Применяя формулы (7) и (8), из (22) получим

(23) $$\bar{k} = k_0[1 + \chi_1 \ni_{\alpha}^{*}(-\beta_\theta) + \chi_2 \ni_{\alpha}^{*}(-\delta_r)]^{1/2},$$

где

(24) $$\begin{cases} \chi_1 = \chi_\theta \left(\dfrac{\chi_r}{\beta_\theta + \chi_r - \beta_r} - 1 \right), \quad \chi_2 = \chi_r \left(\dfrac{\chi_\theta}{\beta_r - \beta_\theta - \chi_r} + 1 \right), \\ \delta_r = \beta_r - \chi_r, \quad k_0 = \sqrt{\dfrac{E_\theta}{E_r}}, \quad \beta_r > \chi_r. \end{cases}$$

Неравенство в (24) вытекает из физических представлений, высказанных в работе [14], согласно которым, применительно к анизотропии, получим

$$\beta_r = \frac{1}{\tau_r^{1-\alpha}}, \quad \chi_r = \frac{\lambda_r}{\tau_r^{1-\alpha}}, \quad \beta_\theta = \frac{1}{\tau_\theta^{1-\alpha}}, \quad \chi_\theta = \frac{\lambda_\theta}{\tau_\theta^{1-\alpha}}, \tag{25}$$

где

$$\lambda_r = \frac{E_{r0} - E_{r\infty}}{E_{r0}}, \quad \lambda_\theta = \frac{E_{\theta 0} - E_{\theta\infty}}{E_{\theta 0}}.$$

В формулах (25) τ_r и τ_θ — времена рекаксации, $E_{r\infty}$ и $E_{\theta\infty}$ — установившиеся (отрелаксированные) модули Юнга. По физическому смыслу $E_{r\infty} < E_{r0}$ и $E_{\theta\infty} < E_{\theta 0}$, поэтому $0 < \lambda_r < 1$ и $0 < \lambda_\theta < 1$. Напомним, что $0 < \alpha < 1$. Случай $E_{r\infty} = 0$, $E_{\theta\infty} = 0$ отвечает анизотропной среде Максвелла. Разлагая оператор k^{-m} (с учетом (23)) в биномиальный ряд, получим

$$\begin{aligned} k^{-m} &= k_0^m \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left[\chi_1 \mathfrak{d}_\alpha^*(-\beta_\theta) + \chi_2 \mathfrak{d}_\alpha^*(-\delta_r) \right]^n \right\} = \\ &= k_0^m \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \chi_1^{n-i} \chi_2^i \mathfrak{d}_\alpha^{*n-i}(-\beta_\theta) \mathfrak{d}_\alpha^{*i}(-\delta_r) \right], \end{aligned} \tag{26}$$

где

$$A_{nm} = \frac{m(m-2)\ldots(m-2n+3)}{n!\,2^n}.$$

Пользуясь теоремой 4.1.1, доказанной в работе [8], легко обнаружить, что ряд (26) сходится абсолютно и равномерно в любой ограниченной области, поскольку последний содержит только интегральные операторы типа Вольтерра.

Пользуясь формулой (9), из представления (26) получим

$$\begin{aligned} k^{-m} f(t) = k_0^m f(t) + k_0^m \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} \Bigg[& \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \chi_1^n \frac{\partial^{n-1} \mathfrak{d}_\alpha^*(-\beta_\theta)}{\partial \beta_\theta^{n-1}} + \\ & + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \chi_2^n \frac{\partial^{n-1} \mathfrak{d}_\alpha^*(-\delta_r)}{\partial \delta_r^{n-1}} + \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \frac{(-1)^n \chi^{n-i} \chi_2^i}{(n-i-1)!\,(i-1)!} \frac{\partial^{n-2}}{\partial \beta_\theta^{n-i-1} \partial \delta_r^{i-1}} \frac{\mathfrak{d}_\alpha^*(-\beta_\theta) - \mathfrak{d}_\alpha^*(-\delta_r)}{\delta_r - \beta_\theta} \Bigg] f(t) = \\ = k_0^m f(t) + k_0^m \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} \Bigg[& \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \chi_1^n \frac{\partial^{n-1}}{\partial \beta_\theta^{n-1}} \int_0^t \mathfrak{d}_\alpha(-\beta_\theta; t-s) f(s)\,ds + \end{aligned} \tag{27}$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\chi_2^n\int_0^t \mathfrak{э}_\alpha(-\delta_r; t-s)f(s)\,ds+\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}\frac{(-1)^n\chi_1^{n-i}\chi_2^i}{(n-i-1)!(i-1)!}\times$$

$$\times\frac{\partial^{n-2}}{\partial\beta_0^{n-i-1}\partial\delta_r^{i-1}}\int_0^t\frac{\mathfrak{э}_\alpha(-\beta_0; t-s)-\mathfrak{э}_\alpha(-\delta_r; t-s)}{\delta_r-\beta_0}f(s)\,ds. \tag{27}$$

Если $f(t)=a_0+a_1t^\delta$, $(0<\delta<2)$, то пользуясь (16) получим асимптотическое представление $\bar{k}^m f(t)$ для значений t достаточно далеких от момента $t=0$. Будем иметь

$$\bar{k}^m f(t)\sim k_0^m f(t)\left(1+\frac{\chi_1}{\beta_0}+\frac{\chi_2}{\delta_r}\right)^{m/2}. \tag{28}$$

Пользуясь (28), (19), (25), (21) и (4) приходим к заключению, то для получения асимптотических выражений искомых напряжений $\sigma_r(t)$, $\sigma_\theta(t)$, когда давления $p=a_0+a_1t^\delta$, $q=b_0+b_1t^\delta$, $(0<\delta<2)$, достаточно вместо k подставить выражение

$$\bar{k}_\infty.1=\sqrt{\frac{E_{\theta 0}}{E_{r0}}\left(1+\frac{\chi_1}{\beta_0}+\frac{\chi_2}{\delta_r}\right)}=\sqrt{\frac{E_{\theta\infty}}{E_{r\infty}}}. \tag{29}$$

В случае, когда p и q не зависят от времени, на основании точного представления (18) приходим к заключению, что точные установившиеся значения напряжений $\sigma_r(\infty)$ и $\sigma_\theta(\infty)$ можно получить путем подстановки в формулы (4) вместо k величину $\bar{k}_\infty.1$, определяемую выражением (29).

Если $f(t)\equiv 1$, то из (27) с учетом (13), будем иметь:

$$\bar{k}^m.1=k_0^m\left\{\left(1+\frac{\chi_1}{\beta_0}+\frac{\chi_2}{\delta_r}\right)^{m/2}-\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\left[\frac{(-1)^{n-1}\chi_1^n}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\beta_0^{n-1}}\frac{E_{1-\alpha}(-\beta_0t^{1-\alpha})}{\beta_0}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^{n-1}\chi_2^n}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\delta_r^{n-1}}\frac{E_{1-\alpha}(-\delta_rt^{1-\alpha})}{\delta_r}\right]-$$

$$-\sum_{n=2}^{\infty}A_{nm}\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}\chi_1^{n-i}\chi_2^i\frac{(-1)^n}{(n-i-1)!(i-1)!}\frac{\partial^{n-2}}{\partial\beta_0^{n-i-1}\partial\delta_r^{i-1}}\left[\frac{E_{1-\alpha}(-\beta_0t^{1-\alpha})}{\beta_0(\delta_r-\beta_0)}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{E_{1-\alpha}(-\delta_rt^{1-\alpha})}{\delta_r(\delta_r-\beta_0)}\right]\right\}. \tag{30}$$

Представление (30) справедливо для любого момента времени. При $\beta_rt^{1-\alpha}>1$ и $\delta_rt^{1-\alpha}>1$ расчеты можно производить путем исполь-

зования аппроксимации (15). В этом случае в (30) вместо функций Миттаг-Леффлера подставляется

$$\exp(-\beta_0 \gamma t^{1-\alpha}) \text{ и } \exp(-\delta_r \gamma t^{1-\alpha}). \tag{31}$$

С учетом (31) решение будет иметь приближенный характер, но оно становится совершенно точным при $\alpha = 0$.

Для случая, когда $\beta_r t^{1-\alpha} < 1$, $\delta_r t^{1-\alpha} < 1$ и $\alpha \approx 0{,}8$, можно воспользоваться аппроксимацией (14). Тогда на основе (27) при $f(t) \equiv 1$, получим:

$$\overline{k^m} \cdot 1 = k_0^m \left[1 + \frac{\chi_1 t^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha) + \beta_0 t^{1-\alpha}} + \frac{\chi_2 t^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha) + \delta_r t^{1-\alpha}}\right]^{m/2}. \tag{32}$$

Пользуясь (32), (19), (21) и (4) приходим к заключению, что для получения приближенных выражений напряжений $\sigma_r(t)$ и $\sigma_\theta(t)$ при постоянных давлениях p и q пригодных для расчетов в промежутке времени $0 \leqslant t \leqslant t_1$, где $t_1 = \min\left(\beta_r^{-\frac{1}{1-\alpha}}, \delta_r^{-\frac{1}{1-\alpha}}\right)$, достаточно в формулах (4) постоянную k заменить выражением

$$\sqrt{\frac{E_{\theta 0}}{E_{r0}}\left[1 + \frac{\chi_1 t^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha) + \beta_0 t^{1-\alpha}} + \frac{\chi_r t^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)\delta_r t^{1-\alpha}}\right]}. \tag{33}$$

Операторное выражение радиальное перемещение с учетом (6), имеет вид

$$\overline{u_r} = \frac{r}{\overline{E_\theta}}[p(\overline{k}\overline{v}_1 + \overline{k}v_4 - \overline{\nu_\theta}\overline{v}_1 + \overline{\nu_\theta}v_4) - q(\overline{k}\overline{v}_2 + \overline{k}v_3 + \overline{\nu_\theta}v_2 - \overline{\nu_\theta}v_3)]. \tag{34}$$

Здесь $\overline{v_i}$, $(i = 1, 2, 3, 4)$, выражается формулой (19), в которой вместо k следует подставить оператор $\overline{k}$ согласно (23), операторы $\overline{E_\theta}$ и $\overline{\nu_\theta}$ выражаются формулами из (2).

Весь развитый здесь математический аппарат полностью применим при нахождении выражения $u_r(t)$.

При этом следует иметь в виду, что согласно свойствам (7) и (8), будет:

$$\frac{1}{\overline{E_\theta}} = \frac{1}{E_{\theta 0}}[1 + \chi_\theta \mathfrak{e}_\alpha^*(\chi_\theta - \beta_\theta)], \tag{35}$$

$$\frac{\nu_\theta}{\overline{E_\theta}} = \frac{\nu_{\theta 0}}{E_{\theta 0}}[1 + (\chi_\theta + \chi_\theta')\mathfrak{e}_\alpha^*(\chi_\theta - \beta_\theta)]. \tag{36}$$

Если $\chi_\theta = \chi_r$, $\beta_\theta = \beta_r$, то $\overline{k} = k_0$. В этом случае реологические свойства материала не оказывают влияния на напряженное состояние рас-

сматриваемой кольцеобразной пластинки. Однако при этом реологические свойства материала оказывают существенное влияние на радиальное перемещение. В этом случае в формуле (6) следует вместо упругих постоянных $1/E_\theta$ и ν_θ/E_θ подставить операторы (35) и (36) соответственно. Дальнейшая расшифровка осуществляется в соответствии избранным условиями. Так, например, при $\alpha = 0$, $p = M\cos\omega t$, $q = q_0$, из (35) и (36) получим

$$\frac{p}{\bar{E}_\theta} = \frac{M[\delta_\theta\cos\omega t + \omega\sin\omega t - \delta_\theta\exp(-\delta_\theta t)]\chi_\theta}{E_{\theta 0}(\omega^2 + \delta_\theta^2)} + \frac{M}{E_{\theta 0}}\cos\omega t, \tag{37}$$

$$\frac{q}{\bar{E}_\theta} = \frac{q_0}{E_{\theta 0}}\left[1 + \frac{\chi_\theta}{\delta_\theta}(1 - e^{-\delta_\theta t})\right]. \tag{38}$$

Чтобы получить выражения для $p\bar{\nu}_\theta/\bar{E}_\theta$ и $q\bar{\nu}_\theta/\bar{E}_\theta$ достаточно в формулах (37) и (38) вместо χ_θ подставить $\chi_\theta + \chi'_\theta$, а $1/E_{\theta 0}$ заменить выражением $\nu_{\theta 0}/E_{\theta 0}$. Здесь $\delta_\theta = \beta_\theta - \chi_\theta$.

Таким образом, чтобы получить перемещение $u_r(t)$, отвечающее рассматриваемому случаю, когда внутренее давление изменяется во времени по периодическому закону, а внешнее давление постоянное, следует в формулу (6) вместо p/E_θ, q/E_θ, подставить расшифрованные выражения операторов $p/\bar{E}_\theta$ и $q/\bar{E}_\theta$ согласно (37) и (38), а вместо $p\nu_\theta/E_\theta$ $q\nu_\theta/E_\theta$ — расшифрованные выражения операторов $p\bar{\nu}_\theta/\bar{E}_\theta$ и $q\bar{\nu}_\theta/\bar{E}_\theta$, как следствия расшифровки (37) и (38).

Случай, когда $E_{\theta 0} = E_{r0}$ обозначает, что в начальный момент (при $t = 0$) материал пластинки изотропный. При $t > 0$ материал может вести себя по разному, в зависимости от того, будет ли иметь место равенство установившихся модулей или нет, будут совпадать времена релаксации или нет. Если $E_{\theta\infty} = E_{r\infty}$ и $\beta_r = \beta_\theta$, то материал будет изотропный в любой момент времени. Если $E_{\theta\infty} \neq E_{r\infty}$ или $\beta_r \neq \beta_\theta$, то первоначально изотропная пластинка с течением времени становится анизотропной.

Для анизотропной среды Максвелла, как уже отмечалось выше, $E_{r\infty} = E_{\theta\infty} = 0$. Поэтому в формуле (25) этому случаю соответствует $\lambda_r = \lambda_\theta = 1$. Таким образом $\beta_r = \chi_r$ и $\beta_\theta = \chi_\theta$ и операторы (35) и (36) не будут иметь установившиеся значения при $t \to \infty$, как при $\alpha = 0$, так и при $\alpha \neq 0$. Последнее приведет к разрушению пластинки с течением времени, даже при постоянных малых давлениях. Последнее не произойдет, если $E_{r\infty} \neq 0$ и $E_{\theta\infty} \neq 0$.

Рассмотрим теперь важный частный случай, когда $c = 0$ и $p = 0$. Тогда распределение напряжений в сплошном диске с цилиндрической анизотропией, сжатом по ободу нормальными усилиями, определяются путем расшифровки операторных выражений

$$\bar{\sigma}_r = -q\left(\frac{r}{b}\right)^{\bar{k}-1}, \quad \bar{\sigma}_\theta = -q\bar{k}\left(\frac{r}{b}\right)^{\bar{k}-1}. \tag{39}$$

Если усилие $q(t) = \%$, операторы $\bar{E}_\theta = E_{\theta 0}[1 - \chi_\theta\, э_\alpha^*(-\beta_\alpha)]$ и $\bar{E}_r = E_{r0}$, то

$$\bar{k}_\infty \cdot 1 = \lim_{t\to\infty} \bar{k}\cdot 1 = \sqrt{\frac{E_{\theta 0}}{E_{r0}}\left(1 - \frac{\chi_\theta}{\beta_\theta}\right)} = \sqrt{\frac{E_{\theta\infty}}{E_{r0}}}. \tag{40}$$

Последнее выражение радикала образовано путем привлечения представлений (25).

Так как $\bar{k}_\infty \cdot 1 < 1$, то в рассматриваемом случае $\bar{k}_\infty \cdot 1 < k_0$, где $k_0 = \sqrt{E_{\theta 0}/E_{r0}}$.

Пусть $k_0 = 1$, т. е. в начальный момент диск был изотропный. Тогда $\bar{k}_\infty \cdot 1 < 1$. В этом случае установившиеся значения напряжений $\sigma_r(\infty)$ и $\sigma_\theta(\infty)$ будут таковы, что напряжения по мере приближений к центру будут неограниченно возрастать и вблизи полюса анизотропии будет происходить концентрация напряжений.

Если же операторы $\bar{E}_\theta = E_{\theta 0}$ и $\bar{E}_r = E_{r0}[1 - \chi_r\, э_\alpha^*(-\beta_r)]$, то при прежних нормальных усилиях, не зависящих от времени, т. е. при $q(t) = q_0$, будем иметь

$$\bar{k}_\infty \cdot 1 = \sqrt{\frac{E_{\theta 0}}{E_{r0}}\left(1 + \frac{\chi_r}{\beta_r - \chi_r}\right)} = \sqrt{\frac{E_{\theta 0}}{E_{r\infty}}}. \tag{41}$$

Здесь использованы представления (25). Так как $E_{r\infty} < E_{r0}$, то в этом случае, в противоположность предыдущему, $\bar{k}_\infty \cdot 1 > k_0$. Следовательно, если $k_0 = 1$, то $\bar{k}_\infty \cdot 1 > 1$. Этот случай более благоприятный, чем предыдущий, ибо напряжения $\sigma_r(\infty)$ и $\sigma_\theta(\infty)$ убывают по мере приближения к центру, а в полюсе анизотропии обращаются в нуль.

Согласно (28) и (29), полученные результаты применимы также к случаю, когда обод диска загружен усилиями изменяющимися по закону $q(t) = a_0 + a_1 t^\delta$, $(0 \leqslant \delta < 2)$, для достаточно большого t. При этом в обоих случаях напряжения будут расти с течением времени по закону $q(t)$ в любой фиксированной точке диска.

При одновременном приближении к центру диска и здесь второй случай, т. е. когда релаксация происходит в радиальном направлении,

является также более благоприятным (в смысле прочностных свойств диска), чем первый.

Как видно из (29), (40) и (41), установившиеся значения напряжений и их значения для достаточно больших t не зависят явно от времен релаксаций τ_θ и τ_r. Для случаев, отвечающих (27) и (33), последнее не имеет месте. Так, например, из (33) следует, что при $\bar{E}_\theta = E_{\theta 0}[1 - \chi_\theta \vartheta_a^*(-\beta_\theta)]$ и $\bar{E}_r = E_{r0}$

$$\bar{k} \cdot 1 = k_0 \sqrt{1 + \frac{(E_{\theta 0} - E_{\theta\infty})(t/\tau_\theta)^{1-\alpha}}{E_{\theta 0}[\Gamma(1-\alpha) + (t/\tau_\theta)^{1-\alpha}}}}, \tag{42}$$

а при $\bar{E}_\theta = E_{\theta 0}$ и $\bar{E}_r = E_{r0}[1 - \chi_r \vartheta_\alpha^*(-\beta_r)]$

$$\bar{k} \cdot 1 = \sqrt{-\frac{(E_{r0} - E_{r\infty})(t/\tau_r)^{1-\alpha}}{E_{r0}\Gamma(1-\alpha) + E_{r\infty}(t/\tau_r)^{1-\alpha}}}. \tag{43}$$

Из выражений (42) и (43) видно, что качественно здесь процесс изменения напряжений в диске будет такой же, как и в рассмотренных выше соответствующих случаях, но характер протекания его будет зависеть существенным образом от отношений времени наблюдения t к временам релаксаций τ_θ и τ_r. Разумеется, что последнее справедливо при $0 \leq t/\tau_\theta \leq 1$, $0 \leq t/\tau_r \leq 1$ соответственно и $\alpha \approx 0{,}8$ (или, еще лучше, при $\alpha \approx 0{,}9$).

В заключение заметим, что в изотропном кольце напряжения не зависят от наследственных свойств материала.

Таким образом, фактор времени проявляется при наличии анизотропии.

Поступила в 31 I 1965 г.

Филиал Института Механики АН УССР,
Днепропетровск, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Volterra V., *Theory of Functionals and of Integral and Integro-differential Equations.* London, 1931
2. Работнов Ю. Н., ПММ, 1948, **12**, *1.*
3. Ишлинский А. Ю., ПММ, 1940, **4**, *1.*
4. Ржаницын А. Р., *Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени.* Гостехиздат, М., 1949.
5. Лехницкий С. Г., *Анизотропные пластинки.* Гостехиздат, М., 1957.
6. Volterra V. *Leçons sur les fonctions de lignes.* Paris, 1913.
7. Розовский М. И., *Об одном свойстве степени специального оператора и его приложении к решению упруго-наследственных динамических задач. Ползучесть и длительная прочность.* Изд. СО АН СССР, Новосибирск, 1963.
8. Быков Я. В., *О некоторых методах построения решений интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.* Фрунзе, 1961.

9. Розовский И. И., *Интегрально-операторные методы в наследственной теории ползучести.* Второй всесоюзный съезд по теоретической и прикладиой механике. Аннотация докладов, АН СССР, М., 1964.
10. — Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и машиностр., 1961, *2.*
11. — Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и машиностр., 1959, *5.*
12. Брызгалин Г. И., ЖПМТФ, 1963, *4.*
13. Огибалов П. М., Тюнеева И. М., Вестник МГУ, 1963, *2.*
14. Розовский М. И., Науч. докл. выс. школы, Физ.-мат. науки, 1958, *6.*

DETERMINAREA TENSIUNILOR ÎNTR-O PLACĂ ELASTICĂ CU ELASTICITATE REMANENTĂ ŞI CU ANIZOTROPIE CILINDRICĂ

(Rezumat)

Se studiază problema determinării tensiunilor într-o placă elastică cu elasticitate remanentă şi anizotropie cilindrică folosindu-se metodele integral-operaţionale elaborate de al doilea autor în vederea cercetării problemelor ereditare ale plasticităţii [9].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

D. C. 531.1

RENDEZVOUS SIMULATOR KINEMATICS

BY

JOSEPH S. BEGGS

Paper presented to the International Mechanisms Conference, October, 1964, Karl-Marx-Stadt

Nomenclature

COORDINATE SYSTEMS

System Nr. 1 — an „inertial" system, origin at center of the earth. X_1Y_1 is the initial plane of the target orbit, X_1 passing through perifocus, and Z_1 in the direction of the orbital angular velocity vector.

System Nr. 2 — principal axes through the CM of the target, X_2 forward Z_2 „down",

System Nr. 3 — principal axes through CM of the chaser, X_3 forward, Z_3 „down"

System Nr. 4 — space analog of simulator laboratory. Origin O_4 coincident with O_3 and the X_4 axis passes through O_2, Z_4 is parallel to the X_2Z_2 plane in the general direction of Z_2.

System Nr. 2′— fixed in the target model in the same relative position as system 2 in the target. O_2' is at the intersection of the target model gimbal axes.

System Nr. 3′— fixed in the camera in such a manner that the camera lenses and their axes bear the same relation to system 3′ as the observation windows and the astronaut's eyes bear to system 3. O_3' is at the intersection of the camera gimbal axes.

System Nr. 4′— translates in the laboratory. X_4', axis runs horizontally the length of the room and the Z_4', axis is vertical downward. O_3' and O_4', coincide.

$[C_{32}]$ — coordinate transformation matrix *from* system 3 *to* system 2 when origins coincide. Also used for transforming components of a free vector. $[C_{32}]$ premultiplies a column matrix of components in the 3 system to obtain a column matrix of components in the 2 system. A direction cosine matrix, 3×3. The inverse of $[C_{32}]$ equals its transpose.

$[C_{13}]_\beta$ — direction cosine matrix expressed in terms of standard Euler angles β_3, β_2, β_1 (see description of β's below).

CONSTANTS

I_{x_3}, I_{y_3}, I_{z_3} — moments of inertia of the chaser about principal axes through the CM;

$\dot{\theta}$ — angular rate of target in a circular orbit;

a — radius of circular orbit of target;
k — scale factor of simulator (<1);
m_3 — mass of chaser.

INDEPENDENT VARIABLES

t — time.

ARBITRARY VARIABLES

T_{x_3}, T_{y_3}, T_{z_3} — components of engine torques on chaser controlled by astronaut;
F_{x_3}, F_{y_3}, F_{z_3} — components of chaser engine thrusts controlled by the astronaut.

DEPENDENT VARIABLES (NOT OUTPUT BY THE COMPUTER)

F_{x_2}, F_{y_2}, F_{z_2} — components of chaser engine thrust in target coordinates;
ω_{x_3}, ω_{y_3}, ω_{z_3} — body angular rates of chaser relative to inertial space;
β_3, β_2, β_1 — Euler angles denoting attitude of chaser in inertial space. Sequence is β_3 about the Z axis, β_2 about the new Y axis, followed by β_1 about the final X axis. This system of Euler angles is used throughout the report.
θ — position of target in its orbit, relative to X_1 axis;
$\bar{x}_2$, $\bar{y}_2$, $\bar{z}_2$, — position of CM of chaser in target coordinates;
$w \triangleq (x_2^2 + y_2^2)^{-1/2}$ for ease in writing;
R — range from chaser to target. This is, distance from O_3 to O_2.

DEPENDENT VARIABLES (OUTPUT BY THE COMPUTER)

R' — range in laboratory. Distance from O_3 to O_2;
γ_3, γ_2 — target-model gimbal angles (Euler angles), azimuth and elevation respectively;
α_3, α_2, α_1 — camera gimbal angles (Euler angles) azimuth, elevation, and roll respectively.

1. Introduction

The Douglas Aircraft Company's Orbiting and Landing Approach Flight Simulator (OLAFS) has been designed to give an astronaut practice in guiding his space vehicle, the chaser, while rendezvousing and docking at another space vehicle, the target, which is in orbit around the earth.

The cockpit of the simulated chaser is quite realistic, being complete with controls and instruments. In the place of the windows for viewing the target, are five television screens, each connected to its TV camera. The television cameras are connected rigidly together, and televise a model of the target which is about 1/20 full size. The line-of-sight from chaser to target can have any direction in inertial space; this situation would be difficult to simulate if we made the laboratory the analog of inertial space.

as this would require both horizontal and vertical translation. Instead, the line-of-sight is fixed in the laboratory. Any direction of the line-of-sight relative to the target can be obtained by mounting the target model on two gimbals so that it can turn in azimuth and in elevation.

The same statement holds true for the *line* of sight relative to the chaser or TV cameras. But for a *three-dimensional* body, such as the chaser, three gimbals are needed, to allow it to assume any atitude relative to the target. The gimbal angles constitute a set of Euler angles. Actually either the cameras or the target model could have three gimbals, but it was decided that the target model should be mounted on two gimbals, with their center fixed in the laboratory, and that the TV cameras should be mounted in three gimbals on a carriage, which runs on a track which is parallel to the line joining the center of the two gimbal systems.

The motions of the carriage and the five gimbals are controlled by servomotors which receive their signals from a large analog computer. Transducers on the track and on the gimbals obtain position information for the computer. The positions of the thrust and attitude controls in the chaser, as set by the astronaut, are also sent to the computer, which solves the equations of motion of the chaser, and then sends out the signals to position the cameras and target model.

These equations of motion are written in target-fixed coordinates, the system in which the astronaut visualizes himself to be while making the rendezvous. It is assumed that the chaser is injected into a rendezvous orbit by a multiple stage booster, its own engines having only the capability of making vernier adjustments to this orbit in order to achieve final rendezvous and docking.

2. Kinematics of the Problem

To carry out the analysis we define the coordinate systems and symbols shown in Nomenclature. In the present discussion the target is assumed to be in a circular orbit around the earth, and to maintain a constant attitude relative to this orbit.

For our purposes we may ignore the acceleration of the center of the earth relative to inertial space. It may, therefore, serve as the origin, O_1 of an „inertial" coordinate system, $X_1 Y_1 Z_1$. By definition this system does not rotate relative to the fixed stars (Fig. 1).

The astronaut sees himself as moving in $X_2 Y_2 Z_2$. Writing $\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2$, for the coordinates of O_3 in system 2, Eggleston's equations of motion [1, p. 35] of the center of mass (CM) of the chaser in system 2 become

$$\ddot{\bar{x}}_2 - 2\dot{\theta}\dot{\bar{z}}_2 = \frac{F_{x_2}}{m_3}, \quad \ddot{\bar{y}}_2 + \dot{\theta}^2 \bar{y}_2 = \frac{F_{y_2}}{m_3}, \quad \ddot{\bar{z}}_2 + 2\dot{\theta}\dot{\bar{x}}_2 - 3\dot{\theta}^2 \bar{z}_2 = \frac{F_{z_2}}{m_3}. \tag{1}$$

These equations are integrated twice by the analog computer with respect to time to obtain $\bar{x}_2$, $\bar{y}_2$ and $\bar{z}_2$. The constants of integration will be determined to suit the mission.

$\vec{F}$ is the vector sum of the thrust produced by the chaser engines under the control of the astronaut. The components of $\vec{F}$ in system 2 are determined from the attitude of the chaser in system 2:

$$(F)_2 = [C_{32}]\,(F)_3 . \tag{2}$$

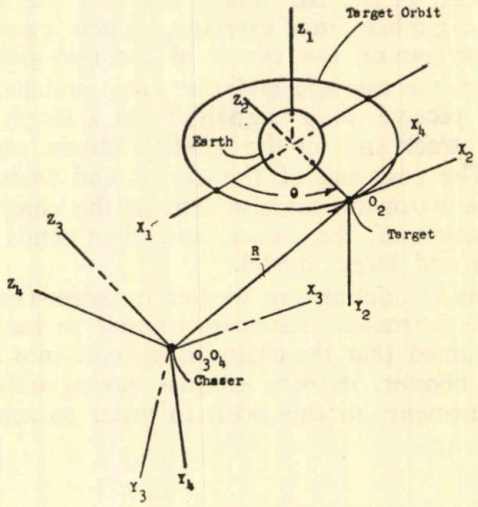


Fig. 1. — Space coordinate systems.

The attitude of the chaser in target coordinates is determined from the equations of motion in inertial space, and the attitude of the target in inertial space,

$$[C_{32}] = [C_{12}]\,[C_{31}] . \tag{3}$$

From Fig. 1,

$$[C_{12}] = \begin{bmatrix} -S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -C\theta & -S\theta & 0 \end{bmatrix} . \tag{4}$$

$[C_{31}]$ is found as follows:

Euler's Equations of angular motion of the chaser in body coordinates are

$$(5)\qquad \begin{cases} I_{x_3}\omega_{x_3} + (I_{z_3} - I_{y_3})\,\omega_{y_3}\omega_{z_3} = T_{x_3}, \\ I_{y_3}\omega_{y_3} + (I_{x_3} - I_{z_3})\,\omega_{z_3}\omega_{x_3} = T_{y_3}, \\ I_{z_3}\omega_{z_3} + (I_{y_3} - I_{x_3})\,\omega_{x_3}\omega_{y_3} = T_{z_3}, \end{cases}$$

where T_x, T_y, T_z are the torques applied to the chaser by its engines, under the control of the astronaut.

These equations are integrated once with respect to time to obtain ω_{x_3}, ω_{y_3}, ω_{z_3}.

Calling our standard Euler angles *from* system 1 *to* system 3, β_3, β_2, β_1, the Euler angle rates are,

$$(6)\qquad \dot{\beta}_3 = \frac{\omega_{y_3} S\beta_1 + \omega_{z_3} C\beta_1}{C\beta_2}, \quad \dot{\beta}_2 = \omega_{y_3} C\beta_1 - \omega_{z_3} S\beta_1, \quad \dot{\beta}_1 = \omega_{x_3} + \beta_3 S\beta_2,$$

where S stands for sine and C for cosine.

These follow from the fact that angular velocities add vectorially, so that

$$(7)\qquad \vec{\omega} = \dot{\vec{\beta}}_3 + \dot{\vec{\beta}}_2 + \dot{\vec{\beta}}_1.$$

These equations are integrated with respect to time to obtain the Euler angles, which in turn are used to compute $[C_{31}]$ for (3) writing $C2C3$ for $C\beta_2$, $C\beta_3$, etc.,

$$(8)\quad [C_{31}] = [C_{13}]^{-1} = \begin{bmatrix} C2\,C3 - & C1\,S3 + S1\,S2\,C3 & S1\,S3 + C1\,S2\,C3 \\ C2\,S3 & C1\,C3 + S1\,S2\,S3 & -S1\,C3 + C1\,S2\,S3 \\ -S2 & S1C2 & C1C2 \end{bmatrix}.$$

We now define coordinate system 4 in space, which will be the analog of the simulator laboratory. The origin O_4 is made coincident with O_3 and the X_4 axis passes through O_2. Z_4 is parallel to the X_2Z_2 plane. This is still ambiguous as to which direction along Z_4 is positive. *Anticipating* we will say that when the associated Euler Angle is zero $+Z_4$ will be parallel to $+Z_2$. So that,

$$(9)\qquad [C_{4'2'}] = [C_{42}] \begin{bmatrix} -\bar{x}_2/R & -\bar{x}_2\,\bar{y}_2\,w/R & w\bar{z}_2 \\ -\bar{y}_2/R & 1/Rw & 0 \\ -\bar{z}_2/R & -\bar{y}_2\,\bar{z}_2\,w/R & -\bar{x}_2\,w \end{bmatrix}.$$

This can be checked from Fig. 2.

The range of the target measured from O_3 to O_2 is given by

$$R^2 = \bar{x}_2^2 + \bar{y}_2^2 + \bar{z}_2^2. \tag{10}$$

It is measured along X_4.

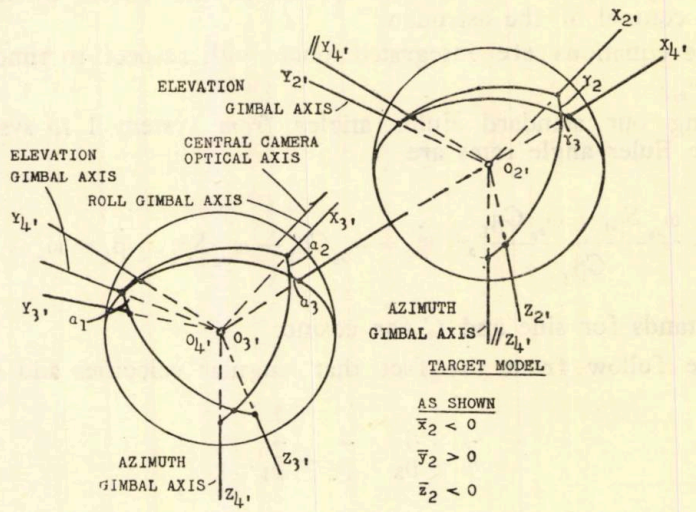


Fig. 2. — Laboratory coordinate systems.

3. Coordinate Systems in the Simulator Laboratory

The laboratory systems bear the same number as their space analogs and are distinguished by primes. System 4′ (Fig. 2) translates in the laboratory with O'_4 at the center of the camera gimbal system. The X'_4 axis is horizontal and runs the length of the room. The Z'_4 axis is vertical downward.

System 3′ is fixed in the camera with O'_3 at O'_4. Starting from the room, the Euler angles α_3, α_2, α_1 correspond to gimbal angles: azimuth, elevation, and roll, respectively.

System 2′ is fixed in the target model with the axes in the same relative position as the axes of system 2 in the actual target.

Since the simulator is a model of actual conditions in space, all angles are preserved, and therefore, the letters denoting them are not primed. The linear scale factor, k, will be somewhere between 1/20 and 1/40 in the present design.

The range,

$$R' = kR = (\bar{x}_2^2 + \bar{y}_2^2 + \bar{z}_2^2)^{1/2}. \tag{11}$$

The procedure described here is summarized in the flow chart (Fig. 3).

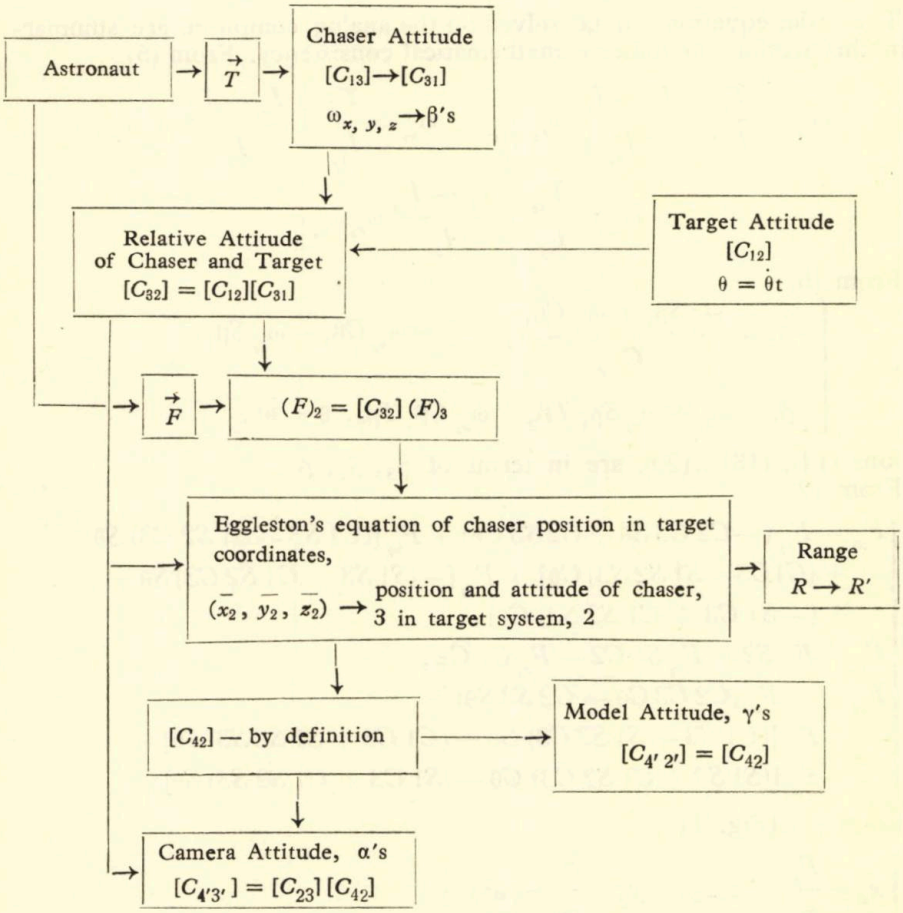


Fig. 3. — Information flow in the simulator.

The gimbal angles γ_3 and γ_2 are determined by equating the corresponding elements of the matrix $[C_{42}]$ (shown in (9)) obtained from the definition of system 4, with the canonical form of $[C_{42}]$ written in terms of the Euler angles γ_3, and γ_2 ($\gamma_1 = 0$). The inverse of this canonical form is illustrated by (8).

The gimbal angles α_3, α_2, α_1 are obtained in a similar manner by equating the corresponding elements of $[C_{43}]$ obtained from $[C_{23}]\,[C_{42}]$ with the canonical form of $[C_{43}]$ in terms of the Euler angles α_3, α_2, and α_1.

4. Scalar Equations to be Solved on the Analog Computer

The scalar equations to be solved on the analog computer are summarized in this section, to indicate mathematical consistency. From (5)

$$\omega_{x_3} = \frac{T_{x_3}}{I_{x_3}} + \frac{I_{y_3} - I_{z_3}}{I_{x_3}} \omega_{y_3} \omega_{z_3}, \quad \omega_{y_3} = \frac{T_{y_3}}{I_{y_3}} + \frac{I_{z_3} - I_{x_3}}{I_{y_3}} \omega_{z_3} \omega_{x_3}$$

(12)

$$\omega_{z_3} = \frac{T_{z_3}}{I_{y_3}} + \frac{I_{x_3} - I_{y_3}}{I_{z_3}} \omega_{x_3} \omega_{y_3}.$$

From (6)

$$\text{(13)} \quad \begin{cases} \dot{\beta}_3 = \dfrac{\omega_{y_3} S\beta_1 + \omega_{z_3} C\beta_1}{C\beta_2}, \quad \dot{\beta}_2 = \omega_{y_3} C\beta_1 - \omega_{z_3} S\beta_1, \\ \dot{\beta}_1 = \omega_{x_3} + \omega_{y_3} S\beta_1 \, T\beta_2 + \omega_{z_3} C\beta_1 \, T\beta_2, \ \theta = \dot{\theta} t. \end{cases}$$

Equations (14), (18) ... (20), are in terms of β_3, β_2, β_1.

From (2)

$$\text{(14)} \quad \begin{cases} F_{x_2} = F_{x_3}(-C2\,C3\,S\theta + C2\,S3\,C\theta) + F_{y_3}[(C1\,S3 - S1\,S2\,C3)\,S\theta + \\ \quad + (C1\,C3 + S1\,S2\,S3)\,C\theta] + F_{z_3}[-(S1\,S3 + C1\,S2\,C3)\,S\theta + \\ \quad + (-S1\,C3 + C1\,S2\,S3)\,C\theta], \\ F_{y_2} = F_{x_3}\,S2 - F_{y_3}\,S1\,C2 - F_{z_3}\,C1\,C2, \\ F_{z_2} = -F_{x_3}(C2\,C3\,C\theta - C2\,S3\,S\theta) + \\ \quad + F_{y_3}[(C1\,S3 - S1\,S2\,C3)\,C\theta - (C1\,C3 + S1\,S2\,S3)\,S\theta] - \\ \quad - F_{z_3}[(S1\,S3 + C1\,S2\,C3)\,C\theta - (S1\,C3 + C1\,S2\,S3)\,S\theta]. \end{cases}$$

From (1) (Fig. 1)

$$\text{(15)} \quad \begin{cases} \bar{x}_2 = \dfrac{F_{x_2}}{m_3} + 2\dot{\theta}\bar{z}_2, \quad \bar{y}_2 = \dfrac{F_{y_2}}{m_3} - \dot{\theta}^2 \bar{y}_2, \\ \bar{z}_2 = \dfrac{F_{z_2}}{m_3} - 2\dot{\theta}\,\bar{x}_2 + 3\dot{\theta}^2\,\bar{z}_2, \quad R = (\bar{x}_2^2 + \bar{y}_2^2 + \bar{z}_2^2)^{1/2}, \quad R' = kR. \end{cases}$$

By equating elements (2, 1) (i. e. second row first column) of $[C_{42}]$ in (9) and $[C_{4'2'}]_\gamma$ from the canonical form with $\gamma_1 = 0$,

$$\text{(16)} \quad S\gamma_3 = +\frac{\bar{y}_2}{R}.$$

By equating elements (1, 3) and also elements (3, 3) of $[C_{42}]$ and $[C_{4'2'}]_\gamma$, and dividing, (writing T for tangent),

$$T\gamma_2 = \frac{\bar{z}_2}{\bar{x}_2}, \quad w \triangleq (\bar{x}_2^2 + \bar{z}_2^2)^{-1/2}. \tag{17}$$

By equating elements (1,3) of $[C_{43}]$ ($= [C_{23}]\,[C_{42}]$) and $[C_{4'3'}]_a$,

$$S\alpha_2 = w\,[\bar{z}_2(-C2\,C3\,S\theta + C2\,S3\,C\theta) + \bar{x}_2(C2\,C3\,C\theta + C2\,S3\,S\theta)]. \tag{18}$$

Equating elements (2, 3) and also elements (3, 3) of $[C_{43}]$ and $[C_{4'3'}]_a$,

$$\begin{aligned} T\alpha_1 = \{ &- \bar{z}_2[(C1\,S3 - S1\,S2\,C3)\,S\theta + (C1\,C3 + S1\,S2\,S3)\,C\theta] + \\ &+ \bar{x}_2[(C1\,S3 - S1\,S2\,C3)\,C\theta - (C1\,C3 + S1\,S2\,S3)\,S\theta]\} \div \\ \div \{ &+ \bar{z}_2[(S1\,S3 + C1\,S2\,C3)\,S\theta + (S1\,C3 - C1\,S2\,S3)\,C\theta] + \\ &+ \bar{x}_2[-(S1\,S3 + C1\,S2\,C3)\,C\theta + (S1\,C3 - C1\,S2\,S3)\,S\theta]\}. \end{aligned} \tag{19}$$

Equating elements (1, 2) and also elements (1, 1) of $[C_{43}]$ and $[C_{4'3'}]_a$,

$$\begin{aligned} T\alpha_3 = [&- w\bar{x}_2\bar{y}_2(-C2\,C3\,S\theta + C2\,S3\,C\theta) + S2/w + \\ &+ w\bar{y}_2\bar{z}_2(C2\,C3\,C\theta + C2\,S3\,S\theta)] \div \\ \div [&- \bar{x}_2(-C2\,C3\,S\theta + C2\,S3\,C\theta) - \bar{y}_2\,S2 + \\ &+ \bar{z}_2(C2\,C3\,C\theta + C2\,S3\,S\theta)]. \end{aligned} \tag{20}$$

These twenty equations (w was defined for ease in writing) are used to compute values of the twenty variables in the problem. Nine of these, R', γ_3, γ_2, β_3, β_2, β_1, α_3, α_2, and α_1 are outputs to the simulator and eleven of them, F_{x_3}, F_{y_3}, F_{z_3}, ω_{x_3}, ω_{y_3}, ω_{z_3}, θ, $\bar{x}_2$, $\bar{y}_2$, $\bar{z}_2$, and R are used internally in the computer.

Received the 13 XII 1964

Engineering Department,
University of California,
Los Angeles, USA

REFERENCES

1. Eggleston J. M., Beck H. D., *A Study of the Positions and Velocities of a Space Station and a Ferry Vehicle During Rendezvous and Return.* NASA Technical Report R—87, 1961.

CINEMATICA UNUI SIMULATOR DE ÎNTÎLNIRE ÎN COSMOS

(Rezumat)

Se stabilesc douăzeci de ecuaţii ce descriu sistemul constituit dintr-un simulator de întîlnire în cosmos, cu care se antrenează viitorii astronauţi. Ecuaţiile respective s-au obţinut din ecuaţii în matrice pătrate 3×3, reprezentînd transformări de coordonate între diferite sisteme ce se ataşează la elementele mecanismelor constitutive.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Sisteme de coordonate spaţiale.
Fig. 2. — Sisteme de coordonate de laborator.
Fig. 3. — Procesul de informaţie din simulator.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 621 – 231

SINTEZA MECANISMULUI PATRULATER CU PATINĂ OSCILANTĂ

DE

I. SZÉKELY şi V. HANDRALUCA

1. La sinteza mecanismului patrulater cu patină oscilantă (fig. 1) se aplică metoda locurilor geometrice [1], [2], ceea ce face posibilă găsirea unei familii de mecanisme care realizează acelaşi coeficient de viteză K determinat de relaţia:

$$K = \frac{\varphi_l}{\varphi_{mg}}, \tag{1}$$

unde φ_l este unghiul de rotaţie al manivelei corespunzător regimului de lucru (acelei perioade în care se îndeplineşte procesul tehnologic), φ_{mg} — unghiul de rotaţie al manivelei corespunzător mersului în gol.

Pe urmă, din totalitatea de mecanisme cu acelaşi coeficient K se alege unul care corespunde mai bine cazului concret dat. O astfel de selecţionare se face prin impunerea unor condiţii suplimentare. De exemplu poate fi dată, pe lîngă coeficientul de viteză, lungimea manivelei sau a batiului etc.

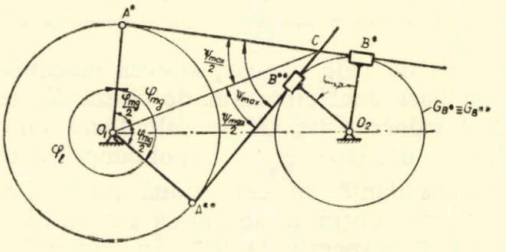


Fig. 1

La început se presupun cunoscute lungimile tuturor elementelor mecanismului. Un astfel de mecanism, în cele două poziţii extreme, este reprezentat în fig. 1. Cele două poziţii extreme, caracterizate de unghiul de oscilaţie ψ_{max} al balansorului, se determină de tangentele $A^* B^*$ (exterioară) şi $A^{**} B^{**}$ (interioară) duse la cercurile cu razele r şi R.

Din fig. 1 rezultă că segmentul $O_1 C$ (C fiind punctul de intersecţie al tangentelor $A^* B^*$ şi $A^{**} B^{**}$) este bisectoarea atît a unghiului φ_{mg} cît şi a unghiului $\sphericalangle A^* C A^{**} = \psi_{max}$. Din triunghiul $O_1 A^* C$ rezultă

(2) $$\varphi_{mg} + \psi_{max} = 180°.$$

Ţinînd seamă de relaţia $\varphi_{mg} + \psi_l = 360°$, din ecuaţia (1) se obţine

(3) $$\varphi_{mg} = \frac{360°}{K+1}.$$

Introducînd (3) în (2) avem

(4) $$\varphi_{max} = \frac{K-1}{K+1} 180°$$

sau

(5) $$K = \frac{180° + \psi_{max}}{180° - \psi_{max}}.$$

Prin urmare, coeficientul de viteză K depinde de unghiul de oscilaţie φ_{max} al balansorului. Cu alte cuvinte sinteza mecanismului patrulater cu patină oscilantă, pe baza coeficientului de viteză, este identică cu sinteza pe baza poziţiilor extreme.

Dacă în cele două poziţii extreme ale mecanismului (determinate de unghiul ψ_{max}) lungimea balansorului se menţine neschimbată, dar se modifică atît lungimea $O_1 A$ a manivelei cît şi distanţa a dintre axe, atunci se obţin o infinitate de mecanisme patrulatere cu patină oscilantă. Din mulţimea acestor mecanisme trebuie alese acelea care asigură unghiul ψ_{max} dinainte dat. Cu alte cuvinte este necesar să se determine locurile geometrice ale punctelor A^*, A^{**} şi O_1, notate cu G_{A^*}, $G_{A^{**}}$ şi G_{O_1}, astfel încît condiţia amintită să fie satisfăcută.

Din fig. 1 rezultă că un observator situat în punctul C vede manivela atît în poziţia $O_1 A^*$ cît şi în poziţia $O_1 A^{**}$ sub un unghi $\psi_{max}/2$. Prin urmare locurile geometrice G_{A^*} $G_{A^{**}}$ şi G_{O_1} ale punctelor A^*, A^{**} şi O_1 vor fi drepte care se suprapun cu direcţiile $A^* B^*$, $A^{**} B^{**}$, respectiv $O_1 C$. Astfel, alegînd centrul de rotaţie al manivelei O_1 undeva pe dreapta G_{O_1}, iar A^* şi A^{**} undeva pe dreptele G_{A^*} şi $G_{A^{**}}$, se obţin o infinitate de mecanisme care asigură acelaşi coeficient de viteză K sau acelaşi unghi de oscilaţie φ_{max}.

2. Ţinînd seama de cele expuse, sinteza mecanismului patrulater cu patină oscilantă, pe baza coeficientului de viteză K, se realizează în felul următor. Fiind dată valoarea lui K se calculează cu ajutorul relaţiei (4) valoarea unghiului de oscilaţie ψ_{max} şi apoi adoptînd o valoare pentru R se construieşte patina oscilantă în cele două poziţii extreme (fig. 2). În punctele B^* şi B^{**} astfel obţinute se ridică perpendicularele G_{A^*}, $G_{A^{**}}$ pe direcţiile razelor $O_2 B^*$ respectiv $O_2 B^{**}$. În punctul de intersecţie C al dreptelor G_{A^*} şi $G_{A^{**}}$ se ridică o perpendiculară pe segmentul $\overline{O_2 C}$ obţinîndu-se astfel locul geometric G_{O_1}. Impunînd o condiţie suplimentară, de exemplu adoptînd lungimea batiului $\overline{O_1 O_2} = a$, se alege din mulţimea de mecanisme unul care satisface condiţia impusă. În acest scop se duce un arc de cerc cu centrul în O_2 şi de rază a. La intersecţia acestuia cu dreapta G_{O_1} se obţine poziţia punctului O_1. La intersecţia dreptelor G_{A^*} şi $G_{A^{**}}$ cu perpendicularele duse pe direcţiile lor din punctul O_1 se determină poziţiile cuplelor A^* şi A^{**}.

În cazul cînd condiţia suplimentară constă în precizarea mărimii razei manivelei r, atunci pentru construirea mecanismului corespunzător se determină în primul rînd poziţia punctului O_1, măsurînd din punctul C pe dreapta G_{O_1} un segment de mărime

$$CO_1 = \frac{r}{\sin(\psi_{max}/2)}. \tag{6}$$

Apoi se determină poziţiile cuplelor A^* şi A^{**} ca şi în cazul precedent.

În practică, drept condiţie suplimentară se dă raportul dintre lungimea manivelei şi distanţa axială a, adică

$$\lambda = \frac{r}{a}. \tag{7}$$

Se poate demonstra că în acest caz construcţia mecanismului se face în mod identic ca şi în cazul cînd s-a considerat cunoscută lungimea batiului a.

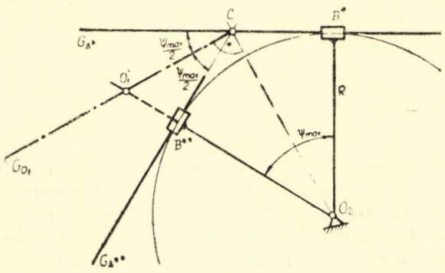


Fig. 2

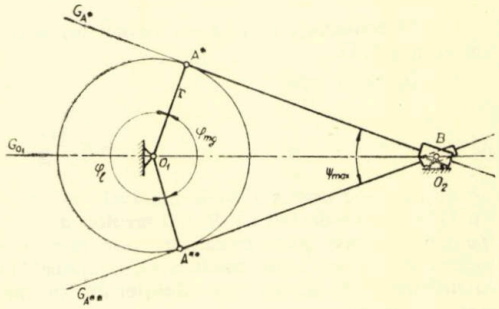


Fig. 3

Din triunghiurile dreptunghice O_2CB^* şi O_2CO_1 (fig. 1) rezultă

$$O_2C = \frac{R}{\cos(\psi_{max}/2)} \tag{8}$$

şi

$$O_1O_2^2 = O_1C^2 + O_2C^2. \tag{9}$$

Înlocuind (6) şi (8) în (9) şi ţinînd seama de (7), se obţine

$$a^2 = \frac{a^2\lambda^2}{\sin(\psi_{max}/2)} + \frac{R^2}{\cos(\psi_{max}/2)}. \tag{10}$$

Rezolvînd ecuaţia de gradul doi în raport cu a avem

$$a = \frac{R\,\mathrm{tg}\,(\psi_{max}/2)}{\sqrt{\sin^2(\psi_{max}/2) - \lambda^2}}. \tag{11}$$

Din ecuaţia (11) rezultă că fiind dată condiţia suplimentară λ se poate determina valoarea lui a şi în consecinţă sinteza mecanismului se efectuează ca şi în cazul cînd erau cunoscute ψ_{max}, R şi condiţia suplimentară a.

Relaţia (11) corespunde cazului real numai cînd $\sin^2(\psi_{max}/2) - \lambda^2 > 0$, adică

$$\lambda^2 < \sin^2 \frac{\psi_{max}}{2}. \tag{12}$$

Avînd în vedere că la mecanismele cu patină oscilantă întotdeauna se îndeplineşte condiţia $\psi_{max} < 180°$, rezultă că

$$\sin \frac{\psi_{max}}{2} > 0. \tag{13}$$

Ţinînd seama de (13) şi de faptul evident că $\lambda > 0$, din relaţia (12) rezultă

$$\lambda < \sin \frac{\psi_{max}}{2}. \tag{14}$$

În consecinţă la alegerea valorii lui λ trebuie să se ţină seamă de restricţia exprimată de relaţia (14).

În cazul cînd

$$\sin^2 \frac{\psi_{max}}{2} - \lambda^2 = 0, \tag{15}$$

se obţine un mecanism bielă-manivelă cu patină oscilantă (fig. 3). În adevăr, înlocuind (15) în (11) şi considerînd că $R \neq 0$ rezultă $a = \infty$, ceea ce practic este imposibil. Prin urmare pentru obţinerea unui mecanism real este necesar să fie îndeplinită relaţia $R = 0$. Ţinînd seama de aceasta şi de condiţia (15), relaţia (11) conduce la o nedeterminare care arată că există o infinitate de mecanisme. Menţionăm că valoarea $a = 0$ furnizează o schemă de mecanism care nu poate funcţiona.

În cazul mecanismului bielă-manivelă cu patină oscilantă (fig. 3), locurile geometrice G_{A^*}, $G_{A^{**}}$ şi G_{O_1} sînt drepte care trec prin punctul O_2.

Analizînd locurile geometrice din fig. 2 se observă că apropiindu-ne cu centrul de rotaţie al manivelei de punctul C ajungem într-o poziţie limită O_1', în care distanţa axială este $a = r = R$. Alegînd centrul de rotaţie al manivelei pe G_{O_1}, în intervalul $O_1'C$, se observă că poziţia de oscilaţie a patinei oscilante se schimbă şi de asemenea se schimbă mărimea unghiului de oscilaţie ψ_{max}. Deci zona CO_1' a locului geometric G_{O_1} nu corespunde problemei puse iniţial de a efectua sinteza unui mecanism care să realizeze o oscilaţie maximă impusă ψ_{max} şi o poziţie dinainte aleasă a limitelor de oscilaţie ale patinei.

În consecinţă distanţa axială minimă este (fig. 2)

$$a_{min} = O_2O_1' = R + r_{min}. \tag{16}$$

Ţinînd seama de (8) din $\Delta O_2 O_1' C$ se obţine

$$a_{min} = \frac{R}{\cos^2(\psi_{max}/2)}. \tag{16'}$$

Din (16) şi (16') se poate determina lungimea minimă a manivelei mecanismului

$$r_{min} = R \operatorname{tg}^2 \frac{\psi_{max}}{2}. \tag{17}$$

Efectuînd raportul relaţiilor (16') şi (17) se obţine

$$\lambda_{min} = \sin^2 \frac{\psi_{max}}{2}. \tag{18}$$

Deci limitele de variaţie ale lui λ sînt, în baza lui (14) şi (18),

$$\sin^2 \frac{\psi_{max}}{2} \leqslant \lambda \leqslant \sin \frac{\psi_{max}}{2}. \tag{19}$$

3. Dacă se cere sinteza unui mecanism la care $a < r + R$, se observă că este imposibilă realizarea cu mecanismele studiate. De aceea se va trece la tratarea cazului general care rezolvă şi cazul mecanismelor ce trebuie să îndeplinească condiţia susamintită.

În cazul general cînd unghiul dintre bielă şi patină este $\gamma \neq \pi/2$ (fig. 4), poziţiile extreme ale mecanismului se determină ducînd tangente exterioare şi interioare la cercurile avînd bazele r şi respectiv $R \sin \gamma$ (în care R este lungimea patinei oscilante care închide unghiul γ cu biela).

În consecinţă relaţiile dintre lungimile elementelor vor fi identice cu cele demonstrate pentru cazul precedent (cînd $\gamma = \pi/2$); trebuie doar substituit R cu $R \sin \gamma$. Astfel relaţia (6) rămîne neschimbată iar relaţiile (8) şi (11) vor avea forma

$$O_2 C = \frac{R \sin \gamma}{\cos^2(\psi_{max}/2)} \tag{20}$$

şi

$$a = \frac{R \sin \gamma \operatorname{tg}(\psi_{max}/2)}{\sqrt{\sin^2(\psi_{max}/2) - \lambda}}. \tag{21}$$

Din compararea relaţiilor (11) şi (21) rezultă că dintre două mecanisme cu patină oscilantă avînd aceleaşi valori γ şi R, are batiul de lungime mai mică deci şi lungimea manivelei mai mică mecanismul la care unghiul $\gamma \neq \pi/2$.

Sinteza mecanismului în acest caz se realizează ca şi în cel precedent cu observaţia că în B^*, B^{**}, respectiv C_0, se duc drepte înclinate cu unghiul γ (în acelaşi sens) la direcţiile O_2B^*, O_2B^{**}, respectiv O_2C_0 (sau, cu alte cuvinte se duc tangente prin B^*, B^{**} respectiv C_0, la nişte cercuri de raze $R\sin\gamma$ şi $R\sin\gamma/[\cos(\psi_{max}/2)]$). Astfel se obţin locurile geometrice G_{A^*}, $G_{A^{**}}$ şi G_{O_1}.

Cînd γ variază punctul C descrie un loc geometric G_c (fig. 4), care este un cerc ce trece prin O_2, B^* şi B^{**}.

Pentru $\gamma = 0$ punctul C se confundă cu O_2, deci biela şi patina sînt în prelungire în tot timpul rotaţiei manivelei.

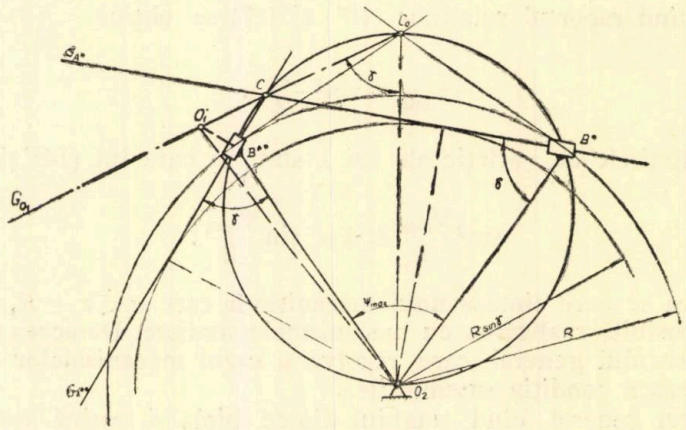


Fig. 4

Dacă punctul C se găseşte pe cercul G_c în afara zonei C_0B^{**}, atunci distanţa axială (batiul) a se poate micşora foarte mult (teoretic pînă la zero). Acest avantaj se obţine însă în detrimentul unghiului γ, care în aceste cazuri este mai mic ($\gamma < 90° - \psi_{max}/2$).

Şi în cazul general (cînd $\gamma \neq \pi/2$) pentru ca a să fie real, din (21) rezultă că este necesar ca

$$\lambda \leqslant \sin\frac{\psi_{max}}{2}. \tag{22}$$

Centrul de rotaţie al manivelei nu se poate lua pe G_{O_1} în intervalul $\overline{O_1'C}$ (fig. 4) deoarece mărimea unghiului de oscilaţie ψ_{max} se schimbă şi de asemenea se schimbă şi poziţiile limită ale patinei oscilante (poziţii impuse prin temă). Deci distanţa axială minimă se poate calcula din $\Delta O_2O_1'B^{**}$, anume

$$a_{min} = \sqrt{r_{min}^2 + R^2 + 2r_{min}R\sin\gamma}. \tag{23}$$

Această distanţă se poate determina şi din $\Delta O_2 O_1' C$:

$$a_{min} = \sqrt{\left[\frac{r_{min}}{\sin(\psi_{max}/2)}\right]^2 + \left[\frac{R\sin\gamma}{\cos(\psi_{max}/2)}\right]^2}. \tag{23'}$$

Egalînd relaţiile (23) şi (23') se poate determina valoarea lungimii minime a manivelei:

$$r_{min} = \frac{R\sin\gamma \pm \sqrt{R^2\sin^2\gamma - R^2\operatorname{tg}^2(\psi_{max}/2)\left[\sin^2\gamma/\cos^2(\psi_{max}/2) - 1\right]}}{\operatorname{ctg}^2(\psi_{max}/2)},$$

sau

$$r_{min} = R\cos\left(\gamma \mp \frac{\psi_{max}}{2}\right)\frac{\sin(\psi_{max}/2)}{\cos^2(\psi_{max}/2)}. \tag{24}$$

Introducînd (24) în (23') se determină distanţa a_{min} dintre axe (batiul):

$$a_{min} = \frac{R}{\cos^2(\psi_{max}/2)}\sqrt{\cos^2\left(\gamma \mp \frac{\psi_{max}}{2}\right) + \sin^2\gamma\cos^2\frac{\psi_{max}}{2}}. \tag{25}$$

Cu ajutorul expresiilor (24) şi (25) se poate determina valoarea minimă a raportului λ şi anume:

$$\lambda_{min} = \frac{\sin(\psi_{max}/2)\cos(\gamma \mp \psi_{max}/2)}{\sqrt{\cos^2(\gamma \mp \psi_{max}/2) + \sin^2\gamma\cos^2(\psi_{max}/2)}}. \tag{26}$$

În baza relaţiilor (22) şi (26), limitele de variaţie ale lui λ rezultă a fi

$$\lambda_{min} \leqslant \lambda \leqslant \sin\frac{\psi_{max}}{2}. \tag{27}$$

Dacă practic se cere să se proiecteze un mecanism al cărui batiu să fie mai mic decît suma lungimilor manivelei şi patinei oscilante, condiţia ce trebuie îndeplinită este

$$r + R = ma, \tag{28}$$

unde m este un coeficient supraunitar.

Evident cînd $\gamma = \pi/2$ problema nu se poate rezolva. De aceea se recurge în asemenea situaţii la sinteza mecanismelor cu $\gamma \neq \pi/2$.

Valoarea maximă a unghiului γ dintre bielă şi patina oscilantă, cu care se poate construi mecanismul care satisface condiţia (28), se determină în modul următor. Se înlocuiesc în (28) r şi a cu expresiile (24) şi (25) şi se obţine ecuaţia

$$\left[\cos\left(\gamma \mp \frac{\psi_{max}}{2}\right)\sin\frac{\psi_{max}}{2} + \cos^2\frac{\psi_{max}}{2}\right]^2 = \tag{29}$$

$$= m^2\left[\cos^2\left(\gamma \mp \frac{\psi_{max}}{2}\right) + \sin^2\gamma\cos^2\frac{\psi_{max}}{2}\right].$$

În ecuaţia (29) m şi ψ_{max} sînt cunoscute, deci se poate determina ψ_{max}. Pentru ca să fie satisfăcută condiţia (28) este necesar ca

$$\gamma \leqslant \gamma_{max}. \tag{30}$$

Dar, practic, γ nu poate coborî sub anumite limite. Impunînd limita minimă a lui γ rezultă o limitare a coeficientului m. Din (29) se obţine

$$m \leqslant \frac{\cos(\gamma_{min} \mp \psi_{max}/2)\sin(\psi_{max}/2) + \cos^2(\psi_{max}/2)}{\sqrt{\cos^2(\gamma_{min} \mp \psi_{max}/2) + \sin^2\gamma_{min}\cos^2(\psi_{max}/2)}}. \tag{31}$$

Cînd în relaţia (31) intervine semnul de egalitate, atunci $M = m_{max}$. Deci limitele de variaţie ale lui m sînt

$$m_{max} \geqslant m \geqslant 1. \tag{32}$$

Primit la 23 VIII 1965 *Institutul politehnic, Cluj*

BIBLIOGRAFIE

1. Alt H., ZAMM, 1925, S. 337—346.
2. Колчин Н. И., *Механика машин*. Т. 1, Машгиз, М., 1962.

SYNTHÈSE DES MÉCANISMES QUADRILATÈRES À PATIN OSCILLANT

(Résumé)

On présente le problème de synthèse des mécanismes quadrilatères à patin oscillant tout en utilisant la méthode des lieux géométriques. Après avoir trouvé une famille de mécanismes qui admet le même coefficient de variation de la vitesse, on peut y choisir, grâce à l'introduction de certaines conditions supplémentaires, un mécanisme qui correspond, dans le meilleurs des modes, au cas concret considéré.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

УДК 533.72

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЕЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА

Н. Н. КОЧИНА и Н. С. МЕЛЬНИКОВА

1. *Введение*

Будем рассматривать одномерные неустановившиеся движения газа, предполагая, что он совершенный, не вязкий и не теплопроводный. В этом случае уравнения движения, неразрывности и энергии можно взять в виде:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r}=0,\quad \frac{\partial \varrho}{\partial t}+\frac{\partial(\varrho v)}{\partial r}+(\nu-1)\frac{\varrho v}{r}=0,\tag{1.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{p}{\varrho^{\gamma}}+v\frac{\partial}{\partial r}\frac{p}{\varrho^{\gamma}}=0,$$

где: t — время, r — эйлерова координата, v — скорость, p — давление ϱ — плотность газа, γ — показатель адиабаты, ν — параметр, характеризующий симметрию движения, ($\nu=1, 2, 3$, соответственно для плоской, цилиндрической и сферической симметрии).

Уравнения (1.1) не содержат размерных констант; если в дополнительные условия задачи входит не более двух размерных параметров a и b с независимыми размерностями, то движение будет автомодельно [1]. В этом случае для искомых величин v, ϱ, p всегда можно написать формулы

$$v=\frac{r}{t}V(\bar{\lambda}),\quad \varrho=\frac{a}{r^{k+3}t^{s}}R(\bar{\lambda}),\quad p=\frac{a}{r^{k+1}t^{s+2}}\bar{P}(\lambda),\quad \bar{\lambda}=\frac{b}{r^{q}t^{n}},\tag{1.2}$$

где $[a]=ML^{k}T^{s}$, $[b]=L^{q}T^{n}$. Если $q\neq 0$, то формулы (1.2) всегда можно привести к виду ($[\bar{a}]=ML^{\omega-3}$, $[\bar{b}]=LT^{-\delta}$):

$$v = \frac{r}{t} V(\lambda),\quad \varrho = \frac{\overline{a}}{r^{\omega}} R(\lambda),\quad p = \frac{\overline{a}}{r^{\omega}} \frac{r^2}{t^2} P(\lambda),\quad \lambda = \frac{\overline{b} t^{\delta}}{r}, \tag{1.3}$$

так что автомодельное движение, кроме параметров ν и γ, определяется еще только двумя параметрами δ и ω или δ и $\varkappa$, где

$$\varkappa = \frac{2 + \delta(\omega - 2)}{\gamma}. \tag{1.4}$$

Формулы (1.3) могут описывать решение некоторой автомодельной задачи в среде с переменной плотностью, зависящей от координаты по степенному закону:

$$\varrho_0 = \frac{\overline{a}}{r^{\omega}} R_1. \tag{1.5}$$

В дальнейшем мы займемся только случаем постоянной начальной плотности ($\omega = 0$). Обозначая $\delta = m + 1$, получим

$$\varkappa = -\frac{2m}{\gamma}.$$

Уравнения (1.1) с использованием формул (1.3) при $\delta = m + 1$ и $\omega = 0$, приведутся к виду [1], [2]

$$\frac{dR}{dV} = \frac{R}{V - m - 1} \left\{ \frac{[(V - m - 1)^2 - Z]\nu V}{V(V-1)(V - m - 1) - (2m/\gamma + \nu V) Z} - 1 \right\}, \tag{1.6}$$

$$\frac{dz}{dV} = -\frac{Z[2(V-1) + \nu(\gamma - 1)V](V - m - 1)^2}{(V - m - 1)[V(V-1)(V - m - 1) - (2m/\gamma + \nu V) Z]} - \frac{Z\{(\gamma - 1)V(V-1)(V - m - 1) + 2Z(V - m - 1 + m/\gamma)\}}{(V - m - 1)[V(V-1)(V - m - 1) - (2m/\gamma + \nu V) Z]}, \tag{1.7}$$

$$\frac{d\lambda}{dV} = \lambda \frac{(V - m - 1)^2 - Z}{V(V-1)(V - m - 1) - (2m/\gamma + \nu V) Z}, \tag{1.8}$$

где $Z = \gamma P/R$.

Следовательно, рассматриваемые задачи об автомодельном движенни газа сводятся к интегрированию уравнения (1.7), после чего R и λ находятся квадратурами из уравнений (1.6) и (1.8). Чтобы осуществить интегрирование уравнения (1.7), нужно предварительно провести качественное исследование полей интегральных кривых уравнения (1.7) в плоскости Z, V и найти из уравнения (1.8) направление возрастания параметра λ вдоль интегральных кривых в представляющей физический интерес области $Z \geqslant 0$. Параметр λ достигает экстремального значения в точках параболы

$$Z = (V - m - 1)^2. \tag{1.9}$$

2. *Классификация полей интегральных кривых*

Поле интегральных кривых уравнения (1.7) и характер изменения λ вдоль них в рассматриваемом случае определяется тремя параметрами: m, γ и ν.

Уравнение (1.7) в области $Z \geqslant 0$ может иметь следующие особые точки: $O(V=0,\ Z=0)$, $C(V=m+1,\ Z=0)$, $D(V=m+1,\ Z=\infty)$, $E(V=-2m/\nu\gamma, Z=\infty)$, $G(V=1,\ Z=0)$, $A(V=\infty, Z=\infty)$, $F_i(V_i,\ Z_i)$, $(i=1,\ 2,\ 3)$. Выпишем в окрестности этих точек соответствующие асимптотические формулы; при классификации особенностей будем считать $\gamma > 1$ и $m > -1$.

Точка $O(V=0,\ Z=0)$ — узел

$$V + \frac{2m}{(m+1)\gamma} Z = CZ^{1/2},\quad \lambda = C_1 Z^{\frac{m+1}{2}} \tag{2.1}$$

(через C и C_1 будем обозначать постоянные интегрирования).

2° Точка $C(V=m+1,\ Z=0)$ — сложная особая точка

$$(V-m-1)^{2m} = CZ^{\nu(m+1)}\,[\nu Z - m\gamma (V-m-1)^{2m+\nu(\gamma-1)(m+1)}, \tag{2.2}$$

$$\lambda = \text{const}.$$

Из формулы (2.2) следует, что при $m>0$, $m''' < m < m''$, $-1 < m < m'''$, в точке C имеем седло-узел, при $m'' < m < 0$ — два седла; при этом введены обозначения: $m'' = -\dfrac{\nu(\gamma-1)}{2+\nu(\gamma-1)}$, $m''' = -\dfrac{\nu\gamma}{2+\nu\gamma}$.

3° Точка $D(V=m+1,\ Z=\infty)$,

$$Z = (m+1-V)^{\frac{2}{2+\nu\gamma}\left(\frac{m}{m'''-m}\right)},\quad \lambda = \text{const}. \tag{2.3}$$

Из (2.3) ясно, что в точке D при $m<0$ и при $m<m'''$ — седло; при $m''' < m < 0$ — узел. При $m = m'''$ в точке D имеем сложную особую точку седло-узел.

4. Точка $E(V=-2m/\nu\gamma,\ Z=\infty)$

$$\left(V + \frac{2m}{\nu\gamma}\right) = CZ^{A} + BZ^{-1},\quad A = \frac{\nu(2+\nu\gamma)}{2[2+\nu(\gamma-1)]}\,\frac{m-m'''}{m-m_5}, \tag{2.4}$$

$$m_5 = -\frac{\nu\gamma}{2+\nu(\gamma-1)}\qquad B = -\frac{2m(2m+\nu\gamma)\,[2m+\nu\gamma(m+1)]^2}{\nu^3\gamma^3\{(2+\nu)\nu\gamma + [4+\nu(2+\nu)\gamma]\,m\}}. \tag{2.5}$$

Из (2.5) следует, что в точке E при $m_5 < m < m'''$ — узел; при $m > m'''$ и при $m < m_5$ — седло. Оказывается, что при $\nu = 2$ и $\nu = 3$ $m_5 \leqslant -1$.

Следует отметить, что при $m = m'''$ особая точка E, совпадая с особой точкой D, образует сложную особенность седло-узел; при $m = m_5$ в точке E образуется также сложная особая точка седло-узел.

5° Точка $G(V=1,\ Z=0)$,

$$V-1=CZ^{\frac{1}{\nu(\gamma-1)}}+\frac{2m+\nu\gamma}{m\gamma[(\gamma-1)\nu-1]}Z,\quad \lambda=C_1Z^{-\frac{m}{\nu(\gamma-1)}}. \tag{2.6}$$

Из формулы (2.6) ясно, что при $m>0$ параметр λ стремится в точке G к бесконечности, при $m<0$ — к нулю.

6° Точка A $(V=\infty,\ Z=\infty)$ — сложная особая точка.

7° Характерными линиями для исследования интегральных кривых является кривая (при $Z\not\equiv 0$ и $V\not\equiv m+1$), вдоль которой $\mathrm{d}Z/\mathrm{d}V=0$:

$$Z=\frac{\{[2(V-1)+\nu(\gamma-1)V](V-m-1)-(\gamma-1)V(V-1)\}(V-m-1)}{2(V-m-1+m/\gamma)}=f(V) \tag{2.7}$$

и кривая, вдоль которой $\mathrm{d}Z/\mathrm{d}V=\infty$:

$$Z=\frac{V(V-1)(V-m-1)}{2m/\gamma+\nu V}=f_2(V). \tag{2.8}$$

Точки пересечения F_i кривых $Z=f_1(V)$ и $Z=f_2(V)$ являются особыми. Координаты V_i этих точек определяются из уравнений [6]:

$$\begin{cases}(\nu-1)V^2+\left[1+\dfrac{2m}{\gamma}-(m+1)\nu\right]V-\dfrac{2m(m+1)}{\gamma}=0,\\ 2-[2+\nu(\gamma-1)]V=0.\end{cases} \tag{2.9}$$

Из линейного уравнения (2.9) имеем:

$$V_1=\frac{2}{2+\nu(\gamma-1)}. \tag{2.10}$$

Решая квадратное уравнение (2.9), получим координаты двух других точек:

$$V_{2,3}=\frac{[\nu(m+1)-1]\gamma-2m\pm\sqrt{\{[\nu(m+1)-1]\gamma-2m\}^2+8m(m+1)\gamma(\nu-1)}}{2\gamma(\nu-1)}. \tag{2.11}$$

В случае плоской симметрии ($\nu=1$) первое уравнение (2.9) вырождается в линейное, разрешая его, имеем:

$$V_2=\frac{2(m+1)}{2-\gamma}. \tag{2.12}$$

Следовательно при $\nu=2,3$, в случае, если корни уравнения (2.9) действительны, имеем три особых точки F_i, $(i=1,2,3)$, соответствующие им значения V_i определяются уравнениями (2.10) и (2.11). Если корни уравнения (2.9) комплексно сопряженные, то в случае $\nu=2,3$ имеем только одну точку F_1, причем соответствующее значение V_1 определя-

ется формулой (2.10). При $\nu = 1$ имеем две особые точки $F_i, (i = 1, 2)$, при этом значения V_1 и V_2 определяются уравнениями (2.10) и (2.12) [4]. Соответствующие значения Z_i определяются по формулам (2.7) или (2.8).

Отметим, что точки F_2 и F_3 лежат на звуковой параболе (1.9), точка F_1 вообще не лежит на ней.

В окрестности точек $F_i(V_i, Z_i)$ уравнение (1.7) можно представить в виде:

$$\frac{dZ}{dV} = \frac{a(Z - Z_i) + b(V - V_i)}{c(Z - Z_i) + d(V - V_i)}, \tag{2.13}$$

где

$$\begin{cases} a = -2(V_i - m - 1 + m/\gamma) Z_i, \\ b = Z_i\{[2 + \nu(\gamma - 1)](V_i - m - 1)^2 + \\ \quad + [2(2 + \nu(\gamma - 1)) V_i - 4](V_i - m - 1) - \\ \quad - (\gamma - 1)[V_i(2V_i - m - 2) + (V_i - 1)(V_i - m - 1)] - 2Z_i\}, \\ c = -(2m/\gamma + \nu V_i)(V_i - m - 1), \\ d = [V_i(2V_i - m - 2) + (V_i - 1)(V_i - m - 1) - \nu Z_i](V_i - m - 1). \end{cases} \tag{2.14}$$

Интегральные кривые вблизи точек F_i имеют вид:

$$[(Z - Z_i) - y_1(V - V_i)]^{\alpha} = C_1[(Z - Z_i) - y_2(V - V_i)]^{-\beta}, \tag{2.16}$$

где y_1 и y_2 корни квадратного уравнения

$$cy^2 + (d - a)y - b = 0, \tag{2.15}$$

а постоянные α и β определяются по формулам:

$$\alpha = -\frac{y_1 + d/c}{y_1 - y_2}, \qquad \beta = -\frac{y_2 + d/c}{y_2 - y_1}.$$

Из соотношения (2.15) ясно, что если α и β одинакового знака, то в точках $F_i(V_i, Z_i)$ — седло, если α и β разного знака, то в точка $F_i(V_i, Z_i)$ — узел, если корни уравнения (2.16) комплексные, то в точках $F_i(V_i, Z_i)$ — фокус. Отметим, что так как особые точки F_2 и F_3 лежат на параболе (1.9), значение параметра λ в этих точках постоянно ($\lambda = \text{const}$.). Если точка F_1 является седлом, значение λ в ней по одному направлению, входящему в точку O, равно безконечности, а по другому направлению — нулю. Если точка F_1 — узел, значение λ в ней равно безконечности.

Из уравнения (2.11) ясно, что точки F_2 и F_3 совпадают при $m = m_3$ или $m = m_4$, где

$$m_3 = \frac{-\gamma(\nu - 1)}{2 + \nu\gamma + \sqrt{8\gamma}}, \qquad m_4 = \frac{-\gamma(\nu - 1)}{2 + \nu\gamma - \sqrt{8\gamma}}. \tag{2.17}$$

При $m = m_1$ и $m = m_2$, где

$$m_{1,2} = \frac{-\nu(2\gamma-1) \pm \sqrt{\nu[\nu + 4\gamma(\gamma-1)]}}{2[2+\nu(\gamma-1)]}, \quad (m_2 > m_1), \tag{2.18}$$

один из корней V_2 или V_3 совпадает с V_1, при этих значениях m точка F_1 совпадает с одной из точек F_2 или F_3, лежащих всегда на параболе (1.9); при $m = m_5$ точка F_1 совпадает с особой точкой E.

В случае $\nu = 1$ при $m = m_1$ точка F_1 совпадает с особой точкой F_2, лежащей на параболе (1.9), при $m = m_5$ точка F_1 совпадает с особой точкой E, при этом

$$m_5 = -\frac{\gamma}{\gamma+1}, \quad m_1 = \frac{1-2\gamma}{\gamma+1}.$$

Из асимптотики (2.15) следует, что если корни уравнения (2.16) комплексные, то в точках F_1 и F_2 имеем фокусы. При $\nu = 1$ условие, когда F_1 и F_2 являются фокусами, можно получить в явном виде. Для этого подставим в формулы асимптотических коэффициентов (2.14) координаты точек F_i из соотношений (2.8), (2.10), (2.12). Тогда для точки $F_1(V_1, Z_1)$ получим следующее выражение дискриминанта квадратного уравнения (2.16) через m и γ:

$$\Delta(\gamma, m) = (d-a)^2 + 4bc = \frac{[(1-\gamma) - m(\gamma+1)]^2}{(\gamma+1)^6[\gamma + m(\gamma+1)]^2}\Delta_1(\gamma, m),$$

где

$$\Delta_1(\gamma, m) = Km^4 + Lm^3 + Mm^2 + Nm + S, \quad K = (1+\gamma)^4(3\gamma-1)^2,$$
$$L = 2(\gamma+1)^3(15\gamma^3 - 9\gamma^2 - \gamma - 1),$$
$$M = (1+\gamma)^2(37\gamma^4 - 20\gamma^3 - 18\gamma^2 + 4\gamma + 1),$$
$$N = 4\gamma(\gamma^2-1)(5\gamma^3 + 3\gamma^2 - 3\gamma - 1), \quad S = 4\gamma^2(1-\gamma^2)^2.$$

Для второй особой точки $F_2(V_2, Z_2)$ дискриминант имеет вид:

$$\Delta(\gamma, m) = \frac{\gamma^2(m+1)^2}{(2-\gamma)^6}\Delta_2(\gamma, m),$$

где

$$\Delta_2(\gamma, m) = K_1 m^2 + L_1 m + M_1, \quad K_1 = \gamma(\gamma^3 - 12\gamma^2 + 36\gamma - 32),$$
$$L_1 = -4\gamma(\gamma^3 - 6\gamma^2 + 12\gamma - 8), \quad M_1 = 4\gamma^2(\gamma-2)^2.$$

Из уравнения (2.16) и формул для дискриминанта этого уравнения ясно, что в точках F_i имеем фокусы, если для выбранных γ и m $\Delta_i(\gamma, m) < 0$; если $\Delta_i \geqslant 0$, то в точках F_i либо узел, либо седло в зависимости от знаков α и β в асимптотике (2.15).

Рассмотрим расположение точек F_i на плоскости (Z, V) и произведем классификацию полей интегральных кривых.

Рассмотрим сначала случай плоской симметрии ($\nu = 1$).

Точка $F_1(V_1, Z_1)$ лежит в полуплоскости $Z \leqslant 0$ при $m_5 < m \leqslant m''$, а при $m > m''$ и $m < m_5$ в полуплоскости $Z > 0$. Точка $F_2(V_2, Z_2)$ лежит всегда в полуплоскости $Z \geqslant 0$, причем при $\gamma > 2$, $V_2 < 0$, а при $\gamma < 2$, $V_2 > 0$ для рассматриваемых m, $(m > -1)$, и $V_1 > V_2$ для $m < m_1$, $V_1 < V_2$ при $m > m_1$.

В зависимости от соотношений между параметрами m'', m''', m_5, m_1, можно провести классификацию полей интегральных кривых следующим образом. Следует выделить для практически важных γ следующие два диапазона:

$$1^\circ\ 1 < \gamma < 2,\quad 2^\circ\ \gamma > 2,$$

причем для каждого из диапазонов γ можно выделить характерные интервалы изменения m, внутри которых картина поля интегральных кривых качественно не меняется. Так, для 1-го диапазона $(1 < \gamma < 2)$ получается 6 случаев, для 2-го диапазона $(\gamma > 2)$, учитывая, что $m_1 < -1$, получаем 5 случаев (таблица 1).

Таблица 1

1-ый диапазон		2-ой диапазон	
I	$0 < m < \infty$	I	$0 < m < \infty$
II	$m'' < m < 0$	II	$m'' < m < 0$
III	$m''' < m < m''$	III	$m''' < m < m''$
IV	$m_5 < m < m'''$	IV	$m_5 < m < m'''$
V	$m_1 < m < m_5$	V	$-1 < m < m_5$
VI	$-1 < m < m_1$		

Для случая цилиндрической и сферической симметрии классификация интегральных кривых в зависимости от соотношений между параметрами m_1, m_3, m_4, m'' и m''' проводится следующим образом. Выделяется четыре диапазона изменений γ:

$$1^\circ\ 1 < \gamma < \gamma_1,\quad 2^\circ\ \gamma_1 < \gamma < \gamma_2,\quad 3^\circ\ \gamma_2 < \gamma < \gamma_3,\quad 4^\circ\ \gamma_3 < \gamma < \infty,$$

(здесь $\gamma_1 = 1{,}1896$; $1{,}2612$; $\gamma_2 = 5{,}8286$; $6{,}5993$; $\gamma_3 = 6{,}2750$; $7{,}0770$ соответственно для $\nu = 2$ и $\nu = 3$); для каждого диапазона выделяется 7 интервалов изменения значений m. Для всех m внутри каждого из этих интервалов качественная картина поля интегральных кривых одна и та же. Таким образом, получаем таблицу 2.

Дадим краткую классификацию особых точек для выделенных диапазонов в случае плоской симметрии $(\nu = 1)$.

Таблица 2

	1-й диапазон	2-й диапазон	3-й диапазон	4-й диапазон
I	$0 < m < \infty$	$0 < m < \infty$	$0 < m < \infty$	$0 < m < \infty$
II	$m_1 < m < 0$	$m_1 < m < 0$	$m' < m < 0$	$m_1 < m < 0$
III	$m'' < m < m_1$	$m_3 < m < m_1$	$m_3 < m < m_1$	$m_3 < m < m_1$
IV	$m_3 < m < m''$	$m'' < m < m_3$	$m'' < m < m_3$	$m_4 < m < m_3$
V	$m''' < m < m_3$	$m''' < m < m''$	$m_4 < m < m''$	$m'' < m < m_4$
VI	$m_4 < m < m'''$	$m_4 < m < m'''$	$m''' < m < m_4$	$m''' < m < m''$
VII	$-1 < m < m_4$	$-1 < m < m_4$	$-1 < m < m'''$	$-1 < m < m'''$

В случаях I...IV для обоих диапазонов изменения γ особые точки имеют одинаковые особенности. В случае I имеем следующие особенности: точки O, G, A — узлы, F_2 — узел (или фокус), E, D, F_1 — седла, C — сложная особенность седло-узел. В случае II O, G, D, A, F_1 — узлы, E, F_2 — седла, C — сложная особенность — 2 седла. В случае III O, G, D, A — узлы, E, F_1, F_2 — седла, C — сложная особенность седло-узел. В случае IV O, G, E, A — узлы, D, F_1, F_2 — седла, C — седло-узел. В случае V (для диапазона I) O, G, A — узлы, F_1 — узел (или фокус), E, D, F_2 — седла, C — сложная особенность седло-узел. В случае V (для диапазона 2) O, G, A — узлы, E, D, F_2 — седла, F_1 — узел (или фокус), C — сложная особенность седло-узел. В случае VI (для диапазона I) точки O, G, A — узлы, E, D, F_1 — седла, C — сложная особенность седло-узел, F_2 — фокус (или узел).

Рассмотрим теперь случай цилиндрической ($\nu = 2$) и сферической симметрии ($\nu = 3$). Опишем поля интегральных кривых для различных случаев, входящих в таблицу 2.

В случае I точки O и G — узлы, E, F_1 и D — седла, F_2 и F_3 — фокусы (или узлы), C — седло-узел. В случае II точки O, G, D — узлы, F_2, F_3 — узлы (или фокусы), E и F_1 — седла, C — два седла. В случае III точки O, G, D — узлы, F_1 и F_2 — узлы (или фокусы), E и F_3 — седла, в точке C — два седла. В случае IV для первого диапазона значений γ точки O, G, D, F_2 — узлы, E и F_3 — седла, C — седло-узел. В случае IV для диапазонов 2...4 точки O, G, D — узлы, E — седло, C — два седла, F_1 — узел или фокус. В случае V для первых трех диапазонов точки O, G, D — узлы, E — седло, C — седло-узел, для четвертого диапазона O, G, D — узел, F_3 и E — седла, F_2 — фокус или узел, F_1 — узел или фокус, C — два седла. В случае VI для диапазонов 1 и 2 точки O, G, E — узлы, D — седло, C — седло-узел

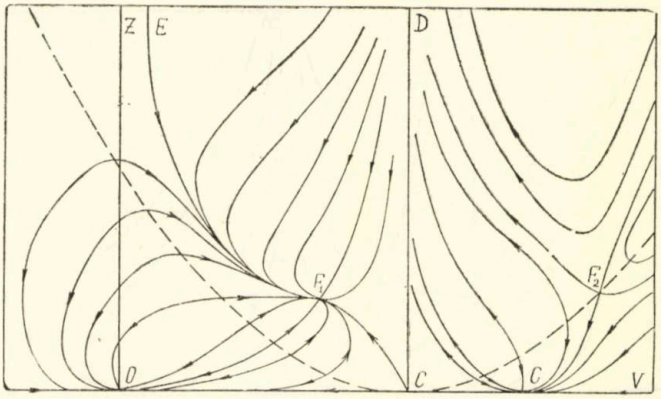


Рис. 1

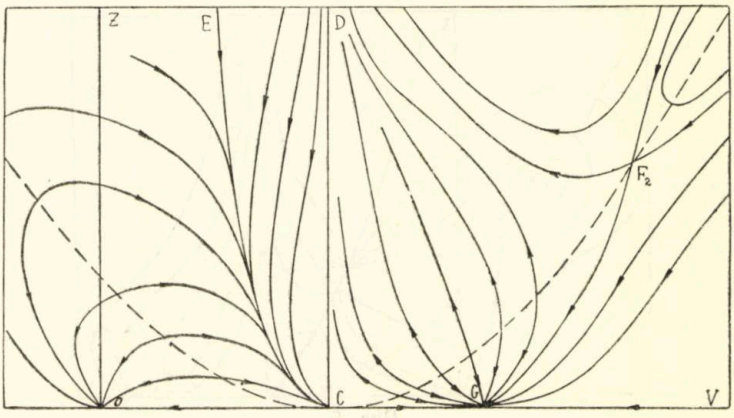


Рис. 2

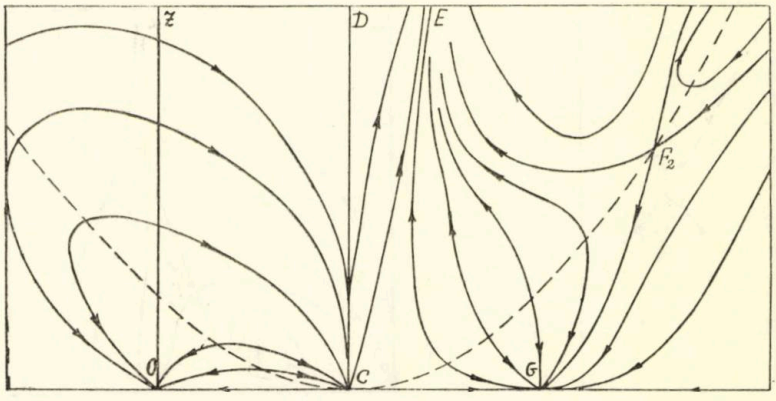


Рис. 3

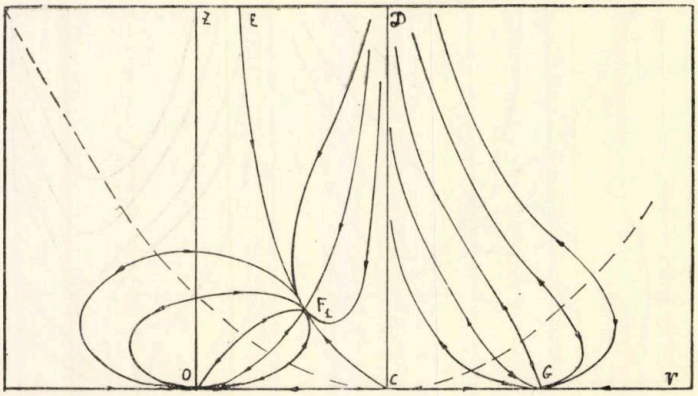


Рис. 4

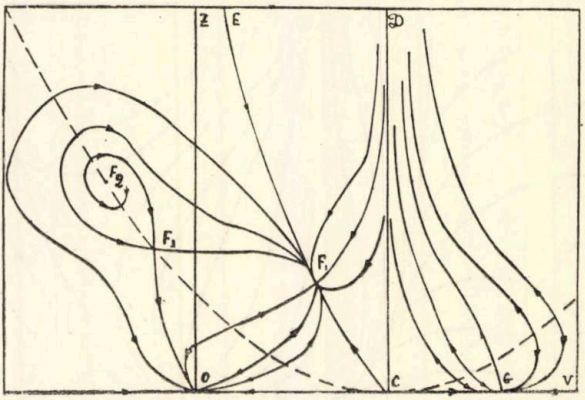
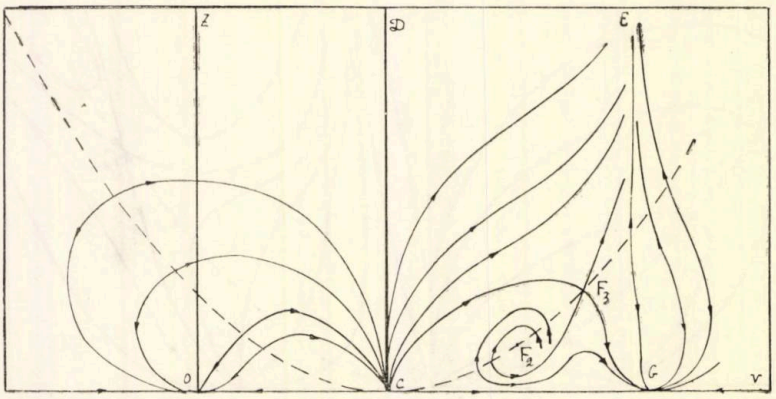


Рис. 5



Ри с. 6

и для диапазонов 3 и 4 точки O, G, D — узлы, E, F_3 — седла, F_2 — фокус или узел, C — седло-узел. В слулае VII точки O, G, E — узлы, F_3, D — седла, F_2 — фокус или узел, C — седло-узел, причем при $\gamma > 2$ точки F_2 и F_3 находятся в области $V > m + 1$, при $\gamma > 2$ в области $V < 0$.

Для примера на рис. 1...6 даны некоторые поля интегральных кривых, качественное исследование которых проведено выше [1]). На рис. 1...3 даны поля интегральных кривых для плоской симметрии. Рис. 1...3 относятся соответственно к случаям II(I), III(I), IV(I), таблицы 1. На рис. 4...6 даны поля интегральных кривых для случая цилиндрической и сферической симметрии. Рис. 4...6 относятся соответственно к случаям IV(2, 3, 4), V(4), VII, таблицы 2.

Случаи I(1, 2, 3, 4), II(1, 2, 3, 4), III(1, 2, 3, 4), IV(I), разобраны в статье [7] и соответствующие поля интегральных кривых построены на рис. 1...4 этой статьи соответственно. При этом арабская цифра характеризует номер диапазона значений γ, римская цифра — интервал значений m. Рис. 6 отвечает седьмому случаю при $\gamma < 2$. Отметим, что на рис. 4...6 ход интегральных кривых в окрестности точки G соответствует случаю $\gamma > 1 + 1/\nu$. Стрелки на интегральных кривых указывают направление возрастания параметра λ, пунктиром нанесена парабола (1.9).

В статье [5] проведено качественное исследование уравнения (1.7) в области $0 \leqslant V < m + 1$, $Z \geqslant 0$, для различных m, ν, причем все картины полей разбиты на 4 случая.

Как видно из данного в настоящей работе качественного анализа уравнения (1.7) в полуплоскости $Z \geqslant 0$, проведенного с подробным исследованием особых точек F_i, в случае $\nu = 2$, 3 целесообразно разбить значения γ на 4 диапазона, причем для каждого диапазона в зависимости от величины m, как функции от ν и γ, получается 7 различных случаев; в случае плоской симметрии имеется 2 диапазона значений γ; для одного из них получается 6, а для другого 5 различных случаев. При этом выяснено, что в диапазоне $0 \leqslant V < m + 1$, $Z \geqslant 0$, уравнение (1.7) для некоторых значений γ имеет особые точки, не отмеченные в статье [5], а именно: в третьем случае $m''' < m < m''$ статьи [5] при $\nu = 2$ или $\nu = 3$, если $m_3 < m < m''$, $1 < \gamma < 1{,}1896$ при $\nu = 2$ и $1 < \gamma < 1{,}2612$ при $\nu = 3$ (четвертый случай первого диапазона нашей таблицы 2), имеются 2 особые точки F_2 и F_3. В случае плоской симметрии при анализе уравнения (1.7) в области $0 \leqslant V \leqslant m + 1$, $Z \geqslant 0$, все выводы, сделанныи в статье [5] остаются в силе.

Пользуясь качественным исследованием полей интегральных кривых уравнения (1.7), можно построить решение различных краевых и начальных задач. Если рассматривать задачу о движении поршня по невозмущенному газу (с расходящейся и сходящейся ударной волной), то на основании вышеизложенного исследования полей в основном подтверждаются выводы, сделанные в статье [5]:

---

[1]) Поля интегральных кривых для случая плоской симметрии построены Н. С. Мельниковой, для цилиндрической и сферической — Н. Н. Кочиной.

1° Решение задачи о поршне с расходящейся ударной волной существует для всех ν и γ, если [4] $m > m'$, $(m' = -\nu/(2+\nu))$.

2° Решение задачи о поршне со сходящейся ударной волной существует, если $-1 < m < m''$.

3° Если $\gamma < 2$, при $-1 < m < m'$ существует решение задачи о поршне со сходящейся ударной волной.

4° Если $m'' < m < m'$, то при $\gamma > 2$ не существует решения задачи о поршне ни с расходящейся, ни со сходящейся ударноь волной.

5° При $m = m'$ не существует решения задачи о поршне ни с расходящейся, ни со сходящейся ударной волной, если $\nu = 1, 2$ или $\nu = 3$, $2 < \gamma < 7$.

В статье [4] дано доказательство существования и единственности решения задачи Коши и задачи о поршне при $m > m'$ для случая расходящихся волн. При этом предполагалось, что начальное распределение характеристик движения газа зависит от координаты r по степенному закону. В статье [7] на основании исследования полей интегральных кривых. проводимого в настоящей статье, для случая цилиндрической и сферической симметрии показано, как получить решение задачи Коши и задачи о поршне для различных диапазонов значений m и γ и доказано, что при движении поршня по невозмущенному газу возникновение двух ударных волн невозможно,

Поступила в 1 III 1964 г.

Математический институт им. В. А. Стеклов, АН СССР, Москва, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И., *Методы подобия и размерности в механике.* Гостехиздат, М., 1957.
2. — ПММ, 1945, **IX**, *4*.
3. Крашенинникова Н. Л., Изв. АН СССР, ОТН, 1955, *8*.
4. Григорян С. С., ПММ, 1958, **XXII**, *2*.
5. Кочина Н. Н., Мельникова Н. С., ПММ, 1958, **XXII** *4*.
6. Кочина Н. Н., ПММ, 1960 **XXIV**, *3*.
7. — *О некоторых задачах неустановившегося движения идеального газа в случае цилиндрической и сферической симметрии*, (в печати).

STUDIUL CÎMPURILOR DE CURBE INTEGRALE RELATIVE LA ECUAŢIILE CE SE REFERĂ LA MIŞCĂRILE AUTOMODELATE ALE GAZELOR

(Rezumat)

Autorii studiază mişcările tranzitorii ale gazelor în cazul undelor sferice, cilindrice şi plane. Studiul calitativ al ecuaţiilor de mişcare a fost întreprins pentru o clasă de mişcări automodelate. În această ordine de idei s-a studiat caracterul punctelor singulare şi s-a dat o clasificare completă a cîmpurilor de curbe integrale. Rezultatele studiului calitativ au fost aplicate apoi la problema dilatării unui piston, punîndu-se totodată în evidenţă domeniul de existenţă al soluţiei problemei pentru diferite valori ale parametrilor. În fig. 1...6 s-au indicat comportările calitative ale curbelor integrale în semiplanul $Z \geqslant 0$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

УДК 621.67

ФАКТОР ВЗВЕШИВАНИЯ В ДВУХФАЗНОМ ПОТОКЕ

А. К. ДЮНИН

Многие практические задачи связаны с движением двухфазных потоков, например задачи пневмо- и гидротранспорта, регулирования русел, борьбы с песчаными и „черными" бурями, метелями и т. д. Решение этих задач должно основываться на количественной теории двухфазного потока, которую сейчас еще нельзя считать вполне упорядоченной.

В предлагаемой статье рассматривается главный вопрос этой теории — основная причина взвешивания твердых примесей.

Дифференциальное уравнение переноса импульса в двухфазном потоке, осредненное по пространственно-временному цилиндру [1], имеет вид:

$$\frac{\partial (q_i + q_{si})}{\partial t} + \frac{\partial (q_k v_i + q_{sk} v_{si})}{\partial x_k} = \tag{1}$$

$$= \gamma X_i + \gamma_s X_{si} - g \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\Pi_{ki} + \frac{\widehat{q'_k v'_i} + \widehat{q'_{sk} v'_{si}}}{g} \right), \quad (i, k = 1,2,3),$$

где t, x_k — соответственно время и пространственные координаты, q_i, q_k — компоненты весового расхода жидкой фазы, q_{si}, q_{sk} — компоненты весового расхода твердой фазы, v_i, v_{si} — компоненты скоростей жидких и твердых частиц, γ, γ_s — весовые концентрации жидкой и твердой фаз, X_i, X_{si} — составляющие сил, действующих на жидкие и твердые частицы, g — модуль ускорения силы тяжести, Π_{ki} — тензор молекулярных напряжений в двухфазной среде, $\widehat{q'_k v'_i}$, $\widehat{q'_{sk} v'_{si}}$ — моменты корреляции между пульсациями весовых расходов и скоростей соответственно жидкой и твердой фаз.

Имеем

$$\gamma = (1 - s)\varrho g, \quad \gamma_s = s\varrho_s g,$$

где s — объемная концентрация твердой фазы, ϱ, ϱ_s — массовые плотности соответственно жидкой и твердой фаз.

Поэтому:

$$\gamma = \varrho g - \frac{\varrho}{\varrho_s}\gamma_s. \tag{2}$$

Тензор

$$\tau_{ki} = \Pi_{ki} + \frac{\overbrace{q'_k v'_i} + \overbrace{q'_{sk} v'_{si}}}{g}$$

являющийся суммой тензоров молекулярных, турбулентных и квазиосмотических напряжений, назовем тензором обобщенных напряжений.

Рассмотрим плоский и установившийся поток в поле сил тяжести, направленный по оси x_1 и текущий вдоль горизонтальной плоскости $x_3 = 0$. Пользуясь эргодичностью установившегося процесса, выберем пространственную область осреднения в виде тонкого параллелепипеда, протяженность которого вдоль оси x_1 достаточно велика, чтобы зависимостью осредненных членов уравнения (1) от x_1 можно было пренебречь и чтобы соблюдалось условие $q_3 = q_{s3} = 0$.

Проектируя (1) на ось x_3, направленную по вертикали вверх, и воспользовавшись выражением (2), найдем для данного случая:

$$\gamma^s\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_s}\right) = -\varrho g - \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3}. \tag{3}$$

Интегрируя (3) по x_3 от $x_3 = 0$ до потолка взвешивания, получим:

$$j_s = -\frac{1}{1 - \varrho/\varrho_s}(\varrho g x_3 + \Delta\tau_{33}), \tag{4}$$

где j_s — нагрузка потока, т. е. вес взвешенных примесей, приходящийся на единицу площади подстилающей поверхности.

Таким образом, главным фактором взвешивания в горизонтальном установившемся потоке следует считать перепад обобщенных „квазистатических" давлений $\Delta\tau_{33}$.

Рассмотрим теперь вертикальный поток в поле сил тяжести, направленный по оси x_3 вверх и квазистационарный, т. е. в среднем не зависящий от времени t. В качестве пространственной области осреднения выберем тонкий цилиндр с достаточно большим основанием, параллельным плоскости $x_3 = 0$, таким, чтобы можно было положить $q_2 \cong q_{s2} \cong q_1 \cong q_{s1} \cong 0$.

При отсутствии межфазовых переходов уравнения баланса массы будут иметь вид [1]:

$$\frac{\partial q_3}{\partial x_3} = \frac{\partial q_{s3}}{\partial x_3} = 0. \tag{5}$$

Заметив, что

$$q_3 = \gamma v_3 + \widehat{\gamma' v_3'}, \quad q_{s3} = \gamma_s v_{s3} + \widehat{\gamma_s' v_{s3}'}, \tag{6}$$

найдем для данного случая после простых выкладок следующее выражение весовой концентрации примесей:

$$\gamma_s = -\frac{\dfrac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} + \varrho g\left(1 + \dfrac{\partial \dfrac{v_3^2}{2g}}{\partial x_3}\right) + \dfrac{\widehat{\gamma_s' v_{s3}'}}{g}\dfrac{\partial v_{s3}}{\partial x_3} - \dfrac{\varrho}{\varrho_s}\dfrac{\widehat{\gamma_s' v_3'}}{g}\dfrac{\partial v_3}{\partial x_3}}{1 - \dfrac{\varrho}{\varrho_s}\dfrac{\partial}{\partial x_3}\left(\dfrac{v_{s3}^2}{2g} - \dfrac{\varrho}{\varrho_s}\dfrac{v_3^2}{2g}\right)}. \tag{7}$$

Для наиболее распространенного течения в трубе с однородным сечением при $v_3 \cong \text{const.}$ и $v_{s3} \cong v_3 - w$, где w — гидравлический размер частиц примесей, градиент обобщенного „квазистатического" давления $\partial\tau_{33}/\partial x_3$ также оказывается главным фактором взвешивания.

Этот вывод, очевидный для потоков вертикальных, не совсем привычен для горизонтальных установившихся двухфазных потоков, требуя опытного подтверждения.

Оказывается, что заметный перепад $\Delta\tau_{33}$ в формуле (4) имеет место в непосредственной близости к подстилающей поверхности, где градиент $\partial v_1/\partial x_3$ наиболее велик и образуется интенсивный вихревой слой, размер которого l_b имеет порядок 2 мм.

Введем обозначение

$$\varrho g x_3 + \Delta\tau_{33} = -\alpha_s \Delta p_b, \tag{8}$$

где α_s—некоторый безразмерный коэффициент, Δp_b — перепад давлений в вихревом слое, который, как известно, имеет следующее аналитическое выражение:

$$\Delta p_b = \frac{\varrho}{2}\left(l_b \operatorname{grad}_{\text{ср}} v_1\right)^2, \tag{9}$$

где $\operatorname{grad}_{\text{ср}} v_1$ — градиент поступательной скорости потока, средний в вихревом слое толщиной l_b.

Используя профиль скоростей потока в пограничном слое, полученный в работе [2], найдем [1], что

$$\operatorname{grad}_{\text{ср}} v_1 = \frac{\xi_1}{l_b} \cdot \frac{\Delta v_h}{\sqrt{\log\left(h/\delta\right)}}, \tag{10}$$

где: ξ_1 — безразмерный коэффициент, который может быть теоретически вычислен, Δv_h — характерная для потока разность поступательных скоростей на уровне $x_3 = h$ над подстилающей поверхностью, δ — размер выступов шероховатости подстилающей поверхности.

Разность Δv_h определится из отношения между турбулентой вязкостью потока ν^T и его кинематической вязкостью ν, которое должно стремиться к нулю при очень малой или отсутствующей турбулентности.

Приняв по Л. Д. Ландау [3] $\nu^T \cong \Delta v_b . l_b$, найдем:

$$\frac{\nu^T}{\nu} \cong \frac{\Delta v_b . l_b}{\nu} = \mathcal{Re} - \mathcal{Re}_{\text{кр}},$$

где $\mathcal{Re}_{\text{кр}}$ — некоторое критическое число Рейнольдса, соответствующее переходному режиму и равное 200 для воздушных потоков с твердыми примесями [4], [5], Δv_b — разность скоростей на верхней границе вихревого слоя. Из (11) получим

$$v_{\text{кр}} = \frac{\nu}{l_b} \mathcal{Re}_{\text{кр}}, \tag{12}$$

$\nu = (1{,}2 \ldots 1{,}5) \cdot 10^{-6}$ м²/сек в естественном диапазоне температур. Отношение $v_{0{,}25}/v_b$ в чистом воздушном потоке над снежной и песчаной поверхностями приближенно равно 2. Отсюда на уровне $x_3 = h = 0{,}20$ имеем $v_{\text{кр}} \cong 2{,}4 \ldots 3{,}0$ м/сек. Нами принято $v_{\text{кр}} = 3$ м/сек. Интересно то, что при этой скорости гарантирован покой самых подвижных метелевых частиц и кварцевых пылинок, лежащих на любой подстилающей поверхности.

Заметим далее что,

$$Q_s = j_s v_{s\,\text{ср}}, \tag{13}$$

где Q_s — общий твердый расход примесей в горизонтальном потоке, $v_{s\,\text{ср}}$ — групповая скорость движения примесей.

Сопоставляя (8) ... (10) и (13), найдем критерий транспортирующей способности потока:

$$\varphi = \frac{\alpha_s \xi_1^2}{2} = \frac{Q_s (\varrho^{-1} - \varrho_s^{-1}) \log (h/\delta)}{(v_h - 3)^2 v_{s\,\text{ср}}}, \tag{14}$$

если $h = 0{,}2$ м.

Были проведены две группы опытов по изучению переноса снега и песка, насыпанных ровным слоем на дне горизонтального аэродинамического канала длиной 21 м и сечением $0{,}42 \times 0{,}50$ м² (при $h = 0{,}2$ м).

В первом случае $\varrho \cong 140$ г сек^2/м^4, $\delta = 0{,}0005$ м,

15) $$v_{s\,ср} \cong 0{,}5(v_h - 3) \quad \text{м/сек},$$

реднее значение $\varphi = 1{,}25 \cdot 10^{-2}$.

Во втором случае $\varrho \cong 125$ г сек/м^4, $\delta = 0{,}0003$ м,

16) $$v_{s\,ср} \cong 0{,}85\,(v_h - 5) \quad \text{м/сек},$$

реднее значение $\varphi = 1{,}27 \cdot 10^{-2}$.

Расчетные формулы Q_s имеют вид для снега

17) $$Q_s \cong 0{,}34\,(v_h - 3)^3 \quad \text{г/м сек},$$

ля песка

18) $$Q_s \cong 0{,}48\,(v_h - 3)^2\,(v_h - 5) \quad \text{г/м сек}.$$

В таблице 1 помещены опытные данные, сопоставленные с формулами (17) и (18).

Таблица 1

Перенос песка и снега в аэродинамическом канале

Материал: песок							
V_h при $h = 0{,}2$ м	8,1	8,4	9,7	10,3	11,0	13,2	15,5
Q_s по ф-ле (18)	39	48	101	136	185	410	790
Q_s по ф-ле (17)	45	54	103	133	175	361	670
Фактические значения $Q_{s\,max}$	45	50	100	120	190	384	730
Материал: снег							
V_h при $h = 0{,}2$ м	6,8	7,8	8,3	10,1	12,1	14,2	19,7
Q_s по ф-ле (17)	19	37	50	123	260	484	1 590
Фактические значения $Q_{s\,max}$	18	41	44	110	310	490	1 400

Как видно из таблицы 1, опытные данные неплохо соответствуют одной формуле (17), которая может быть использована в качестве расчетной для приближенного определения переноса как снега, так и песка в воздушном потоке. Р. А. Бэгнольдом [6, рис. 6] дана сле-

дующая формула для определения переноса песка по результата полевых измерений в пустынях Ливии

$$Q_s = 0{,}0346\left(\frac{v_{1,0}}{4} - 1\right)^3 \text{ т/м час},$$

где $v_{1,0}$ — скорость ветра, измеренная на высоте 1 м. По наши данным при $v_{1,0} < 12$ м/сек $v_{1,0} \cong 1{,}3\, v_{0,2}$, где $v_{0,2} = v_h$, если $h = 0{,}2$ После приведения к нашим размерностям:

$$Q_s = 0{,}34\,(v_{0,2} - 3{,}1)^3 \text{ г/м сек},$$

т. е. имеем почти полное совпадение с (17).

Отсюда можно сделать вывод, что, как и следует из (4), тран портирующая способность потока при $\varrho_s \gg \varrho$ мало зависит от физ ческих свойств данных транспортируемых материалов, несмотря на весьма существенное различие.

Представляют интерес непосредственные измерения перепада да лений $\Delta\tau_{33}$ в пограничном слое двухфазного потока. Эти измерен затруднительны, вследствие малой толщины вихревого слоя и отсутств достаточно точных и надежных для этой цели измерительных прибор

Измерение с помощью обычного статического крючка показа что в чистом потоке безразмерный перепад квазистатических давлен

$$\mu = \frac{2gp}{v_0^2},$$

где p — измеренный перепад давлений в метрах водяного столба, v_0 скорость потока на оси канала, равен в среднем $5 \cdot 10^{-5}$ [7].

Но в достоверности этих измерений можно сомневаться, так к не исключено искажающее влияние стенки на показания статическ крючка. В аэродинамическом канале измерялись также давления нижней и верхней поверхностях гладкой и тонкой пластинки с площ дью оснований 200 см², помещенной на малых расстояниях от стен причем выходы статических трубок заделывались заподлицо с повер ностями. Разности давлений определялись в чистом потоке и п метелевом снегопереносе.

В таблице 2 даны результаты этих опытов при высоких скорост потоков. При меньших скоростях измерения получались мало наде ными вследствие малости перепадов давления и недостаточной точно микроманометров.

По сравнению с измерениями статическим крючком значени получились несколько большие, что объясняется, повидимому, как точностью статического крючка, так и тем, что в первом случае давле измерялись над песком, а во втором — над гладкой металличес поверхностью дна канала.

Таблица 2

пределение перепада давлении в пограничном слое с помощью пластинки, поднятой над дном канала на 2 мм

Опытные данные	№ № опытов			
	1	*2*	*3*	*4*
Характеристика потока	Чистый		Метелевый	
Скорости на оси канала (м/сек)	12	17	16	17
Разность давлений между верхом и низом пластинки (мм вод. ст.)	—0,58	—1,24	—0,6	+0,34
$\mu \cdot 10^5$	—7,9	—8,4	—4,5	+2,3

При подъеме пластинки над дном канала свыше 3-х мм, перепад авлений исчезал. При насыщении потока примесями перепад давлений пограничном слое существенно уменьшался и даже менял знак. римеси гасят перепад давлений так, что при насыщении потока имесями его транспортирующая способность исчерпывается. Процесс шения перепада давлений в двухфазном потоке оказывается перио-ической функцией времени [8].

Для измерения пограничного перепада квазистатических давлений и любых скоростях потока использовались пластинки площадью 0 см^2 и толщиной до 1 мм, свободно укладываемые на дне канала. корость потока изменялась до момента, когда пластинка начинала рываться от дна и вес ее, отнесенный к площади, был, разумеется, вен давлению всасывания. Давления отнесены к слою толщиной 1 мм предположении, что в этом слое градиент давлений линейно зависит высоты. Результаты опытов сведены в таблице 3.

Данные таблиц 2 и 3 хорошо согласуются. При метелевом реносе освобожденные пластинки не сразу отрываются от дна. Это поздание связанно, по-видимому, с пульсациями концентрации при-сей, и момент подъема пластинок отвечает моменту наиболее глубокого осветления потока. Во взвесенесущем потоке пластинки как-бы рижимаются" к подстилающей поверхности, и для их отрыва требу-ся скорости потока значительно превосходящие скорости, соответ-вующие началу их взлета в чистом потоке.

Таким образом существование перепада „квазистатических" дав-ний в тонком пограничном слое и его тесная связь с динамикой реноса примесей, по-видимому, не вызывают сомнений. Неизбежно текающий отсюда вывод о примате градиента продольных скоростей еды в пограничном слое (по отношению к абсолютной скорости потока) кже удается подтвердить экспериментально.

Таблица 3

Определение перепада давлений в пограничном слое методом тарированных по весу пластинок

Опытные данные	№№ опытов				
	1	*2*	*3*	*4*	*5*
Материал пластинки	Пено-пласт	Пено-пласт	Картон	Картон	Фибро-лит
Ее вес (г)	1,61	1,36	4,83	10,29	8,39
Толщина (мм)	1,07	0,5	0,8	1,4	0,75
Эквивалентное весу пластинки давление (мм. вод. ст.)	0,16	0,14	0,48	1,03	0,84
Давление, приведенное к слою 1 мм	0,15	0,28	0,60	0,73	1,12
Характеристика потока:	Чистый				
Скорость на оси трубы, соответствующая началу взлета пластинки (м/сек)	6	7,8	11,5	13,0	14,7
$\mu . 10^5$	8,2	9,0	8,9	8,5	10,1
Характеристика потока:	Метелевый				
Интервал времени между моментами освобождения пластики и начала ее взлета (сек)	—	—	9	5	4
Скорости на оси трубы, соответствующая взлету пластинки (м/сек)	—	—	18,7	22,5	18,0
$\mu . 10^5$	—	—	3,4	2,8	6,8

Как известно, в любом аэродинамическом канале однородно сечения, или в трубе, существует начальный *разгонный* участок, котором годограф продольных осредненные скоростей потока постепен приобретает устойчивый, установившийся характер, зависящий шероховатости стенок. Пристеночный градиент осредненной скоро потока на разгонном участке всегда больше, чем в зоне установивш гося течения.

Можно, основываясь на вышеизложенном, предположить, что п одном и том же расходе несущей среды твердый расход примесей

разгонном участке заметно превысит норму Q_{max}, если переносимый потока зернистый материал настолько сыпуч, что предельная транспортирующая способность потока реализуется в границах разгонного участка.

На рис. 1 показано развитие профиля пристеночных продольных скоростей воздушного потока на начальном (разгонном) участке использовавшегося автором аэродинамического канала. Устойчивый годограф скоростей образуется здесь на расстоянии 6 ... 7 м от начала канала.

В неподвижной системе координат по оси ординат отложена высота x_3 от дна канала в м, по оси абсцисс—длине x_1 измеренна по оси канала в м. В подвижной системе координат по осям абсцисс отложены скорости v_1 в м/сек.

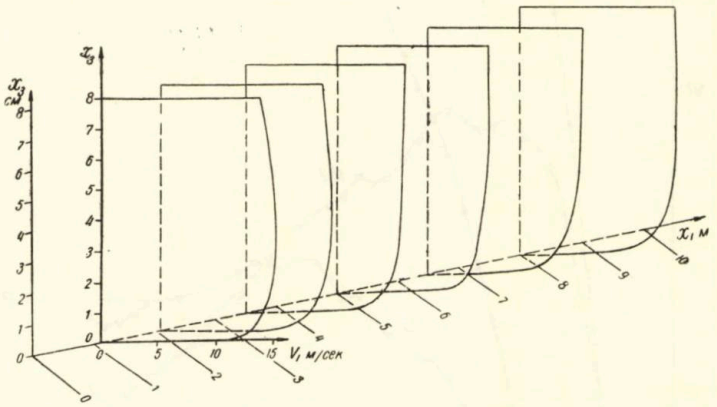


Рис. 1. — Развитие годографа осредненных продольных скоростей в пограничном слое начального участка экспериментального аэродинамического класса.

И. М. Чурбановым и В. А. Хохловым под руководством автора выполнены следующие опыты. Исследовалось развитие твердого расхода песка в аэродинамическом канале длиной 21 м и сечением $0{,}42 \times 0{,}50$ м² в двух случаях: *а* — при полностью покрытом песком дне канала на всем его протяжении и *б* — при оголенном от песка начальном участке канала длиной 3,5 м. Песок был мелкозернистым со средним размером зерен 0,3 мм, сухим, легкоподвижным.

На рис. 2 показаны измеренные значения Q [г/мсек] определенные непосредственным точным взвешиванием в тридцати девяти точках канала, отстоящих друг от друга на 0,5 м. По оси абсцисс отложены расстояния, измеряемые от начала x_1 в м. Против каждой кривой $Q = f(x_1)$ написана скорость потока в м/сек, определенная на высоте 0,2 м над подстилающей поверхностью. Прямые горизонтальные отрезки соответствуют вычисленным по формуле (17) значениям Q_{max}.

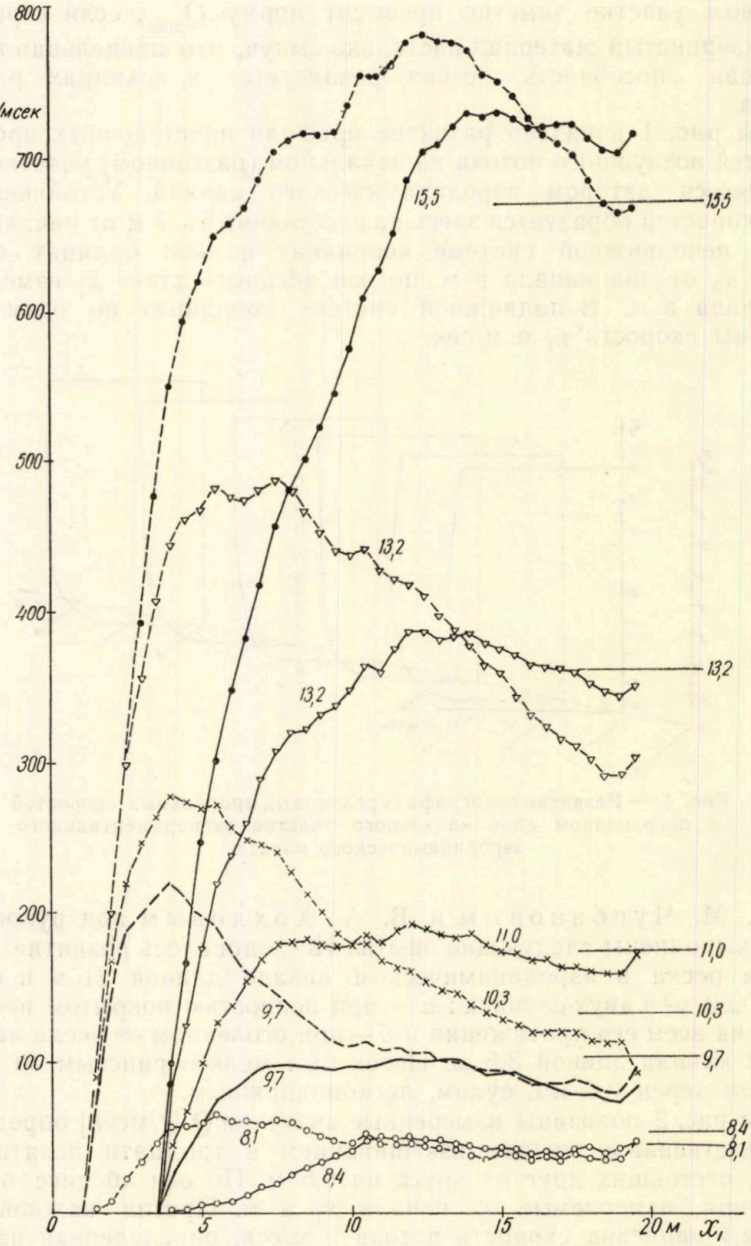


Рис. 2. — Развитие твердого расхода Q (в г/м сек) песковетрового потока в аэродинамическом канале длиной 21 м и сечением $0{,}42 \times 0{,}50$ м². (Опыты В. А Хохлова и И. М. Чурбанова).

Сплошные линии — песком покрыто дно канала в промежутке $3{,}5 \leqslant x_1 \leqslant 21$ м. Штрихоные линии — песком покрыто все дно канала ($1{,}0 \leqslant x_1 \leqslant 21$ м).

Горизонтальные линии — уровни $Q_{\max}$, вычисленных по формуле (17) для соответствующих скоростей $v_{0,2}$ (в м/сек).

На оси абсцисс отложена длина x_1 канала от переходника вентилятора до диффузора (в м).

Из рис. 2 видно, что в случае *а* твердый расход Q достигал, как правило, максимума $Q_{p\,\max}$ в пределах разгонного участка за исключением переноса песка при скорости $v_{0,2}=15{,}5$ м/сек причем $Q_{p\max} > Q_{\max}$, как и следовало ожидать.

В случае *б* максимальная транспортирующая способность потока реализовалась явно за пределами разгонного участка канала и здесь имеем хорошее соответствие с вычисленными значениями $Q_{\max}$.

В случае *а* кривые $Q = f(x_1)$, достигнув максимума $Q_{p\max}$ полого спускаются на остальной части канала, стремясь к $Q_{\max}$ и приближаются к кривым случая *б*, если скорости потока одни и те же. Участки спуска кривых соответствуют зонам аккумуляции избыточных количеств песка, поднятых на разгонном участке.

Этот интересный результат, полностью подтвердивший теоретическое предположение, приводит к ряду практически ценых идей. Например, входные участки пульпопроводов следует, по-видимому, делать расширяющимися к входу, т. е. в виде своеобразных „двухфазных диффузоров", что позволит снизить расход несущей среды, не опасаясь образования „пробок".

Поступила в 3 XI 1964 г.

Сибирский научно-исследовательский институт энергетики, Новосибирск, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Дюнин А. К., *Механика метелей*. Изд. СО АН СССР, Новосибирск, 1963.
2. — Изв. СО АН СССР, 1959, *5*.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Г. М., *Механика сплошных сред*. М., Гостехиздат, 1954.
4. Дюнин А. К., Изв. СО АН СССР, 1959, *12*.
5. Dyunin A. K., *Fundamentals of the Theory of Snowdrifting*. TT — *952*, National Research Council of Canada, Ottawa, 1961.
6. Bagnold R. A., Proc. of the Royal Soc. of London, 1938, **167**, A, *929*.
7. Дюнин А. К., Борщевский Ю. Т., Изв. СО АН СССР, 1962, *1*.
8. — Хидрология и метеорология, София, 1960, *4*.

FACTOR DE SUSPENSIE ÎNTR-UN CURENT BIFAZAT

(Rezumat)

Autorul, luînd ca punct de plecare ecuaţia diferenţială (1) a transportului de impuls într-un curent bifazat, mediată în raport cu un cilindru spaţial-temporal [1], studiază, în cadrul elaborării unei teorii cantitative a curentului bifazat, problema de bază a acestei teorii şi anume fundamentarea procesului de suspensie a adaosurilor solide.

Explicaţia figurilor

Fig. 1 — Reprezentarea hodografului vitezelor transversale mediate în stratul limită al porţiunii iniţiale din canalul aerodinamic experimental.

Fig. 2. — Graficul debitului solid Q (în g/m s) a curentului eolian de nisip într-un canal aerodinamic de lungime 21 m şi de secţiune $0{,}42 \times 0{,}50$ m^2 (experienţele lui V. A. Hohlov şi I. M. Ciurbanov).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 621.0

ASUPRA FORMELOR GENERALIZATE DE REZOLVARE A LANŢULUI DE DIMENSIUNI PRIN ASAMBLARE SELECTIVĂ ŞI REGLARE, UTILIZÎND VALORILE LIMITĂ ALE ELEMENTULUI DE ÎNCHIDERE

DE

C. PICOŞ

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

Asamblarea selectivă şi reglarea reprezintă două metode de montare cu o utilizare frecventă în industria construcţiei de maşini.

Expresiile de calcul pentru rezolvarea lanţului de dimensiuni prin aceste metode nu au fost utilizate în forma lor cea mai generală, capabilă să permită aplicarea lor la orice lanţ de dimensiuni, indiferent de numărul elementelor componente conţinute.

În cele ce urmează vom stabili expresiile cele mai generale de calcul pentru aceste metode şi condiţiile utilizării lor, pe baza valorilor limită ale elementului de închidere.

2. Metoda asamblării selective

Ecuaţia generală a lanţului de dimensiuni cu n elemente este de forma:

$$(1) \qquad A_\Delta = (A_1 + A_2 + \cdots + A_m) - (A_{m+1} + A_{m+2} + \cdots + A_{n-1}),$$

unde: A_Δ — elementul de închidere, $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — elementele ramurii de bază, $A_{m+1}, A_{m+2}, \ldots, A_{n-1}$ — elementele ramurii de închidere.

Considerînd că valorile nominale reprezintă valorile minime ale elementelor, valorile limită ale elementului de închidere vor fi de forma:

$$(2) \quad A_{\Delta\max} = [(A_1 + T_1) + (A_2 + T_2) + \cdots + (A_m + T_m)] - (A_{m+1} + A_{m+2} + \cdots + A_{n-1}),$$

$$(3) \quad A_{\Delta\min} = (A_1 + A_2 + \cdots + A_m) - [(A_{m+1} + T_{m+1}) + \cdots + (A_{n-1} + T_{n-1})].$$

Toleranţa elementului de închidere (T_Δ) va fi dată de expresia:

$$T_\Delta = A_{\Delta\max} - A_{\Delta\min} = \sum_{i=1}^{n-1} T_i . \tag{4}$$

Din motive economice impuse de procesul de prelucrare, toleranţele elementelor componente ale lanţului se majorează de k ori, unde k este un număr întreg. În acest caz vom avea:

$$A'_{\Delta\max} = [(A_1 + kT_1) + \cdots + (A_m + kT_m)] - (A_{m+1} + A_{m+2} + \cdots + A_{n-1}), \tag{5}$$

$$\begin{aligned} A'_{\Delta\min} = {} & (A_1 + A_2 + \cdots + A_m) - [(A_{m+1} + kT_{m+1}) + \\ & + (A_{m+2} + kT_{m+2}) + \cdots + (A_{n-1} + kT_{n-1})], \end{aligned} \tag{6}$$

unde A'_Δ reprezintă noua valoare obţinută pentru elementul de închidere.

Toleranţa elementului de închidere (T'_Δ) în urma majorării toleranţelor de execuţie a elementelor, va fi:

$$T'_\Delta = A'_{\Delta\max} - A'_{\Delta\min} = k \sum_{i=1}^{n-1} T_i . \tag{7}$$

Asamblarea lanţului de dimensiuni se realizează în acest caz prin selectarea elementelor şi gruparea lor după dimensiunile reale, astfel ca prin asamblarea efectuată în cadrul fiecărei grupe să se obţină aceleaşi valori limită pentru elementul de închidere. Valorile nominale ale elementelor fiecărei grupe vor fi de forma:

$$A'_1 = A_1 + (k-1)\,T_1,\ A'_2 = A_2 + (k-1)\,T_2, \ldots, A'_{n-1} = A_{n-1} + (k-1)\,T_{n-1}, \tag{8}$$

unde $k = 2, 3, \ldots$

Valorile limită ale elementului de închidere, în acest caz, vor fi:

$$A'_{\Delta\max} = [(A'_1 + T_1) + \cdots + (A'_m + T_m)] - (A'_{m+1} + \cdots + A'_{n-1}), \tag{9}$$

$$A'_{\Delta\min} = (A'_1 + A'_2 + \cdots + A'_m) - [(A'_{m+1} + T_{m+1}) + \cdots + (A'_{n-1} + T_{n-1})]. \tag{10}$$

Explicitînd pe $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{n-1}$, conform relaţiilor (8), expresiile (9) şi (10) devin:

$$A'_{\Delta\max} = A_{\Delta\max} + (k-1) \sum_{i=1}^{m} T_i - (k-1) \sum_{s=m+1}^{n-1} T_s , \tag{11}$$

$$A'_{\Delta\min} = A_{\Delta\min} + (k-1) \sum_{i=1}^{m} T_i - (k-1) \sum_{s=m+1}^{n-1} T_s . \tag{12}$$

În ipoteza că:

$$T_1 = T_2 = \ldots = T_{n-1} = T_{\max}, \tag{13}$$

expresiile (11) și (12) devin:

$$A'_{\Delta\max} = A_{\Delta\max} + (k-1)\, T_{\text{med}} [m - (n-m-1)], \tag{14}$$

$$A'_{\Delta\min} = A_{\Delta\min} + (k-1)\, T_{\text{med}} [m - (n-m-1)]. \tag{15}$$

Pentru a realiza o aceeași precizie de asamblare pentru toate lanțurile obținute din grupele de piese selectate va fi necesar ca:

$$A'_{\Delta\max} = A_{\Delta\max}, \quad A'_{\Delta\min} = A_{\Delta\min}, \tag{16}$$

de unde rezultă:

$$(k-1)\, T_{\text{med}} [m - (n-m-1)] = 0, \tag{17}$$

sau

$$m = n - m - 1, \tag{18}$$

adică numărul elementelor din ramura de bază este necesar să fie egal cu cel din ramura de închidere.

Condițiile pentru aplicarea metodei de asamblare selectivă pentru cazul cel mai general sînt date deci de expresiile (13) și (18).

3. Metoda reglării

Această metodă se aplică atunci cînd amplasarea toleranțelor elementelor componente ale lanțului este astfel încît prin mărirea lor să rezulte totdeauna o creștere a valorii maxime a elementului de închidere, valoarea lui minimă rămînînd neschimbată.

Ecuația lanțului de dimensiuni, în acest caz este de forma:

$$\begin{aligned} A_{\Delta\max} = {} & [(A_1 + T_1) + (A_2 + T_2) + \ldots + (A_m + T_m)] - \\ & - [(A_{m+1} - T_{m+1}) + \ldots + (A_{n-1} - T_{n-1})], \end{aligned} \tag{19}$$

$$A_{\Delta\min} = (A_1 + A_2 + \ldots + A_m) - (A_{m+1} + A_{m+2} + \ldots + A_{n-1}). \tag{20}$$

În cazul majorării toleranțelor elementelor lanțului, din motive economice, se obține o nouă valoare maximă $A'_{\Delta\max}$ a elementului de închidere:

$$\begin{aligned} A'_{\Delta\max} = {} & [(A_1 + T'_1) + (A_2 + T'_2) + \ldots + (A_m + T'_m)] - \\ & - [(A_{m+1} - T'_{m+1}) + \ldots + (A_{n-1} - T'_{n-1})], \end{aligned} \tag{21}$$

unde

$$T'_1 > T_1, \quad T'_2 > T_2, \ldots, T'_{n-1} > T_{n-1}.$$

Noua toleranţă T'_Δ a elementului de închidere va fi:

$$T'_\Delta = A'_{\Delta\max} - A_{\Delta\max} = \sum_{i=1}^{n-1} T'_i. \tag{22}$$

Excesul de toleranţă $T'_\Delta - T_\Delta$ se poate înlătura prin folosirea unui compensator fix sau a unui compensator mobil.

Utilizarea unui compensator mobil nu prezintă dificultate.

Cazul utilizării unui compensator fix impune determinarea numărului de trepte necesare înlăturării excesului de toleranţă a elementului de închidere. Treptele vor fi de mărimi date de scara aritmetică a valorii T_Δ, adică vor avea valorile: $T_\Delta, 2T_\Delta, \ldots, nT_\Delta$.

Tabelul 1

Mărimile compensatorilor, intervalul de utilizare şi proporţia elementelor de compensare în cazul cînd numărul treptelor de compensare variază între 1...5

Mărimea T_Δ faţă de cîmpul de dispersie $C_x = 6\sigma$	Numărul treptelor compensatorilor	Mărimile compensatorilor E_c	Intervalul de utilizare din cîmpul de dispersie	% elemente de reglare din numărul lanţurilor
3σ	1	$E_c = 3\sigma$	$3\sigma...6\sigma$	50
2σ	2	$E_{c1} = 2\sigma$ $E_{c2} = 4\sigma$	$2\sigma...4\sigma$ $4\sigma...6\sigma$	68 16
$3\sigma/2$	3	$E_{c1} = 3\sigma/2$ $E_{c2} = 3\sigma$ $E_{c3} = 9\sigma/2$	$3\sigma/2...3\sigma$ $3\sigma...9\sigma/2$ $9\sigma/2...6\sigma$	43,3 43,3 6,7
$6\sigma/5$	4	$E_{c1} = 6\sigma/5$ $E_{c2} = 12\sigma/5$ $E_{c3} = 18\sigma/5$ $E_{c4} = 24\sigma/5$	$6\sigma/5...12\sigma/5$ $12\sigma/5...18\sigma/5$ $18\sigma/5...24\sigma/5$ $24\sigma/5...6\sigma$	24 45 24 3,5
σ	5	$E_{c1} = \sigma$ $E_{c2} = 2\sigma$ $E_{c3} = 3\sigma$ $E_{c4} = 4\sigma$ $E_{c5} = 5\sigma$	$\sigma...2\sigma$ $2\sigma...3\sigma$ $3\sigma...4\sigma$ $4\sigma...5\sigma$ $5\sigma..6\sigma$	13,75 34 34 13,75 2,25

Numărul n de trepte necesar va fi dat de relația:

$$n = \frac{T'_{\Delta} - T_{\Delta}}{T_{\Delta}}. \tag{23}$$

Pentru fiecare treaptă a compensatorului se va pregăti un număr determinat de elemente compensatoare. În cazul cînd curba de dispersie dimensională a elementului de închidere, la majorarea toleranțelor elementelor componente, este de natura curbei lui Gauss, numărul elementelor de compensare din fiecare treaptă trebuie să fie proporțional cu suprafața corespunzătoare limitată de curbă și de două verticale în punctele axei absciselor, care reprezintă dimensiunile treptelor învecinate.

În tabelul 1 s-a determinat procentul de elemente de compensare pentru fiecare treaptă, în ipoteza unei curbe de dispersie normală.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de tehnologia metalelor

BIBLIOGRAFIE

1. Balakșin B. S., *Tehnologia construirii mașinilor unelte.* Ed. tehn., Buc., 1953, (trad. din l. rusă).
2. Dunaev P. F., *Lanțuri de dimensiuni.* Ed. tehn., Buc., 1958, (trad. din l. rusă).
3. Picoș C., Bul. Inst. polit. Iași, 1965, **XI** (**XV**), *3—4*, p. 364.

ÜBER DIE VERALGEMEINTERN LÖSUNGSFORMEN DER DIEMENSIONIERUNGSKETTEN DURCH SELEKTIVE AUFSTELLUNG UND REGLUNG, DIE GRENZWERTE DES SCHLIESSELEMENTES VERWENDEND

(Zusammenfasung)

Es werden die algemeinsten Rechenausdrücke für selektive Aufstellung und Regelungsmethode, und die Bedigungen für ihre Verwendung, auf Grund der Grenzwerte des Schliesselementes festgesetzt.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 621.7.01

DETERMINAREA PARAMETRILOR FORŢEI PRINCIPALE DE AŞCHIERE ÎN PROCESUL DE STRUNJIRE LONGITUDINALĂ LA OŢELURILE ROMÂNEŞTI

NOTA VIII

GRUPA OŢEL CROM PENTRU RULMENŢI, STAS 1456-61

DE

AUREL RĂILEANU, DAN NICOLESCU şi I. CONDREA

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

În cele ce urmează se expun rezultatele experienţelor întreprinse în vederea determinării exponenţilor x_p, y_p şi a constantei C_p la strunjirea longitudinală a oţelurilor RUL 1 şi RUL 2, procurate în anul 1964 de la „Combinatul Siderurgic", Hunedoara.

Experienţele au fost efectuate pe un strung romînesc tip S3A, utilizînd cuţite din oţel rapid R 18 cu următoarea geometrie $\alpha = 10°$, $\gamma = 25°$, $\lambda = 0°$, $k = 45°$ şi $k' = 15°$, fără lichide de răcire-ungere.

În timpul aşchierii cuţitul s-a montat pe un dinamometru tip G. A. Levit, prevăzut cu amortizor hidraulic şi cu pîrghia de transmitere a deformaţiilor legată rigid de amortizor [1], [2].

Determinarea valorilor numerice ale exponenţilor x_p, y_p şi a constantei C_p s-a efectuat cu relaţia:

$$P_z = C_p t^{x_p} s^{y_p}, \tag{1}$$

Experienţele fiind întreprinse la diferite valori (constante) ale lui t şi s, cu trei viteze de tăiere v, aproximativ constante. Pentru aceleaşi valori ale variabilelor t şi s, la cele trei viteze de tăiere s-au calculat valorile medii, care introduse în relaţia de etalonare:

$$P = \frac{240\ d}{30+l} \quad [\text{Kgf}] \tag{2}$$

au furnizat valorile respective ale forţei principale de tăiere (P_z).

În relaţia (2), d reprezintă indicaţia (în diviziuni) a comparatorului cu cadran, cu precizia de 0,01 mm, montat la dinamometru, l — lungimea în consolă a cuţitului, 240 — constanta de etalonare a dinamometrului, 30 — lungimea cuţitului în suportul dinamometrului pînă la axa barei de torsiune, măsurată în mm.

Trasînd diagramele în coordonate dublu-logaritmice (fig. 1, 2) s-au obţinut grupele de curbe aproximate cu drepte pentru $t = \text{const.}$ şi pentru $s = \text{const.}$ Luînd apoi pe fiecare dreaptă cîte două puncte s-au calculat valorile exponenţilor x_p şi y_p folosind relaţiile:

$$x_p = \frac{\log (P_{z_2} / P_{z_1})}{\log(t_2/t_1)} \quad \text{şi} \quad y_p = \frac{\log (P'_{z_2} / P'_{z_1})}{\log (s_2/s_1)}. \tag{3}$$

În baza valorilor x_p şi y_p astfel obţinute, s-au calculat valorile medii x_{pm} şi y_{pm} ale exponenţilor, date în tabelul 1.

Constanta C_p se obţine din relaţia:

$$C_p = \frac{P_z}{t^{x_{pm}} s^{y_{pm}}}, \tag{4}$$

în care se introduc succesiv valorile forţei principale de tăiere pentru $s = 1$ şi apoi pentru $t = 1$. Efectuînd media acestora s-a obţinut pentru fiecare material o valoare medie C_{pm}, redată de asemenea în tabelul 1.

Tabelul 1

Oţel crom pentru rulmenţi STAS nr. 1456–61	H_B kgf/mm²	x_{pm}	y_{pm}	C_{pm}
RUL 1	192	0,95	0,71	251,7
RUL 2	213	0,88	0,73	274,6

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de maşini-unelte şi scule

BIBLIOGRAFIE

1. Caşler Gh. şi colab., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1956, **II (VI)**, *3—4*, p. 313.
2. Caşler Gh. şi colab., Bul. Inst polit. Iaşi, 1958, **IV (VIII)**, *1—2*, p. 379.

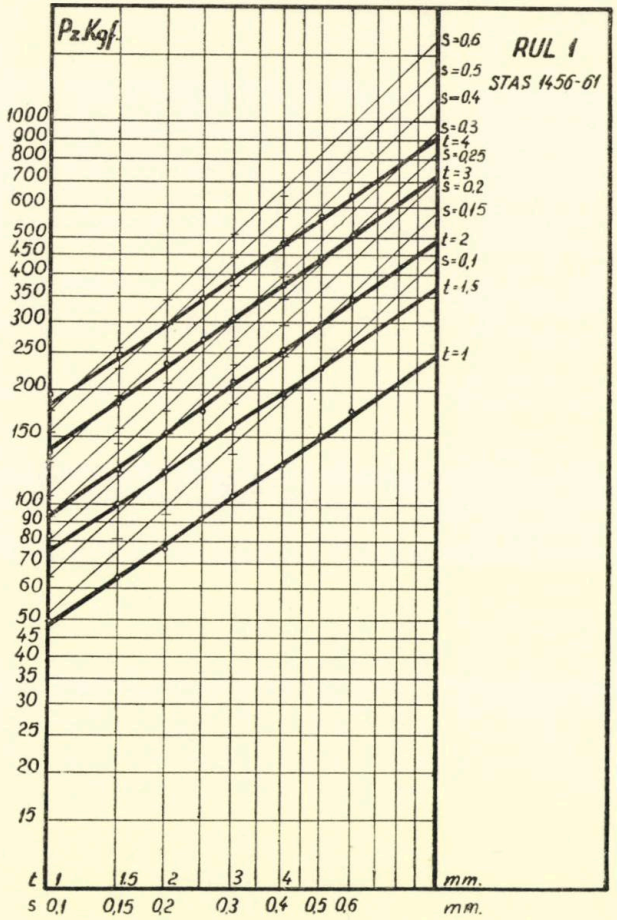

Pz Kgf.
RUL 1
STAS 1456-61
S=0,6
S=0,5
S=0,4
S=0,3
t=4
S=0,25
t=3
S=0,2
S=0,15
t=2
S=0,1
t=1,5
t=1
1000
900
800
700
600
500
450
400
350
300
250
200
150
100
90
80
70
60
50
45
40
35
30
25
20
15
t 1 1,5 2 3 4 mm.
s 0,1 0,15 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 mm.

Fig. 1

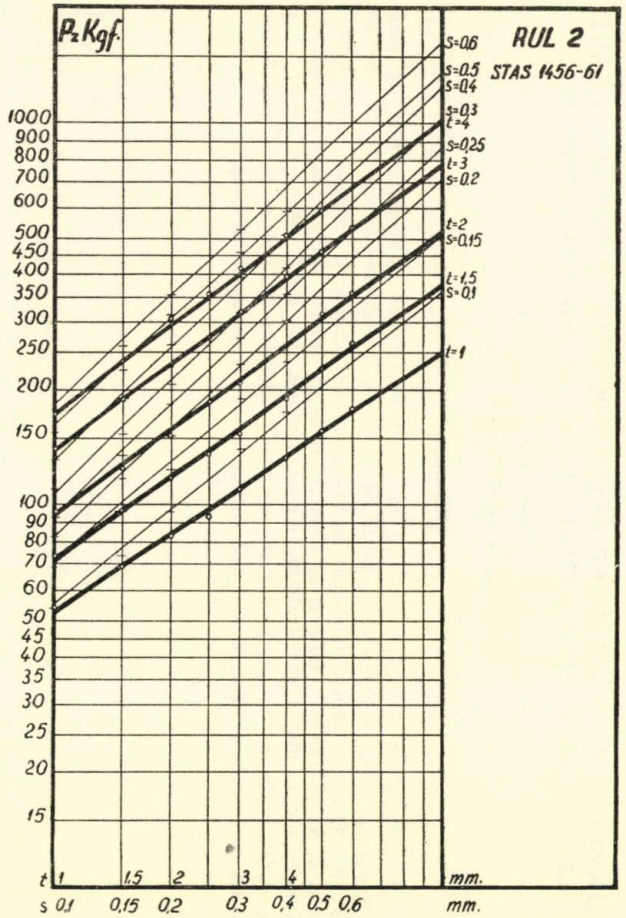

Pz Kgf.
RUL 2
STAS 1456-61
S=0,6
S=0,5
S=0,4
S=0,3
t=4
S=0,25
t=3
S=0,2
t=2
S=0,15
t=1,5
S=0,1
t=1
1000
900
800
700
600
500
450
400
350
300
250
200
150
100
90
80
70
60
50
45
40
35
30
25
20
15
t 1 1,5 2 3 4 mm.
s 0,1 0,15 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 mm.

Fig. 2

DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES DES FORCES DE COUPE CONCERNANT LES ACIERS ROUMAINS SOUMIS AU TOURNAGE LONGITUDINAL

Note VIII

Aciers standardisés, STAS 1456–61

(Résumé)

En utilisant le dynamomètre type G. A. L e v i t pour la détermination des paramètres x_p, y_p et C_p, nécessaires au calcul de la force principale du coupe, donnée par l'éxpression (1), les Auteurs établissent les valeurs de ces paramètres pour les aciers RUL 1 et RUL 2, STAS 1456–61. Dans cette Note les résultats obtenus par voie expérimentale sont représentés sur un diagramme doublement logarithmique, par les fonctions $P_z = F_1(s)$ et $P_z = F_2(t)$. À l'aide d'un tel diagramme on peut facilement déterminer, d'une part les valeurs des paramètres et d'autre part, leur influence sur le processus de coupe.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C.Z. 621. 9

CERCETĂRI PRIVIND INFLUENŢA UNGHIULUI DE DEGAJARE ASUPRA FORŢEI PRINCIPALE DE AŞCHIERE

DE

VITALIE BELOUS, I. CONDREA şi BORIS PLAHTEANU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

Cercetarea experimentală a problemei influenţei unghiului de degajare, a unghiului de ascuţire, respectiv a unghiului de aşchiere asupra forţelor de aşchiere a preocupat şi preocupă mulţi cercetători. A. N. Celiustkin a arătat [1] că între forţa de aşchiere şi unghiul de aşchiere δ există o relaţie de forma

$$P = C\delta .$$

Cercetările efectuate asupra aşchierii oţelului inoxidabil ЭЯ2 la Institutul de construcţii de maşini din Harkov au dus la relaţii de forma [2]:

$$P_z = C\delta^{0,90}.$$

Stanton şi Hyde au ajuns la valori ale exponentului unghiului δ cuprinse între 0,7 şi 1. Din diagrama lui J. B. Armitage şi A. O. Schmidt [3], rezultată din studiul influenţei unghiului de degajare asupra forţei tangenţiale la frezare, valoarea exponentului este, de asemenea, egală cu unitatea.

Din diagrama lui H. Ernst [4], însă, rezultă că valoarea exponentului este variabilă, descrescătoare spre valorile mari ale unghiului de aşchiere. Pentru domeniul $\delta = 45°...90°$, valoarea medie a exponentului este de 1,35.

J. Bendixen [5], folosind datele experimentale ale lui Crowford, Merchant, Stanton, Hyde, Boston, Ernst, Gottwein, Reichel, Shaw, Dempster, Smith, Kronenberg, Airey, Oxford şi Bahleke, ajunge la concluzia că în domeniul $\gamma = -30°...+30°$, influenţa unghiului de degajare asupra forţei principale de aşchiere este liniară. G. Röhlke [6] constată, însă, o dependenţă neliniară în domeniul $\gamma = -15°...+15°$.

Cercetările teoretice şi raţionamentele bazate pe legile generale ale fizicii deformaţiilor plastice l-au condus pe N. N. Zorev [7] la concluzia că unghiul de degajare influenţează procesul de aşchiere (deformarea plastică, forţele de aşchiere etc.), atît direct cît şi indirect.

Influenţa directă se manifestă prin schimbarea direcţiei de degajare a aşchiei; creşterea unghiului γ duce la apropierea direcţiei de degajare de direcţia de aşchiere, la micşorarea unghiului de acţiune (unghiul dintre direcţia rezultantei forţelor pe faţa de degajare şi planul de aşchiere), la mărirea unghiului dintre planul de aşchiere şi zona deformaţiilor plastice, la micşorarea deformaţiei şi, deci, a forţei.

N. N. Zorev a arătat, de asemenea, că influenţa unghiului de degajare asupra procesului de aşchiere este strîns legată de influenţa coeficientului de frecare pe faţa de degajare, mărirea unghiului de degajare şi micşorarea coeficientului de frecare ducînd la îmbunătăţirea procesului de aşchiere (micşorarea coeficientului de comprimare plastică, a forţei, a puterii etc.) şi, ceea ce este foarte important, că acţiunea pozitivă a creşterii unghiului de degajare este cu atît mai pronunţată cu cît coeficientul de frecare este mai mare, şi invers, acţiunea pozitivă a micşorării coeficientului de frecare este cu atît mai pronunţată cu cît unghiul de degajare este mai mic.

V. V. Kuziuşin, studiind comprimarea plastică a metalelor în procesul de aşchiere [8], a ajuns la concluzia că, odată cu creşterea vitezei de aşchiere, scade influenţa unghiului de aşchiere (de degajare) asupra coeficientului de comprimare plastică.

V. F. Paramonov, studiind interdependenţa parametrilor de aşchiere [9] şi admiţînd, pentru legea de variaţie a forţei P_z cu unghiul de aşchiere δ, relaţia

$$P_z = C\delta^{q_z}, \tag{1}$$

a constatat că gradul de influenţă q_z al unghiului de aşchiere (al unghiului de degajare) este variabil, funcţie de ceilalţi parametri ai aşchierii, şi anume, este cu atît mai mare cu cît viteza de aşchiere este mai mică şi cu cît avansul este mai redus.

Concluziile de mai sus sînt în deplină concordanţă cu legea generală a influenţei parametrilor aşchierii asupra procesului de aşchiere formulată de N. N. Zorev [10], anume:

Influenţa pozitivă a unui factor dat asupra procesului de aşchiere este cu atît mai puţin pronunţată cu cît procesul de aşchiere decurge în condiţii mai bune, cu cît şi-au exercitat mai mult influenţa pozitivă ceilalţi factori.

Admiţînd ca valabilă ipoteza prof. A. M. Rozenberg [11] referitoare la faptul că factorul prim care influenţează direct procesul de aşchiere este temperatura pe faţa de degajare, de care depinde coeficientul de frecare şi unghiul real de aşchiere, principalii factori externi care acţionează asupra procesului de aşchiere vor fi aceia care vor influenţa asupra temperaturii pe faţa de degajare şi asupra capacităţii de evacuare a căldurii prin sculă.

Considerăm că temperatura va depinde de două grupe de factori:

a) Factori care determină încărcarea energetică unitară a tăişului (a puterii pe unitatea de lungime a tăişului, deci şi a cantităţii de căldură degajată în unitatea de timp pe unitatea de lungime a tăişului): v, s, k, γ, λ, r, materialul piesei (σ_r) etc.

b) Factori care determină condiţiile de evacuare a căldurii: k, γ, λ, r, q, lichide de răcire-ungere, materialul sculei etc.

Creşterea factorilor v, s, k, λ, σ_r şi micşorarea factorilor r, q, vor duce, evident, la creşterea temperaturii pe faţa de degajare; în ceea ce priveşte unghiul γ acesta acţionează în mod complex asupra temperaturii: pe de o parte, odată cu creşterea lui scade forţa de aşchiere, şi deci încărcarea energetică unitară a tăişului, iar pe de altă parte scade masa cuţitului şi deci se înrăutăţesc condiţiile de evacuare a căldurii.

2. Dependența modului de influență a unghiului γ asupra lui P_z, în funcție de v, s și k

Conform legii generale, stabilită de A. N. Zorev [10], gradul de influență a unghiului γ asupra forței principale de așchiere va fi cu atît mai puțin pronunțat, cu cît ceilalți factori și-au exercitat mai mult acțiunea pozitivă de scădere a forței de așchiere, cu alte cuvinte cu cît v, s, k, vor fi mai mari.

În cele ce urmează se întreprinde un studiu experimental, calitativ și cantitativ, al influenței acestor trei factori asupra dependenței forței principale de așchiere, de unghiul de degajare.

Creșterea vitezei duce evident la creșterea încărcării energetice unitare a tăișului, la creșterea cantității de căldură degajată în unitatea de timp, la creșterea temperaturii pe fața de degajare, la micșorarea comprimării plastice și, implicit, a forței de așchiere (în ipoteza neglijării acțiunii tăișului de depunere).

Creșterea avansului duce și ea la creșterea încărcării energetice unitare a tăișului prin creșterea forței unitare de așchiere și, prin aceasta, la micșorarea forței specifice de așchiere.

Creșterea unghiului de atac principal k duce la creșterea încărcării energetice unitare a tăișului prin scurtarea lungimii părții active a acestuia, respectiv prin creșterea grosimii așchiei.

Determinările experimentale s-au efectuat pe un oțel OL 38 cu $H_B = 116$.

Regimuri de așchiere: $t = 1{,}5$ mm, $s = 0{,}1; 0{,}2; 0{,}4$ și $0{,}8$ mm/rot; viteza, pentru cuțitele din oțel rapid RW180, $v = 8{,}5;\ 17{,}7;\ 27{,}5$ și 45 m/min, iar pentru cuțitele din T15K6, $v = 89;\ 113$ și 177 m/min.

Geometria cuțitelor din RW180: $\alpha° = 8°$, $\gamma° = -5°;\ 0°;\ 6°;\ 10°;\ 14°;\ 18°;\ 25°$, $k° = 15°;\ 30°;\ 45°;\ 60°;\ 90°$, $k°_1 = 15°$; $\lambda° = 0°$.

Așchierea s-a efectuat fără lichide de răcire-ungere.

Rezultatele celor peste 700 determinări au fost transpuse în coordonate dublu-logaritmice $P_z - \delta$ (una din cele cinci grupe de diagrame reprezentată în fig. 1).

Din studierea acestor diagrame rezultă, în primul rînd, că legea de variație $P_z = P_z(\delta)$ nu este, în niciun caz, exponențială (de forma $P_z = C\delta^{q_z}$), întrucît panta curbelor de variație este în general variabilă, crescătoare spre valorile mari ale unghiului δ (adică spre valorile mici ale unghiului γ).

Această concluzie nu contrazice legea generală; într-adevăr, cu creșterea unghiului γ condițiile de degajare a așchiei se îmbunătățesc, forța scade și, în acest mod, gradul de influență a unghiului γ scade și el (scade panta curbei $P_z = P_z(\delta)$).

Din diagrame se mai observă că valoarea medie a exponentului q_z este variabilă în limite largi și este, pentru OL 38, mult mai mare ca valoarea subunitară admisă în normative [12], [13]. De remarcat că și după datele lui V. O. Kuzneţov pentru așchierea fără răcire-ungere a

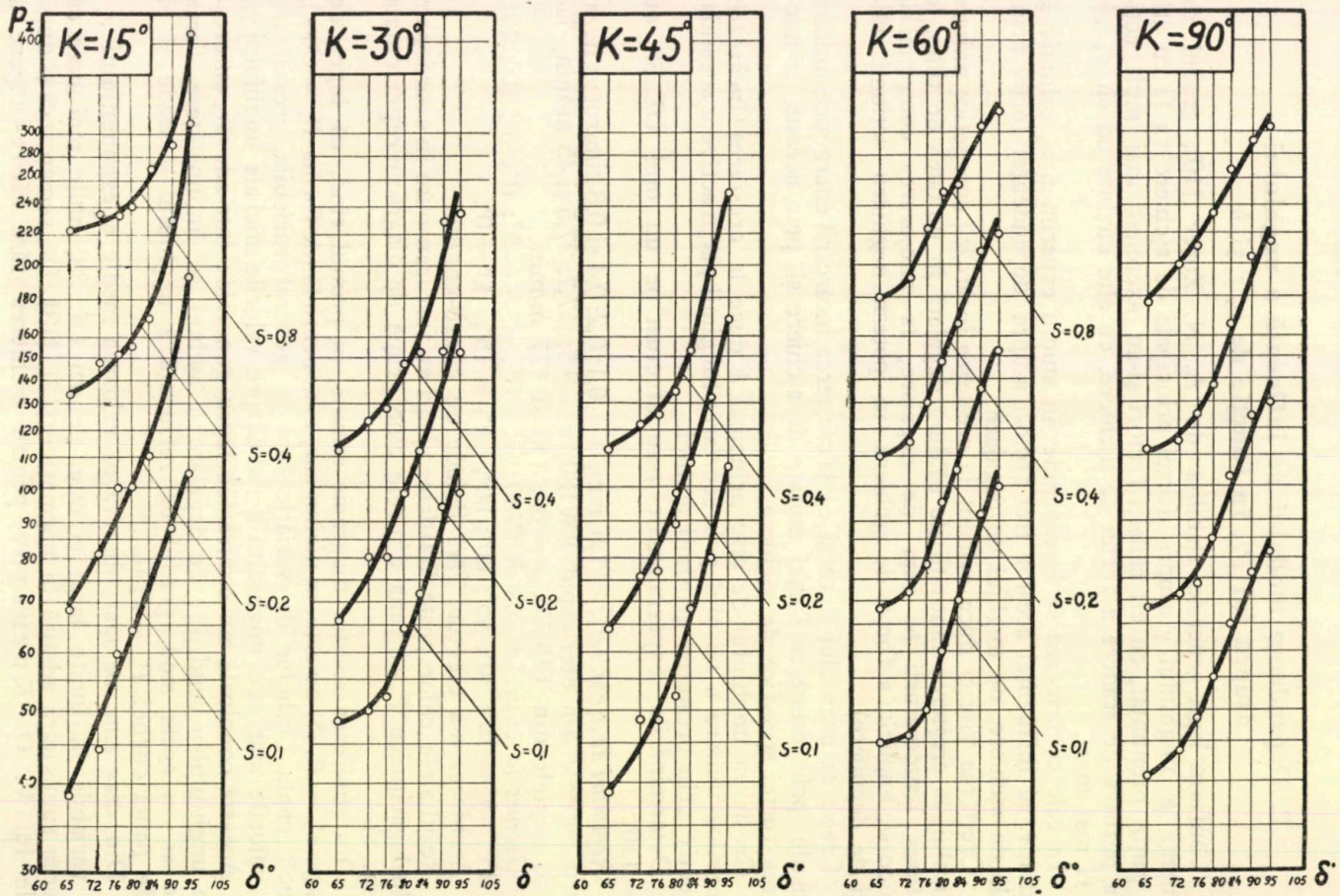

P_z
P_{400}
K=15°
K=30°
K=45°
K=60°
K=90°
S=0,8
S=0,4
S=0,2
S=0,1
δ°
δ
60 65 72 76 80 84 90 95 105

Fig. 1

bronzului [14], pentru un avans de 0,2 mm/rot, forța P_z crește odată cu creșterea unghiului δ de la 40° la 65°, de la 30 kg la 82 kg, ceea ce ar corespunde unui exponent $q_z = 2{,}05$, iar pentru un avans de 1 mm/rot $q_z = 1{,}37$. În cazul răcirii-ungerii, q_z variază de la 0,6 la 1.

Gradul de influență al unghiului $\gamma(\delta)$ asupra forței scade odată cu îmbunătățirea procesului de așchiere pe seama creșterii avansului.

Admițînd drept lege de variație a forței P_z, relația aproximativă (1), în care q_z este panta dreptei de aproximație a curbei reale de variație, rezultă că gradul de influență, reprezentat prin exponentul q_z, scade odată cu creșterea avansului. Acest aspect rezultă din diagrama redată în fig. 2, în care este reprezentată variația exponentului q_z funcție de avans, pentru patru valori ale unghiului k.

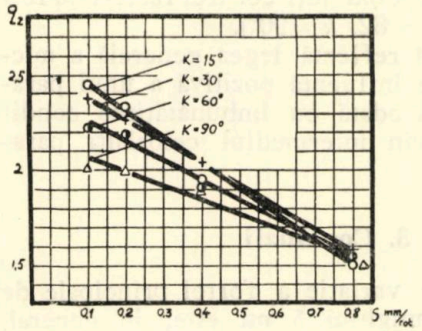


Fig. 2

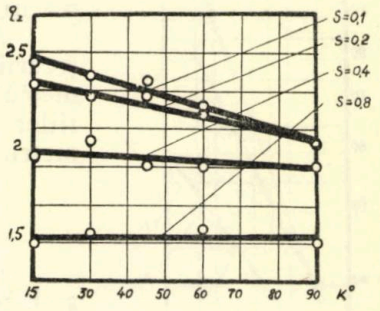


Fig. 3

Totodată, din această diagramă se mai poate deduce și o legătură de ordin superior care, de asemenea, nu contrazice legea generală și anume:

Gradul de influență al avansului asupra gradului de influență al unghiului γ asupra forței P_z scade odată cu creșterea unghiului de atac principal, întrucît aceasta este însoțită, în general, de îmbunătățirea condițiilor de degajare a așchiei, de micșorarea lui P_z.

Din grupul de diagrame din fig. 1 mai rezultă că gradul de influență q_z al unghiului $\gamma(\delta)$ variază cu mărimea unghiului k, scăzînd odată cu îmbunătățirea condițiilor de așchiere prin mărirea unghiului k (prin creșterea grosimii așchiei, a încărcării energetice unitare a tăișului, micșorarea comprimării plastice, a forței etc.)

Și de aici rezultă o legătură de ordin superior, și anume:

Gradul de influență al unghiului k asupra gradului q_z de influență al unghiului $\gamma(\delta)$ este cu atît mai puțin pronunțat (fig. 3) *cu cît avansul este mai mare, deci cu cît condițiile de așchiere sînt mai bune.*

Trebuie remarcat că şi celelalte patru grupe de diagrame nereprezentate confirmă observaţiile de mai sus.

În fig. 4 este reprezentată o diagramă de sinteză care arată modul în care-şi exercită influenţa diferiţi factori asupra gradului de influenţă (panta medie a curbei $P_z = P_z(\delta)$) a unghiului $\gamma(\delta)$ asupra forţei principale de aşchiere. Curba *1* reprezintă cazul cel mai nefavorabil de aşchiere (s, v şi k mici, adică $s = 0{,}1$ mm, $v = 8{,}5$ m/min, $k = 15°$). Curba *2* reprezintă un caz mai favorabil şi anume cu unghiul k mărit ($s = 0{,}1$, $v = 8{,}5$, $k = 90°$). Curba *3* reprezintă un caz şi mai favorabil, fiind mărită şi viteza ($s = 0{,}1$, $v = 89$, $k = 90°$). Curba *4* reprezintă cazul favorabil cînd, în loc de viteză s-a mărit avansul ($s = 0{,}4$, $v = 8{,}5$, $k = 90°$). Curba *5* reprezintă cazul cînd toţi cei trei factori au fost măriţi ($s = 0{,}4$, $v = 82$, $k = 90°$).

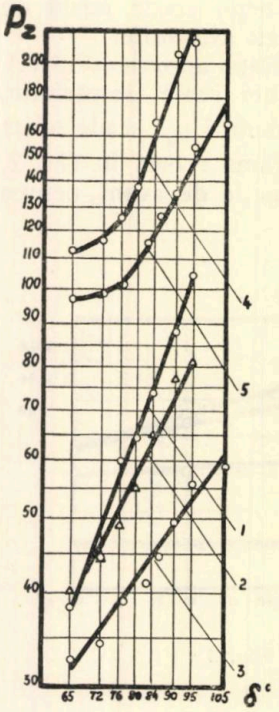


Fig. 4

Astfel, fig. 4 reflectă legea generală a micşorării gradului de influenţă pozitivă a unui parametru al aşchierii odată cu îmbunătăţirea condiţiilor aşchierii prin intermediul celorlalţi parametri.

3. Concluzii

1. Legea de variaţie a forţei principale de aşchiere P_z cu unghiul δ nu este, în general, exponenţială, ci are, în coordonate dublu-logaritmice, un coeficient unghiular variabil, crescător cu unghiul δ.

2. Pentru materialul încercat (OL 38 fără răcire), valoarea medie a exponentului q_z din relaţia aproximativă (1) este mult mai mare ($q_z = 1{,}5 \ldots 2{,}5$) decît cea admisă de standarde ($q_z = 0{,}8 \ldots 1$).

3. Gradul de influenţă al unghiului $\gamma(\delta)$ este variabil cu avansul şi viteza, scăzînd odată cu îmbunătăţirea condiţiilor de aşchiere, pe baza creşterii avansului şi vitezei.

4. Gradul de influenţă al unghiului $\gamma(\delta)$ scade odată cu îmbunătăţirea condiţiilor de aşchiere prin creşterea unghiului de atac principal.

5. Concluziile 3 şi 4 sînt în deplină concordanţă cu legea generală a influenţei parametrilor aşchierii asupra procesului de aşchiere.

6. Legea generală se poate extinde şi la influenţele de gradul doi (influenţa unui parametru al aşchierii asupra gradului de influenţă al altui parametru). În acest sens, gradul de influenţă al avansului asupra gradului de influenţă al unghiului $\gamma(\delta)$ asupra forţei P_z scade odată cu îmbu-

nătățirea condițiilor de așchiere pe seama creșterii unghiului de atac principal, iar gradul de influență al unghiului de atac principal asupra gradului de influență al unghiului $\gamma(\delta)$ asupra forței P_z scade odată cu îmbunătățirea condițiilor de așchiere pe seama creșterii avansului.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de mașini-unelte, scule și utilaj,
Laboratorul de mașini-unelte și scule

BIBLIOGRAFIE

1. Челюскин А. Н., *Влияние размеров стружки на усилие резания металлов.* Сб., *Русские ученые основоположники науки о резании металлов.* Машгиз, М. 1952, стр. 458—467.
2. Резников Н. И., *Учение о резании металлов.* Машгиз, М., 1947, стр. 97.
3. Armitage I. B., Schmidt A. O., Trans. ASME, **66**, *8.* (Citat după *Tool Engineers Handbook*, pp. 18—44).
4. Bendixen I., Werkstatt u. Betrieb, 1957, *5*, S. 302—303.
5. Röhlke G., Werkstatt u. Betrieb, 1958, *8*, S. 476 - 477.
6. Зорев Н. Н., *Исследование элементов механики процесса резания.* Машгиз, М., 1954, стр. 63—79.
7. Кузюшин В. В., *Измерение пластической деформации при резании металлов.* Сб. *Вопросы теории обработки металлов резанием.* Челяб. полит. инст., 1954, *2*, стр. 100—104.
8. Парамонов В. Ф., Вестник машиностр., 1956, *7.*
9. Зорев Н. Н., *Вопросы механики процесса резания металлов.* Машгиз, М., 1956, стр. 280.
10. Розенберг А. М., Еремин А. Н., *Элементы теории процесса резания металлов.* Машгиз, М., 1956, стр. 27.
11. * * * *Справочник нормировщика машиностроителя.* Т. **II**, М., стр. 131.
12. * * * *Normative unificate pentru regimuri de așchiere a metalelor feroase.* Vol. **II**, M. M. C. M., 1961, p. 5.
13. Клушин Н. Н., *Резание металлов.* Машгиз, М., 1958, стр. 262.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПЕРЕДНЕГО УГЛА НА ГЛАВНУЮ СИЛУ РЕЗАНИЯ

(Резюме)

Исследуется влияние переднего угла γ (угла резания δ) на главную силу резания P_z, при продольной обточке малоуглеродистой стали марки OL 38, без охлаждения.

Устанавливается, что:

1. Экспериментальный закон $P_z = P_z(\delta)$ не имеет вида $P_z = C\delta^{q_z}$, где $q_z = \text{const.}$, а имеет в двухлогарифмических координатах, меняющий склон возрастающий с ростом угла δ.

2. Средняя величина степени влияния угла резания q_z, при резании без охлаждения, больше ($q_z = 1{,}5 \ldots 2{,}5$) чем общепринятая в специальной литературе величина, ($q_z = 0{,}8 \ldots 1$).

3. Степень влияния угла резания тем меньше, чем благоприятнее происходит процесс резания (с точки зрения пластической деформации), чем больше угол в плане k, подача s и скорость резания v.

4. Влияния k, s и v на степень влияния q_z угла резания, также, тем меньше, чем благоприятнее происходит процесс резания.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 620.193.4

COMPORTAREA LA COROZIUNE A OŢELURILOR ALIATE DE CONSTRUCŢIE, STANDARDIZATE

DE

TIBERIU GOLGOŢIU, TOMA FĂRCAŞ. GH. AILINCĂI, C. PICOŞ, C. CIOCHINĂ, EMIL ANDREI, CAZIMIR BOHOSIEVICI şi I. MĂLUREANU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

Într-o serie de lucrări anterioare privind coroziunea metalelor [1]...[4] -au stabilit metodele de cercetare la coroziune, s-a propus un anumit mod le exprimare a rezistenţei la coroziune şi s-a arătat modul de comportare a coroziune a oţelurilor carbon obişnuite şi de calitate.

În aceeaşi ordine de idei s-a studiat, în continuare, comportarea la oroziune a oţelurilor aliate de construcţie, standardizate, lucrarea de faţă eferindu-se la opt mărci, cuprinse în standardul STAS 731-63.

Pentru a face posibilă comparaţia între oţelurile carbon şi cele aliate -au folosit aceleaşi metode de lucru şi anume: metoda imersiei succesive ente (*D*), metoda statică (*S*), metoda statică aerată prin barbotare (*B*), iar entru urmărirea comportării la coroziune s-au luat în considerare următo- ii factori: mediile agresive (neutru, acid şi oxidant) şi variaţia concentra- ei mediilor agresive. Ca medii agresive s-au utilizat: soluţie de NaCl nediu neutru) în concentraţii de 1; 3; 5; 10; 15%, soluţie de H_2SO_4 nediu acid) în concentraţii de 1; 3; 5; 10% şi soluţie de NaOCl (mediu xidant) în concentraţie de 1; 3; 5%, pentru a ne situa în limitele con- iţiilor practice mai frecvente.

Determinările au fost efectuate la temperatura mediului ambiant.

Experienţele s-au întreprins pe probe cilindrice cu dimensiunile de 0×10 mm, corespunzătoare greutăţii medii de 25 g, prelucrate din oţel minat, la diametre apropiate; perioada de încercare a fost de 10 zile.

Aprecierea gradului de corodare s-a făcut prin cîntărire, determinîn- u-se pierderile în greutate cu precizia de 0,01 g. Valorile pierderilor în reutate reprezintă, pentru fiecare caz în parte, media a patru epruvete.

Datele experimentale obţinute sînt redate în tabelele 1...3.

Tabelul 1

Nr. crt.	Metoda	Concentrația sol. NaCl %	Sortul oțelului															
			13 N 15		13 CN 25		20 MoC 12		16 MC 10		35 CN 45		40 C 10		36 M 17		40 MC 11	
			g%	cori	g%	cori	g%	cori	g%	cori	g%	cori	g%	cori	g%	cori	g%	cori
1		1	0,88	0,083	1,00	0,093	0,68	0,064	0,84	0,079	0,60	0,053	0,76	0,071	0,80	0,074	0,72	0,060
2		3	0,92	0,086	1,04	0,093	0,86	0,080	0,80	0,074	0,56	0,052	0,70	0,065	0,72	0,060	0,72	0,060
3	*D*	5	0,82	0,077	1,00	0,093	0,74	0,070	0,84	0,079	0,56	0,052	0,72	0,060	0,68	0,063	0,64	0,060
4		10	0,64	0,060	0,68	0,060	0,68	0,064	0,60	0,053	0,56	0,052	0,56	0,052	0,48	0,045	0,56	0,052
5		15	0,26	0,024	0,24	0,028	0,32	0,030	0,36	0,030	0,52	0,048	0,56	0,052	0,56	0,052	0,58	0,054
6		1	0,12	0,011	0,12	0,011	0,12	0,011	0,16	0,015	0,00	—	0,00	—	0,00	—	0,00	—
7		3	0,10	0,010	0,12	0,011	0,12	0,011	0,12	0,011	0,00	—	0,00	—	0,00	—	0,00	—
8	*S*	5	0,16	0,015	0,16	0,015	0,16	0,015	0,16	0,015	0,00	—	0,00	—	0,00	—	0,00	—
9		10	0,12	0,011	0,10	0,010	0,10	0,009	0,08	0,074	0,00	—	0,00	—	0,00	—	0,00	—
10		15	0,06	0,005	0,05	0,005	0,04	0,004	0,06	0,005	0,08	0,008	0,08	0,008	0,10	0,009	0,12	0,011
11		1	0,68	0,063	0,96	0,090	0,84	0,080	0,80	0,074	0,40	0,038	0,84	0,079	0,80	0,074	0,48	0,045
12		3	0,78	0,073	0,84	0,079	0,96	0,090	0,88	0,085	0,40	0,038	0,60	0,053	0,68	0,063	0,78	0,073
13	*B*	5	0,70	0,065	0,92	0,086	0,60	0,053	0,76	0,072	0,48	0,045	0,76	0,072	0,48	0,045	0,78	0,073
14		10	0,40	0,037	0,48	0,045	0,36	0,030	0,26	0,024	0,44	0,041	0,58	0,052	0,68	0,063	0,64	0,060
15		15	0,36	0,030	0,28	0,026	0,32	0,030	0,40	0,038	0,36	0,030	0,56	0,052	0,46	0,043	0,48	0,045

Tabelul 2

Nr. crt.	Metoda	Concentrația sol. H_2SO_4 %	Sortul oțelului															
			13 N 15		13 CN 25		20 MoC 12		16 MC 10		35 CN 45		40 C 10		36 M 17		40 MC 11	
			g%	cori	g%	cori	g%	cori	g%	cori	g%	cori	g%	cori	g%	cori	g%	cori
1		1	35,76	3,360	16,88	1,580	21,64	2,050	18,60	1,740	25,80	2,420	20,54	1,930	18,52	1,740	26,72	2,510
2	*D*	3	29,60	2,760	36,00	3,380	23,04	2,160	47,20	4,430	67,44	6,330	60,92	5,720	53,84	5,060	56,80	5,330
3		5	27,12	2,550	35,20	3,370	23,00	2,160	47,32	4,440	96,80	9,097	70,48	6,620	69,00	6,480	57,60	5,410
4		10	25,88	2,430	29,04	2,730	17,24	1,650	43,00	4,040	95,16	8,940	72,80	6,840	68,28	6,410	54,24	5,097
5		1	5,48	0,510	4,52	0,420	0,92	0,086	4,32	0,406	7,28	0,680	14,08	1,320	10,04	0,940	7,64	0,710
6	*S*	3	7,40	0,690	12,40	1,160	0,88	0,082	6,68	0,680	22,36	2,101	26,24	2,460	13,48	1,260	27,20	2,550
7		5	6,00	0,560	8,00	0,750	5,68	0,520	33,76	3,170	37,04	3,480	36,80	3,450	37,48	3,520	37,24	3,500
8		10	4,32	0,406	10,92	1,020	6,40	0,601	10,80	1,015	61,36	5,760	59,08	5,550	57,00	5,350	47,20	4,430
9		1	4,44	0,130	1,24	0,110	1,16	0,109	1,28	0,120	8,28	0,770	12,44	1,160	9,84	0,920	14,16	1,330
10	*B*	3	10,52	0,980	11,76	1,100	7,08	0,660	14,76	1,380	29,08	2,730	31,12	2,920	29,12	2,730	30,12	2,830
11		5	10,40	0,970	10,08	0,940	9,72	0,910	40,76	3,830	28,00	2,630	29,12	2,730	29,80	2,800	30,88	2,902
12		10	10,32	0,970	18,16	1,700	9,68	0,909	28,96	2,720	67,84	6,370	61,68	5,790	58,84	5,530	56,16	5,270

Tabelul 3

Nr. crt.	Metoda	Concentrația sol. NaOCl %	Sortul oțelului															
			13 N 15		13 CN 25		20 MoC 12		16 MC 10		35 CN 45		40 C 10		36 M 17		40 MC 11	
			g%	cori	g%	cori	g%	cori	g%	cori	g%	cori	g%	cori	g%	cori	g%	cori
1		1	3,04	0,285	3,12	0,290	4,00	0,370	5,28	0,497	3,16	0,297	5,04	0,470	3,60	0,330	4,92	0,460
2	*D*	3	3,16	0,290	2,08	0,190	3,28	0,307	2,60	0,230	3,92	0,360	7,20	0,670	3,20	0,300	3,96	0,370
3		5	3,60	0,330	1,24	0,110	4,36	0,409	3,52	0,330	3,48	0,320	4,36	0,400	3,12	0,290	3,00	0,280
4		1	3,00	0,280	2,52	0,230	6,84	0,640	5,88	0,540	2,40	0,220	5,72	0,530	5,40	0,410	6,04	0,560
5	*S*	3	3,48	0,320	3,48	0,320	1,48	0,139	2,88	0,260	3,36	0,310	5,92	0,550	2,08	0,190	3,44	0,320
6		5	4,36	0,409	3,76	0,350	2,04	0,190	2,24	0,210	3,08	0,280	5,60	0,520	1,64	0,150	2,04	0,190
7		1	3,00	0,280	2,52	0,230	5,72	0,530	4,60	0,409	2,04	0,190	4,20	0,390	3,64	0,340	4,72	0,440
8	*B*	3	1,48	0,139	1,60	0,150	2,80	0,260	2,24	0,210	6,12	0,570	4,08	0,380	3,16	0,300	3,32	0,310
9		5	2,48	0,230	2,80	0,260	3,36	0,310	3,64	0,340	4,52	0,420	4,48	0,420	4,24	0,400	3,48	0,520

Urmărind aceste date în funcție de metodă, mediu și concentrația mediului, pentru fiecare sort de oțel aliat, se observă următoarele:

1° La metoda imersiei succesive (*D*) oțelurile studiate se comportă după cum urmează:

a) În mediu neutru (NaCl), la sorturile de oțel de cementare (Ni, Cr-Ni, Mo-Cr, Mn-Cr) se constată o creștere a pierderilor pentru concentrațiile de 3% și apoi o scădere pentru concentrații mai ridicate; la toate sorturile de oțel pentru îmbunătățire studiate se constată o scădere a pierderilor în greutate cu creșterea concentrației soluției.

Pierderile pentru același sort sînt înscrise în limite foarte strînse. Atacul este foarte slab, uniform la sorturile de cementare și insular la cele de îmbunătățire.

b) În mediu acid (H_2SO_4) pierderile în greutate pentru oțelurile de cementare cresc odată cu concentrația soluției pînă la 3%, pentru ca apoi să scadă, cu excepția oțelului cu Ni, la care pierderile descresc continuu; la oțelurilor de îmbunătățire aceste pierderi cresc pînă la concentrația de 5%, pentru ca pe urmă să scadă.

Pierderile pentru același sort de oțel se înscriu în limite largi. Atacul este mult mai puternic ca în soluțiile de NaCl și uniform.

c) În mediu oxidant (NaOCl) pierderile în greutate variază foarte diferit. Oțelurile de cementare cu Ni prezintă o creștere a pierderilor odată cu creșterea concentrației, cele cu Cr-Ni, o scădere, iar cele cu Cr-Mn, Cr-Mo, o scădere pînă la concentrația soluției de 3%, apoi o creștere a acestora. Oțelurile de îmbunătățire cu Cr, Cr-Ni, prezintă o creștere a pierderilor pînă la concentrația mediului de 3%, apoi acestea descresc odată cu creșterea acestei concentrații, în timp ce oțelurile cu Mn, Cr-Mn, prezintă o scădere a pierderilor cu creșterea concentrației mediului coroziv.

2° La metoda statică (*S*), aceleași oțeluri se comportă după cum urmează:

a) În mediu neutru (NaCl), la mărcile de oțel pentru cementare studiate se constată o creștere a pierderilor pînă la concentrația de 5%, urmată apoi de o scădere. În cazul oțelurilor de îmbunătățire pierderile nu au fost sesizabile la precizia de măsurare folosită, decît pentru concentrația soluției de 15%, indicînd deci o creștere a pierderilor odată cu creșterea concentrației soluției.

Pierderile pentru același sort se înscriu în limite foarte strînse. Atacul este foarte slab și uniform la toate sorturile de oțel.

b) În mediu acid (H_2SO_4), pierderile în greutate, pentru mărcile de oțel de cementare cu Ni, Cr-Ni, cresc pînă la concentrația soluției de 3% și apoi descresc; pentru cele cu Cr-Mn situația este aceeași dar pînă la concentrația de 5%, în timp ce pentru cele cu Cr-Mo, pierderile descresc. Pentru oțelurile de îmbunătățire, luate în studiu, aceste pierderi cresc cu concentrația soluției. Pierderile pentru același sort de oțel se înscriu în limite largi.

Atacul este uniform și mult mai puternic ca în soluțiile de NaCl.

c) În mediu oxidant (NaOCl) pierderile în greutate variază foarte diferit, după tipul oțelului. Pentru oțelurile de cementare cu Ni, Cr-Ni, acestea cresc odată cu creșterea concentrațiilor, la cele cu Cr-Mo pierderile scad pînă la concentrația de 3%, pentru ca la concentrații mai ridicate ale soluțiilor să crească, în timp ce la cele cu Cr-Mn pierderile descresc odată cu creșterea concentrației soluției. În cazul oțelurilor de îmbunătățire cu Cr-Ni, Cr, pierderile cresc pînă la concentrația soluției de 3% și apoi descresc, în timp ce la cele cu Mn, Cr-Mn, pierderile descresc continuu, cu creșterea concentrației mediului coroziv.

Pierderile pentru același sort de oțel se înscriu în limite destul de strînse; atacul este uniform.

3° În cazul metodei statice aerată prin barbotare (*B*), oțelurile studiate se comportă astfel:

a) În mediu neutru (NaCl), la mărcile de oțel de cementare cu Ni, Cr-Mo, Cr-Mn și de îmbunătățire cu Cr-Ni, se constată că pierderile în greutate cresc cu concentrațiile soluțiilor, pînă la concentrația de 3%, apoi descresc. La oțelurile de cementare Cr-Ni și de îmbunătățire cu Cr, Mn, pierderile descresc cu creșterea concentrației mediului.

Pierderile, pentru același sort de oțel, se înscriu în limite largi. Se constată un atac slab, uniform.

b) În mediu acid (H_2SO_4), pierderile în greutate cresc pentru oțelurile de cementare cu Ni-Cr, pînă la concentrația de 3%, iar la cele cu Cr-Mo, Cr-Mn, pînă la concentrația soluției de 5% și apoi descresc; pentru oțelurile de îmbunătățire și oțelul de cementare cu Ni, pierderile cresc odată cu creșterea concentrațiilor soluțiilor.

Pierderile pentru același sort de oțel se înscriu în limite largi. Atacul este puternic, uniform.

c) În mediu oxidant (NaOCl), pentru toate oțelurile de cementare și cele de îmbunătățire cu Mn, Cr-Mn, pierderile în greutate descresc pentru concentrații ale mediului pînă la 3%, iar la concentrații mai mari acestea cresc; pentru oțelurile de îmbunătățire cu Cr, Cr-Ni, fenomenul se manifestă în sens invers, pierderile cresc pînă la concentrația de 3%, iar la concentrații mai mari acestea descresc.

Pierderile pentru același sort de oțel se înscriu în limite strînse, iar atacul este puternic și uniform.

Concluzii

Pe baza rezultatelor experimentale s-a ajuns la următoarele concluzii:

1. Pentru oțelurile de cementare studiate se constată, ca linie generală de comportare, o creștere a pierderilor în greutate, odată cu creșterea concentrației mediilor neutre (NaCl) și acide (H_2SO_4) pînă la concentrația de 3% sau 5%, iar pentru concentrații mai ridicate, o descreștere a acestor pierderi, pentru toate metodele folosite. În medii oxidante (NaOCl) comportarea este foarte diferită, în funcție de calitatea oțelului și metoda de încercare.

2. Pentru oțelurile de îmbunătățire studiate se constată, în general, o comportare foarte diferită, funcție de mediu, metoda utilizată și calitatea de oțel.

3. În tabele se remarcă unele abateri de la linia generală indicată. Acest fapt se poate explica prin existența impurităților în masa metalului supus încercărilor; abaterile reprezintă totodată o consecință a neomogenității materialului ca structură și compoziție chimică și a repartiției neuniforme a impurităților etc.

Scăderea pierderilor în greutate, pentru concentrațiile soluțiilor mai mari ca 3...5%, se explică prin formarea unui strat pasivizat care frînează atacul în continuare.

4. Lucrarea se va continua și asupra celorlalte mărci de oțeluri cuprinse în STAS 791-63, pentru a se putea trage concluzii, pe întregul ansamblu al oțelurilor aliate de construcție, cu privire la modul de comportare al acestora în medii corozive.

Insitutul politehnic, Iași,
Catedra de chimie generală
și
Catedra de tehnologia metalelor

BIBLIOGRAFIE

1. Fărcaș T. și colab., Bul. Inst. polit. Iași, 1961, **VII (XI)**, *1—2*, pp. 337—340.
2. Golgoțiu T. și colab., Bul. Inst. polit. Iași, 1961, **VII (XI)**, *3—4*, pp. 289—292.
3. — Bul. Inst. polit. Iași, 1961, **VII (XI)**, *3—4*, pp. 293—300.
4. — Bul. Inst. polit. Iași, 1962, **VIII (XII)**, *3—4*, pp. 1—6.

COMPORTEMENT À LA CORROSION DES ACIERS ALLIÉS DE CONSTRUCTION, STANDARDISÉS

(Résumé)

En utilisant trois méthodes de laboratoire, à savoir : la méthode de l'immersion successive lente (*D*), la méthode statique (*S*), la méthode statique aérée par barbotage (*B*), les Auteurs ont étudié le comportement à la corrosion des aciers alliés de construction (STAS 731-63), en tenant compte des facteurs suivants : a) milieu agressif (neutre, acide, oxydant), b) variation des concentrations du milieu agressif.

On aboutit aux conclusions suivantes :

1. Pour les aciers de cémentation étudiés on constate comme règle générale pour toutes les méthodes employées, une augmentation des pertes en poids aves l'accroissement de la concentration des milieux neutres (NaCl) et acides (H_2SO_4) jusqu'à la concentration de 3% ou bien 5%, et puis, pour des concentrations plus grandes, une diminution de ces pertes. Dans des milieux acides oxydants (NaOCl) le comportement est très différent, en fonction de la qualité de l'acier et de la méthode d'essai.

2. Pour les aciers d'amelioration étudiés on constate, en général, un comportement très différent, fonction du milieu, de la méthode et de la qualité de l'acier.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 621.78

CEMENTAREA UNOR OŢELURI CARBON ŞI ALIATE STANDARDIZATE, CU AMESTEC PE BAZĂ DE Na_2O_2

DE

CONSTANTIN CIOCHINĂ

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

Rezultatele bune obţinute cu amestecurile noi de cementare pe bază de Na_2O_2 în încercările asupra oţelului carbon de calitate OLC 15 (STAS 880–60), stabilite într-o lucrare precedentă [6], constituie izvorul lucrării prezente.

Se urmăreşte verificarea amestecului recomandat pentru cementare format din: cărbune de lemn + 2,5...5 % Na_2O_2, prin aplicarea sa la oţelurile carbon de cementare OLC 10 şi OLC 20 (STAS 880-60), şi la următoarele sorturi de oţeluri aliate de cementare standardizate: 20 MoC 12 (STAS 792-49), 13 N 15, 13 CN 15 (STAS 793-53), 16 MC 10 (STAS 872-49).

2. Partea experimentală

Experienţele s-au efectuat asupra fiecărui sort de oţel cu amestec pe bază de Na_2O_2 cu următoarele două variante de compoziţie: a) 2,5 % Na_2O_2 + + 97,5 % cărbune de lemn, b) 5 % Na_2O_2 + 95 % cărbune de lemn.

S-au folosit eşantioane de secţiune rotundă cu $\varnothing = 8$ mm şi $l = 40$ mm.

S-a urmărit pentru fiecare caz în parte pătrunderea cementării funcţie de timp şi amestec precum şi duritatea după cementare şi călire.

Pătrunderea cementării a fost urmărită micrografic, prezentîndu-se, spre exemplificare, cîte o microfotografie pentru fiecare sort de oţel studiat.

Rezultatele experimentale sînt concretizate în cele ce urmează în tabele şi diagrame.

a) *Oţeluri carbon de calitate pentru cementare OLC 10 şi OLC 20*

Pentru astfel de oţeluri, cementate la 880°C, rezultatele sînt oglindite în tabelele 1 şi 3 şi fig. 1 şi 2.

Tabelul 1

Oţel carbon de calitate pentru cementare / Timp ore	OLC 10		OLC 20	
	Na_2O_2 %			
	2,5	5	2,5	5
2	0,6...0,8	0,7...0,9	0,5...0,8	0,6...0,9
4	0,9...1,1	1,0...1,2	0,9...1,2	1,0...1,2
6	1,1...1,4	1,2...1,4	1,2...1,4	1,2...1,4
8	1,4...1,6	1,4...1,7	1,3...1,6	1,4...1,6
10	1,6...1,8	1,7...1,9	1,5...1,8	1,6...1,9

Tabelul 2

Oţel aliat pentru cementare / Timp ore	20 MoC 12		13 N 15		13 CN 25		16 MC 10	
	Na_2O_2 %							
	2,5	5	2,5	5	2,5	5	2,5	5
2	0,6...0,8	0,6...0,9	0,5...0,7	0,5...0,8	0,5...0,8	0,6...0,8	0,7...0,9	0,8...1,0
4	0,9...1,2	1,0...1,2	0,7...0,9	0,7...1,0	0,7...0,9	0,7...1,0	1,0...1,3	1,1...1,3
6	1,1...1,4	1,3...1,5	1,0...1,2	1,0...1,2	0,9...1,2	1,0...1,2	1,3...1,6	1,4...1,6
8	1,3...1,5	1,4...1,5	1,2...1,4	1,2...1,4	1,1...1,4	1,2...1,4	1,6...1,8	1,7...1,9
10	1,4...1,6	1,5...1,6	1,3...1,5	1,3...1,5	1,3...1,6	1,4...1,6	1,9...2,1	2,0...2,1

Tabelul 1 cuprinde datele experimentale obţinute pentru oţelurile OLC 10 şi OLC 20 la pătrunderea cementării în funcţie de timp şi compoziţia amestecului. În fig. 1 şi 2, curbele *a* reprezintă rezultatele obţinute pentru amestecul cu 2,5% Na_2O_2 iar curbele *b* cele obţinute pentru amestecul cu 5% Na_2O_2. Tabelul 3 cuprinde datele experimentale referitoare la variaţia durităţii oţelurilor cementate şi călite în funcţie de timp şi amestec.

Fig. 3. — Microstructura inițială a oțelului OLC 10. ×100.

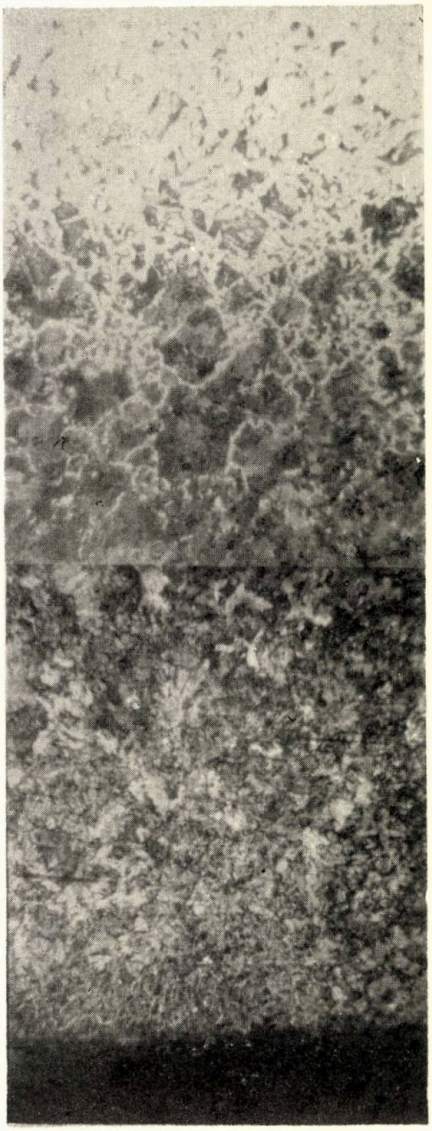


Fig. 4. — Microstructura oțelului OLC 10, cementat la 880°C, timp de 8 ore, amestec: 5% Na_2O_2+95% cărbune de lemn. ×100

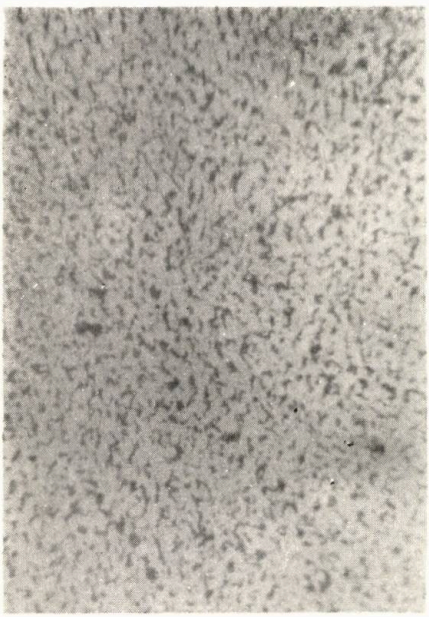


Fig. 5. — Microstructura inițială a oțelului OLC 20. ×100

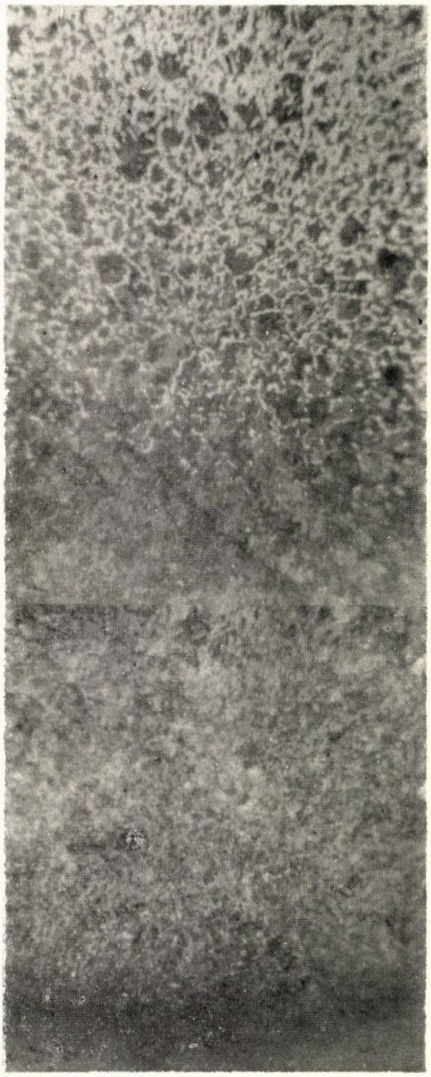


Fig. 6. — Microstructura oțelului OLC 20, cementat la 880°C, timp de 8 ore, amestec: 2,5% Na_2O_2+97,5% cărbune de lemn. ×100

Tabelul 3

Duritatea	Timpul ore		2	4	6	8	10
	Sortul de oțel	Proporția de Na_2O_2 %	×	×	×	×	×
H_{RC}	OLC 10	2,5	60,62,61	63,61,62	64,65,66	62,64,65	63,64,62
		5	60,62,62	64,64,63	62,64,65	63,64,65	64,65,64
	OLC 20	2,5	62,60,62	61,63,63	62,63,62	63,61,64	61,63,64
		5	62,62,61	61,63,62	63,63,62	63,64,62	61,63,63
	20 MoC 12	2,5	63,64,63	64,65,63	62,63,63	63,62,62	62,62,63
		5	64,63,63	62,63,64	61,63,63	61,63,62	62,62,61
	13 CN 15	2,5	61,62,63	64,63,65	65,63,62	62,63,64	63,64,63
		5	60,61,62	61,63,64	64,65,63	62,63,63	61,64,63
	13 CN 25	2,5	62,64,63	61,63,64	64,63,63	64,63,63	62,63,63
		5	61,62,63	61,62,62	63,63,64	62,63,62	64,62,63
	16 MC 10	2,5	60,61,62	60,61,62	61,62,62	62,62,63	63,63,62
		5	62,62,61	61,62,61	60,62,61	62,62,60	63,62,62

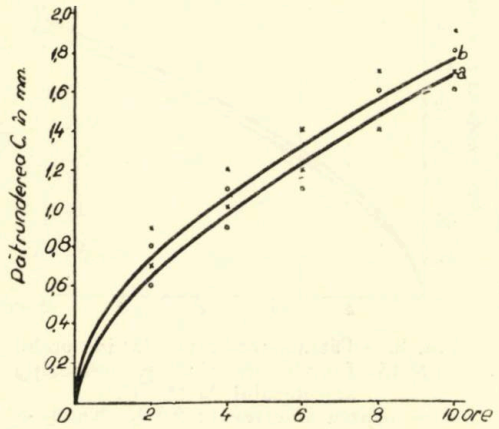


Fig. 1. — Pătrunderea cementării la oțelul OLC 10 în funcție de timp și amestec la 880°C.
a — pentru amestecul: 2,5% Na_2O_2 + + 97,5 % cărbune de lemn; *b* — pentru amestecul: 5% Na_2O_2 + 95 % cărbune de lemn.

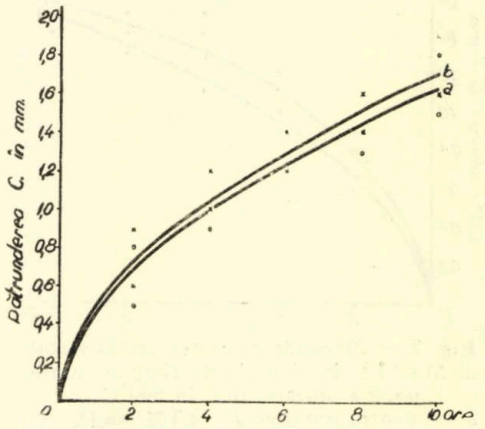


Fig. 2. — Pătrunderea cementării la oțelul OLC 20 în funcție de timp și amestec la 880°C.
a — pentru amestecul: 2,5% Na_2O_2 + + 97,5% cărbune de lemn; *b* — pentru amestecul: 5% Na_2O_2 + 95% cărbune de lemn.

Din datele experimentale obținute se constată că practic rezultatele cementării cu aceste amestecuri, pentru OLC 10 și OLC 20, sînt echivalente.

În fig. 3...6 se prezintă microstructurile inițiale ale oțelurilor carbon OLC 10 și OLC 20 și microstructurile după cementare la 880°C, timp de 8 ore, cu amestec cu 5% Na_2O_2 și respectiv 2,5% Na_2O_2.

Rezultatele experimentale obținute arată că pătrunderile precum și durităţile pieselor călite sînt practic asemănătoare cu cele ce se obțin cu amestecurile solide clasice precum și cu amestecurile noi, pe bază de $CaCO_3$ și dolomită, în prezența NaCl stabilite într-o serie de lucrări anterioare [1]...[4].

Pătrunderea cementării observată în microstructuri este treptată și uniformă, de la zona eutectoidă sau hipereutectoidă către zona hipoeutectoidă.

Din studiul microstructurilor se poate trage concluzia că atît pătrunderile cît și gradul de cementare pentru oțelurile carbon de cementare, cementate cu amestecul pe bază de Na_2O_2, în cele două variante de compoziții, sînt practic echivalente.

b) *Oțeluri aliate*

1° *Oțel 20 MoC 12* (0,20% C, 0,92% Mn, 0,24% Si, 1,12% Cr, 0,10% Ni, 0,25% Mo, 0,16% Cu, 0,025% P, 0,006% S). Temperatura de cementare indicată în STAS — 840°...880°C, cementarea efectuată la 860°C.

Tabelul 2 cuprinde datele referitoare la pătrunderea cementării în funcție de timp și compoziția amestecului, reprezentate grafic în fig. 7.

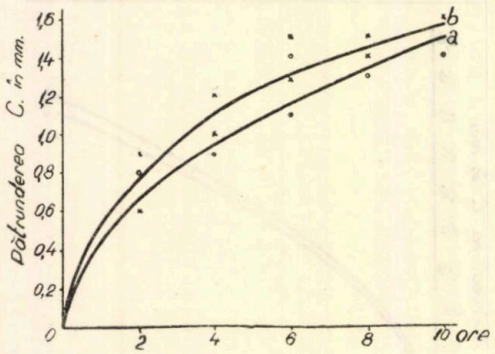


Fig. 7. — Pătrunderea cementării la oțelul 20 MoC 12 în funcție de timp și compoziția amestecului, la 860°C.
a — pentru amestecul: 2,5% Na_2O_2 + + 97,5% cărbune de lemn; *b* — pentru amestecul: 5% Na_2O_2 + 95% cărbune de lemn.

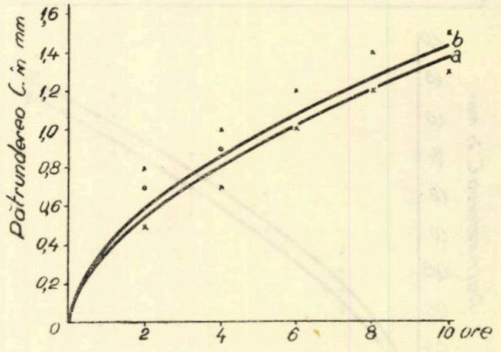


Fig. 8. — Pătrunderea cementării la oțelul 13 N 15 funcție de timp și compoziția amestecului, la 865°C.
a — pentru amestecul: 2,5% Na_2O_2 + + 97,5% cărbune de lemn; *b* — pentru amestecul: 5% Na_2O_2 + 95% cărbune de lemn.

Durităţile probelor cementate și călite (la 810°...830°C în ulei), în funcție de timp și compoziția amestecului, sînt date în tabelul 3.

2° *Oțel 13N15* (0,11% C, 0,39% Mn, 0,15% Si, 0,10% Cr, 1,46% Cu, 0,022% P, 0,008% S). Temperatura de cementare—865°C (indicată în STAS — 850°...880°C).

Tabelul 2 cuprinde datele referitoare la pătrunderea cementării în funcție de timp și compoziția amestecului, reprezentate grafic în fig. 8.

Durităților probelor cementate și călite (la 760°...780°C, în apă), în funcție de timp și compoziția amestecului, sînt date în tabelul 3.

3° *Oțel 13CN25* (0,12% C, 0,38% Mn, 0,32% Si, 0,65% Cr, 2,40% Ni, 0,17% Cu, 0,018% P, 0,010% S). Temperatura de cementare — 865°C (indicată în STAS — 850°...880°C)

Tabelul 2 cuprinde datele referitoare la pătrunderea cementării în funcție de timp și compoziția amestecului, reprezentate grafic în fig. 9.

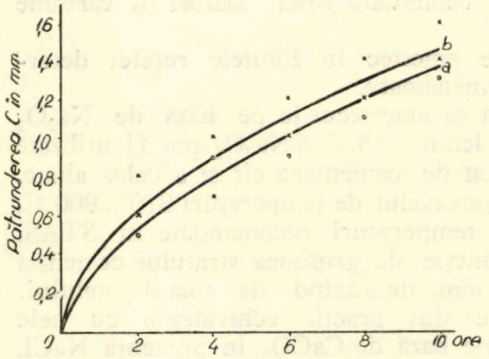


Fig. 9. — Pătrunderea cementării la oțelul 13 CN 25 în funcție de timp și compoziția amestecului, la 865°C.
a — pentru amestecul: 2,5% Na_2O_2 + +97,5% cărbune de lemn; *b* — pentru amestecul 5% Na_2O_2 + 95% cărbune de lemn.

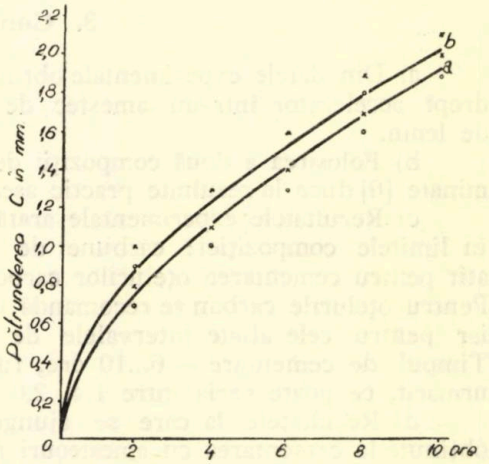


Fig. 10. — Pătrunderea cementării la oțelul 16 MC 10 în funcție de timp și compoziția amestecului, la 885°C.
a — pentru amestecul: 2,5% Na_2O_2 + + 97,5% cărbune de lemn; *b* — pentru amestecul 5% Na_2O_2 + 95% cărbune de lemn.

Durităților probelor cementate și călite (la 760°...780°C, în apă), în funcție de timp și compoziția amestecului, sînt date în tabelul 3.

4° *Oțel 16MC10* (0,14% C, 1,14% Mn, 0,24% Si, 0,95% Cr, 0,38% Ni, 0,15% Cu, 0,022% P, 0,10% S).

Temperatura de cementare indicată în STAS—870°...900°C; cementarea efectuată la 885°C.

Tabelul 2 cuprinde datele referitoare la pătrunderea cementării în funcție de timp și compoziția amestecului, reprezentate grafic în fig. 10.

Durităților probelor cementate și călite (la 810°...830°C, în ulei) în funcție de timp și compoziția amestecului, sînt date în tabelul 3.

În fig. 11...18 se prezintă spre exemplificare microfotografii cu structuri inițiale precum și structuri de cementare pentru sorturile de oțeluri aliate studiate.

Din studiul microstructurilor și diagramelor de pătrundere se constată că amestecul de cementare pe bază de Na_2O_2, în cele două variante de compoziție folosite la cementarea oțelurilor aliate, dă rezultate practic echivalente. De asemenea dacă rezultatele se compară cu cele obținute cu amestecurile de cementare pe bază de $CaCO_3$ și dolomită, studiate în [1]...[4] și comparate cu rezultatele amestecului solid de cementare pe bază de $BaCO_3$, folosit în industrie sub denumirea de „Feridon", se constată că rezultatele experimentale sînt foarte apropiate.

3. Concluzii

a) Din datele experimentale obținute rezultă că Na_2O_2 poate fi utilizat drept accelerator într-un amestec de cementare solid, alături de cărbune de lemn.

b) Folosirea a două compoziții de amestec în limitele rețetei determinate [6] duce la rezultate practic asemănătoare.

c) Rezultatele experimentale arată că amestecurile pe bază de Na_2O_2 în limitele compoziției: cărbune de lemn + 2,5...5 % Na_2O_2 pot fi utilizate atît pentru cementarea oțelurilor carbon de cementare cît și a celor aliate. Pentru oțelurile carbon se recomandă intervalul de temperaturi 870°...900°C, iar pentru cele aliate intervalele de temperaturi recomandate în STAS. Timpul de cementare — 6...10 ore, funcție de grosimea stratului cementat urmărit, ce poate varia între 1,4...2,0 mm, depinzînd de sortul oțelului.

d) Rezultatele la care se ajunge sînt practic echivalente cu cele obținute la cementarea cu amestecuri pe bază de $CaCO_3$ în prezența NaCl, dolomită în prezența NaCl și cu alte amestecuri folosite pe bază de $BaCO_3$.

e) Rezultatele bune, obținute atît la oțelurile carbon cît și la cele aliate pentru cementare, cu amestecuri pe bază de Na_2O_2, confirmă că procesul de cementare este complex, fiind rezultatul mai multor reacții simultane, după cum s-a arătat într-o serie de lucrări precedente [1]...[4].

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de tehnologia metalelor

BIBLIOGRAFIE

1. Fărcaș T., Golgoțiu T., Ailincăi Gh., Ciochină C., Andrei E., Bul. Inst. polit. Iași, 1955, **I (V)**, *1-2*, pp. 417-431.
2. — Bul. Inst. polit. Iași, 1955, **I (V)**, *1-2*, pp. 433-442.
3. — Bul. Inst. polit. Iași, 1955, **I (V)**, *1-2*, pp. 443-460.
4. — Bul. Inst. polit. Iași, 1956, **II (VI)**, *3-4*, pp. 335-349.
5. — Bul. Inst. polit. Iași, 1959, **V (IX)**, *3-4*, pp. 293-298.
6. — Bul. Inst polit. Iași, 1963, **IX (XIII)**, *1-2*, pp. 321-326.

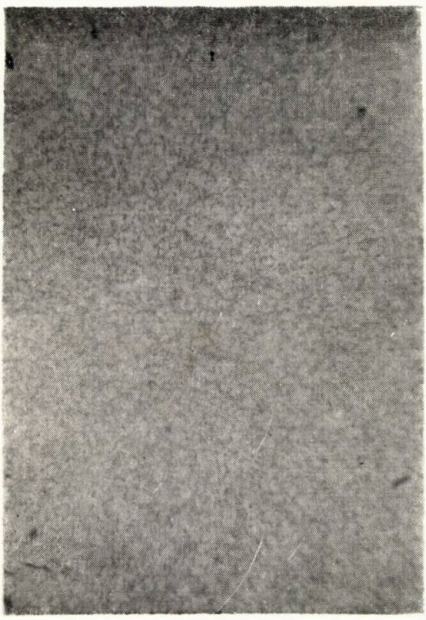


Fig. 11. — Microstructura inițială a oțelului 20 MoC 12. ×100

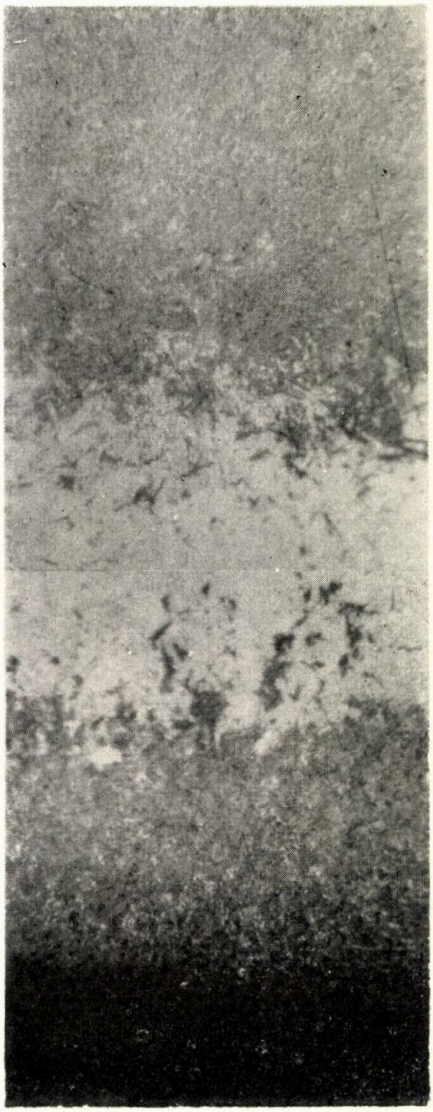


Fig. 12. — Microstructura oțelului 20 MoC 12, cementat la 860°C, timp de 8 ore, amestec: 5% Na_2O_2+95% cărbune de lemn. ×100

Fig. 13. — Microstructura inițială a oțelului 13 N 15. × 100.

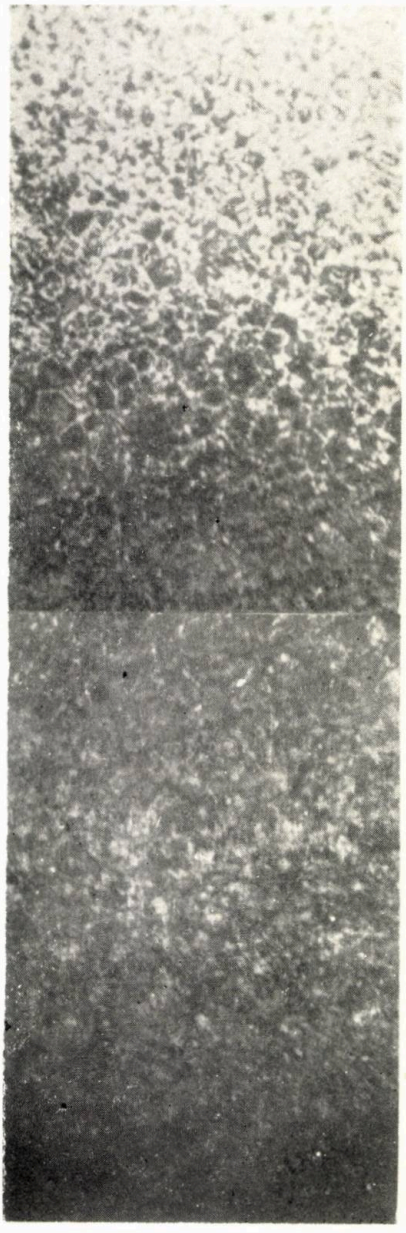


Fig. 14. — Microstructura oțelului 13 N 15 cementat la 865°C timp de 8 ore, amestec: 5% Na_2O_2+95% cărbune de lemn. ×100.

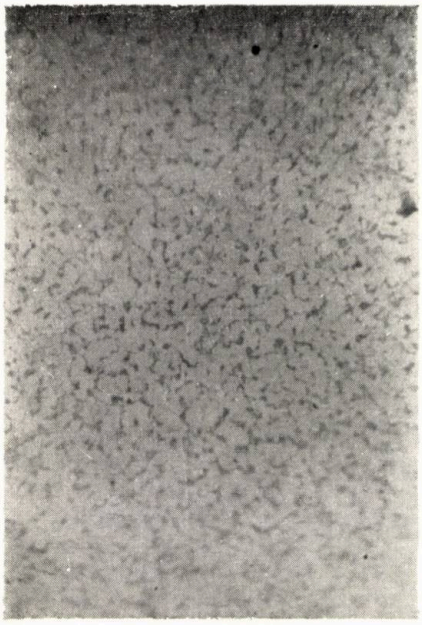


Fig. 15. — Microstructura inițială a oțelului 13 CN 25. ×100.

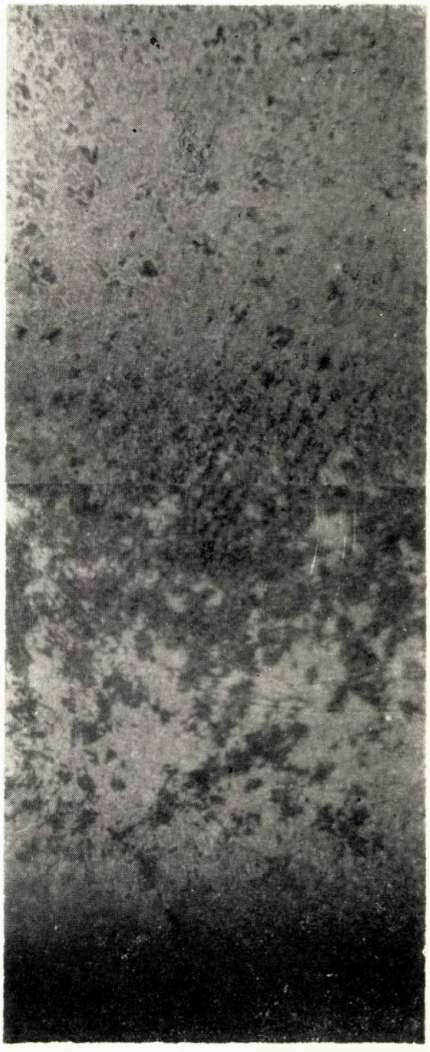


Fig. 16. — Microstructura oțelului 13 CN 25, cementat la 865°C timp de 8 ore, amestec: 5% Na_2O_2+95% cărbune de lemn. ×100.

Fig. 17. — Microstructura inițială a oțelului 16 MC 10. ×100.

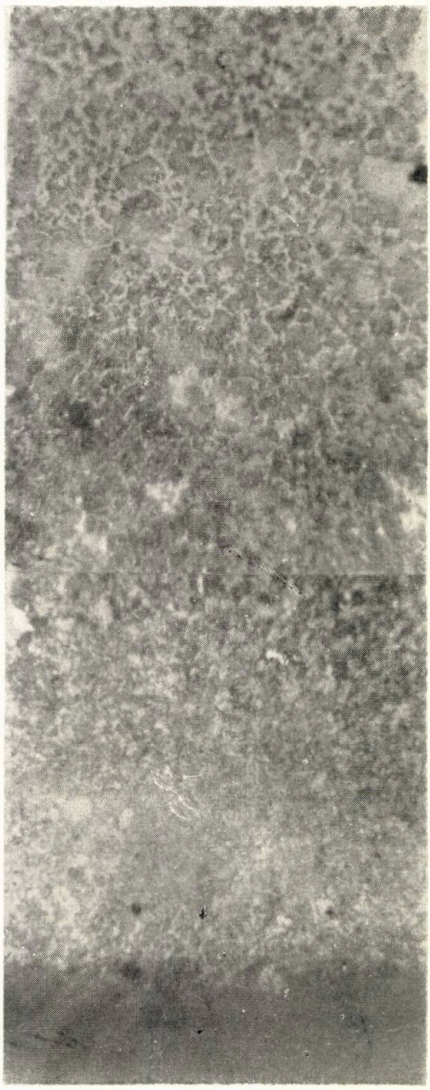


Fig. 18. — Microstructura oțelului 16 MC 10, cementat la 885°C, timp de 8 ore, amestec : 2,5% Na_2O_2+97,5% cărbune de lemn. ×100.

7. Minkevici A. N., *Tratamentele termo-chimice ale oțelului.* I.D.T., Buc., 1954, (trad. din l. rusă).
8. Slavinski M. P., *Proprietățile fizico-chimice ale elementelor.* Ed. Tehn., Buc., 1955, (trad. din l. rusă).

CÉMENTATION DES ACIERS CARBON ET SPÉCIAUX STANDARDISÉS, AVEC UN MÉLANGE À BASE DE Na_2O_2

(Résumé)

À la suite des résultats satisfaisants obtenus avec les mélanges de cémentation à base de Na_2O_2 lors de la cémentation de l'acier carbon de qualité OLC 15 (STAS 880-60), établis dans une Note précedente [6], on a poursuit la vérification des propriétés du mélange de cémentation recommandé ayant la composition: charbon de bois + 2,5...5% Na_2O_2, en l'appliquant aux aciers carbon de cémentation OLC 10 et OLC 20 (STAS 880-60) et aux suivantes sortes d'aciers spéciaux de cémentation standardisés: 20 MoC 12 (STAS 792-49), 13 N 15 (STAS 793-53), 13 CN 25 (STAS 793-53), 16 MC 10 (STAS 872-49).

Les expériences ont été effectuées avec un mélange à base de Na_2O_2, en deux variantes quant à la composion, à savoir: a) 2,5% Na_2O_2+97,5% charbon de bois; b) 5% Na_2O_2+95% charbon de bois.

Pour chaque cas on a étudie la pénétration de la cémentation en fonction du temps et du mélange, de même que la dureté après la cémentation et la trempe.

Les résultats acquis montrent que les mélanges à base de Na_2O_2, ayant la composition ci-dessus, peuvent être utilisés tant pour la cémentation des aciers carbon de cémentation, que pour les aciers spéciaux, avec de bons résultats.

Pour les aciers carbon on recommande l'intervalle de températures 870°...900°C et pour les aciers spéciaux les intervalles de températures recommandées dans les standardes.

Le temps de cémentation recommandé est de 6 à 10 h, en fonction de la profondeur de la couche cémentée étudiée, qui peut varier entre 1,4 et 2,0 mm, fonction du sorte de l'acier.

Explication des figures

Fig. 1. — Pénétration de la cémentation chez l'acier OLC 10, en fonction du temps et de la composition du mélange, à 880°C. *a* — pour le mélange 2,5% Na_2O_3+97,5% charbon de bois; *b* — pour le mélange 5% Na_2O_2+95% charbon de bois.

Fig. 2. — Pénétration de la cémentation chez l'acier OLC 20, en fonction du temps et de la composition du mélange, à 880°C. *a* — pour le mélange 2,5% Na_2O_2+ +97,5% charbon de bois; *b* — pour le mélange 5% Na_2O_2 + 95% charbon de bois.

Fig. 3. — Microstructure initiale de l'acier OLC 10. × 100.

Fig. 4. — Microstructure de l'acier OLC 10, cémenté en 8 heures, à 880°C, avec le mélange 5% Na_2O_2+95% charbon de bois. × 100.

Fig. 5. — Microstructure initiale de l'acier OLC 20. × 100.

Fig. 6. — Microstructure de l'acier OLC 20, cémenté en 8 heures, à 880°C, avec le mélange 2,5% Na_2O_2+97,5% charbon de bois. × 100.

Fig. 7. — Pénétration de la cémentation chez l'acier 20 MoC 12, en fonction du temps et de la composition du mélange, à 860°C. *a* — pour le mélange 2,5% Na_2O_2 + 97,5% charbon de bois, *b* — pour le mélange 5% Na_2O_2+95% charbon de bois.

Fig. 8. — Pénétration de la cémentation chez l'acier 13 N 15, en fonction du temps et de la composition du mélange, à 865°C. *a* — pour le mélange 2,5% Na_2O_2+ +97,5% charbon de bois, *b* — pour le mélange 5% Na_2O_2+95% charbon de bois.

Fig. 9. — Pénétration de la cémentation chez l'acier 13 CN 25, en fonction du temps et de la composition du mélange, à 865°C. *a* — pour le mélange 2,5% Na_2O_2+ +97,5% charbon de bois ; *b* — pour le mélange 5% Na_2O_2 + 95% charbon de bois.

Fig. 10. — Pénétration de la cémentation chez l'acier 16 MC 10, en fonction du temps et de la composition du mélange, à 885°C. *a* — pour le mélange 2,5% Na_2O_2+ +97,5% charbon de bois ; *b* — pour le mélange 5% Na_2O_2+95% charbon de bois.

Fig. 11. — Microstructure initiale de l'acier 20 MoC 12. × 100.

Fig. 12. — Microstructure de l'acier 20 MoC 12, cémenté en 8 heures, à 860°C, avec le mélange 5% Na_2O_2+95% charbon de bois. × 100.

Fig. 13. — Microstructure initiale de l'acier 13 N 15. × 100.

Fig. 14. — Microstructure de l'acier 13 N 15, cémenté en 8 heures, à 865°C, avec le mélange 2,5% Na_2O_2+97,5% charbon de bois. × 100.

Fig. 15. — Microstructure initiale de l'acier 13 CN 25. × 100.

Fig. 16. — Microstructure de l'acier 13 CN 25, cémenté en 8 heures, à 865°C, avec le mélange 5% Na_2O_2+95% charbon de bois. × 100.

Fig. 17. — Microstructure initiale de l'acier 16 MC 10. × 100.

Fig. 18. — Microstructure de l'acier 16 MC 10, cémenté en 8 heures, à 885°C, avec le mélange 2,5% Na_2O_2+97,5% charbon de bois. × 100.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

УДК 621.335

УДАРНЫЕ ИСПЫТАНИЯ ОТВАЛА БУЛЬДОЗЕРА

Ю. Л. КАРТВЕЛИШВИЛИ, Т. Т. КИПИАНИ, Н. А. КИКНАДЗЕ
Г. А. ГОЗАЛИШВИЛИ и Ш. В. КОБАХИДЗЕ

Создание рациональной конструкции машин для земляных работ тесно связано с методикой их прочностного расчета. Несовершенство применяющейся в настоящее время методики заключается в том, что с ее помощью весьма трудно определить с необходимой для практических целей точностью наибольшие расчетные нагрузки, так как последние зависят от коэффициента динамичности K_∂, численные значения которого изменяются в широком диапазоне от 1,5 до 2,5 а строгое основание принимаемой в расчетах величины, по-существу, отсутствует.

Наибольшие расчетные нагрузки, действующие на рабочие органы машин для земляных работ, которые во время копания грунта испытывают частые удары при столкновении с различными препятствиями, могут быть определены из уравнения баланса энергии системы при ударе [3].

В частности, в случае, если отвал бульдозера во время работы ударяет о непреодолимое препятствие, вследствие чего трактор останавливается, кинетическая энергия движущегося трактора с оборудованием бульдозера полностью переходит в потенциальную энергию деформации отвала и сопряженных с ним деталей. При этом может иметь место либо пробуксовывание гусениц, либо пробуксовывание бортовых фрикционов, либо, наконец, принудительная остановка двигателя трактора.

С целью проверки точности, с которой может быть определена наибольшая расчетная нагрузка методом уравнения баланса энергии при ударе, в июне 1962 года на Ремонтно-прокатной базе Зактрансстроя кафедрой Строительно-дорожные машины и оборудование, ГПИ им В. И. Ленина, были проведены ударные испытания отвала бульдозера.

Испытаниям был подвергнут выпущенный из ремонта неповоротный бульдозер типа Д-159 Б с гидравлическим управлением, навешенный на трактор ДТ-54 А. В качестве препятствия был выбран массивный бетонный надолб, к которому вплотную была вертикально установлена плита размерами $450 \times 450 \times 50$ мм из стали марки Ст 3. К отвалу бульдозера был прикреплен угольник с прихваченым к нему сваркой стальным шариком диаметром 29,7 мм. Во время испытаний отвал был несколько приподнят так, что продольные балки находились в горизонтальном положении.

Известно, что установлена линейная зависимость между контактной силой и глубиной внедрения штампа при ударной нагрузке [5]. Для пластической составляющей α величины сближения соударяемых тел (в нашем случае — это глубина получаемого при ударе на поверхности плиты сферического отпечатка) можно принять выражение

(I) $$\alpha = \varkappa(P_{дин} - P_s) \quad [мм],$$

где $P_{дин}$ — контактная сила при ударе, [кг], P_s — значение этой силы, соответствующее пластической деформации материала плиты, [кг], $\varkappa$ — постоянный коэффициент.

При соударении шара с телом, ограниченным плоскостью, как это имело место при испытаниях, когда сам шар пластически не деформируется, коэффициент

(II) $$\varkappa = \frac{1}{2\pi R H_b},$$

где $R = 14{,}85$ мм радиус шара, H_b — твердость материала плиты по Бринелю, характеризующая пластические свойства материала, [кг/мм^2].

Материал плиты, которая использовалась при испытаниях был подвергнут анализу на твердость по Бринелю в лаборатории сопротивления материалов. При выдержке 30 сек и вдавливании шарика диаметром 10 мм усилием 3000 кг была получена лунка диаметром $d = 5{,}2$ мм

(III) $$H_b = \frac{P}{F} = \frac{P}{\pi D(D - \sqrt{D^2 - d^2})/2}$$

где $D = 10$мм — диаметр вдавливаемого шарика, F — площадь лунки, [мм^2].

Значение силы, соответствующей пластической деформации,

(IV) $$P = \sigma_{s\,дин} F',$$

где $\sigma_{s\,дин}$ — динамический предел текучести материала плиты, [кг/см^2], F' — площадь поверхности сферического отпечатка на плите при ударе шариком, закрепленным на отвале, которая может быть определена по формуле $F' = \pi D(D - \sqrt{D^2 - d^2})/2$. Здесь $D = 2{,}97$ см, а d измеряется на плите после соответствующих ударов.

При испытаниях бульдозер, двигавшийся на первой скорости, ударял в плиту из мягкой стали шариком, прихваченному сваркой к угольнику, укрепленному посредине отвала. Так как плита упиралась в бетонный надолб, то трактор останавливался. При этом шарик оставлял отпечаток сферической формы на плите по размерам которого, пользуясь вышеприведенными формулами, можно определить величину контактного усилия при ударе.

Во время испытаний на последних метрах разгона трактора, от контрольной линии до препятствия, секундомером фиксировалось время хода трактора, что давало возможность судить о скорости его движения, предшествующей удару.

Всего было произведено шесть опытов удара бульдозера по препятствию, кроме того дважды, до и после проведения ударных испытаний, был произведен статический упор отвала в препятствие при идентичном ударными с испытаниями режиме работы двигателя. При статическом упоре имела место выдержка продолжительностью 30 сек.

Результаты экспериментов сведены в таблицу 1.

Таблица 1

№№	Диаметр отпечатка d мм	Глубина отпечатка α мм	Скорость перед ударом м/сек	P_s кг	$P_{дин}$ или P_y кг	Прилагания
1	7	0,4	—	—	5 060	Статич. упор
2	13	1,5	0,75	4 530	22 880	удар
3	12	1,25	0,75	3 920	18 590	удар
4	12,75	1,43	0,75	4 375	19 940	удар
5	13	1,5	0,75	4 530	22 880	удар
6	12	1,25	0,75	3 920	18 590	удар
7	11,75	1,2	0,75	3 700	18 380	удар
8	7	0,4	—	—	5 060	Статич. упор

Из формулы (I) следует, что

$$P_{дин} = \frac{\alpha}{\chi} + P_s. \qquad (I\,а)$$

Для определения по формуле (IV) P_s необходимо знать величину динамического предела текучести $\sigma_{s\,дин}$ для стали марки Ст 2 при

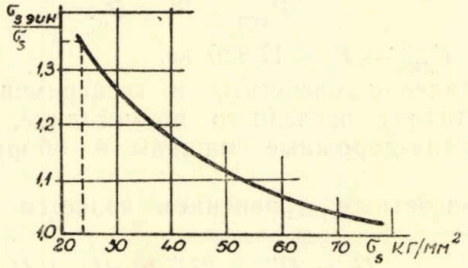


Рис. 1 — Зависимость $\sigma_{s\,дин}/\sigma_s = f(\sigma_s)$.

скорости удара 0,75 м/сек, что соответствует проведенным испытаниям. На рис. 1 приводится зависимость отношения динамического предела текучести $\sigma_{s\,дин}$ к статическому σ_s в функции последнего. Эта зависимость построена по экспериментальным данным при растягивающем ударе на копре, относится к скоростям ударов, не превышающим 5...6 м/сек, и охватывает широкий диапазон сталей различных марок [5].

С другой стороны, проведенные проф. Г. И. Погодиным-Алексеевым опыты [6] убедительно свидетельствуют о том, что, хотя динамиче-

ский предел текучести $\sigma_{s\,дин}$ и зависит от скорости нагружения, но изменение его значений происходит медленно и в достаточно широком диапазоне изменения скоростей удара $\sigma_{s\,дин}$ остается практически постоянным [6]. В частности, экспериментально установлено, что при изменении скоростей нагружения в пределах 0,466...5,65 м/сек не удалось обнаружить существенного изменения значений $\sigma_{s\,дин}$.

По зависимости, приведенной на рис. 1, зная статический предел текучести для Ст 3 $\sigma_s = 2\,400$ кг/см², можно установить его значение при динамическом нагружении $\sigma_{s\,дин} = 3\,240$ кг/см².

Значения P_s в таблице 1 определены по формуле (IV) в зависимости от d, после чего определив предварительно по формуле (II) $\varkappa = 8{,}18 \cdot 10^{-5}$ мм/кг, можно пользуясь формулой (I а), найти $P_{дин}$.

Значения контактных усилий при статическом упоре отвала в препятствие при 1 и 8 опыте, зная твердость материала плиты по Бринелю, можно определить непосредственно из формулы (III).

Таким образом, наибольшее динамическое усилие при ударе отвала бульдозера о непреодолимое препятствие составляет 22 880 кг. Это динамическое усилие складывается из составляющей P', обусловленной инерцией движущихся масс трактора с оборудованием бульдозера, и составляющей P_y от толкающего усилия трактора, существенно превышающего тяговое усилие на соответствующей скорости из-за инерции вращающихся масс от наружных (ведомых) барабанов бортовых фрикционов о до ведущих колес гусеничного хода при пробуксовывании первых как это имело место при эксперименте. Следовательно

$$P_{дин} = P' + P_y. \tag{V}$$

Откуда $P' = P_{дин} - P_y = 17\,820$ кг.

Для сопоставления расчетных и экспериментальных значений P определим величину последнего по методике, разработанной на кафедре Строительно-дорожные машины и оборудование ГПИ им. В. И. Ленина [3].

Основным расчетным уравнением является уравнение баланса энергии при ударе

$$U_k = U'_{из} + 2U''_{из} + U_{кр} + U_м, \tag{VI}$$

где U_k — кинетическая энергия поступательно движущихся масс трактора с оборудованием бульдозера, [кгсм], $U'_{из}$ — потенциальная энергия деформации изгиба отвала с толкателями, рассматриваемыми как П-образная рама, [кгсм], $U''_{из}$ — потенциальная энергия деформации изгиба поперечной балки по линии действия усилий, передаваемых от толкателей, [кгсм], $U_{кр}$ — потенциальная энергия деформации кручения отвала, [кгсм], $U_м$ — потенциальная энергия местной деформации при контакте шарика с плитой-препятствием, [кгсм],

(VII) $$U_k = \frac{G_{б+тр}\, v^2}{2g},$$

$G_{б+тр} = 6\,220$ кг — вес трактора с оборудованием бульдозера, $v = 0{,}75$ м/сек — скорость движения в момент удара, $g = 9{,}81$ м/сек^2 — ускорение силы тяжести.

Перейдем к определению $U'_{из}$. Рассматриваем отвал с толкателями неповоротного бульдозера, как однопролетную П-образную раму (рис. 1). Изгибающий момент в углах рамы B и C

(VIII) $$M_B = M_C = -\frac{P'(l/2)^2}{l}\frac{3}{2N},$$

где $N = 2k + 3$, $h = (I_{II}/I_I)(h/l)$, h, l — смотри рис. 2, I_I, I_{II} — моменты иперции сечений стойки и поперечины рамы, [см^4]. Перемещение (деформация) по направлению действия силы P' может быть определено по формуле

(IX) $$\Delta'_{из} = \int \frac{M}{EI}\bar{M}\,ds,$$

где M — ординаты эпюры моментов в заданом состоянии системы, EI — изгибная жесткость сечений брусьев, составляющих раму, $\bar{M}$ — ординаты эпюры от единичной силы, соответствующей искомому перемещению [8].

Значение этого интеграла можно определить по правилу Верещагина, как сумму произведения площадей эпюр M/EI на ординаты эпюры $\bar{M}$ под центрами тяжести этих площадей. Эпюра $\bar{M}$ строится от единичной силы, действующей в направлении искомого перемещения. В нашем случае эта эпюра идентична эпюре от силы P'.

Момент инерции продольной балки бульдозера или по схеме на рис. 2 стойки рамы $I_I = 640$ см^4. Момент инерции сечения отвала или поперечины рамы $I_{II} = 10\,781$ см^4.

После подстановки численных значений в формулу (VIII) находим $M_B = M_C = -2{,}125\,P'$, при $k = 17{,}45$ и $N = 37{,}9$,

(X) $$M_A = \frac{P'(l/2)^2}{l} + M_B = 51{,}685\,P'.$$

На рис. 2 представлена эпюра изгибающих моментов, действующих на отвал бульдозера. По формуле (IX) определим перемещение (деформацию) по линии действия силы P':

$$\Delta'_{из} = 13{,}1\,P'^2\ [\text{см}], \quad U'_{из} = \frac{P'\Delta_{из}}{2} = 6{,}55 \cdot 10^{-6} P'^2\ [\text{кгсм}].$$

BUDAPEST MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Для определения $U''_{из}$ рассмотрим расчетную схему, представленную на рис. 3. Сечение поперечной балки бульдозера показано на рис. 4. Момент инерции верхнего элемента I (рис. 4) относительно оси $y-y$ в средней части балки BC, $I_{y_1}=970$ см^4, то же на консольных участках AB и CD, $I''_{y_1}=580$ см^4. Момент инерции уголка II относительно той же оси $y-y$, $I_{y_2}=284$ см^4. Таким образом, момент инерции сечения

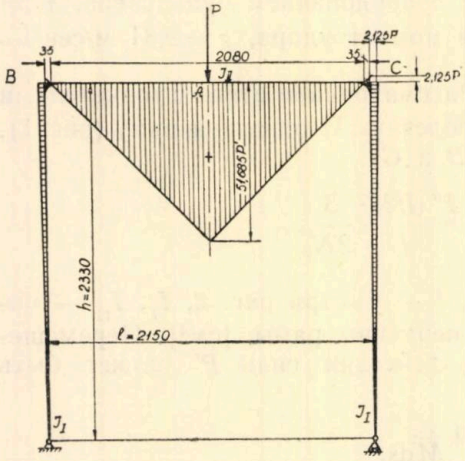


Рис. 2. — Расчетная схема отвала с толкателями.

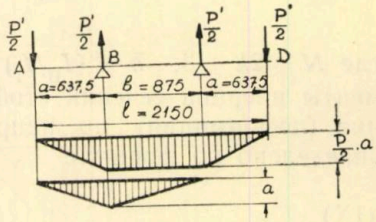


Рис. 3. — Расчетная схема поперечной балки.

балки относительно оси $y-y$ на среднем участке BC, $I'_{III}=970+284=1\,254$ см^4, а на консольных участках AB и CD $I''_{III}=580+284=864$ см^4.

Величину деформации балки по линии действия сил $P'/2$ в точках A и D, передаваемых от продольных балок, определим, пользуясь также правилом Верещагина:

$$\Delta''_{из}=59\cdot10^{-6}P' \text{ [см]}, \quad U''_{из}=\Delta''_{из}P/4=14{,}75\cdot10^{-6}P'^2 \text{ [кгсм]}.$$

Так как у отвала бульдозера отношение ширины стенок к их толщине более 5...10, то он может быть отнесен к тонкостенным стержням. Профиль отвала имеет сложную форму — в верхней части он открыт, в нижней — замкнут (рис. 5). В рассматриваемом случае ввиду того, что концы отвала, к которым приварены боковые стенки не деформируются, имеет место стесненное кручение. Чтобы найти крутящий момент, действующий на отвал при ударе, необходимо определить координаты центра изгиба $Д$, а для этого, в свою очередь, требуется найти положение главных центральных осей сечения отвала $X_{гл}$, $Y_{гл}$.

Координаты центра изгиба $Д$ относительно центральных главных осей $X_Д$, $Y_Д$ можно определить по формулам :

$$\text{(XI)} \qquad X_Д=\frac{\int\omega' y\delta\,ds}{I_x}, \quad Y_Д=-\frac{\int\omega' x\delta\,ds}{I_y},$$

где: ω' — ординаты эпюры единичной депланации, построенной при полюсе C, совмещенным с центром тяжести сечения, x и y — координаты точек средней линии в главных центральных осях, δ — толщина стенки профиля, $I_x = \int\limits_F y^2 \, dF = \int y^2 \delta \, ds$ — момент инерции сечения относительно оси $X_{гл}$, $I_y = \int\limits_F x^2 \, dF = \int x^2 \delta \, ds$ — момент инерции сечения относительно оси

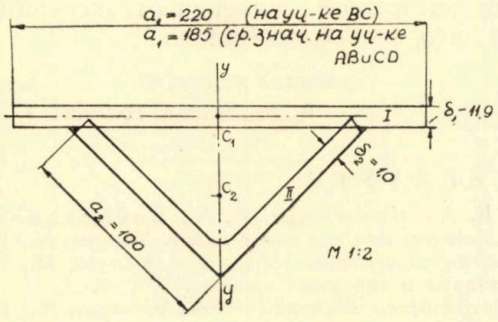


Рис. 4. — Сечение поперечной балки бульдозера.

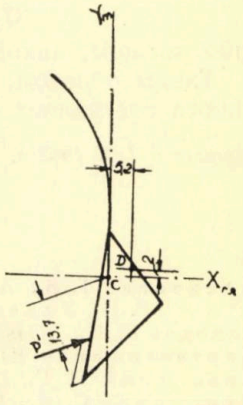


Рис. 5. — Профиль отвала бульдозера.

$Y_{гл}$. Формулы (XI) охватывают как открытые, так и замкнутые части профиля. В последнем случае вместо ω' подставляют $\widehat{\omega}' = \omega' - (\omega_k / S_k) S'$, где ω' — удвоенная площадь, охватываемая вращающимся радиусом из центра C, ω_k — удвоенная площадь контура, охватываемого средней линией, S'_k — приведенный периметр средней линии профиля сечения, S' — приведенная длина дуги, соответствующая площади ω', $Y_Д = +2$ см, $X_Д = +5{,}2$ см; центр изгиба $Д$ нанесен на рис. 5, $M_{кр} = 13{,}7\,P'$ [кгсм], $U_{кр} = M_{кр}\varphi/2$ [кгсм], где $\varphi = \dfrac{M_{кр}(l/2)}{2GI_k}$ — угол закручивания, $G =$ $= 0{,}79 \cdot 10^6$ кг/см^2 — модуль сдвига стали, $I_k = \dfrac{1}{3}\sum S_i \delta_i^3 + \dfrac{\omega_k^2 \delta_c}{S'_k} =$ $= 3\,833{,}4$ см^4 — момент инерции кручения, где первый член относится к открытой, а второй к замкнутой части профиля,

$$U_{кр} = \frac{13{,}7 \cdot P'}{2} \frac{13{,}7 \cdot P' \cdot 112{,}5}{2 \cdot 0{,}79 \cdot 10^6 \cdot 3.833{,}4} = 1{,}75 \cdot 10^{-6} P'^2 \quad [кгсм].$$

Найденные численные значения потенциальной энергии деформации частей бульдозера при ударе подставляем в уравнение (VI). Зная глубину сферического отпечатка, полученного на поверхности плиты-препятствия, при ударе, легко определить энергию, затрачиваемую на местную деформацию

$$U_м = \alpha P'/2 = 0{,}15 P'/2 . = 0{,}075 P' \text{ [кгсм]}.$$

Упругой частью деформации в данном случае пренебрегаем.

После подстановки численных значений в уравнение (VI) получаем квадратное уравнение

$$37{,}8 . 10^{-6} P'^2 + 0{,}075 P' - 17\,230 = 0,$$

решая которое, находим $P' = 20\,300$ кг.

Таким образом, отклонение расчетного значения от экспериментального составляет $\Delta = +14\%$, что вполне приемлемо.

Поступила в 1 X 1962 г.

Грузинский политехнический институт им. В. И. Ленина, Тбилиси, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеева Т. В., Артемьев К. А., Бромберг А. А., Войцеховский Р. И., Ульянов Н. А., *Машины для земляных работ*. Машгиз, М., 1959.
2. Горохов В. Н., *Бульдозеры, кусторез, корчеватели-собиратели*. Машгиз, М., 1952.
3. Картвелишвили Ю. Л., Строительные и дорожные машины, 1960, *8*.
4. Львовский П. Г., *Справочное руководство механика*. Металлургиздат, М., 1953.
5. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л. и др., *Расчеты на прочность в машиностроении*. Т. **III**, Машгиз, М., 1959.
6. Погодин-Алексеев Г. И., *Свойства металлов при ударном нагружении*. Металлургиздат, М., 1953.
7. Сатель Э. А. (ред.), *Справочник машиностроителя*. Т. **6**, Машгиз, М., 1956.
8. Серенсен С. В., *Справочник машиностроителя*. Т. **3**, Машгиз, М., 1955.
9. Успенский А. А. (ред.), *Справочник проектировщика*. Госстройиздат, М., 1960.

ÎNCERCAREA LA ŞOC A LAMEI BULDOZERULUI

(Rezumat)

Se expun rezultatele încercărilor la şoc a lamei buldozerului D-159, montat pe tractorul DT-54A, efectuate în anul 1962 la Institutul politehnic „V. I. Lenin" din Tbilisi, U. R. S. S.

Efortul dinamic maxim al încercărilor la şoc este comparat cu valorile de calcul obţinute prin egalarea energiei cinetice a întregului agregat cu energia potenţială de deformaţie a elementelor buldozerului.

Ecartul valorilor de calcul faţă de cele experimentale reprezintă 14% şi se cuprinde în coeficientul de siguranţă.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Graficul $\sigma_{s\,din}/\sigma_s = f(\sigma_s)$.
Fig. 2. — Schema de calcul a lamei cu tachete.
Fig. 3. — Schema de calcul a barei transversale.
Fig. 4. — Secţiunea transversală a barei buldozerului.
Fig. 5. — Profilul lamei buldozerului.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1—2, 1966

Construcţii. Hidrotehnică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XII (XVI), вып. 1—2, 1966

Строительство. Гидротехника

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XII (XVI), 1—2, 1966

Constructions. Hydrotechnics

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 624.04

PROIECTARE OPTIMIZATĂ A STRUCTURILOR, ÎN DOMENIUL PLASTIC, CU AJUTORUL ANALOGIEI ELECTRONICE

DE

ANTON ŞESAN, GH. POPESCU şi D. VASILESCU

1. Introducere

În proiectarea rațională a structurilor, și în special a celor metalice, problema calculului plastic la greutate minimă prezintă o importanță deosebită. Acest gen de calcul nu se utilizează în prezent datorită faptului că reclamă un volum extrem de mare de lucru (compararea de numeroase variante, fiecare necesitînd un calcul laborios). De aceea, proiectarea se mărginește, în general, la verificarea și corectarea unei predimensionări inițiale, deși distribuirea eforturilor pe structură depinde tocmai de rapoartele dintre caracteristicile diferitelor elemente componente.

Folosirea metodei matematice a programării liniare face însă posibilă soluționarea directă a problemei la un calculator electronic.

Într-adevăr, considerînd greutatea structurii ca funcție liniară de momentele plastice ale barelor l_i (aproximație admisibilă și unanim acceptată),

$$g = \sum_i l_i M_i, \tag{1}$$

proiectarea la greutate minimă apare ca o problemă de programare liniară.

Se știe că în calculul plastic trebuie satisfăcute trei condiții: de echilibru, de mecanism și de curgere.

În metoda combinării mecanismelor elementare (Neal-Symonds) trebuie găsite limitele inferioare ale momentelor plastice, ce satisfac condițiile de echilibru și de mecanism.

În metoda distribuției momentelor plastice capabile (Horne) se caută limitele lor superioare, plecînd de la condițiile de echilibru și de curgere, urmărind realizarea mecanismului.

W. Prager combină aceste metode folosind alternativ condițiile de echilibru și curgere și condițiile de echilibru și de mecanism, în etape diferite ale unui calcul complet automatizat.

Fiecare operație din prima etapă reduce greutatea structurii cu o cantitate finită; etapa a doua indică dacă s-a obținut sau nu soluția finală. În cazul că n-a fost obținută, se arată ce ajustări trebuie făcute pentru a putea aplica din nou prima etapă.

Fiecare din aceste metode este echivalentă cu cîte o problemă de programare liniară, iar operaţiile respective de calcul pot fi efectuate la un calculator electronic numeric.

Din punct de vedere practic este important să explorăm soluţiile unei clase întregi de probleme, obţinute prin variaţia parametrilor, în vederea optimizării problemelor de programare liniară [1]...[3].

În acest scop este mai indicată folosirea unui calculator analogic. Metodele propuse se bazează pe analogii geometrice sau dinamice într-un spaţiu euclidian n-dimensional (n fiind numărul necunoscutelor problemei).

Analogul folosit de M. Zaid şi L. Ryder simulează şi automatizează procedeul geometric de minimizare a funcţiei de greutate supusă condiţiilor liniare ce se obţin prin aplicarea principiului lucrului mecanic virtual [4]. Deşi unele funcţii mecanizate pot fi substituite manual, analogul rămîne totuşi prea complicat şi costisitor.

Transformatoarele liniare reversibile folosite în modelele construite de V. V. Vasiliev şi A. N. Klepikova reduc numărul de elemente electronice utilizate circuitele rămînînd absolut stabile [5].

Este interesant şi modul original de organizare al tehnicii ANALAC care înlocuieşte problemele de optimizare prin soluţionarea unor sisteme de ecuaţii diferenţiale implicite, supuse la anumite condiţii. Aceste ecuaţii sînt introduse în calculator cu ajutorul unui bloc de calcul standard [6].

2. Programarea şi rezolvarea problemei prin calculator analogic

În cele ce urmează vom ilustra procedeul propus printr-un exemplu practic. Să considerăm în acest scop un cadru portal simplu avînd deschiderea egală cu dublul înălţimii (fig. 1).

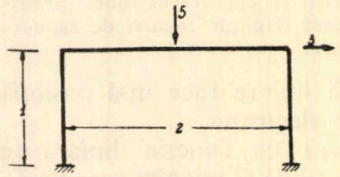


Fig. 1

Folosind metoda Neal-Symonds şi eliminînd inegalităţile mai puţin restrictive, obţinem:

$$g = 2m_1 + 2m_2, \tag{2}$$

pentru care

$$2m_1 + 2m_2 \geqslant 5,\ m_1 + 2m_2 \geqslant 4,\ 2m_1 + m_2 \geqslant 4,\ (m_1 \geqslant 0,\ m_2 \geqslant 0). \tag{3}$$

Calculatorul analog substituie variabilele problemei, m_1, m_2 şi greutatea g, prin tensiunile corespunzătoare:

$$M_1 = a_1 m_1,\ M_2 = a_2 m_2,\ G = a_g g, \tag{4}$$

astfel încît

$$G = C_1 M_1 + C_2 M_2 \tag{2'}$$

converge la un minim odată cu creşterea timpului, pentru

$$Y_1 = A_{11} M_1 + A_{12} M_2 - 1 \geqslant 0,\ Y_2 = A_{21} M_1 + A_{22} M_2 - 1 \geqslant 0,$$
$$Y_3 = A_{31} M_1 + A_{32} M_2 - 1 \geqslant 0, \tag{3'}$$

unde

(5) $$C_k = a_g \frac{c_k}{a_k}, \quad A_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{i0}\ a_k}, \quad (k = 1,2;\ i = 1,2,3),$$

în care c_k sînt coeficienţii funcţiei liniare de greutate (2), iar a_{ik} şi a_{i0} sînt coeficienţii, respectiv termenii liberi, ai inegalităţilor restrictive (3).

Alegem factorii de scară

(6) $$a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_g = \frac{1}{8}$$

astfel încît:

$$M_k,\ C_1 = C_2 = \frac{1}{2},\ A_{11} = \frac{4}{5},\ A_{21} = \frac{1}{2},\ A_{31} = 1,$$

$$A_{12} = \frac{4}{5},\ A_{22} = 1,\ A_{32} = \frac{1}{2}$$

să fie subunitari.

Variabilele M_1 şi M_2 pot fi considerate drept coordonate ale unui punct din spaţiul euclidian bidimensional, numit de noi *punct obiectiv*.

Cum funcţia obiectiv (2') este uniformă şi continuă, putem defini vectorul grad $G = C_1 \mathbf{i}_1 + C_2 \mathbf{i}_2$, cu versorii $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$.

Restricţiile $Y_i = 0$ reprezintă treptele ce mărginesc regiunea permisă (în care toate inegalităţile sînt satisfăcute) de regiunea nepermisă (unde cel puţin o inegalitate este violată).

Se definesc atunci vectorii $\mathbf{N}_i$, normali pe marginile i şi orientaţi înspre regiunea permisă:

$$\mathbf{N}_i = -\left(\frac{\mathbf{i}_1}{A_{i1}} + \frac{\mathbf{i}_2}{A_{i2}}\right), \quad (i = 1,2,3).$$

Limitatorii (v. [1]) din montajul folosit ne dau tensiunile Λ_i, cu

$$\Lambda_i \begin{cases} = 0 \text{ cînd } Y_i \geqslant 0, \\ < 0 \text{ cînd } Y_i < 0. \end{cases}$$

Cît timp toate inegalităţile

$$Y_1 = \frac{4}{5} M_1 + \frac{4}{5} M_2 - 1 \geqslant 0,\ Y_2 = \frac{1}{2} M_1 + M_2 - 1 \geqslant 0,$$

$$Y_3 = M_1 + \frac{1}{2} M_2 - 1 \geqslant 0$$

sînt satisfăcute, viteza punctului obiectiv are componentele negative ($-C_k = -\partial G/\partial M_k$), greutatea avînd tendinţa să se micşoreze.

Dacă cel puţin o inegalitate este violată, de exemplu $Y_k < 0$, atunci, pentru restabilirea ei se exercită asupra punctului obiectiv o puternică „forţă de împiedicare" ce determină modificarea vitezei prin $-\Lambda_i A_{ik}$. Punctul obiectiv, care pătrunsese în regiunea nepermisă prin străpungerea marginii $Y_k = 0$, va fi determinat să revină în interiorul regiunii permise.

Considerăm vectorul de poziţie al punctului obiectiv $\mathbf{r} = M_1 \mathbf{i}_1 + M_2 \mathbf{i}_2$. Atunci, pentru viteza $\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$ vom avea:

$$-\frac{\mathrm{d}M_k}{\mathrm{d}t} = C_k + A_{1k}\Lambda_1 + A_{2k}\Lambda_2 + A_{3k}\Lambda_3, \quad (k = 1, 2),$$

care furnizează valorile M_1 şi M_2 la ieşirile a doi integratori-sumatori.

Montajul mai foloseşte trei amplificatori sumatori şi trei limitatori ($3 + 3 = 6$ — dublul numărului de inegalităţi restrictive). Schema de calcul este dată în fig. 2.

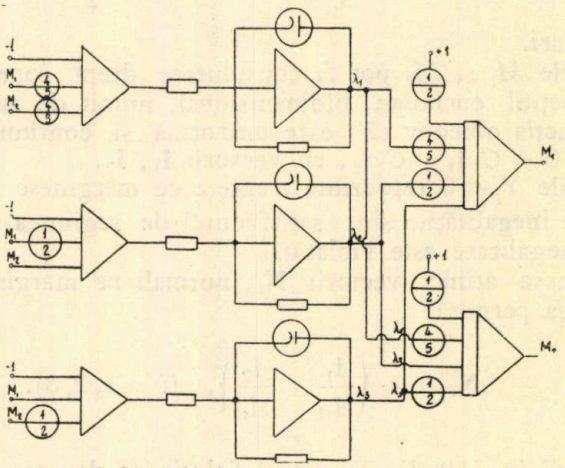


Fig. 2

Fiecare tensiune $-Y_i$ apare la ieşirea unui amplificator sumator, fiind apoi introdusă în cîte un limitator. Tensiunile rezultante (Λ_i) sînt grupate la intrările integratorilor-sumatori:

$$-\frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} + \frac{4}{5}\Lambda_1 + \frac{1}{2}\Lambda_2 + \Lambda_3, \quad -\frac{\mathrm{d}M_2}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} + \frac{4}{5}\Lambda_1 + \Lambda_2 + \frac{1}{2}\Lambda_3 .$$

Calculele s-au efectuat la un analizator diferenţial MEDA, la care s-au adaptat cei trei limitatori cu diode.

Punctul obiectiv se deplasează în interiorul regiunii permise pînă cînd atinge o restricţie-margine, fie ea j. Dacă N_j este mai mare decît componenta vectorului grad G, punctul va fi aruncat din regiunea neper-

misă în regiunea permisă. Aici $\Lambda_j N_j$ se va anula din nou, componenta vectorului grad G provocînd ejectarea punctului în regiunea nepermisă. El va fi iarăşi întors, mişcarea continuînd de-a lungul marginii dintre regiunea permisă şi regiunea nepermisă, după o traiectorie „dinţi de fierestrău", înspre vîrful corespunzător greutăţii minime.

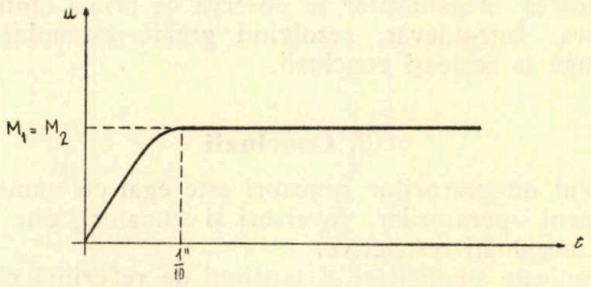


Fig. 3

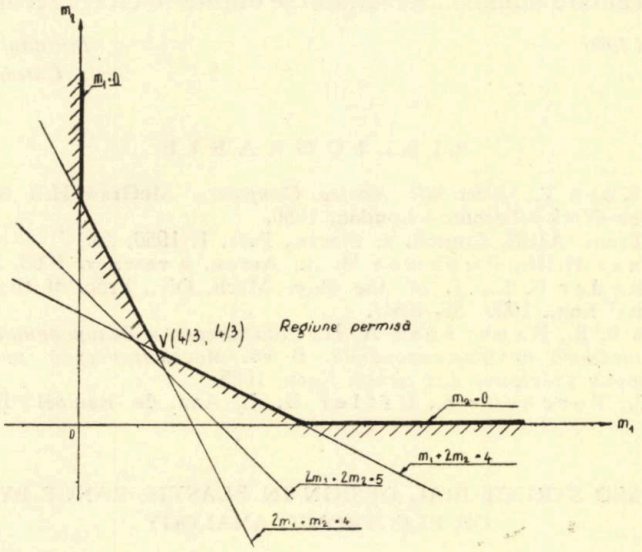


Fig. 4

Soluţia rezultă după aproximativ o zecime de secundă de la începutul procesului de calcul, ca ordonată a porţiunii de traiectorie paralelă cu axa timpului, aşa cum apare pe ecranul osciloscopului (fig. 3).

Rezultă $m_1 = m_2 = 1,3$ (prin algoritmul simplex s-a obţinut $m_1 = m_2 = 4/3$).

Modificînd încărcările, de la perechea (*5, 3* — fig. 1) la perechea (*5, 4*), voltmetrul digital ne dă $M_1 = M_2 = 37$ V ($m_1 = m_2 = 1{,}48$); pentru perechea (*6, 3*), $M_1 = M_2 = 37$ V, pentru perechea (*6, 4*), $M_1 = M_2 = 41$ V ($m_1 = m_2 = 1{,}64$), iar pentru perechea de încărcări (*8, 2*), $M_1 = M_2 = 50$ V ($m_1 = m_2 = 2$).

În aceste determinări, tensiunea de referinţă a fost de 50 V.

La verificarea inegalităţilor se observă că prima dintre ele este mai puţin restrictivă. Într-adevăr, rezolvînd grafic exemplul acesta simplu (fig. 4) se ajunge la aceleaşi concluzii.

3. Concluzii

a) Numărul integratorilor sumatori este egal cu numărul necunoscutelor, iar numărul operatorilor, inversori şi sumatori, este egal cu dublul numărului de inegalităţi restrictive.

b) Sînt indicate amplificări şi tensiuni de referinţă mari.

c) Analogul electronic permite o rezolvare extrem de uşoară a problemei calculului structurilor în domeniul plastic, inclusiv optimizarea soluţiei (la greutate minimă). Rezultatul se obţine în cîteva zecimi de secundă.

Primit la 10 VI 1966

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de statică

BIBLIOGRAFIE

1. Korn G., Korn T., *Electronic Analog Computers*. McGraw-Hill Book Company, New-York—Toronto—London, 1956.
2. Pyne B., Trans. AIEE, Comun. a. Electr., Part. 1, 1956, *24*.
3. Карпинская Н. Н., Рыбашов М. В., Автом. и телемех, 1963, *3*.
4. Zaid M., Ryder F. L., J. of the Eng. Mech. Div., Proc. of the Amer. Soc. of Civil Eng., 1960, **86**, *EM1*.
5. Васильев В. В., Клепикова А. Н., *Два метода моделирования общей задачи линейного программирования*. В сб. *Математической моделирование и теория электрических цепей*. Киев, 1965.
6. Honoré E., Torcheux E., Uffler H. J., Ann. de Radioél., 1963, **XVIII**, *72*.

OPTIMISED STRUCTURAL DESIGN IN PLASTIC RANGE BY MEANS OF ELECTRONIC ANALOGY

(Abstract)

The problem of plastic design for minimal weight is treated by means of the mathematical method of linear programming, using an electronic folower adapted to the differential analysor MEDA. The design is illustrated on a portal frame by determining the optimal cross-sections for the different pairs of loadings.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 624 ; 534.8

IZOLAREA ACUSTICĂ LA CLĂDIRI DE LOCUIT DIN BETON ARMAT

DE

VIRGIL FOCŞA, ADRIAN RADU, AL. VEREŞ, LEOPOLD BIBOROSCH
şi C. LUPAŞCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

La clădirile cu structură din beton armat, sub formă de panouri mari sau diafragme monolite, se constată că transmisia zgomotelor este favorizată de continuitatea armăturilor şi betonului. Din această cauză, măsurile obişnuite de izolare acustică nu au eficienţa necesară.

Asigurarea confortului acustic în aceste clădiri implică cercetări la construcţii terminate, deoarece propagarea sunetelor prin structura de rezistenţă exclude posibilitatea efectuării lor la scara permisă de dimensiunile laboratorului.

2. Metode de lucru

Pentru a obţine rezultate concludente, încercările au fost efectuate numai în clădiri finisate, la care s-au utilizat diferite soluţii constructive.

La încercările, referitoare la transmisia zgomotului aerian, s-a folosit ca sursă un grup de difuzoare de 25 W. Caracteristica zgomotului emis este prezentată în fig. 1. Nivelul de presiune acustică este suficient de ridicat pentru a nu permite alterarea rezultatelor datorită zgomotului de fond. Spectrul de frecvenţe şi nivelul de presiune este apropiat de un zgomot alb şi a fost preferat în locul zgomotului vobulat deoarece micşorează durata determinărilor de teren.

Concomitent cu emisia zgomotului alb s-au efectuat imprimări la magnetofon şi măsurări ale nivelului de presiune acustică în camera de

emisie şi în încăperea de recepţie. Pentru măsurarea nivelului de presiune sonoră s-a utilizat fonometrul LSM-2, de fabricaţie germană.

Gradul de izolare acustică (D_n) la transmisia zgomotului aerian de o anumită frecvenţă, s-a calculat cu relaţia:

$$D_n = L_1 - L_2 + 10 \log \frac{A}{A_0}, \tag{1}$$

în care: L_1 şi L_2 — nivelele de presiune acustică medie pentru o anumită frecvenţă, în camerele de emisie şi recepţie, exprimate în dB, $A_0 =$ $= 10$ — absorbţia acustică de referinţă, în m^2, $A = 0{,}16$ — absorbţia calculată a încăperii de recepţie, în m^2.

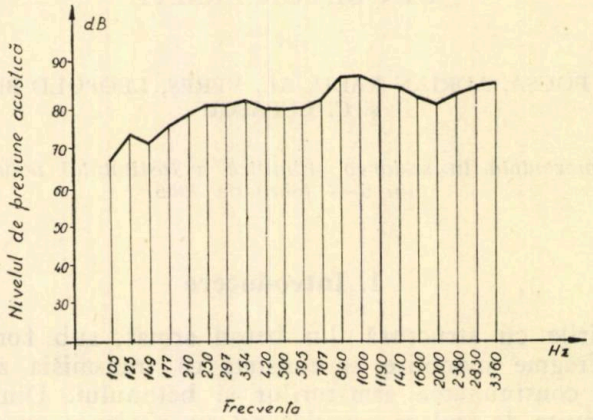


Fig. 1. — Spectrul zgomotului alb utilizat pentru determinarea capacităţii de izolare la transmisia zgomotelor aeriene.

Nivelul de presiune acustică medie $L_{1,2}$ rezultă din relaţia:

$$L_{1,2} = 10 \log \frac{p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_n^2}{np_0}, \tag{2a}$$

în care: $p_1, \ldots, p_n$ — presiunile acustice din încăperea respectivă, măsurate în n poziţii diferite, iar p_0 — presiunea acustică de referinţă (2.10^{-4} μ bar). Întrucît s-a utilizat un fonometru care indică direct nivelul de presiune acustică, s-a folosit relaţia (2a) sub forma:

$$L_{1,2} \cong \frac{20 \log (p_1/p_0) + 20 \log (p_2/p_0) + \cdots + 20 \log (p_n/p_0)}{n}. \tag{2b}$$

În laborator s-a efectuat, la spectrometrul de frecvenţe $FS_p.10$, analiza imprimărilor la magnetofon, obţinîndu-se spectrul zgomotului înre-

gistrat în benzi de 1/4 octavă. Între nivelul total de presiune (L) determinat cu fonometrul avînd caracteristica liniară şi nivelele L_i, stabilite la spectrometru pentru fiecare bandă de frecvenţe, există relaţia [1]:

$$L = 10 \log (10^{L_i/10} + 10^{L_{i+1}/10}), \tag{3}$$

sumarea efectuîndu-se pentru toate frecvenţele.

Pentru stabilirea izolării acustice la zgomotul de impact s-a folosit relaţia

$$L_n = L - 10 \log (A_0/A), \tag{4}$$

în care (cf. STAS 6161-60), L — nivelul mediu de presiune acustică în camera situată sub planşeul care acţionează ciocanul standard.

3. Caracteristici de izolare la zgomotul aerian

În fig. 2 se prezintă schema de plan a blocului 8/5 cu structură de beton armat monolită, realizată cu cofraj demontabil, şi a blocului 7/5 cu structură din panouri mari de beton armat prefabricate, la care s-au efectuat determinări ale caracteristicilor acustice. Între camerele de emisie (A) şi de recepţie (B), peretele din beton armat are grosimea de 18 cm la blocul 8/5 şi de 14 cm la blocul 7/5. În fig. 3 se prezintă variaţia indicelui de atenuare la transmisia zgomotului aerian (D_n) pentru cele două structuri.

În raport cu valorile minime prevăzute de STAS 6156-60 se constată că structura blocului 8/5, cu perete despărţitor de 18 cm, prezintă rezultate favorabile, cu excepţia frecvenţelor din benzile de 140...180 Hz şi 640...1 200 Hz, la care capacitatea de izolare este cu aproximativ 5 dB mai mică decît cea necesară. În ceea ce priveşte blocul 7/5, cu perete de 14 cm, capacitatea de izolare acustică este nesatisfăcătoare în zona de frecvenţe joase şi medii (50...1 200 Hz).

Se remarcă faptul că valorile atenuărilor obţinute se situează sub indicaţiile din literatura tehnică pentru pereţi cu masă echivalentă, fapt ce se explică prin transmisia favorabilă a zgomotelor prin structură.

În fig. 4 se prezintă rezultatele obţinute relative la capacitatea de izolare la transmisia zgomotului aerian produs de o centrală electrică cu motoare Diesel. Determinările au fost efectuate atît în exteriorul clădirii cît şi în interiorul ei. Se constată că datorită ferestrei mari, cu capacitate redusă de izolare acustică, nivelul de presiune în încăpere depăşeşte limita de confort în domeniul frecvenţelor joase (50...300 Hz). De asemenea apare necesară o zonă de protecţie între clădirile de locuit şi sursa de zgomot industrial, pentru a asigura confortul acustic.

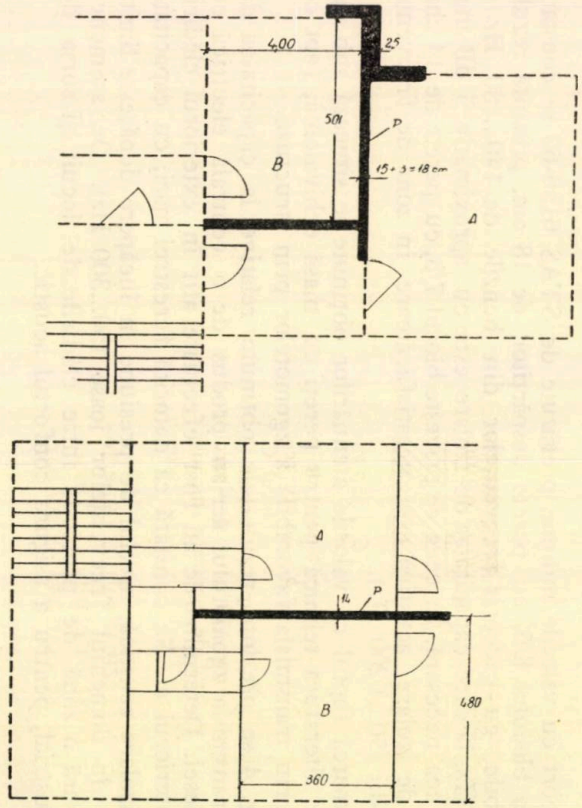


Fig. 2. — Schemă de plan a apartamentelor situate în blocul 8/5 (beton monolit) şi 7/5 (panouri mari prefabricate).
A — cameră de emisie, *B* — cameră de recepţie, *P* — perete încercat la transmisia zgomotului aerian.

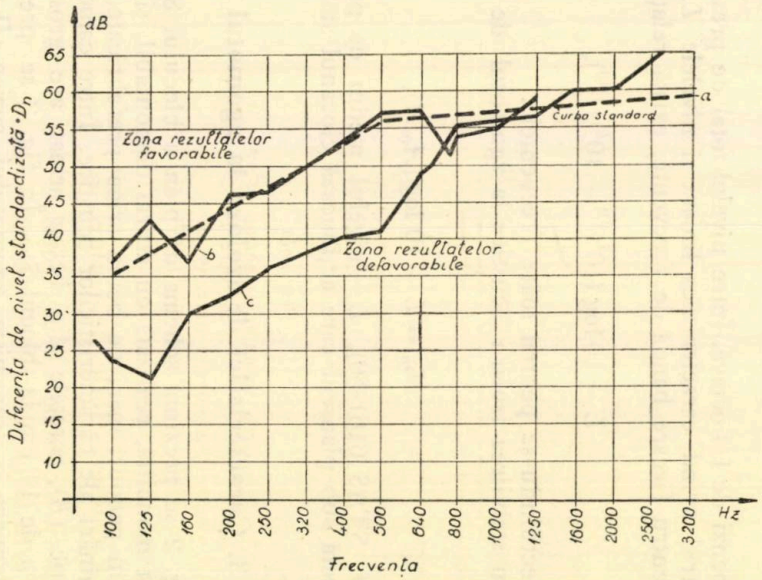


Fig. 3. — Indici de atenuare la transmisia zgomotelor aeriene pentru blocurile 8/5 şi 7/5.
a — curba standard, *b* — indici D_n pentru blocul 8/5, *c* — indici D_n pentru blocul 7/5.

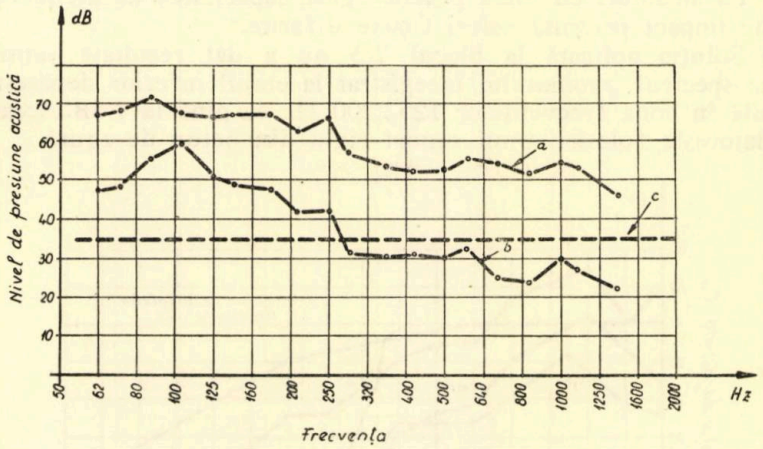


Fig. 4. — Atenuarea zgomotului aerian produs de o centrală electrică cu motoare Diesel.
a — spectrul zgomotului exterior, *b* — spectrul zgomotului interior, *c* — nivelul mediu admisibil.

4. Caracteristicile de izolare la zgomotul de impact

Capacitatea de izolare la zgomotul de impact a fost determinată prin încercări efectuate la clădiri cu diferite alcătuiri ale structurilor pardoseală-planşeu.

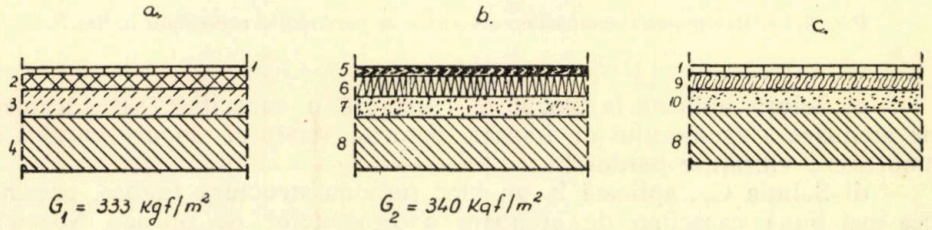


Fig. 5. — Soluţii de planşeu-pardoseală.
a — soluţii realizate la blocul 7/5, *b* — soluţii realizate la blocul 8/5, *c* — soluţii realizate la blocul C_1.
1 — parchet lamelar (1 cm), *2*—şapă de mortar (2 cm), *3*—beton de zgură (5 cm), *4* — placă prefabricată din beton armat (10 cm), *5* — parchet normal de fag (1,7 cm), *6* — plăci de rumbeton (4 cm), *7* — strat de egalizare din nisip (3 cm), *8* — placă monolită din beton armat (10 cm), *9* — PFL poros (2 cm), *10* — strat de egalizare din nisip (4 cm).

În fig. 5 se prezintă soluţii experimentale realizate la clădiri cu structuri din beton armat. Rezultatele încercărilor sînt prezentate în fig. 6. Din cercetarea lor se constată următoarele:

a) La structuri cu masa practic egală, capacitatea de atenuare la zgomotul de impact prezintă valori foarte diferite.

b) Soluția aplicată la blocul 7/5 nu a dat rezultate satisfăcătoare deoarece spectrul zgomotului înregistrat la etajul inferior depășește limita admisibilă în zona frecvențelor 125...300 Hz cu pînă la 7 dB. Această situație se datorește folosirii unui suport rigid din beton de zgură.

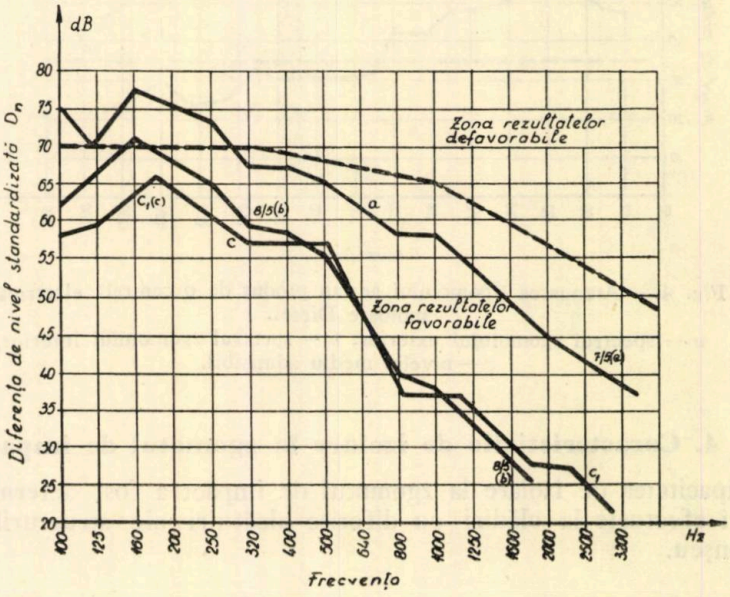


Fig. 6. — Rezultatele încercărilor efectuate la pardoselile prezentate în fig. 5.

c) Soluția aplicată la blocul 8/5 prezintă o capacitate satisfăcătoare de atenuare a zgomotului de impact, datorită stratului suport capabil să amortizeze vibrațiile pardoselii.

d) Soluția C_1, aplicată la un bloc turn cu structură fagure, prezintă cea mai bună capacitate de atenuare a zgomotelor de impact. Spectrul zgomotului înregistrat se situează integral sub curba limită admisibilă.

Spre deosebire de rezultatele obținute la transmisia zgomotului aerian se constată că la zgomotul de impact, transmisia prin structură nu influențează sensibil rezultatele, cu condiția ca pardoseala să fie separată de planșeu printr-un strat de amortizare a vibrațiilor, iar la contactul cu pereții din beton să se asigure un rost fonoabsorbant care să împiedice transmisia energiei acustice prin elementele verticale ale structurii. Această concluzie este confirmată de numeroase încercări efectuate la alte construcții, cu utilizarea unor materiale superioare de amortizare a vibrațiilor între pardoseală și planșeu.

În fig. 7 se prezintă o structură executată cu polistiren expandat la care s-a realizat umplerea rostului cu pîslă între pardoseală şi pereţii de beton. Spectrul de zgomot se situează integral sub nivelul maxim admis.

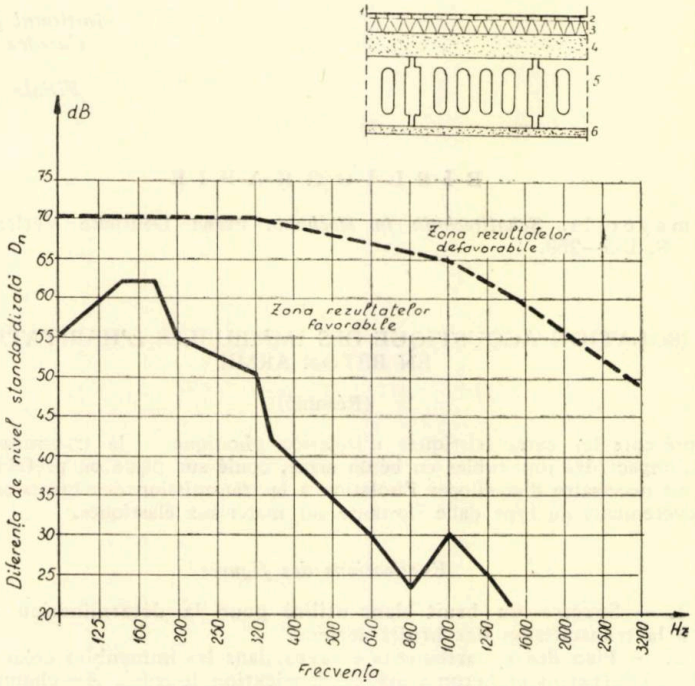


Fig. 7. — Atenuarea zgomotului de impact. Rezultatele încercării structurii cu planşeu din fişii prefabricate.
1 — covor PVC (3 mm), *2* —PFL (5 mm), *3* — polistiren (25 mm), *4* — nisip (3...6 cm), *5* — fişii cu goluri, *6* — tencuială (1,5 cm).

5. Concluzii

Clădirile cu structură din beton monolit şi prefabricat favorizează transmisia zgomotelor între încăperi datorită continuităţii betonului şi armăturilor.

Această caracteristică reduce capacitatea de izolare fonică la transmisia zgomotelor aeriene şi implică măsuri constructive adecvate. Pereţii din beton cu grosimi ce asigură o masă echivalentă pereţilor din zidărie de cărămidă nu satisfac cerinţele de confort acustic. La pereţii dintre apartamente trebuie realizată o eficienţă acustică superioară prin strat de aer şi prin finisaje fonoabsorbante.

Structurile de beton asigură confortul la transmisia zgomotelor de impact cu condiţia ca pardoselile să fie prevăzute cu strat de amortizare, după principiul dală flotantă, iar rostul între pardoseală şi perete să fie umplut cu material fonoabsorbant.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de construcţii
şi
Filiala INCERC, Iaşi

BIBLIOGRAFIE

1. Bruckmayer Fr. *Schalltechnik im Hochbau.* Franz Deuticke Verlag, Wien, 1962, S. 185—259.

ISOLATION ACOUSTIQUE DES IMMEUBLES D'HABITATION EN BÉTON ARMÉ

(Résumé)

On présente les caractéristiques d'isolation phonique à la transmission des bruits aériens et d'impact des immeubles en béton armé, coulé sur place ou préfabriqué. On constate qu'il est nécessaire d'améliorer l'isolation à la transmission des bruits aériens et d'utiliser des revêtements du type dalle flottante sur matériaux élastiques.

Explications des figures

Fig. 1. — Spectre du bruit blanc utilisé pour la détermination de la capacité d'isolation à la transmission des bruits aériens.

Fig. 2. — Plan des appartements essayés, dans les immeubles colectifs 8/5 (béton monolithe) et 7/5 (parois en béton armé, préfabrication lourde). *A* — chambre d'émission, *B* — chambre de réception, *P* — paroi essayée à la transmission du bruit aérien.

Fig. 3. — Affaiblisement des bruits aériens. Résultats concernant les immeubles 8/5 et 7/5. *a* — valeurs minimales standardisées, *b* — indices D_n pour l'immeuble 8/5, *c* — indices D_n pour l'immeuble 7/5.

Fig. 4. — Affaiblissement des bruits aériens provenant d'une centrale électrique à moteurs Diesel. *a* — spectre du bruit à l'extérieur, *b* — spectre du bruit à l'intérieur, *c* — niveau moyen admissible.

Fig. 5. — Solutions des revêtements. *a* — solution réalisée à l'immeuble 7/5, *b* — solution réalisée à l'immeuble 8/5, *c* — solution réalisée a l'immeuble C_1; *1* — lamelles de parquet (1 cm), *2* — enduit mortier (2 cm), *3* — béton de mâchefer (5 cm), *4* — dalle en béton armé (10 cm), *5* — lamelles de parquet (1,7 cm), *6* — dalles de béton organique, *7* — sable (3 cm), *8* — béton armé coulé sur place (10 cm), *9* — bois aggloméré poreux (2 cm), *10* — sable (4 cm).

Fig. 6. — Résultats des essais à la transmission des bruits d'impact pour les revêtements présentés dans la fig. 5.

Fig. 7. — Affaiblissement des bruits d'impact. Résultats des essais de la structure plancher avec dalles prefabriquées. *1* — rêvetement PVC (3 mm), *2* — bois aggloméré, *3* — polystirène expansé (25 mm), *4* — sable (3...6 cm), *5* — dalles préfabriquées, *6* — enduit mortier (1,5 cm).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 624.218

STUDIUL ÎN DOMENIUL PLASTIC AL CADRELOR METALICE PE MODELE LA SCARĂ REDUSĂ

DE

N. ORLOVSCHI, AL. DUMITRAŞ, C. AMARIEI, N. UNGUREANU
şi LUIZA TANASACHI

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

Cunoaşterea răspunsului structurilor la acţiuni care produc solicitări ce depăşesc limita de comportare elastică a materialului reprezintă una din condiţiile fără de care nu se poate concepe o proiectare raţională a construcţiilor.

Verificarea ipotezelor ce stau la baza metodelor de calcul, punerea în evidenţă şi elucidarea fenomenelor în comportarea reală a construcţiilor, nu pot fi efectuate decît pe cale experimentală, fie pe construcţii în mărime naturală, fie pe modele la scară redusă. Avantajele metodei de cercetare pe modele la scară redusă, şi anume: posibilitatea simplă de realizare a modelelor şi a diverselor ipoteze de studiu, posibilitatea de reluare fără dificultate a experimentării, obţinerea rapidă de rezultate, economicitatea etc., justifică larga folosire a metodei în studiul structurilor la acţiuni statice cît şi la cele dinamice [1]...[3] ş. a.

În cele ce urmează se prezintă unele din rezultatele obţinute pe modele de cadre multiple, referitoare la modificarea intervalului de adaptare statică în funcţie de tipul de încărcare, numărul de deschideri, influenţa autotensiunilor rezultate din acţionări repetate într-un singur sens sau în sensuri alternative.

Coeficienţii de adaptare statică, precum şi modificările pe intervalul de adaptare statică, ca de pildă variaţia limitei de comportare elastică, ordinea de apariţie a articulaţiilor plastice, caracterul zonal de plastificare şi altele, reprezintă elemente esenţiale pentru aprecierea rezervelor de capacitate portantă a structurilor.

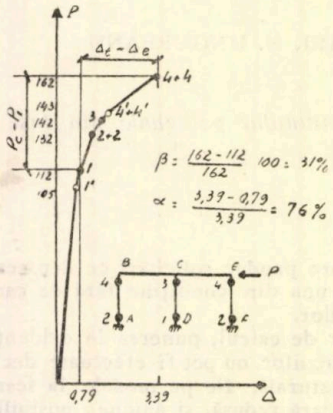
Prin coeficient de adaptare statică se înţelege raportul $\beta = 100\,(P_c - P_1)/P_c$, în care P_1 reprezintă sarcina la care apare prima articulaţie plastică, iar P_c — sarcina la care se produce mecanismul de cedare [4], [5]. Coeficientul β se exprimă în procente raportat la sarcina limită P_c; coeficientul referitor la deformaţii, notat cu $\alpha = 100\,(\Delta t - \Delta e)/\Delta t$, se raportează la deformaţia totală

după cum se arată în fig. 1 din diagrama fundamentală forţă-deformaţie pentru un cadru cu două deschideri cu rigla dreaptă, Δe fiind deformaţia elastică.

2. Modelele şi aparatura

S-au încercat modele de cadre cu riglă dreaptă şi frîntă, cu una, două şi trei deschideri (fig. 2), acţionate la sarcini verticale (fig. 2a, 2b), orizontale (fig. 2c) şi simultan, atît verticale cît şi orizontale.

Modelele au fost confecţionate din oţel OL 38 de secţiune pătrată 10×10 mm, îmbinările dintre bare realizîndu-se sudat prin intermediul unor plăcuţe (fig. 2d).



o — teoretic ; • — experimental

Fig. 1

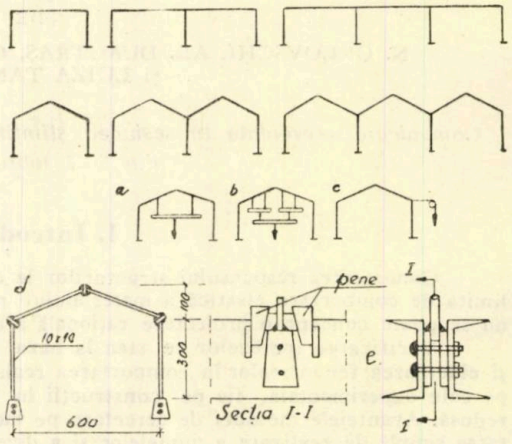


Fig. 2

Cadrele s-au montat pe stenduri de laborator, rezemările fiind realizate cu dispozitive cu rulmenţi pentru articulaţii sau cu pene pentru încastrări. În fig. 2e se dau detalii de rezemare şi se reprezintă o secţiune transversală prin grinda stendului.

Dimensiunile cadrelor încercate au fost următoarele: deschiderea $L = 60$ cm şi înălţimea $H = 30$ cm la cadrele cu rigla dreaptă şi respectiv $H = (30+10)$ cm la cadrele cu rigla frîntă. Încărcarea s-a aplicat în trepte cu greutăţi de cîte 10; 5; 2 şi 1 kg, prin intermediul unor tije sau cabluri şi demultiplicatori.

Evidenţierea zonelor în care s-a produs plastificarea s-a obţinut cu ajutorul lacurilor casante de tip IMAS-3, cu care s-au acoperit în întregime modelele. Pentru a asigura fisurarea lacului la atingerea limitei de curgere la oţel s-au efectuat încercări prealabile pe bare izolate, solicitate la întindere şi încovoiere.

Deplasările liniare s-au măsurat cu comparatoare de 1/100, montate pe suporţi în dreptul secţiunilor caracteristice.

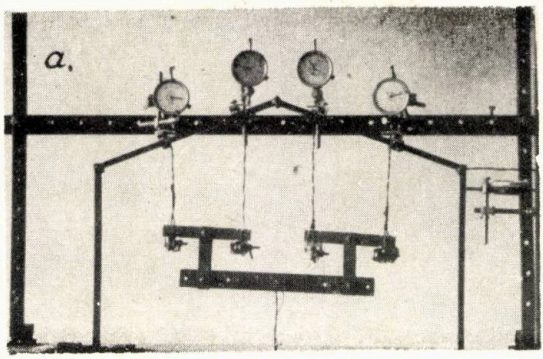


Fig. 3 a

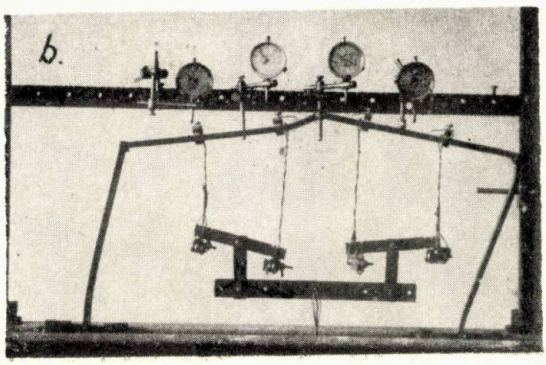


Fig. 3 b

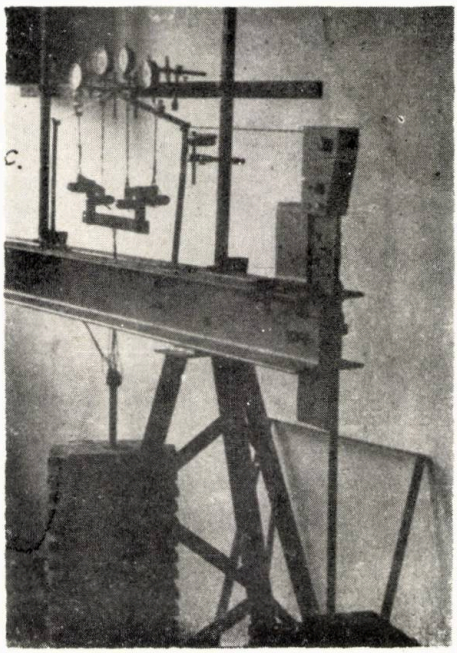


Fig. 3c

În fig. 3 este reprezentat cadrul cu rigla frîntă cu o deschidere, înainte de acţionare (a), după acţionare concomitent cu sarcini verticale şi orizontale (b), precum şi o vedere de ansamblu în timpul experimentării (c).

3. Rezultate experimentale

Analiza diagramelor forţă-deformaţii, stabilite pe seriile de încercări ale tipurilor de cadre specificate în paragraful precedent, permit stabilirea următoarelor concluzii:

a) *Coeficienţii de adaptare statică* se diferenţiază pe tipuri de structuri (cadre cu rigla dreaptă sau frîntă), atît sub raportul ipotezelor de încărcare cît şi sub raportul numărului de deschideri. Astfel, în ipoteza acţionării cu *sarcină orizontală* (o forţă concentrată aplicată la partea superioară a unuia din stîlpii exteriori), cadrele cu riglă dreaptă cedează prin mecanismul de deplasare, valoarea medie a coeficientului de adaptare statică fiind de circa 30%, independent de numărul deschiderilor. Pentru cadrele cu o singură deschidere s-a obţinut o valoare a acestui coeficient mai scăzută (26%). Coeficienţii obţinuţi pe cale teoretică sînt mai mici cu circa 10%, după cum rezultă din graficul din fig. 4, ceea ce ar indica o rezervă sporită de capacitate portantă la model, datorită printre altele şi rigidizării nodurilor cu plăcuţe şi sudură, de care în verificările teoretice nu s-a ţinut seama.

Pentru cadrele cu riglă frîntă au rezultat coeficienţi de adaptare statică mai mari, atît pe cale experimentală cît şi teoretic (fig. 4), ceea ce se poate explica prin participarea şi a riglelor la preluarea sarcinii, ele comportîndu-se ca nişte resoarte, determinînd ca mecanismul de cedare să fie combinat, articulaţiile plastice fiind atît pe stîlpi cît şi pe rigle. Decalajul dintre datele teoretice şi cele experimentale nu depăşeşte 5% (fig. 4).

În ipoteza acţionării cu *sarcini verticale*, în care caz cedarea se produce prin mecanisme de riglă, la cadrele cu rigla dreaptă cu două şi trei deschideri se obţine un coeficient de adaptare statică de circa 32%, iar pentru cadrele cu o singură deschidere valoarea aceluiaşi coeficient este de numai 15%; rezultatele se confirmă şi pe cale teoretică.

La cadrele cu riglă frîntă cu două şi trei deschideri, intervalul de adaptare statică este mai mare, coeficienţii de adaptare statică depăşind procentajul de 35%. Şi la acest tip de cadre, în cazul unei singure deschideri coeficientul de adaptare statică se reduce la jumătate (18%).

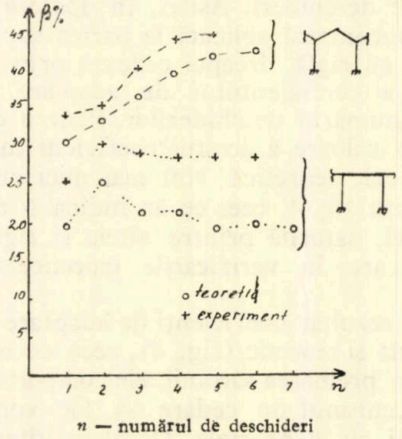
La ambele tipuri de cadre au avut loc plasticizări pe zone întinse, ceea ce a contribuit la sporirea intervalului de adaptare statică, decalajul dintre plasticizările diferitelor zone uneori chiar dublîndu-se.

b) *Unicitatea mecanismului şi a sarcinii limită*, pentru un acelaşi tip de încărcare, au fost verificate la toate cadrele studiate; pentru exemplificare se prezintă rezultatele obţinute pe cadrele cu două deschideri cu riglă frîntă, acţionate concomitent la sarcini verticale şi orizontale.

Astfel, într-o primă variantă, atît sarcinile verticale cît şi sarcina orizontală P fiind aplicate concomitent, se obţine mecanismul de cedare şi

ordinea de apariţie a articulaţiilor plastice indicate în fig. 5 a; sarcina limită corespunzătoare este $P_c = 71$ kg, iar coeficienţii de adaptare statică pentru sarcini şi deformaţii sînt $\beta = 29\,\%$ şi respectiv $\alpha = 75\,\%$.

În varianta a doua se aplică mai întîi forţele verticale $P = 70$ kg, care se menţin constante; structura comportîndu-se încă elastic, se acţionează în continuare numai cu o sarcină orizontală, care pentru valoarea $P_c = 75$ kg tansformă sistemul în mecanism, articulaţiile plastice formîndu-se în ordinea indicată în fig. 5 b. Coeficienţii de adaptare statică sînt $\beta = 60\,\%$ şi respectiv $\alpha = 83\,\%$, adică în această variantă corespunde un interval de adaptare statică mare.



n — numărul de deschideri

Fig. 4

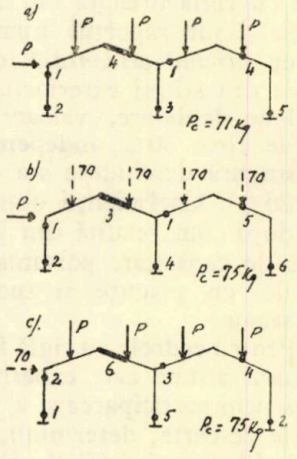


Fig. 5

În sfîrşit, în a treia variantă se aplică mai întîi forţa orizontală $P = 70$ kg, care se menţine constantă, apoi se aplică sarcinile verticale pînă ce ating valoarea limită $P_c = 75$ kg. Mecanismul de cedare şi ordinea de apariţie a articulaţiilor plastice sînt redate în fig. 5 c, iar coeficienţii de adaptare statică sînt $\beta = 40\,\%$ şi $\alpha = 70\,\%$, rezultînd deci un interval de adaptare statică mai redus decît în varianta a doua.

Din exemplul prezentat rezultă că sarcina limită şi mecanismul de cedare pentru o anumită ipoteză de încărcare sînt aceleaşi, independent de ordinea de acţionare a sarcinilor. Ordinea de apariţie a articulaţiilor plastice este funcţie numai de istoricul încărcării, dar nu poate modifica nici modul de cedare a structurii şi nici mărimea sarcinii limită.

c) *Stările de autotensiuni* create în structură prin acţionări în acelaşi sens sau în sensuri alternative, determină modificări ale intervalului de adaptare statică, traduse prin deplasarea limitei de elasticitate în cadrul limitelor plastice şi prin modificarea ordinei de apariţie a articulaţiilor plastice.

Ilustrarea acestor fenomene se face pe cadre cu 3 deschideri, cu riglă dreaptă.

În starea sa inițială, lipsită de autotensiuni, structura se încarcă pînă la apariția primelor trei articulații plastice, după care se descarcă și se reîncarcă *în același sens* pînă la apariția a cinci articulații plastice, ca apoi să se descarce și să se reîncarce din nou, pînă la cedare. Așa cum rezultă din diagrama forță-deformație din fig. 6, limita elastică în procesul de repetare a încărcărilor în același sens capătă succesiv valorile 142, 182 și 192 kg, intervalul de adaptare statică de fiecare dată micșorîndu-se în mod corespunzător. Coeficienții de adaptare statică se micșorează și ei, căpătînd succesiv valorile 36%, 18% și respectiv 13,5%, în timp ce deformațiile cresc la fiecare etapă de încărcare. Se constată, de asemenea, că fiecărui ciclu de încărcare îi corespunde o altă ordine de apariție a articulațiilor plastice.

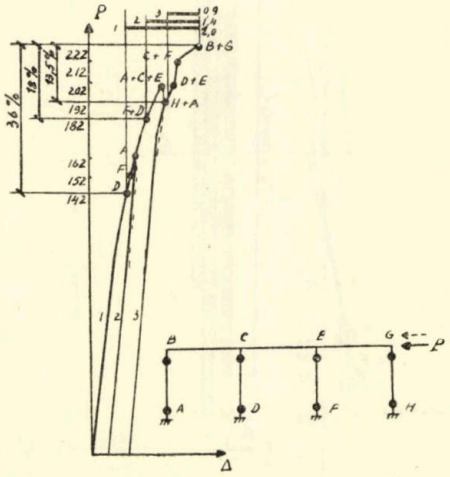


Fig. 6

Încercările efectuate la acționări în ambele sensuri, ilustrate în diagrama din fig. 7, pentru același tip de cadru, confirmă valabilitatea efectului Bauschinger și pe structuri, limita elastică obținută pentru încărcarea într-un sens și limita elastică determinată la încărcarea succesivă, de sens contrar, furnizînd o sumă constantă. În adevăr, la încărcarea inițială structura fiind liberă de autotensiuni, prima articulație plastică apare la o forță de 152 kg iar a doua articulație la o diferență de 20 kg, adică la 172 kg. În sens invers, limita de elasticitate trebuie să scadă tot cu 20 kg, ceea ce se confirmă experimental, prima articulație apărînd efectiv la 132 kg.

Cum rezultă și din diagramă, prin repetarea încărcărilor în sensuri alternative, coloana de înălțime constantă, egală cu $2P_E = 304$ kg și reprezentînd suma limitelor elastice în cele două sensuri (hașurate în diagramă),

se deplasează într-un sens sau în celălalt, după acţiunea sarcinii care a provocat starea de autotensiuni.

Odată cu ridicarea limitei de comportare elastică a structurii are loc reducerea corespunzătoare a intervalului de adaptare statică pentru acţionări în acelaşi sens şi creşterea acestuia pentru acţionările de sens opus.

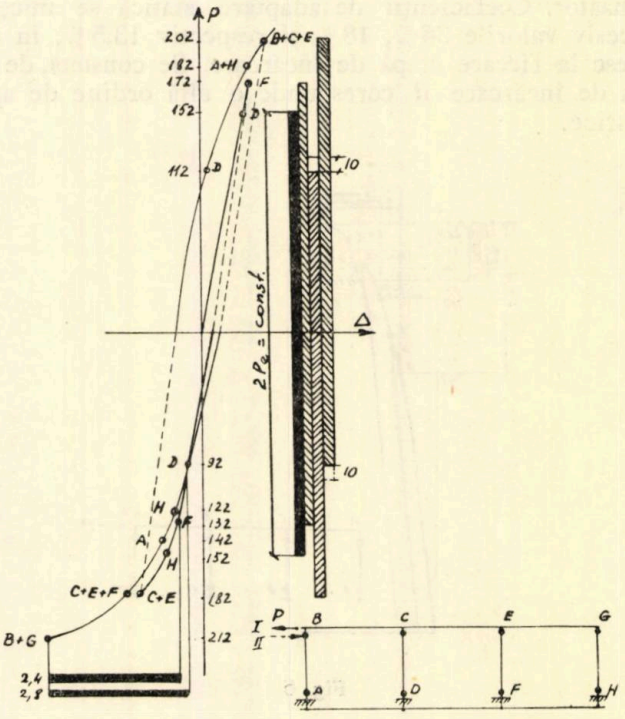


Fig. 7

Coeficienţii de adaptare statică se modifică în acelaşi sens cu intervalul de adaptare. Astfel, în exemplul nostru, creşterile succesive ale coeficienţilor pentru acţionarea de la dreapta la stînga (I) sînt $\beta_1 = 28\,\%$ şi $\beta_2 = 47\,\%$ iar pentru acţionarea de la stînga spre dreapta (II) sînt $\beta_1 = 37\,\%$ şi $\beta_2 = 57\,\%$.

La fiecare ciclu de încărcare ordinea articulaţiilor plastice se modifică datorită stărilor de autotensiuni ce se crează, sarcina limită nefiind influenţată de aceste modificări.

4. Concluzii

Analiza rezultatelor experimentale şi verificările teoretice ne permit să facem următoarele observaţii cu privire la comportarea structurilor dincolo de limita elastică, în cazul acţiunilor repetate într-un singur sens şi în sensuri alternative:

a) Modificarea limitei de comportare elastică a structurii se poate realiza, la limită, în cazul acţionărilor în acelaşi sens, cu o cantitate egală cu intervalul de încărcare în care o structură fără autotensiuni se comportă elastico-plastic, şi în cazul acţionărilor în sensuri alternative cu o cantitate egală cu dublul acestui interval.

b) Reducerea intervalului de adaptare statică prin ridicarea limitei de comportare elastică pentru încărcări de acelaşi sens şi creşterea acestui interval pentru încărcări de sens invers, se explică prin intensificarea omogenizării structurii în primul caz şi micşorarea acesteia în al doilea caz.

c) Ridicarea limitei de comportare elastică a structurii se reflectă în siguranţa acesteia, exprimată ca raport dintre P_c şi P_1, în sensul micşorării ei la încărcări de acelaşi sens şi măririi ei la încărcări de sens opus.

d) Modificările din intervalul de adaptare statică, obţinute prin deplasarea limitei elastice şi schimbarea ordinei de apariţie a articulaţiilor plastice, permit o dirijare a eforturilor în elementele structurii de aşa manieră, încît răspunsul construcţiei la acţiunea sarcinilor exterioare să corespundă cerinţelor de economie şi siguranţă în exploatare.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de statică

BIBLIOGRAFIE

1. Baker J. F., Horne M. R., Heyman J., *The Steel Skeleton.* Vol. 2, Cambridge University Press, 1956, ch. 9.
2. Neal B. G., Symonds P. S., *Cyclic loading of Portal Frames. Theory and Tests.* Assoc. Intern. des Ponts et Charpentes, 1958, 12.
3. Куприянов В. В., Строит. мех. и расчет сооруж., 1959, 2.
4. *** *Studiul rezervelor de capacitate portantă a unor structuri uzuale.* INCERC, Filiala Iaşi, 1962.
5. *** *Studiul rezervelor de capacitate portantă a unor structuri uzuale.* INCERC, Filiala Iaşi, 1965.

ÉTUDE SUR MODÈLE, À L'ÉCHELLE RÉDUITE, DES CADRES MÉTALLIQUES EN DOMAINE PLASTIQUE

(Résumé)

Les essais effectués par les Auteurs sur des cadres multiples à règles droites ou brisées, à l'aide de modèles métalliques à l'échelle réduite, ont aboutit aux conclusions suivantes:

a) Lors de l'analyse du comportement des constructions en domaine plastique, les modifications dans l'intervalle d'adaptation statique de la structure, exprimées par les

coefficients d'adaptation statique et par l'ordre de l'apparition des rotules plastiques, représentent des élements très importants, en permettant à caracteriser le degré de securité et la manière de ruine de la construction.

b) Pour des charges ayant le même sens, au delà de la limite élastique de la structure, il y a une réduction de l'intervalle d'adaptation statique grâce à l'accroissement de la limite élastique, dû aux efforts rémanents créés dans la structure (fig. 6). Pour des actions de sens inverse se produit une augmentation de l'intervalle d'adaptation statique, donc une diminution de la charge, jusqu'à une valeur à la quelle la structure se comporte d'une manière élastique (fig. 7).

c) La somme des limites élastiques de deux signes (consécutifs) a une valeur constante et occupe différentes positions entre les limites plastiques de la structure, fonction des états d'efforts rémanents créés dans la structure.

d) L'ordre d'apparition des rotules plastiques dépend seulement de l'histoire de la charge, la charge limite étant indépendente de cet ordre.

La mise en évidence des régions plastifiées a été obtenue à l'aide d'un laque cassant du type IMAS-3.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

Ç. Z. 624.07 ; 691.3

STUDII ASUPRA POSIBILITĂŢILOR DE UTILIZARE A TENSIUNILOR ARTIFICIAL INTRODUSE ÎN ELEMENTELE DIN BETON, ÎN VEDEREA FOLOSIRII OPTIME, A PROPRIETĂŢILOR MECANICE ALE BETONULUI ŞI ARMĂTURII

DE

ANATOLIE MIHUL

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Consideraţiuni asupra modului de folosire a tensiunilor introduse artificial în elementele din beton armat

a) *Distribuţia tensiunilor în lungul armăturilor pretensionate*

Dificultăţile ce apar la dispunerea armăturilor pretensionate după trasee poligonale nu permit adeseori să se obţină, la sistemele precomprimate cu armătură preîntinsă, o distribuţie suficient de avantajoasă a tensiunilor în lungul elementelor ; aceleaşi dificultăţi impun ca la proiectare să nu poată fi adoptate decît anumite forme pentru profilul longitudinal al elementelor, care nu întotdeauna asigură o folosire raţională a betonului şi a armăturii.

Dispunerea armăturilor după trasee rectilinii, la astfel de elemente, conduce la realizarea unor stări de tensiuni din precomprimare, nedorite în zonele din vecinătatea reazemelor, nu asigură preluarea momentelor negative ce apar în urma executării legăturilor de continuitate, nu rezolvă satisfăcător preluarea eforturilor de întindere din secţiunile înclinate, rezultate din efectul forţelor tăietoare Aceleaşi motive împiedică pe proiectanţi să adopte pentru grinzile cu inimă plină profilul în burtă de peşte, ale cărui avantaje sînt cunoscute, iar pentru grinzile cu zăbrele, formele la care centrul de greutate este dispus sub nivelul reazemelor.

La elementele precomprimate cu armătura postîntinsă posibilitatea dispunerii cablurilor după trasee curbilinii rezolvă mai favorabil problema distribuţiei tensiunilor în lungul elementelor, fără a asigura totuşi obţinerea eforturilor dorite, datorită efectului nefavorabil al frecărilor ce apar în zonele de curbură sau de frîntură ale armăturilor. Din acest motiv numărul de curburi la cabluri este limitat la maximum două, iar cablurile inelare cu care se precomprimă în sensul transversal sistemele cilindrice sau tronconice, sînt segmentate în 4... 12 tronsoane, fiind blocate în pilaştri suplimentari, fără a asigura în final o distribuţie uniformă a tensiunilor după circumferinţă.

Cauza principală care frînează realizarea unei distribuţii mai raţionale a tensiunilor în lungul unor elemente liniare precomprimate sau după circumferinţă (la siste-

mele cilindrice sau tronconice) o constituie frecările ce apar în dreptul reazemelor intermediare, care fiind dispuse în dreptul frînturilor sau al curburilor, modifică intensitatea tensiunilor în lungul armăturilor, împiedicînd astfel obţinerea stării de eforturi dorite.

b) *Efectul nefavorabil al tensiunilor în lungul elementelor, datorită modului de pretensionare a armăturilor*

Faptul că armăturile pretensionate sînt întinse prin acţionarea lor de la capete şi sînt blocate de obicei la capătul elementelor, nu asigură posibilitatea creerii unor stări de tensiune în tot lungul elementelor (în beton) de sens contrar şi de intensitate proporţională în raport cu cele provocate de încărcările exterioare ; din acest motiv nu se poate obţine o concordanţă satisfăcătoare între natura şi mărimea eforturilor introduse artificial prin precomprimare şi natura şi intensitatea eforturilor rezultate din solicitările exterioare (în afara elementelor solicitate la întindere centrică). Introducerea unor stări de tensiune din precomprimare, variabile în lungul elementelor, poate asigura adeseori o folosire mai raţională a materialelor. Folosirea unor armături dispuse după trasee rectilinii pe toată lungimea elementului, în general nu poate rezolva satisfăcător această problemă ; unele încercări de a folosi o armătură continuă, distribuită neuniform în lungul elementelor încovoiate, au rămas încă în fază de experimentare datorită dificultăţilor tehnologice ce apar la aplicarea procedeelor de pretensionare.

c) *Efectul armăturilor pretensionate dispuse în zona comprimată*

Introducerea armăturii pretensionate în zona comprimată a elementelor precomprimate, în vederea eliminării efectului nefavorabil al eforturilor de întindere provocate de precomprimarea zonei întinse, conduce la reducerea eficienţei precomprimării, la consum suplimentar de armătură şi, în mod obişnuit, la reducerea capacităţii de rezistenţă a zonei comprimate. În unele cazuri, la elementele de lungime mare se introduce o armătură pretensionată în zona comprimată datorită unor solicitări suplimentare (de exemplu în cazul unor stîlpi prefabricaţi de secţiune redusă şi lungime mare) ; efectul defavorabil al acestor tensiuni în zonele comprimate are aceleaşi consecinţe asupra indicilor tehnico-economici precum şi asupra capacităţii de rezistenţă a elementului.

d) *Rezervele de rezistenţă la compresiune ale betonului ce pot fi folosite la elementele din beton armat precomprimat*

Folosirea rezistenţei de compresiune R_{pr} sau R_i, ca proprietate principală a betonului, nu permite exploatarea maximă a proprietăţilor mecanice pe care le oferă structura betonului. Realizarea unor stări artificiale de tensiune, prin care betonul din zona comprimată să fie acţionat triaxial, asigură posibilitatea de folosire a rezistenţei la strivire a betonului, al cărui maximum ajunge la circa de două ori rezistenţa prismatică, ceea ce conduce la reducerea secţiunilor din beton, deci implicit la reducerea greutăţii proprii a sistemului, asigurînd totodată o mai bună comportare a betonului prin sporirea în mare măsură a limitei de microfisurare şi a deformaţiei plastice.

* * *

Faţă de lipsurile pe care le prezintă sistemele din beton precomprimat folosite astăzi, care au fost analizate la punctele a)...d), s-au studiat teoretic şi experimental sisteme noi de dirijare a tensiunilor în elementele precomprimate, capabile să permită eliminarea deficienţelor menţionate. Deoarece aplicarea practică a diferitelor concepţii legate de distribuţia tensiunilor şi

dirijarea lor este determinată în mare măsură, de posibilităţile practice, tehnologice, ce pot fi adoptate, cercetările s-au extins şi asupra procedeelor de execuţie, pînă la faza de realizare a sistemelor în practică.

2. Dirijarea raţională a tensiunilor prin dispunerea armăturilor pretensionate după trasee poligonale, curbilinii sau inelare, concomitent cu folosirea armăturii de montaj, care este recuperată într-o anumită fază de încărcare a elementului

Din analiza stărilor de tensiuni ce apar la încărcarea şi după încărcarea cu sarcini exterioare a elementelor liniare, încovoiate, precomprimate, reies avantajele ce apar la sistemele cu armătură de rezistenţă dispusă după trasee poligonale şi armătură de montaj pretensionată, dispusă în zona comprimată. Din momentul în care efectul sarcinilor exterioare reduce în suficientă măsură influenţa tensiunilor produse de armătura pretensionată din zona comprimată, aceasta este eliminată, asigurîndu-se în acest mod acumularea unor noi rezerve de tensiuni ce sînt produse de efectul armăturii pretensionate din zona întinsă, care pot fi raţional folosite. Folosirea unor armături de rezistenţă pretensionate, dispuse după trasee poligonale, concomitent cu armătura de montaj din zona comprimată, crează posibilităţi dintre cele mai largi de dirijare a tensiunilor, după nevoie, prin introducerea sau eliminarea lor în diferitele faze de lucru ale elementului— precomprimare, transport, montare sau exploatare.

Dintre avantajele esenţiale ce pot fi obţinute prin acest mod de dirijare a tensiunilor în elementele precomprimate reţinem următoarele: a) se măreşte eficacitatea precomprimării zonei întinse, b) secţiunea tălpii inferioare a grinzilor încovoiate poate fi redusă prin decomprimarea ei (obţinută prin precomprimarea zonei comprimate cu armătură de montaj) la dimensiuni minime, c) pot fi realizate elemente cu moment de inerţie longitudinal variabil, d) se reduc pierderile de tensiuni din armătura pretensionată din zona întinsă, ca urmare a decomprimării acesteia prin precomprimarea zonei comprimate cu intensitatea dorită, e) se reduce armătura pretensionată din zona comprimată, f) se poate folosi, la orice element, întreaga capacitate de rezistenţă a zonei comprimate din beton, g) se pot asigura în timpul transportului, manipulării şi montajului schemele dorite de rezemare şi coeficienţii de siguranţă necesari, fără consum suplimentar de armătură.

Dispunerea armăturilor după trasee poligonale a fost posibilă prin aplicarea procedeului electrotermic pentru întinderea armăturilor şi prin aplicarea unor sisteme mecanice originale de întindere, obţinute printr-un anumit mod de dispunere a elementelor pe stand[1]), ceea ce a permis eliminarea efectului nefavorabil al frecărilor din dreptul reazemelor intermediare.

[1]) Înscris la Oficiul de Invenţii nr. 49359, din 3 martie 1965.

În fig. 1 sînt prezentate schemele de pretensionare a armăturilor dispuse după trasee poligonale prin procedeul mecanic. În principiu, ideea care stă la baza sistemelor de pretensionare a armăturilor dispuse după trasee poligonale constă în introducerea în dreptul punctelor de deflectare,

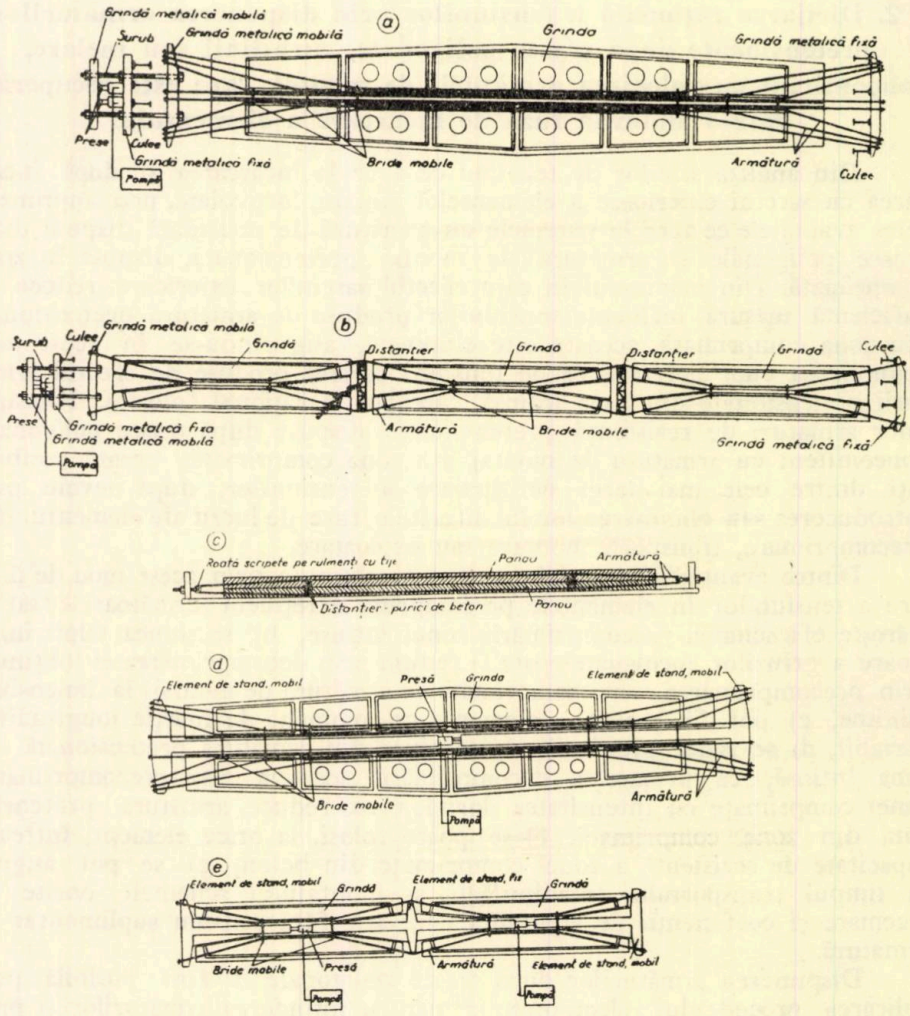


Fig. 1

a unor bride sau a unor distanţieri mobili cu care se leagă sau se îndepărtează între ele, cîte două, armăturile simetrice, aparţinînd la două elemente identice, turnate pe acelaşi stand, tensionarea armăturii fiind realizată

în grupuri de cîte două sau în bloc. Bridele şi distanţierii se deplasează odată cu deformarea armăturilor, componenta orizontală a tensiunii rămînînd constantă la fiecare bară în tot lungul ei.

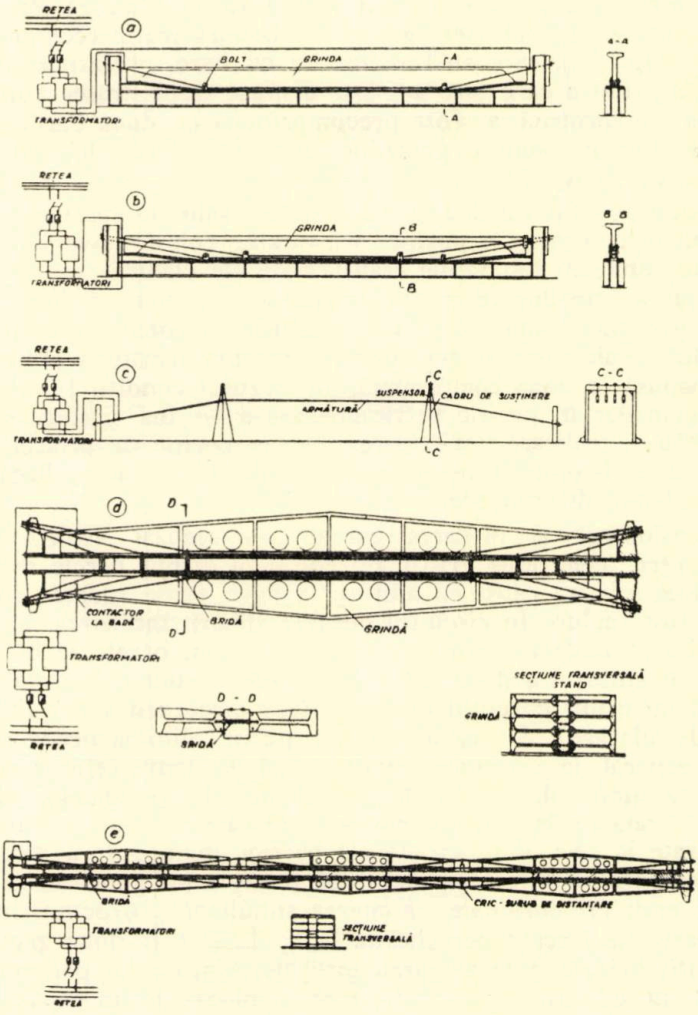


Fig. 2

În fig. 2 sînt prezentate schemele de pretensionare a armăturilor dispuse după trasee poligonale, obţinute prin aplicarea procedeului electrotermic. Tensiunile în lungul armăturilor apar practic constante, deoarece sînt produse ca urmare a împiedicării la revenire a unor alungiri specifice

egale, obținute prin încălzirea barelor respective la aceeași temperatură. În acest caz pot fi folosite reazeme intermediare fixe.

În fig. 3...5 sînt prezentate unele realizări practice, la care au fost folosite sistemele menționate. Astfel:

a) Pentru execuția acoperișului de la Casa de Cultură, Bacău (fig. 3 a), au fost realizate în anul 1963 grinzi din beton armat precomprimat de 24 m deschidere (fig. 3 b), care au fost armate cu bare preîntinse de diametru mare ($\varnothing$ 25), dintre care șase au fost dispuse după trasee poligonale (fig. 3 c). Talpa comprimată a fost precomprimată cu două bare, care au fost recuperate ulterior montării grinzilor, după încărcarea lor cu circa 30% din sarcina permanentă.

Grinzile au fost turnate în vecinătatea sălii de spectacole sub formă de elemente preturnate, în poziție orizontală, folosindu-se în acest scop, drept stand, una din fundațiile transversale ale clădirii.

Turnarea grinzilor în poziție orizontală a permis realizarea fără dificultăți a grosimii inimii de 7 cm (inclusiv în zona armăturilor ridicate).

Modul de alcătuire al grinzilor și prezența armăturii pretensionate de montaj, dispusă în zona comprimată, au asigurat condiții favorabile pentru ridicarea grinzilor în poziție verticală (fără a se lua măsuri suplimentare de consolidare), ridicarea și riparea lor în poziție de proiect cu utilajele simple de care dispune Trustul Regional de Construcții, Bacău — palane, trolii și macarale diferențiale.

Pretensionarea și blocarea barelor s-a realizat astfel: pe cofrajul montat pentru cele două grinzi gemene s-au dispus barele rectilinii, care au fost blocate la un capăt cu ajutorul a două eclise sudate; apoi, pe rînd barele au fost incluse în circuitul electric. După încălzirea lor la 350°C, fiind realizată totodată o alungire de circa 9 cm, barele se blocau la celălalt capăt cu ajutorul a două eclise care însă se sudau la fața locului, în bară fiind menținut curentul electric. Acest procedeu a permis suprimarea șaibelor de blocare; de asemenea s-a putut elimina neconcordanța care apare, în general, la executarea unor grinzi de genul celor descrise, între lungimea măsurată de la fețele exterioare ale reazemelor de capăt și lumina măsurată de la fața interioară a blocajelor (sub formă de eclise sudate) fixate la cele două capete ale barelor înainte de a începe operația de pretensionare. Barele dispuse după traseele poligonale s-au montat pe măsură ce erau pretensionate, montarea simultană provocînd dificultăți de electroizolare. La fiecare pereche de bare, de la cele două grinzi, se montau mai întîi bridele, care asigurau menținerea traseului poligonal al barelor (în timpul întinderii). Bridele, după ce se blocau la un capăt, erau petrecute prin golurile transversale (lăsate de la turnarea fundației); apoi se pretensiona individual fiecare bară, după procedeul descris mai sus.

b) Un alt element introdus în practică, la care s-au folosit armături preîntinse dispuse după trasee poligonale, au fost panele cu forma profilului longitudinal în burtă de pește, care au fost executate în cadrul Trustului Regional de Construcții, Bacău (fig. 4) și Iași.

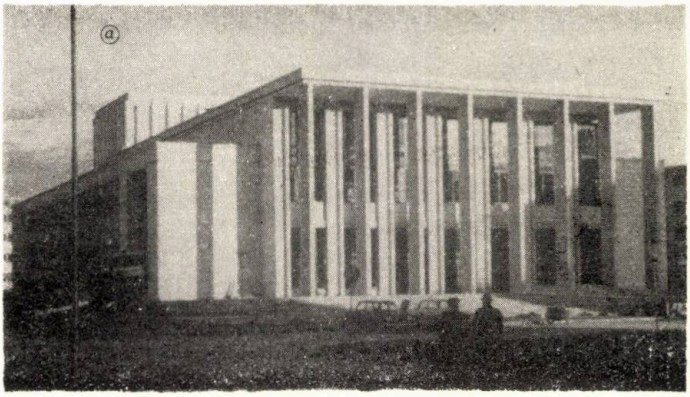


Fig. 3 a

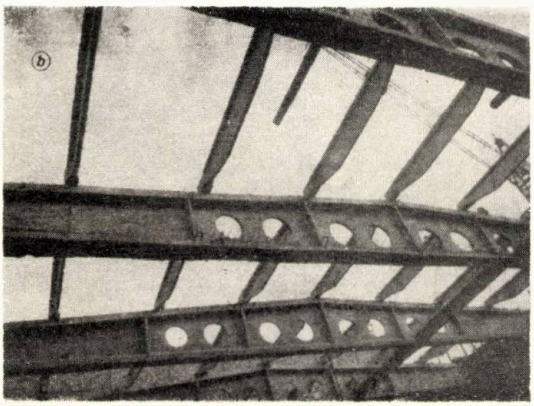


Fig. 3 b

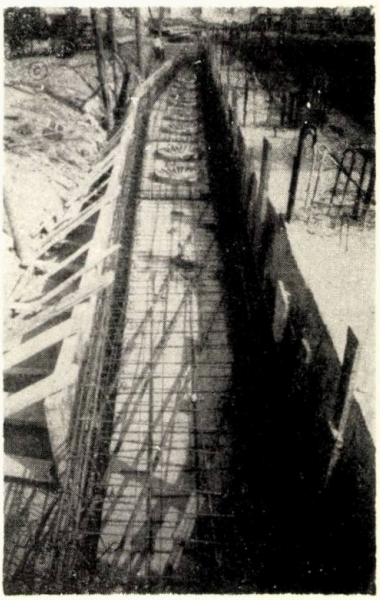


Fig. 3 c

Fig. 4 a

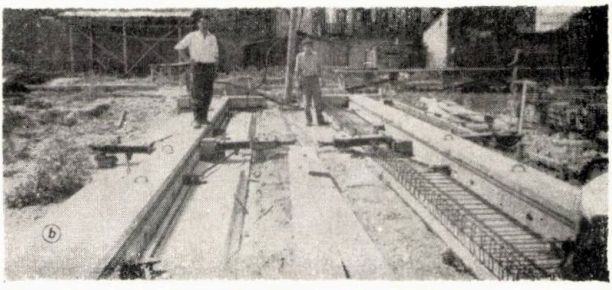


Fig. 4 b

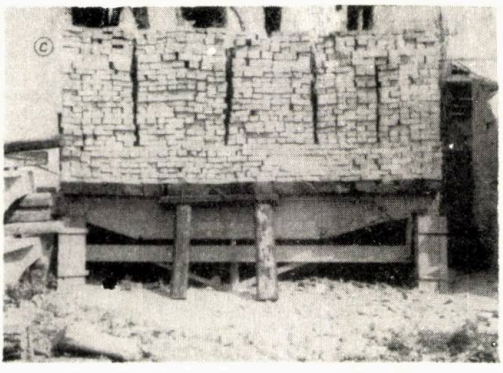


Fig. 4 c

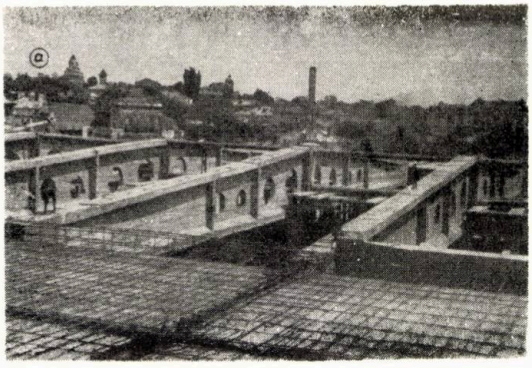


Fig. 5 a

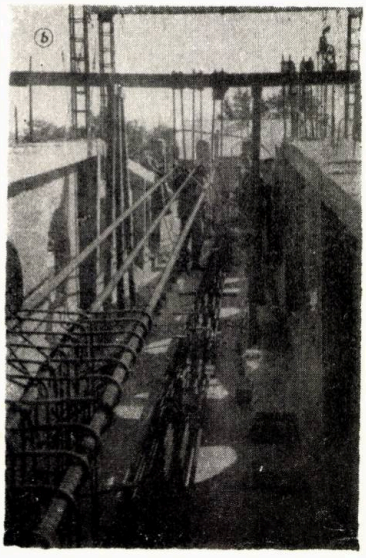


Fig. 5 b

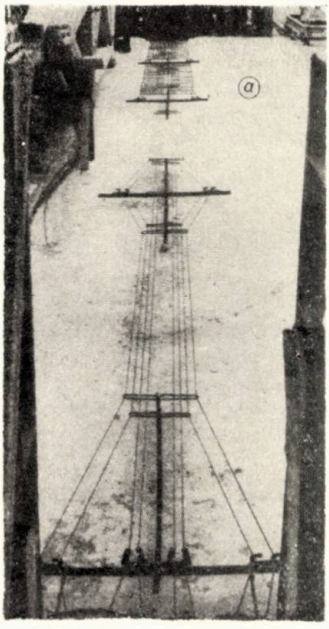


Fig. 6 a

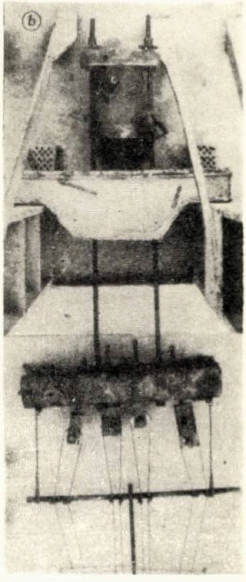


Fig. 6 b

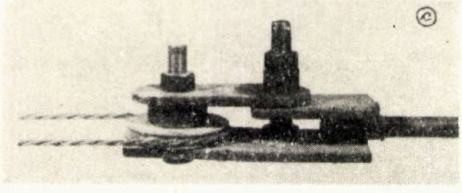


Fig. 6 c

Tipul de pane folosit în cadrul Trustului Regional de Construcţii, Bacău, se caracterizează prin forma variabilă a profilului (fig. 4 a), prin secţiunea transversală în formă de T şi prin armătura preîntinsă care este alcătuită dintr-o singură bară preîntinsă, dispusă după un traseu poligonal.

Înălţimea redusă a panei pe reazem (la circa 40% faţă de înălţimea adoptată în cîmp), îndepărtarea convenabilă a armăturii faţă de axa elementului în zona centrală a momentelor încovoietoare mari, dirijarea raţională a tensiunilor din precomprimare în lungul panei prin dispunerea armăturii după un traseu poligonal, folosirea unei singure bare pentru armare, au permis obţinerea unor avantaje esenţiale faţă de sistemele de pane precomprimate (cu înălţime constantă) şi cele din beton armat, folosite în ţara noastră şi în străinătate, şi anume:

1° Reducerea la maximum a înălţimii panei pe reazeme, deci reducerea în aceeaşi măsură a înălţimii construcţiei, obţinîndu-se toate avantajele care rezultă de aici.

2° Dezvoltarea zonei centrale pe înălţime mare (în spaţiul neutilizat dintre grinzile principale), care asigură o distribuţie raţională a materialului faţă de axa elementului şi conduce la reducerea armăturii de rezistenţă.

3° Asigurarea stabilităţii la montare a panelor prin coborîrea axei centrului de greutate al grinzii în raport cu poziţia reazemelor.

4° Reducerea efectului sarcinilor orizontale asupra panelor (transmis prin chesoanele sau fîşiile de acoperiş) prin micşorarea braţului de acţiune al forţelor.

5° Reducerea consumului de armătură transversală prin precomprimarea zonelor marginale cu armătură înclinată pretensionată.

6° Asigurarea unei bune comportări a panelor în vecinătatea reazemelor la momentele negative ce apar după ce se realizează continuitatea elementelor prefabricate pe reazeme (provenite din încărcările exterioare), datorită unei distribuţii raţionale a tensiunilor în secţiunile din zonele de reazem.

Pretensionarea armăturilor s-a efectuat după schema prezentată în fig. 2 b. În acest scop s-au executat standuri de inventar alcătuite din elemente prefabricate asamblate prin precomprimare, după cum rezultă din fig. 4 b. Panele au fost turnate în poziţie orizontală.

Rezultatul încercărilor efectuate (fig. 4 c) a scos în evidenţă, pentru sistemul realizat, posibilitatea reducerii armăturii transversale în măsură şi mai mare.

Pentru panele executate la Iaşi, concepute în acelaşi mod, s-au folosit cofraje metalice, pretensionarea armăturii fiind realizată după schema 2-a.

c) La Casa Tineretului din Iaşi au fost executate grinzi de 21,00 m deschidere (fig. 5 a), la care deflectarea traseelor armăturilor preîntinse din zona comprimată s-a realizat după schema prezentată în fig. 2 c (fig. 5 b).

În fig. 6 se prezintă aspecte din pretensionarea armăturilor poligonale prin procedeul mecanic (schema din fig. 1 b), folosit la executarea unor plăci subţiri prismatice, cu armături sub formă de liţă sau sîrmă împletită SBP.

d) După acelaşi principiu, aplicînd procedeul electrotermic şi mecanic, au fost executate la Bacău şi Iaşi grinzi cu zăbrele cu talpa întinsă de formă poligonală [4], grinzi cu inimă plină de 12 m deschidere la Iaşi etc.

În fig. 7 se prezintă schemele de pretensionare a armăturilor dispuse după trasee inelare. Pretensionarea barelor inelare după procedeul propus poate fi realizată după următoarele variante:

a) Bara de formă inelară este petrecută în jurul peretelui cilindric sau ovoidal, capetele fiind trecute în cruce prin golurile unui blocaj independent din beton sau prin golurile unui pilastru executat în acest scop; pentru alungire bara era inclusă în circuitul alcătuit dintr-un grup de transformatoare. Pe măsură ce bara se alungeşte, se acţionează asupra celor două piuliţe de la capete, care se deplasează, capetele filetate ale barei fixîndu-se în final în această stare (întinsă) cu ajutorul blocajelor din beton (fig. 7 a).

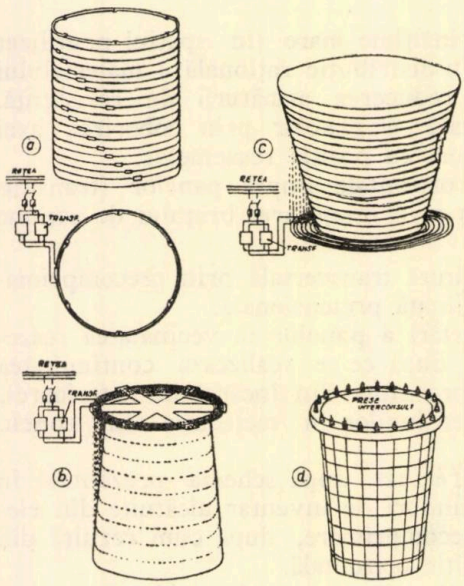


Fig. 7

b) Pentru eliminarea blocajelor şi totodată pentru a mări productivitatea de pretensionare a armăturilor, în schemele din fig. 7 b şi 7 c se arată procedeul propus de pretensionare a inelelor prin încălzirea lor în afara elementului şi apoi fixarea inelelor în stare încălzită în poziţia din proiect. Avantaje mai mari, după cum a rezultat din experienţele făcute, se obţin la îmbrăcarea inelelor pe deasupra rezervoarelor cu forma tronconică şi strunirea lor prin batere în stare încălzită [2]; în acest mod se elimină în mare măsură pierderile de tensiuni care apar în urma mulării armăturii în timpul răcirii ei pe suprafaţa de beton.

c) În fig. 7 d este redată schema de pretensionare prin procedeul mecanic, prin tragerea cu prese, a unei carcase de armătură peste un rezervor de formă tronconică. Încălzind armătura concomitent cu acţionarea ei prin procedeul mecanic este posibilă deplasarea armăturii corespunzător deformaţiei necesare, operaţia de pretensionare fiind astfel mult uşurată. Schema din fig. 7 a fost aplicată la construcţia silozurilor demontabile, care sînt folosite pe diferite şantiere din ţară [3], alcătuite din inele prefabricate precomprimate, asamblate prin precomprimare. Procedeul propus a creat condiţii de eliminare a segmentării inelelor, de unde decurg avantajele cunoscute. Procedeul este în

[2] Dosar invenţie, Oficiul de Invenţii, Nr. 409 019.

curs de experimentare la precomprimarea rezervoarelor cilindrice şi tronconice executate din elemente prefabricate (pentru decantoare şi castele de apă).

3. Obţinerea unor distribuţii mai raţionale a tensiunilor în lungul elementelor, prin pretensionarea armăturilor cu ajutorul încărcărilor

Pentru a crea o concordanţă între eforturile produse de încărcările exterioare şi cele realizate în procesul de precomprimare (pentru o anumită schemă statică de rezemare şi de încărcare) s-au experimentat sisteme alcătuite din elemente prefabricate, la care armăturile sînt pretensionate prin încărcarea directă a elementelor asamblate. Solicitarea elementului pentru realizarea pretensionării armăturilor, care sînt dispuse după trasee rectilinii sau poligonale, se realizează cu ajutorul unor vinciuri hidraulice (acţionate de o singură pompă), care încarcă elementul în mod similar cu sarcinile exterioare de exploatare[3]). Elementele sînt precomprimate în poziţie orizontală, cîte două, fiind legate în dreptul reazemelor prin intermediul unor bride metalice. Sistemul a fost aplicat în practică la executarea unor grinzi cu zăbrele alcătuite din elemente prefabricate, asamblate prin precomprimare [5].

4. Folosirea optimă a caracteristicilor mecanice ale betonului şi ale armăturii

Preocuparea de a găsi sisteme în care proprietăţile betonului şi ale armăturii să fie folosite în cel mai înalt grad, sînt orientate spre studiul acelor sisteme la care elementele comprimate să fie precomprimate cu armătură transversală sub formă de fretă pretensionată. În acest mod se asigură folosirea la maximum a rezistenţei triaxiale de compresiune a betonului care va permite precomprimarea intensă cu armătură recuperabilă de montaj a zonelor comprimate şi respectiv deprecomprimarea zonei întinse. O astfel de distribuţie a tensiunilor din precomprimare permite reducerea în proporţii însemnate a secţiunilor tălpii comprimate şi a celei întinse. Sistemul propus urmează a se experimenta, în prima etapă, pe grinzi cu talpa superioară alcătuită din tuburi precomprimate transversal.

5. Concluzii

Folosirea la maximum a rezistenţei la compresiune a betonului (rezistenţa triaxială), combinată cu realizarea traseelor poligonale, concomitent cu utilizarea armăturilor pretensionate de montaj în zona comprimată, recuperabile într-o anumită fază de încărcare, asigură posibilitatea de exploatare la maximum a proprietăţilor pe care le oferă betonul şi armătura.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de beton armat

---

[3]) Înscris la Oficiul de Invenţii Nr. 4 945, 20 martie 1965.

BIBLIOGRAFIE

1. Mihul A., Capatu C., Leonte C., Boghian A., Patraş M., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, **VII (XI)**, *1—2*, p. 365.
2. Mihul A., Leonte C., Patelli T., Boghian A., Patraş M., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, **VII (XI)**, *1—2*, p. 395
3. Mihul A., Asandei Gh., Zăicescu A., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, **IX (XIII)**, *1—2*, pp. 369—378
4. Mihul A., Leonte C., Patraş M., *Studiul grinzilor cu zăbrele cu talpa inferioară poligonală precomprimată cu armătură preîntinsă, executate pe standuri mobile.* Comunicare prezentată la cea de a VII-a sesiune ştiinţifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic din Iaşi, 5—7 febr. 1965.
5. Mihul A., Capatu C., Leonte C., Cuciureanu A., *Precomprimarea elementelor liniare prefabricate din beton armat prin încărcare.* Comunicare prezentată la cea de a VII-a sesiune ştiinţifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic din Iaşi, 5—7 febr. 1965.

STUDY ON THE POSSIBILITIES OF UTILISATION OF THE ARTIFICIALLY INTRODUCED TENSIONS IN REINFORCED CONCRET ELEMENTS IN VIEW OF THE MOST FAVORABLE UTILISATION OF THE MECHANICAL PROPERTIES OF THE CONCRETE AND REINFORCEMENT

(Abstract)

The foundamental idea, which was assumed as a basis of the studied systems conception consists in the elaboration of some new basic principles of initial tensions which are artificially introduced in the reinforced concrete element, in view of a better utilisation of the mechanical properties of the steel and concrete, in comparison with the using manner of to day in the technic of the prestressed concrete.

In view of materialisation of these ideas a set of original methods were elaborated, which permited the longitudinal armatures for different linear elements to be pre-tensioned by an electrotermical or mechanical proceeding, on polygonal paths, having one, two or many peaks (at which the unfavorable influence of the frictions in respect with the intermediary struts were removed); also the annular reinforcements could be post-tensioned without their segmentation. The systems were applied by full web beams, trusses, big pannels with reinforcement disposed after two directions etc.

The systems were experimented and applied in practice at the roof constructions of the Cultural House in Bacău and the Cultural Youth House in Jassy (full web girders of 21 and 24 meters span, and also prestressed purlins having the shape of a fishbelly curvature), at the execution of the roof from SMT-Răcăciuni and Atelier-Bacău (trusses with the lower sole in polygonal shape having pretensioned bars with two peaks) at the Dwelling Buildings in ICM-town Gheorghe Gheorghiu-Dej (prestressed pannels on two directions with reinforcements disposed on polygonal paths) at the demontable siloes assembled by prestressed rings which were used on different sites in our country (town Gheorghe Gheorghiu-Dej, Arad, Piatra-Neamţ a. o.).

By using the armatures disposed on polygonal paths simultaneously with prestressed mounting reinforcements (wich are disposed in the compressed area, and that are recovered in a particular loading stade of the elements), is ensured a tension leading, at ease, in different prestressing phases, transport, mouting or exploitation, which leads at the decreasing of the 30% steel and of 20% concrete consumption. One obtain in the same time some greater stability shapes of the elements at the transport and manipulation, and which are able to be more advantageously enclosed in the construction ensemble, in view of the decreasing of the height and of the exploitation costs.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 624.15

UN CRITERIU PENTRU STABILIREA PRIN CALCUL A SISTEMULUI DE FUNDAŢIE ADECVAT LA FUNDAREA ÎN SUPRAFAŢĂ

DE

TUDOR SILION

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

Fundaţia trebuie să asigure transmiterea sarcinilor construcţiei la terenul de fundaţie în aşa fel încît să nu apară deformaţii incompatibile cu construcţia respectivă.

Se poate considera că transmiterea sarcinilor satisface condiţia de mai sus atunci cînd presiunea pe talpa fundaţiei nu depăşeşte sarcina limită, care conduce la compromiterea exploatării normale a construcţiei. Această condiţie se poate scrie sub forma:

(1) $$p_{ef} \leqslant p_{lim}.$$

Presiunea admisibilă se poate determina aplicînd la sarcina limită un coeficient de siguranţă M_s:

(2) $$p_a = \frac{p_{lim}}{M_s}.$$

Admiţînd o distribuţie uniformă a tensiunilor pe suprafaţa de rezemare a întregii construcţii, pentru asigurarea echilibrului va trebui respectată condiţia:

(3) $$Q = Ap_a,$$

în care: Q — sarcina totală a construcţiei, A — suprafaţa de rezemare a construcţiei pe terenul de fundaţie, p_a — presiunea admisibilă pe terenul de fundaţie.

Sarcina totală a construcţiei poate fi exprimată prin relaţia :

$$Q = NLBq, \tag{4}$$

unde: N — numărul de nivele al construcţiei, L — lungimea construcţiei, B — lăţimea construcţiei, q — sarcina totală ce revine unui m^2 de palier.

2. Coeficientul de acoperire α

Funcţie de mărimile Q şi p_a raportul dintre suprafaţa totală de rezemare a construcţiei pe pămînt A şi suprafaţa construcţiei în proiecţie orizontală, LB pot lua diferite valori. Notăm valoarea acestui raport cu α şi-l denumim coeficient de acoperire a suprafeţei proiecţiei construcţiei cu fundaţii.

Ţinînd seama de relaţiile (3) şi (4) condiţia de echilibru se poate scrie:

$$NLBq = Ap_a = \alpha LBp_a \tag{5}$$

sau

$$Nq = \alpha p_a \tag{6}$$

de unde rezultă:

$$\alpha = \frac{Nq}{p_a}. \tag{7}$$

Se constată că mărimea valorii lui α depinde de raportul dintre încărcarea dată de întreaga clădire pe m^2 de suprafaţă de proiecţie orizontală şi presiunea admisibilă a terenului de fundaţie. Dacă aceste două valori sînt egale ($\alpha = 1$) rezultă în mod necesar, ca toată suprafaţa construcţiei în proiecţie orizontală să fie folosită pentru rezemarea ei. În acest caz soluţia ce se va adopta va fi radier general.

Dacă această soluţie rezultă imediat, precizarea valorii lui α pentru care să se poată folosi alte sisteme de fundaţii de suprafaţă prezintă unele dificultăţi.

Este posibil de stabilit un criteriu numeric pentru delimitarea domeniilor de aplicaţie ale diferitelor sisteme de fundaţii de suprafaţă pornind de la gradul în care se influenţează reciproc două fundaţii vecine.

Avînd în vedere că zona activă s-ar extinde după unii autori pînă la izobara $0{,}1_p$ iar după alţii la izobara $0{,}2_p$, considerăm aceste izobare ca fiind limitele zonei active. Distingem din acest punct de vedere următoarele trei cazuri la o fundaţie perfect flexibilă (fig. 1): cazul a) $Kb = 4b$, $(K=4)$; cazul b) $Kb = 3b$, $(K=3)$; cazul c) $Kb = 2b$, $(K=2)$, unde Kb reprezintă distanţa dintre două fundaţii vecine, K fiind funcţie de coeficientul de acoperire.

Pe baza acestor diagrame ale zonelor active se poate calcula coeficientul de acoperire α, la diferite sisteme de fundații, astfel încît să se aibe în vedere gradul lor de influențare reciprocă.

a) *Fundații izolate*

Se consideră o construcție avînd dimensiunile în plan L și B, fundată pe fundații izolate (fig. 2).

Considerînd fundațiile în mod izolat se observă că din punct de vedere al coeficientului de acoperire se pot distinge trei poziții ale fundațiilor față de proiecția orizontală a clădirii: A — fundație de colț, B — fundație de contur, C — fundație centrală.

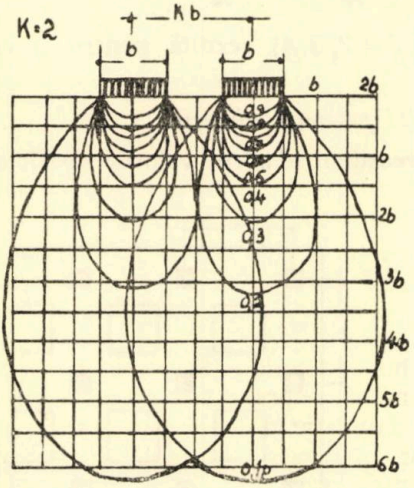


Fig. 1

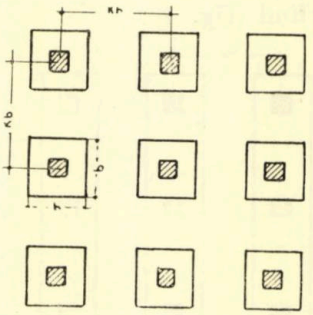


Fig. 2

Scriind raportul suprafeței fundației față de suprafața aferentă a construcției ce revine fundației respective se obțin coeficienții α după cum urmează:

$$(8) \qquad \alpha_A = \frac{4}{(1+K)^2}, \quad \alpha_B = \frac{2}{K(1+K)}, \quad \alpha_C = \frac{1}{K^2}.$$

Pentru valorile lui $K = 4$, 3 și 2 rezultă valorile coeficientului α redate în tabelul 1.

Tabelul 1

K	4	3	2
α_A	0,16	0,25	0,44
α_B	0,10	0,17	0,33
α_C	0,07	0,11	0,25

Tabelul 2

K	4	3	2
α_A	0,40	0,50	0,66
α_B	0,25	0,33	0,50
α_C	0,25	0,33	0,50

b) *Fundații pe tălpi pe o singură direcție*

Procedînd în mod similar ca în cazul precedent, se obțin pentru acest caz următoarele valori pentru α (fig. 3):

$$\alpha_A = 2\frac{1}{1+K}, \quad \alpha_B = \frac{1}{K}, \quad \alpha_C = \frac{1}{K}. \tag{9}$$

Pentru diferite valori ale lui K $(= 2, 3, 4)$ rezultă pentru α valorile din tabelul 2.

c) *Fundații pe tălpi pe două direcții*

Procedînd similar ca în cazul precedent se obțin valorile coeficienților α ca fiind (fig. 4):

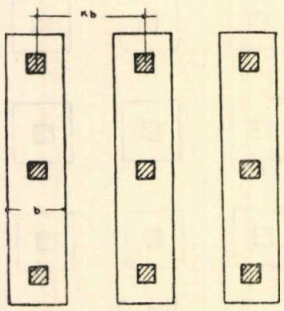


Fig. 3

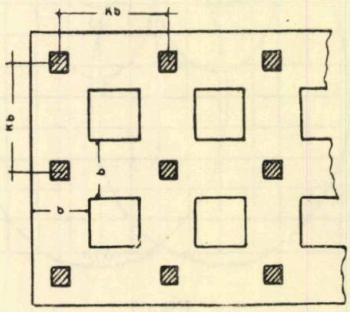


Fig. 4

$$\alpha_A = \frac{4}{(1+K)^2}, \quad \alpha_B = \frac{3K-1}{K(1+K)}, \quad \alpha_C = \frac{2K-1}{K^2}. \tag{10}$$

Pentru $K = 4, 3, 2$, rezultă (v. tabelul 3):

Tabelul 3

K	4	3	2
α_A	0,64	0,72	0,89
α_B	0,55	0,66	0,83
α_C	0,44	0,55	0,75

3. Valoarea medie a coeficientului de acoperire

Pentru întreaga fundație a construcției, luată în ansamblu, va fi necesar să se calculeze un coeficient de acoperire mediu sub forma unei medii ponderate, în care ponderile să fie reprezentate prin numărul de fundații de colț, contur și centrale.

Admițînd că după cele două laturi numărul de fundații este m, respectiv n, numărul de fundații de tipurile arătate mai sus va fi

fundații de colț . . .	$N_A = 4$
fundații de contur . . .	$N_B = 2(m+n) - 8$
fundații centrale . . .	$N_C = mn - 2(m+n) + 4$
Total fundații	$N = mn$

Valoarea medie a coeficientului de acoperire va fi

$$\alpha_m = \frac{\sum_i N_i \alpha_i}{\sum_i N_i}, \quad (i = A, B, C), \tag{11}$$

în care : N_i — numărul de fundații avînd aceeași poziție în clădire, α_i — coeficientul de acoperire corespunzător fundațiilor respective.

Introducînd expresiile numerelor N_i în (11) se obține:

$$\alpha_m = \frac{4\alpha_A + [2(m+n) - 8]\,\alpha_B + [mn - 2(m+n) + 4]\,\alpha_C}{mn}. \tag{12}$$

Se observă că α_m este funcție de sistemul de fundație de suprafață respectiv precum și de numărul total de fundații. Dat fiind faptul că valorile α_i se determină funcție de sistemul de fundație rezultă că pentru o anumită structură și cunoscînd dimensiunile ei se poate calcula coeficientul α_m.

Pentru a reduce această operație de calcul se poate întocmi un tabel cuprinzînd valorile coeficientului α_m pentru diferite sisteme de fundații, funcție de valorile K (v. tabelul 4). În acest scop se consideră cele două cazuri limită în ceea ce privește valorile m și n.

Valorile minime ale lui m și n pentru o anumită structură sînt $m = 2$ și $n = 2$. In acest caz relația (12) devine

$$\alpha_m = \alpha_A. \tag{13}$$

Al doilea caz limită are loc cînd m și n au valori mari, teoretic putînd considera că $m \to \infty$, $n \to \infty$. În acest caz relația (12) devine

$$\alpha_m = \alpha_C. \tag{14}$$

Rezultă că pentru gama de variație considerată a numerelor m și n valorile coeficientului α_m vor fi cuprinse între α_A și α_C, pentru o anumită mărime a coeficientului K.

Se poate întocmi astfel un tabel ce poate servi ca o primă orientare în vederea calculării valorii coeficientului α_m.

Tabelul 4

K	Sistemul de fundație de suprafață		
	Fundații izolate	Tălpi continue	Tălpi încrucișate
	α_m		
4	0,07 ... 0,16	0,25 ... 0,40	0,44 ... 0,64
3	0,11 ... 0,25	0,33 ... 0,50	0,55 ... 0,75
2	0,25 ... 0,44	0,50 ... 0,66	0,75 ... 0,89

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de geologie și geotehnică

BIBLIOGRAFIE

1. Terzaghi K., *Theoretical Soil Mechanics.* J. Wiley a. Sons, N. Y., 1944.
2. Цытович Н. А., *Механика грунтов.* Госстройиздат, М., 1963.
3. Fuchs E., *Baugrund und Endstoffmechanik.* Fachbuchverlag, Leipzig, 1963.

EIN KRITERIUM ZUR WAHL DER GEEIGNESTEN ART VON FLÄCHENGRÜNDUNGEN

(Zusammenfassung)

Auf Grund dem von K. Terzaghi [1] benützten Begriff der „aktiven Zone" wird ein Kriterium zur Wahl der geeignesten Art von Flächengründungen gegeben.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C.Z. 526.33

COMPENSAREA SEMIRIGUROASĂ A COORDONATELOR PUNCTELOR DE TRIANGULAŢIE, DETERMINATE PRIN METODA PUNCTELOR DUBLE ŞI TRIPLE

DE

C. APREUTESEI, GH. GAVRILOV, EUGEN POPA,
V. TARASOV şi GH. NISTOR

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Consideraţii generale

Studiul ridicărilor topografice impune existenţa reţelei geodezice de sprijin, compusă din puncte de triangulaţie de ordinul I...V, determinate prin diferite metode. În regiunile cu vizibilitate asigurată, punctele de triangulaţie de ordinul V se determină prin metode clasice. În zonele acoperite, însă, determinarea acestor puncte a impus elaborarea unor noi metode [4], [6]. capabile de a fi aplicate în orice situaţie din teren.

2. Determinarea şi compensarea coordonatelor punctelor noi

În lucrarea de faţă colectivul a luat în studiu îndesirea punctelor de triangulaţie prin metoda punctelor duble şi a punctelor triple, compensînd semiriguros, prin procedeul reţelei de substituţie, coordonatele astfel determinate, urmărind atît precizia rezultatelor cît şi unele concluzii privind eficienţa economică a metodelor aplicate.

Calculele de determinare a punctelor au fost efectuate în cadrul triangulaţiei oraşelor Paşcani şi Vaslui, prin metoda punctelor duble şi triple, după cum urmează:

a) Determinarea a 2 puncte noi din 3 puncte cunoscute în triangulaţia oraşului Vaslui (fig. 1).

b) Determinarea a 2 variante a cîte 2 puncte noi din 4 puncte cunoscute în triangulaţia oraşului Vaslui (fig. 2 a şi 2 b).

c) Determinarea a 3 variante a cîte 3 puncte noi din 2 puncte cunoscute în triangulaţia oraşelor Paşcani şi Vaslui (fig. 3 a, 3 b şi 3 c).

d) Determinarea a 3 puncte noi din 4 puncte cunoscute în triangulaţia oraşului Paşcani (fig. 4).

Calculul coordonatelor punctelor noi s-a efectuat pe baza relaţiilor matematice ce au fost stabilite în cadrul fiecărei variante, folosind pentru determinare metoda intersecţiei, radierii şi a drumuirii.

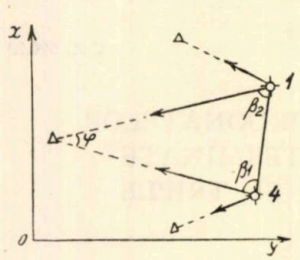


Fig. 1

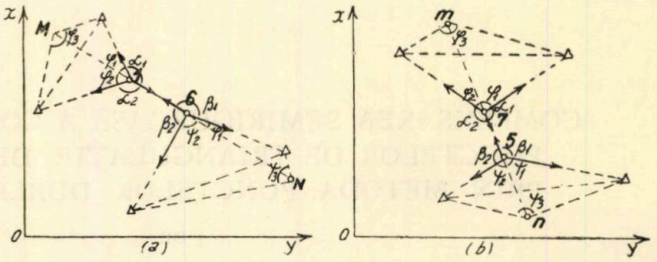


Fig. 2

După cum se ştie, compensarea unei reţele de puncte geodezice se poate face riguros, semiriguros şi empiric.

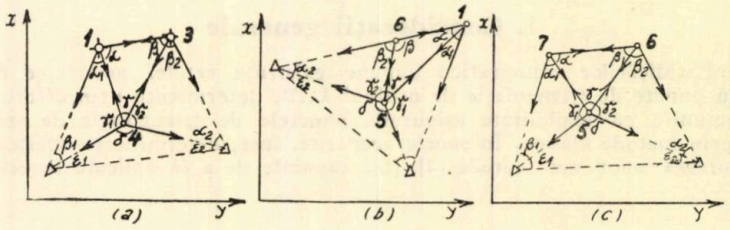


Fig. 3

Compensarea riguroasă a grupului de observaţii condiţionate impune ca atît punctele noi determinate cît şi cele cunoscute să fie staţionate astfel ca elementele liniare de bază şi cele unghiulare măsurate, să permită formarea ecuaţiilor de condiţie în reţea.

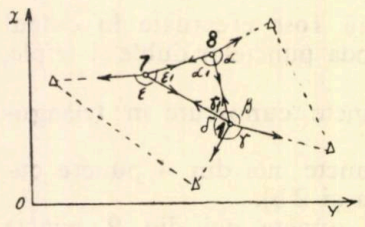


Fig. 4

Compensarea riguroasă a grupului de observaţii indirecte impune ca pe lîngă vizele de determinare să se execute un număr de observaţii suplimentare care să permită formarea ecuaţiilor de observaţii în reţea.

Prin rezolvarea acestor ecuaţii, în ambele cazuri se obţine, în final, geometrizarea reţelei şi poziţia cea mai probabilă a punctelor noi.

Dar metodele punctelor duble şi a punctelor triple, folosite la determinarea punctelor noi, nu dau posibilitatea scrierii categoriilor de ecuaţii amintite mai sus datorită condiţiilor reale minimale de vizări către punctele cunoscute, fapt ce face posibilă numai compensarea semiriguroasă a coordonatelor noi determinate în reţea.

De aceea, pentru cazurile de determinare a punctelor din triangulaţia celor două oraşe, s-a procedat la compensarea semiriguroasă a coordonatelor punctelor noi prin procedeul reţelei de substituţie, elaborat de profesorul A. S. Cebotarev [2], care constă în substituţia a două sau mai multe drumuiri de ponderi diferite, printr-una singură, de pondere medie.

Studiind posibilitatea de aplicare a metodei de compensare semiriguroasă a coordonatelor noi s-a ajuns la concluzii importante din punct de vedere practic.

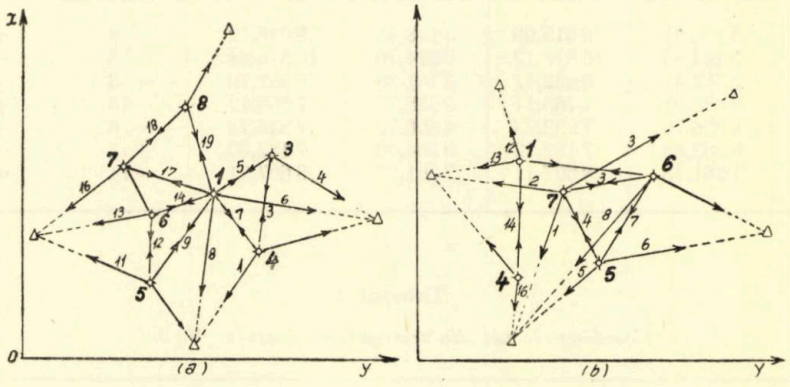


Fig. 5

Este de remarcat faptul deosebit că metoda de compensare prin reţea de substituţie a coordonatelor noi poate fi aplicată ca o compensare în grup a întregii reţele nou determinată. În acest sens apare ca necesară realizarea unei legături directe printr-o singură viză între punctele noi, determinate prin diferite variante ale celor două metode. Această legătură directă între variantele de determinare se realizează foarte lesne printr-un calcul simplu, în sensul că unul din puncte devine comun, ca fiind calculat din două variante diferite. Calculul este mijlocit şi de faptul că punctele noi determinate sînt apropiate între ele şi se poate asigura în mod convenabil viza de legătură în scopul arătat mai sus.

Urmînd această cale s-au calculat coordonatele apropiate a 7 puncte noi în triangulaţia oraşului Paşcani (fig. 5a) şi 5 puncte în triangulaţia oraşului Vaslui (fig. 5b), cu legăturile strict necesare, trecînd apoi la compensarea lor în grup, în triangulaţiile respective.

Comparînd valorile numerice ale coordonatelor rezultate astfel, cu cele obţinute prin metoda celor mai mici pătrate, în cazul triangulaţiei Paşcani (v. tabelul 1) şi cu cele obţinute prin metoda segmentelor capabile, în cazul triangulaţiei Vaslui (v. tabelul 2), se constată discordanţe tolerabile.

Tabelul 1

Coordonatele noi din triangulaţia oraşului Paşcani

Nr. pct.	Coordonate compensate prin metoda celor mai mici pătrate		Coordonate compensate prin metoda reţelei de substituţie		Discordanţe între coordonate cm	
	X	*Y*	*X*	*Y*	*dx*	*dy*
1	5198,52	9015,99	5198,43	9016,13	— 9	+14
3	5224,84	10518,12	5224,76	10518,03	— 8	— 9
4	2767,41	9582,17	2767,38	9582,19	— 3	+ 2
5	3636,91	7765,11	3636,76	7565,12	—15	+ 1
6	4856,76	7953,73	4856,70	7935,74	— 6	+ 1
7	6263,88	7182,12	6264,00	7182,00	+12	—12
8	7261,18	8607,11	7261,29	8607,21	+11	+10

Tabelul 2

Coordonatele noi din triangulaţia oraşului Vaslui

Nr. pct.	Coordonate determinate prin metoda segmentelor capabile		Coordonate compensate prin metoda reţelei de subtituţie		Discordanţe între coordonate cm	
	X	*Y*	*X*	*Y*	*dx*	*dy*
1	9930,51	5576,43	9930,38	5576,53	—13	+10
4	5956,11	5348,95	5956,06	5348,85	— 5	—10
5	6403,35	6497,60	6403,36	6497,57	+ 1	— 3
6	8299,90	7106,20	8299,82	7106,11	— 8	— 9
7	7492,77	6044,26	7492,81	6044,26	+ 4	0

Aceste discordanţe reprezintă cantităţi neglijabile faţă de rezultatele obţinute prin compensarea riguroasă şi, respectiv, segmentele capabile, care implică observaţii numeroase pe teren şi un ansamblu de calcule mult mai complicat.

3. Precizia determinării coordonatelor şi eficienţa economică

La determinarea coordonatelor unui punct, influenţa fundamentală o exercită unghiul sub care se intersectează dreptele ce-l determină, precum şi lungimile acestor drepte.

În acest sens, s-a determinat eroarea în poziţie pentru punctele *1*, *5* şi *7* din triangulaţia Vaslui şi pentru punctele *4*, *5* şi *7* din triangulaţia Paşcani. La studiul preciziei în poziţia acestor puncte s-au avut în vedere diferite condiţii în care acestea au fost determinate.

Drept rezultat, precizia este dată de semiaxele elipsei erorilor A şi B şi în special de greutatea elipsei erorilor P.

Este de observat că punctele care sînt determinate de drepte care se intersectează sub un unghi în jur de 100^G şi lungimile laturilor sînt aproximativ egale, au o bună determinare, elipsa erorilor căpătînd alura unui cerc al erorilor. Faptul este ilustrat de punctul *1* din triangulaţia Vaslui, a cărui elipsă a erorilor are semiaxele $A=0{,}078$ m, $B=0{,}064$ m şi $P=98$ (fig. 6 a).

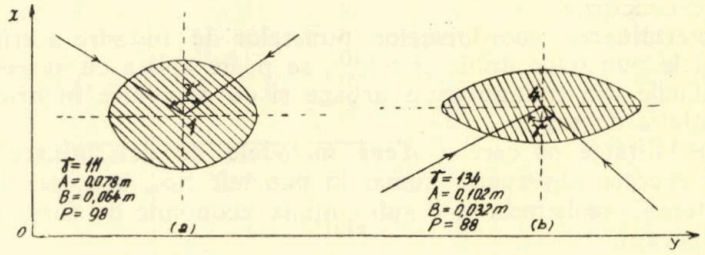


Fig. 6

Cu cît unghiul sub care se intersectează dreptele se măreşte, iar lungimile laturilor sînt pronunţat diferite, elipsa devine de alură alungită — în general de-alungul direcţiei de intersectare a dreptelor. Caracteristică este elipsa erorilor pentru punctul *4* din triangulaţia Paşcani (fig. 6 b) dată de următoarele elemente: $A = 0{,}102$ m, $B=0{,}032$ m şi $P=88$.

Greutatea P a elipsei furnizează cea mai bună caracterizare a preciziei în poziţie a punctului. Cu cît greutatea elipsei este mai mare cu atît precizia punctului determinat este mai ridicată. Din punctele studiate cea mai bună precizie o are punctul *7* din triangulaţia Paşcani ($P = 154$), iar cea mai slabă, punctul *7* din triangulaţia Vaslui ($P = 48$).

Prin urmare, la determinarea punctelor de triangulaţie prin metodele arătate, trebuie avut în vedere, în special, ca primul punct nou, din care se determină apoi şi celelalte, să aibă o determinare bună. Nerespectarea condiţiilor optime de determinare pentru aceste puncte duce la obţinerea unei precizii reduse a acestora şi implicit la o determinare de precizie redusă şi pentru celelalte puncte.

În cazul cînd punctul determinat din două direcţii are o precizie slabă, se poate introduce o nouă direcţie, dintr-o poziţie convenabil stu-

diată. Aceasta poate fi chiar viza de legătură dintre variante — de care s-a amintit, ca fiind necesară pentru compensare, îmbunătăţindu-se totodată simţitor şi precizia de determinare a punctului.

Consideraţiile privind eficienţa economică a metodelor de calcul şi compensarea coordonatelor noi, reies din înseşi rezultatele obţinute. În acest sens trebuie arătat că munca în operaţiile din teren este simţitor uşurată datorită faptului că observaţiile unghiulare se efectuează numai în punctele noi de determinat. Rezultă apoi o economie de material lemnos întrucît punctele de sprijin vizibile (turle, coşuri de fabrici, construcţii înalte etc.), care au coordonate definitive în triangulaţia oraşelor, nu mai necesită construirea de semnale geodezice. În celelalte cazuri din triangulaţia de stat se pot viza ca puncte de sprijin, punctele care au semnale construite, verificînd doar excentricitatea lor.

4. Concluzii

În urma studiului efectuat, în cele două triangulaţii, se pot desprinde următoarele concluzii :

a) Determinarea coordonatelor punctelor de îndesire a triangulaţiei prin metodele punctelor duble şi triple, se poate aplica cu succes în toate cazurile dificile din triangulaţiile urbane şi cu deosebire în orice situaţie din triangulaţia de stat.

b) Posibilitatea pe care o oferă metodele de determinare şi anume aceea de a efectua observaţii numai în punctele noi, uşurează mult operaţiile de teren, realizîndu-se o substanţială economie de forţă de muncă la aceste operaţii.

c) Prin construirea semnalelor geodezice numai în punctele noi, se realizează economii la material lemnos.

d) Observaţiile azimutale nu necesită aparatură specială şi se execută conform instrucţiunilor în vigoare, folosind aparatura din tehnica actuală pentru lucrările topo-geodezice.

e) Viza de legătură între variantele determinate independent — necesară compensării în grup a reţelei — se poate asigura în mod convenabil, deoarece punctele noi sînt apropiate între ele şi se pot viza reciproc.

f) Calculul coordonatelor apropiate se efectuează cu ajutorul unor relaţii simple şi poate fi executat de orice calculator cu pregătire corespunzătoare.

g) Precizia determinării coordonatelor prin metodele propuse este egală cu precizia obţinută prin aplicarea metodelor echivalente, conform instrucţiunilor tehnice în vigoare.

h) Compensarea în grup a coordonatelor noi prin metoda reţelei de substituţie, stabileşte poziţia cea mai probabilă a punctelor noi în ansamblul reţelei de sprijin, realizînd o omogenizare ponderată a canevasului pentru orice ridicări topografice sau fotogrametrice.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de drumuri şi poduri

BIBLIOGRAFIE

1. Apreutesei C., Barbălată I., Tudor C., *Geodezia.* Edit. Agro-Silvică, Buc., 1962.
2. Чеботарев А. С., *Геодезия.* Геодезиздат, М., 1949.
3. * * * *Instrucțiuni tehnice pentru ridicările topografice la scările 1:5000 și 1:2000.* D. G. G. O. T., Lito, Buc., 1961.
4. Gavrilov Gh., Apreutesei C., Gavrilov L., Lucr. șt. Inst. agr. „Ion Ionescu de la Brad", Iași, 1960, p. 407.
5. Jordan W., Eggert O., Kneissel M., *Handbuch der Vermessungskunde.* Stuttgart, 1958–1961.
6. Martinian O., Popescu Gr. I., Gavrilov Gh., Apreutesei C., Barbălată I., Gavrilov L., Lucr. șt. Inst. agr. „Ion Ionescu de la Brad", 1961, p. 439.
7. Tardi P., Laclavère J., *Traité de Géodésie.* Gauthier-Villars, Paris, 1954.

COMPENSATION DEMI-RIGOUREUSE DES COORDONNÉES DES POINTS DE TRIANGULATION, DÉTERMINÉS PAR LA MÉTHODE DES POINTS DOUBLES ET TRIPLES

(Résumé)

On présente une étude concernant la compensation demi-rigoureuse des coordonnées des points de triangulation, déterminés par la méthode des points doubles et triples. Par cette voie on obtient la position la plus probable des nouveaux points dans l'ossature et une homogénisation pondérée du canevas.

On souligne le rendement élevé réalisé dans les opérations sur terrain et en calculs, par l'application de ces méthodes dans la triangulation topographique.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 624

ПЕРЕДВИЖКА ЗДАНИЙ

Э. М. ГЕНДЕЛЬ

Передвижка зданий обычно вызывается необходимостью проведения работ по реконструкции городов (расширение улиц, площадей), введением новой технологии на промышленных предприятиях (изменения в расположении цехов, зданий) и другими жизненными требованиями. На протяжении истории человеческой цивилизации города меняют свой план и облик в зависимости от общественно-экономической формации. В СССР осуществляется социалистическая реконструкция городов на основе растущих социально-экономических и культурных требований социалистического общества. Реконструкция городов ведется с учетом использования новейшей техники для лучшего сохранения материальной и художественной ценностей застройки.

В СССР реконструкция городов получает все большее распространение, начиная с первой пятилетки. Ярким примером этому служит реконструкция Москвы. При перепланировке и расширении московских улиц в целях сохранения уникальных памятников архитектуры, ценных жилых, общественных, производственных зданий и сооружений их передвигают на 75 и более метров. Так, при расширении ул. Горького (рис. 1) было передвинуто на новую красную линию 9 зданий общим объемом $\simeq 250$ т. м^3.

Передвижка деревянных зданий в России производилась в прошлом, не только по суше, но и по воде (на плотах).

В настоящее время в СССР имеет место массовая передвижка деревянных зданий на большие расстояния в связи с укрупнением сел и в других случаях, особенно при затоплении больших территорий, вызываемых строительством больших гидротехнических сооружений. Для передвижки деревянных зданий наибольшее применение получили сборно-разборные металлические сани.

Для передвижки одноквартирного рубленого здания по бездорожью (целине, пашне и проселочным дорогам) тяговое усилие обеспечивается одним или двумя тракторами.

Передвижка каменного здания в Москве впервые была произведена в 1897 г. в районе Каланческой (ныне Комсомольской) площади, при расширении ж. д. узла. Передвижка на 100 м двухэтажного каменного здания осуществлялась по стальным каткам, уложенным на рельсовые пути; причем ходовые балки также состояли из рельсов. Больше передвижек в дореволюционной России не производилось.

Начало работ по реконструкции Москвы вызвало необходимость в передвижке большого количества зданий. В 1935 г. было удачно передвинуто новым способом, предложенным автором настоящей статьи, здание фидерной подстанции на пл. Маяковского. Этот способ и лег в основу всех дальнейших передвижек в Москве. К числу оригинальных работ по передвижке каменных зданий в Москве относятся: указанное выше здание фидерной подстанции; пятиэтажное здание (рис. 2) по Садовнической ул. (ныне ул. Осипенко), передвинутое в 1937 г. на 53,19 м с поворотом на 19°; дом Московского Совета, передвинутый в 1939 г. на 13,65 м; здание глазной больницы по ул. Горького (рис. 3), передвинутое в 1940 г. на 93,5 м с поворотом на 97°17′ и пятиэтажное с железобетонным

каркасом здание ВОДГЕО, передвинутое в 1958 г. на 63 м. Наибольший из передвинутых домов (ул. Горького 61) имел объем 48 000 м³ и вес 24 600 т. Такое большое и тяжелое здание передвигалось впервые вмире в 1940 г.

Все здания во время передвижки не получили каких-либо деформаций. Благодаря применению и оставлению в стенах здания рандбалок (см. ниже) общая прочность зданий после передвижки и установки на новые фундаменты повышается. За время с 1935 г. по 1960 г. в Москве было передвинуто 26 каменных зданий общим объемом около 350 000 м³.

Все передвигавшиеся здания имели удовлетворительное состояние. Во многих из них до передвижки были обнаружены небольшие трещины температурного и осадочного характера; трухлявость кирпича 2...3 рядов кладки у уровня земли; малая прочность кладки стен, примыкавших к соседним зданиям и др. Однако все указанные дефекты не препятствовали передвижке. По генеральному плану реконструкции Москвы предстоит еще передвинуть около ста зданий и сооружений.

Кроме СССР, массовая передвижка зданий производится в США и в меньшем объеме во Франции. В других странах она носит единичный характер.

Существует три основных метода передвижки зданий; советский, американский и французский. Советский метод [1] состоит в заводке рандбалок в основание всех кирпичных стен передвигаемого здания. Их вставляют в штрабы, устраиваемые поочередно с обеих сторон каждой капитальной стены, и скрепляют с последними; для этого в пространство, образуемое между стеной и рандбалкой, заливают цементный раствор. Под рандбалками стен, расположенных под углом к направлению движения, устанавливают параллельно движению парные ходовые балки, связанные между собой поперечными диафрагмами; далее располагают стальные катки и рельсовые пути.

Две рандбалки одной стены связывают между собой поверху через каждые 2...3 м приваркой к ним прута из круглой стали. Для их заводки сквозь стену над рандбалками просверливают перфоратором круглые отверстия. Неизменность положения рандбалок понизу обеспечивается приваркой к ним ходовых балок.

Рандбалки, заводимые в стены, располагаемые параллельно направлению движения, служат одновременно и ходовыми (рис. 4). Следовательно, при наличии стен, параллельных направлению движения, рандбалки этих стен, являясь и ходовыми, заводятся либо ярусом ниже по сравнению с рандбалками других стен, либо в одном ярусе, но в последнем случае дополнительно вводятся башмаки. Как понятно, башмаки (короткие по длине стальные плиты) располагаются под рандбалками на определенном расстоянии друг от друга. При такой конструкции катки располагаются неравномерно по всей длине под ходовыми балками, а только на участках расположения башмаков—между башмаками и рельсами.

Поскольку металл рандбалок связывают раствором с каменной кладкой здания, то стены передвигаемого дома рассматривают не только как нагрузку, но и как несущую конструкцию, армированную снизу балками. Благодаря совместной работе кирпичной кладки с заведенными в них балками, наибольшее сечение рандбалок требуется не от изгибающего момента, а от смятия кирпичной кладки над местами расположения ходовых конструкций и поэтому на передвижку зданий советским способом расходуется меньше металла.

Сечение рандбалок рекомендуется определять из условия, чтобы максимальные напряжения (σ_x) в кирпичной кладке не превышали 1,5 от расчетных (учитывая непродолжительность работы рандбалок) по следующей формуле:

$$\sigma_x = 0{,}3P\sqrt[3]{\frac{E_k B}{EI}},$$

где: P — нагрузка, приходящаяся на данный узел, E_k — модуль деформации кирпичной кладки, B — ширина распределения нагрузки от обеих рандбалок, EI — жесткость обеих рандбалок.

Длину распределения нагрузки по рандбалке определяем по формуле:

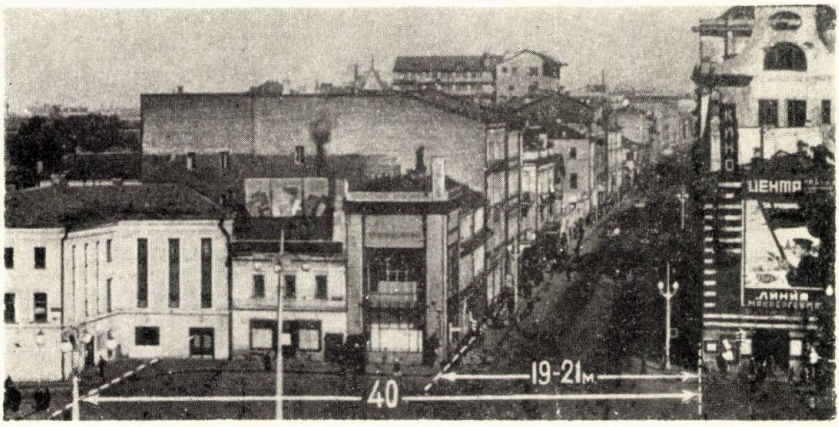


Рис. 1. — Ширина улицы Горького (Москва) на участке между площадями Пушкина и Маяковского до и после реконструкции.

Рис. 2. — Дом № 77 по улице Осипенко (Москва) во время передвижки.

Рис. 3. — Здание Московской глазной больницы во время передвижки с поворотом с улицы Горького в переулок Садовских.

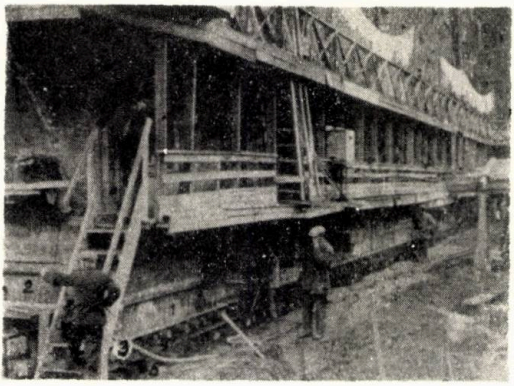
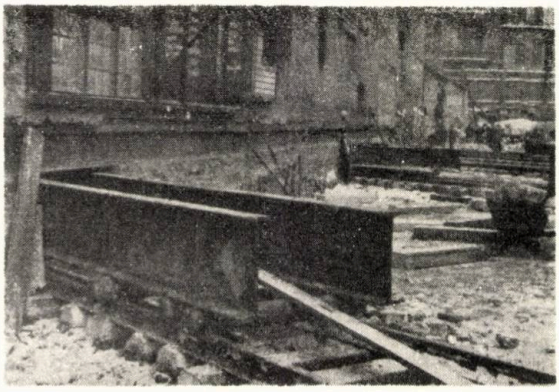


Рис. 4. — Рандбалки – ходовые балки — метод СССР при прямой передвижке. *1* – рандбалки стены располагаемой параллельно направлению движения; *2* — то-же нормально направлению движения; *3* – катки; *4* — рельсы; *5* – шпалы.

а

б



к

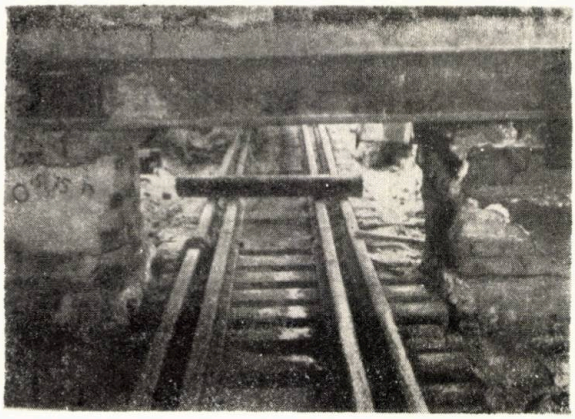


Рис. 5. — Очередность работ по устройству ходовых конструкций. *а* — устройство штраб для рандбалок; *б* – устройство рельсового пути; *в* — парные ходовые балки заведенные под здание.

$$l = 3{,}3\sqrt[3]{\frac{EI}{E_k B}}.$$

Учитывая, что давление от ходовых балок на рандбалки (b) распределяется по ширине полки ходовых балок (при наличии их под рандбалками), то длина распределения нагрузки (L) составит:

$$L = 2l + b.$$

При пересечении эпюр напряжений (в пролете между ходовыми балками одного пути) величина фактического напряжения будет равна сумме соответствующих ординат эпюр. Здесь следует отметить, что при определении напряжений в кирпичной кладке не рекомендуется (в запас прочности) учитывать заклинку из цементного раствора над рандбалкой (которая устраивается для плотного примыкания рандбалки к кирпичной кладке). Для E_k следует принимать 0,5 от начального модуля деформации. Однако, при установлении размера ширины распределения нагрузки от рандбалки на кирпичную кладку рекомендуется учитывать и толщину заклинки (a). Исходя из этого, ширина распределения нагрузки на кирпичную кладку (B) составит:

$$B = 2b_1 + 4a,$$

где: b_1 — ширина опоры рандбалки, равная 1,5 от ширины ее полки (вся верхняя полка и половина нижней полки, заходящей в кладку), a — высота (толщина) заклинки.

Размер ($4a$) принят нами из условия, что заклинка по ширине будет превышать ширину полки рандбалки с каждой ее стороны не менее, чем на размер высоты заклинки.

Подготовку здания к передвижке начинают с пробивки штраб отбойными молотками (рис. 5). Глубина штрабы делается не более 1/3 толщины стены. Установку рандбалок во все стены здания производят в 3 или 4 очереди. Стыки рандбалок соединяют приваркой накладок, устанавливаемых с одной стороны на их стенки и полки. Вслед за установкой рандбалок становится безопасным пробивка под ними сквозных проемов во всех местах, где стены здания пересекаются рельсовыми путями. На рельсы укладывают катки и по ним закатывают под здание две ходовые балки, связанные между собой диафрагмами. Для предотвращения неравномерных осадок в здании, при его перекреплении с фундаментов на рельсовые пути, применяют домкраты. Последние устанавливаются на диафрагмы ходовых балок в тех местах, где над ними приходятся рандбалки (рис. 6). После того, как домкратами будет воспринята нагрузка, в зазоры между ходовыми балками и рандбалками забивают стальные клинья. Далее разбирают кирпичную кладку между рельсовыми путями, и здание оказывается посаженным на ходовые балки, а через них на рельсовые пути.

По американскому методу под передвигаемое сооружение заводят на близком расстоянии друг от друга два или три ряда стальных балок, расположенных накрест. Верхний ряд чаще всего состоит из отдельных коротышей — поперечин, пересекающих только одну стену (рис. 7). Эти поперечины поддерживаются продольными балками, располагаемыми снизу вдоль и с двух сторон каждой стены. Для заводки этих балок в стенах здания поочередно пробиваются сквозные гнезда. В США между ходовыми балками и катками в местах расположения стен (приложения нагрузки) обычно устанавливают специальные короткие башмаки, состоящие из часто расположенных малых номеров швеллеров или рельсов с приваренными к ним верхними и нижними стальными листами, или из одной толстой стальной плиты. Далее, как и по советскому методу, под катками на всю длину передвижки располагаются рельсовые пути.

Таким образом, по американскому методу балки, поддерживающие здание, не связывают с кладкой стен, они работают самостоятельно, а следовательно, здание рассматривается только как нагрузка. По этой причине для американского способа передвижки требуется в несколько раз большее количество стальных балок. Наибольшее здание, передвинутое в США (телефонная стация в Индианополисе) весило 10 000 т.

Новый метод, применяемый во Франции, относится к передвижке каменных зданий на большие расстояния — километры. По французскому методу вместо стальных рандбалок заводят в стены высокие (1 м) на всю их толщину монолитные железобетонные рандбалки

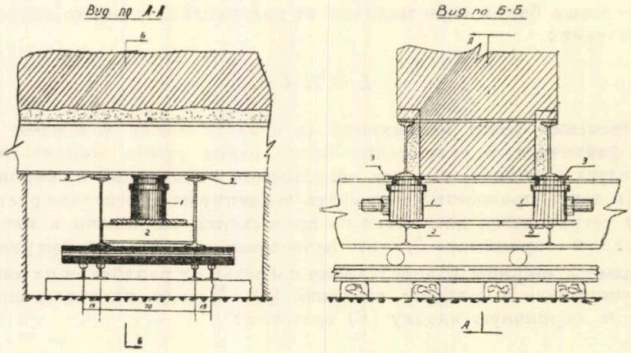


Рис. 6. — Конструкция перекрепления здания с фундамента на рельсовые пути. *1* — гидравлические домкраты; *2* — диафрагмы; *3* — клинья забиваемые после восприятия нагрузки домкратами; *4* — верхняя связь между рандбалками.

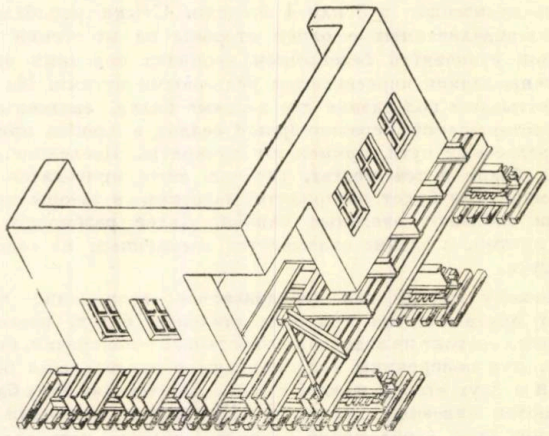


Рис. 7. — Конструкция для передвижки здания, применяемая в США.

[2][1]). Вместо ходовых балок и катков применяют колесные тележки с гидравлическими домкратами. Последние имеют большой ход поршня и служат для непрерывного поддержания основания здания в одной плоскости во время его передвижки. Применяя такую

[1]) Этот метод стали применять сравнительно недавно ≃ в 1950 годах.

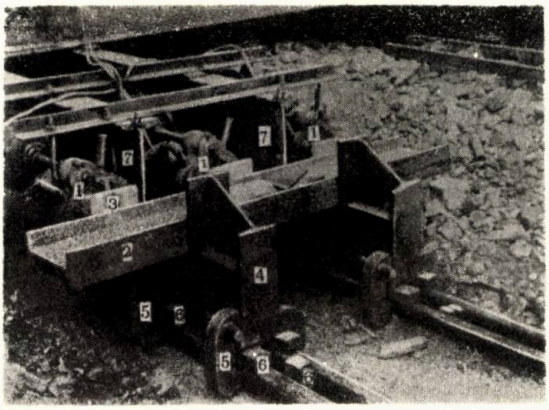


Рис. 8. — Электродомкраты подвешенные к верхним полкам ходовых балок, сзади движения. *1* — домкрат; *2* — упорная балка; *3* — дощатая прокладка; *4* — упор крепящийся к рельсам путей; *5* — съемная серьга упора; *6* — клинья; *7* — ходовая балка.

конструкцию, позволяющую выравнивать неравномерные осадки, упрощается устройство основания под рельсовые пути: вместо дорогостоящего бетонного основания с одинаковыми вертикальными отметками передвигают по грунтовому основанию. Наличие под зданием гидравлических домкратов с большим ходом поршня позволяет передвигать здания не только по неравномерно сжимаемым основаниям, но и по территории, имеющей уклоны и подъемы с выпуклыми и вогнутыми поверхностями.

Такой метод передвижки имеет преимущества при передвижке каменных зданий на большие расстояния, поскольку благодаря наличию домкратных тележек не требуется выравнивание под одну вертикальную отметку всей большой территории, по которой передвигается здание. Все домкраты, поддерживающие здание, присоединяются к одному насосу с гидравлическим аккумулятором. Чем меньше под зданием будет домкратных тележек, тем легче поддерживать основание здания в одной плоскости. Следовательно, рама, поддерживающая здание при редко расположенных гидравлических домкратах, должна состоять из балок большой несущей способности. В кирпичных зданиях (также, как и в советском методе) этими балками являются железобетонные рандбалки вместе со стенам здания. Для устройства таких балок сначала стены вывешивают на поперечины, расставленные через определенное расстояние, с опорами, расположенными по обе стороны стены. Здесь необходимо отметить, что для поперечных балок применяют хорошо устойчивые в горизонтальном наравлении инвентарные балки и инвентарные опорные конструкции.

После вывешивания стены на поперечины, выламывают нижерасположенную каменную кладку. Затем под поперечинами собирают арматуру железобетонной балки и бетонируют ее.

Под железобетонными балками устраивают рельсовые пути и на определенном расстоянии друг от друга устанавливают колесные тележки с домкратами грузоподъемностью до 200 т. При чем обычно на одну тележку передается до 100 т, а при большей нагрузке устанавливаются две спаренные тележки. После воспринятия домкратными тележками нагрузку от здания, поперечные рамы разгружаются и убираются.

По такому способу передвигали несколько каменных каркасных и бескаркасных здании на расстояние до 1 000 м. Так, при передвижке одного четырехпролетного железобетонного холодильника размерами 100 × 20 м установили только два рельсовых пути. Нагрузка от первого, третьего и пятого рядов колон передавалась через подкосы на рельсовые пути второго и четвертого рядов колонн.

В другом случае, применяя этот способ, передвинули здание через шоссе, расположенное на большой насыпи. Причем здание сначала двигали в обратном направлении, чтобы, увеличив расстояние между зданием и насыпью, уменьшить угол подъема при движении в сторону насыпи.

Для передвижки каменных зданий применяют шары, катки, ролики и колесные тележки. Катки более целесообразны в сравнении с шарами, проще в изготовлении и не требуют сложной желобчатой конструкции ходовых балок и путей. Основной недостаток катков — возможное смещение здания при движении. Ролики при незначительном смещении создают дополнительное трение между его ребордой и полкой ходовой балки. Однако ролики целесообразны при свайном основании под рельсами путей, так как не дают зданию смещаться при движении и тем самым не вызывают внецентренной нагрузки на сваи. Колесные же тележки с передачей на них нагрузки через гидравлические домкраты (французский метод) рекомендуются, как было сказано, только при большой длине передвижки.

Для тяговых усилий применяют электролебедки с системами полиспастов, так называемые, тянущие приспособления, или домкраты — толкающие усилия (рис. 8).

Опытом установлено, что при сдвижке с места здания, посаженного на катки, тяговые усилия составляют от 4 до 6% от веса здания, а при движении ≈ 3%. При передвижке на колесных тележках тяговое усилие примерно в 2 раза большее. Скорость движения по каткам каменного здания обычно принимают от 6 до 10-ти м/в час. Дом Московского Совета передвигали по каткам со скоростью до 23 м/час.

Фундаменты на новом месторасположении каменного здания строят заранее. Учитывая, что здание, передвигаемое по каткам, может получить небольшое смещение (в ту или иную сторону), фундаменты строят на 5...10 см шире толщины стен. Перекрепление

передвинутого здания на новые фундаменты производят в обратном порядке по отношению к его установке на ходовые конструкции. Работу начинают с заполнения кирпичной кладкой свободных участков между фундаментом и рандбалками. Далее выбив ют клинья между ходовыми и рандбалками в две очереди (через один путь) вытаскивают по каткам из под здания, связанные диафрагмами ходовые балки, снимают рельсы и шпалы, и по мере их уборки освободившиеся участки под стенами заполняют кладкой.

Обычно наиболее целесообразная отметка среза здания с фундамента определяется глубиной заложения материкового грунта и экономическими подсчетами из условия, чтобы суммарные затраты на земляные работы и каменную кладку были бы минимальными. Чем ближе отметка среза к подошве фундамента здания, тем больше приходится производить земляных работ и меньше каменной кладки после передвижки. Необходимо отметить, что бывает экономичнее передвигать здания вместе со своими фундаментами. Так передвигали в Москве здание меховой фабрики.

Расстояние передвижки зависит от положения красных линий и имеющихся незастроенных участков. Длина пути движения здания практически не ограничена и определяется экономическими и планировочными соображениями. Здания обычно передвигают по горизонтали, но их можно передвигать и по наклонной плоскости, при условии, чтобы наклон был меньше коэффициента трения между катками (тележками) и рельсами путей (для исключения самопроизвольного движения). Опыт показывает, что неудобство работ, связанных с устройством наклонной плоскости для передвижки по советскому или американскому способам, не оправдываются экономией на тяговых усилиях. Если применяя эти способы необходимо поднять высотную отметку здания на новом месте его расположения, то наряду с передвижкой по горизонтали производят и подъем здания. При передвижке по французскому способу, как понятно, нецелесообразно выравнивать рельсовые пути под одну вертикальную отметку.

Во время производства работ по передвижке зданий их санитарно-технические коммуникации: водопровод, канализация, отопление, газ, электросеть, телефон, проволочная радиосеть и др. могут работать бесперебойно (рис. 9). К канализационным стоякам выше уровня рандбалок присоединяют гибкие рукава, другие концы которых опускают в канализационные колодцы; в трубы водопровода и газа вводят вставки требующейся длины из резиновых шлангов; трубы отопления присоединяют шлангами к котельной соседнего дома или временно переносят котельную из подвала на I этаж. Для телефона, электросети и радиотрансляции вводят вставки из гибких кабелей. Таким образом, нормальная жизнь в здании может быть полностью обеспечена.

При определении экономической целесообразности передвижки учитывают, что на стоимость работ в основном влияют: длина пути передвижки (площадь, подлежащая обработке); высота здания (чем выше здание, тем дешевле стоимость на 1 м³ передвигаемого здания); качество и глубина заложения материнового грунта. Так, узкое и длинное здание экономней двигать в прямом направлении, вдоль его узкой стороны, а не наоборот, ибо при этих условиях для одной и той же длины передвижки площадь территории, подлежащая обработке, будет меньшей.

По сравнению с новым строительством для передвижки требуется: металла от 15 до 20%, лесоматериала (менее качественного) ≃ 15%, каменных материалов ≃ 20% (вместе с кладкой фундаментов), цемента ≃ 20%, рабочей силы ≃ 25%.

Передвижка высокого многоэтажного здания по каткам на длину 25 м, при движении в направлении его узкой стороны, обходится примерно в 40% от оцененной стоимости этого здания.

Поступила в 13 I 1965 г.

Московский инженерно-строительный институт, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Гендель Э. М., *Передвижка зданий*. Наркомхоз, М., 1946.
2. * * * Travaux, 1956, *255—256*.
3. Гендель Э. М., *Передвижка зданий на большие расстояния*. М., 1955.

Рис. 9. — Положение шлангов водопровода (*а*), канализации (*б*), телефонного кабеля (*в*), при движении здания.

4. Перлштейн З. М., Новости техники, 1940, *16*.
5. Страментов А. Е., *Городское благоустройство*. Госстройиздат, М., 1946.
6. Гендель Э. М., Брайт П. И., Основания, фундаменты и механика грунтов, 1959, *1*.

DEPLASAREA CLĂDIRILOR

(Rezumat)

Se indică cauzele care impun deplasarea clădirilor. Se expun metode de deplasare utilizate în Uniunea Sovietică şi peste hotare. Se recomandă metode de calcul a construcţiilor de bază, care au dat rezultate bune în practică.

Se descriu problemele utilităţii folosirii sferelor şi a rulourilor, se aduc date experimentale şi recomandări pentru întrebuinţarea dispozitivelor de tragere. Se expun indicii de cost ai deplasării clădirilor în ce priveşte materialele şi manopera, comparaţi cu cei referitori la construcţiile noi.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Lărgimea străzii Gorki (Moscova) pe porţiunea dintre piaţa Puşkin şi piaţa Maiakovski înainte şi după reconstrucţie.

Fig. 2. — Casa nr. 77 de pe strada Osipenko (Moscova) în timpul deplasării.

Fig. 3. — Clădirea spitalului din Moscova în timpul deplasării, cu rotirea din str. Gorki în str. Sadovski.

Fig. 4. — Grinzile de centură îndeplinind şi rolul de grinzi mobile (metoda U.R.S.S. folosită în deplasări rectilinii). *1* — grinzile de centură ale peretelui orientat paralel cu direcţia deplasării ; *2* — grinzile de centură ale peretelui orientat normal pe direcţia deplasării ; *3* — rulouri ; *4* — şine ; *5* — traverse.

Fig. 5. — Succesiunea lucrărilor de montare a grinzilor mobile. *a* — executarea şanţurilor în zid pentru grinzile mobile ; *b* — executarea căii de rulare ; *c* — perechi de grinzi mobile introduse prin rulare sub clădire.

Fig. 6. — Trecerea clădirii de pe fundaţii pe construcţiile mobile. *1* — presă hidraulică ; *2* — diafragmă ; *3* — penele bătute după preluarea încărcărilor de către piese ; *4* — legătura superioară între grinzile de centură.

Fig. 7. — Sistem constructiv pentru deplasarea clădirilor folosit în S. U. A.

Fig. 8. — Prese electrice suspendate de talpa superioară a grinzilor mobile la capătul lor posterior. *1* — presă ; *2* — grindă de reazem ; *3* — dulap de lemn ; *4* — fixator prins de şinele căii ; *5* — inel demontabil al fixatorului ; *6* — pană ; *7* — grindă mobilă.

Fig. 9. — Aşezarea conductelor de apă : *a* — ale canalizării ; *b* — ale cablului telefonic ; *c* — la deplasarea clădirii.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

УДК 691.324

ПРИНЦИПЫ ПОДБОРА ЭФФЕКТИВНЫХ МИНЕРАЛИЗАТОРОВ ДЛЯ ОБЖИГА КЛИНКЕРА БЕЛОГО ПОРТЛАНДЦЕМЕНТА

А. Н. ГРАЧЬЯН и А. П. ЗУБЕХИН

Обжиг трудноспекаемой сырьевой смеси при производстве белого портландцемента возможен при условии ввода минерализаторов. Выбор эффективных минерализаторов производился в каждом случае после проведения большого числа опытов.

Рядом авторов [1]...[4] были проведены работы по выявлению взаимосвязи между степенью интенсификации процесса минералообразования клинкера и составом вводимых минерализаторов.

Нами были проведены исследования с целью установления закономерности эффективности влияния минерализаторов в зависимости от характеристик входящих в них катионов и анионов.

В связи с этим нами было изучено интенсифицирующее влияние некоторых катионов в соответствии с их положением в пероидической системе элементов Менделеева, а также наиболее эффективных анионов на процесс обжига клинкера белого портландцемента.

В работе было изучено минерализирующее влияние на процесс клинкерообразования катионов I и II групп периодической системы элементов: Li^+, Na^+, K^+ Be и Mg^{2+}, а также анионов SiF_6^{2-}, F^-, SO_4^{2-} и Cl^-.

При исследовании минерализующего действия катионов, для исключения влияния анионов, были использованы углекислые соли.

Охлаждение клинкеров производилось закалкой в воде. Изучение кинетики усвоения извести, а также рентгенографические исследования фазовых спеков, полученных при различных температурах, и термографические исследования процесса обжига клинкера позволили установить, что по убыванию эффективности интенсифицирующего влияния на процесс клинкерообразования катионы располагаются в ряд:

$$Be^{2+} \rightarrow Mg^{2+} \rightarrow Li^+ \rightarrow Na^+ \rightarrow K^+ .$$

Сопоставление эффективности минерализующего влияния катионов с различными характеристиками, определяемыми их положением

в периодической системе элементов, показало, что с уменьшением электроотрицательности катиона снижается эффективность его минерализующего влияния.

Установленная нами зависимость вполне согласуется с современными воззрениями на механизм действия минерализаторов [6].

Нами было также изучено влияние указанных минерализаторов на белизну клинкера.

Как показали полученные данные при вводе в сырьевую смесь катионов с большей электроотрицательностью в значительной степени на 3...4 % снижается белизна клинкера.

Проведенными микроструктурными исследованиями было установлено, что снижение белизны клинкера при вводе в сырьевую смесь катионов Be^{2+}, Mg^{2+}, Li^{+} объясняется образованием в этом случае крупнокристаллической структуры. В то же время катионы Na^{+} и K^{+} обусловливают образование мелкокристаллической структуры, обладающей способностью в наибольшей степени диффузно отражать световой поток. Кроме того, как показали исследования спектров электронного парамагнитного резонанса, катионы Be^{2+}, Mg^{2+}, Li^{+} приводят к трансформации железосодержащий фазы клинкера — переходу ионов трехвалентного железа из шестерной координации, обладающей наименьшей красящей способностью, в четверную с большей красящей способностью. Эти факторы и обусловливают снижение клинкера.

Исследование минерализующего действия анионов SiF_6^{2-}, F^{-}, SO_4^{2-} и Cl^{-} производилось нами при вводе их в сырьевую смесь с катионом Na^{+}, наиболее благоприятно влияющего на структуру и белизну клинкера. Кроме того были изучены и кальциевые соли упомянутых анионов, как наиболее распространенных минерализаторов. Изучение кинетики усвоения извести, рентгенографические и термографические исследования процесса минералообразования показали, что анионы минерализаторов по убыванию эффективности влияния располагаются в следующий ряд:

$$SiF_6^{2-} \rightarrow F^{-} \rightarrow SO_4^{2-} \rightarrow Cl^{-}.$$

Сопоставление эффективности их влияния с электроотрицательностью позволило сделать вывод, что с уменьшением электроотрицательности анионов убывает эффективность их минерализующего влияния.

При введении в сырьевую смесь исследуемых анионов с катионом Ca^{2+} последовательность в убывании эффективности минерализующего действия анионов сохраняется такой же, как при введении их с катионом Na^{+}. Однако степень интенсифицирующего действия анионов при сочетании с катионом Ca^{2+} значительно ниже, чем в случае введения их с катионом Na^{+}. Это следует объяснить тем, что при сочетании аниона с катионом, имеющим большее значение электроотрица-

тельности, абсолютная резкость между значениями их электроотрицательностей, которую можно принять за меру энергии минерализатора [9], уменьшается. Это и обусловливает меньшую эффективность минерализующего действия добавки. Таким образом, установлено, что наибольшей эффективностью обладают минерализаторы, состоящие из аниона с наибольшей электроотрицательностью из катиона с наименьшей электроотрицательностью.

Выявленная нами закономерность влияния минерализаторов в зависимости от электроотрицательности катионов и анионов справедлива и при обжиге клинкеров различного минералогического состава.

Определение белизны показало, что наибольшую белизну имеют клинкеры при вводе минерализаторов с анионами SiF_6^{2-} и F^- при сочетании их с катионом Na^+. В случае же ввода минерализаторов с анионами SO_4^{2-} и Cl^- белизна клинкеров значительно снижается — на 3...4%. Особенно при сочетании их с катионом Ca^{2+}.

Причинами снижения белизны, как и в случае катионов, являются образования крупнокристаллической структуры клинкера [7], [8] и кристаллохимические превращения ионов железа — переход их в четверную координацию. Установлено, что с уменьшением электроотрицательности анионов увеличивается размер кристаллов клинкерных минералов и увеличивается степень перехода ионов железа по шестерной координации в четверную.

В результате проведенных исследований установлено:

1. Эффективность действия минерализаторов на процесс образования клинкера находится в закономерной зависимости от электроотрицательности катионов и анионов, входящих в состав минерализаторов: наибольшей эффективностью обладают минерализаторы, имеющие анион с наибольшей электроотрицательностью и катион с наименьшей электроотрицательностью.

2. Установлено, что снижение белизны клинкера при вводе некоторых минерализаторов обусловлено образованием крупнокристаллической структуры и фиксаций в клинкере большей части ионов железа в четверной координации, обладающей повышенной красящей способностью.

3. Из изученных минерализаторов наибольшей эффективностью обладает кремнефтористый натрий, обусловливающий образование мелкокристаллической структуры клинкера, что благоприятно сказывается на него белизне.

Поступила в 27 IX 1965 г.

Новочеркасский политехнический институт, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Августинник А. И., Курдеванидзе О. К., ЖПХ, 1947, **20**, *12*.
2. Сычев М. М., Астахов М. А., Коробова В. Е., Изв. Химия и химическая технология, 1959, **2**, *5*.

3. Журавлев В. Ф., Труды 5-го совещания заводских лабораторий цементной промышленности. 1950.
4. Окороков С. Д., Голынко-Вольфсон С. П., Шевелева Б. И., Яркина Т. Н., Цемент, 1957, *3*.
5. Бацанов С. С., *Электроотрицательность элементов и химическая связь*. СО АН СССР, 1962.
6. Волконский Б. В., Коновалов П. Ф., Макашев С. Д., *Минерализаторы в цементной промышленности*. М., 1964.
7. Titeu O., Balta P., Rev. constr. şi a mater. de constr., 1958, **10**, *4*.
8. Грачьян А. Н., Зубехин А. П., Тр. Новочерк. полит. ин-та, 1962, *129*.
9. Эйтель В. Г., *Физическая химия силикатов*. М., 1962.

PRINCIPII ÎN ALEGEREA MINERALIZATORILOR DE EFICACITATE PENTRU ARDEREA KLINKERULUI DE CIMENT PORTLAND ALB

(Rezumat)

Se stabileşte legătura dintre eficacitatea influenţei mineralizatorilor asupra procesului de formare a klinkerului cimentului Portland alb şi sarcina electrică a cationilor şi anionilor lor.

Eficacitatea cea mai mare o au mineralizatorii cu anioni avînd sarcină electrică negativă mai mare şi cationi cu sarcină electrică negativă mai mică.

Belitul klinkerului depinde de asemenea de sarcina electrică negativă a cationilor şi anionilor mineralizatorului. Se arată că o cauză a micşorării belitului cimentului alb, prin utilizarea unor mineralizatori, o constituie formarea structurii macrocristaline a klinkerului şi trecerea ionilor de fier din sistemul hexagonal în cel tetragonal.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 691.324 : 661.844

INFLUENŢA ADAOSULUI DE BARITINĂ ASUPRA PROPRIETĂŢILOR CIMENTULUI PORTLAND

DE

C. BRANIŞTE şi FLORICA VASILESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

În literatura de specialitate [1] sînt menţionate mărci de cimenturi silicioase cu adaose de: zguri metalurgice, tufuri vulcanice, cenuşe sburătoare, făină de diferite roci etc. Adaosurile sînt, în general, materii silicioase fin pulverizate, care nu posedă ele înseşi calităţi liante ; numai în cazul cînd sînt amestecate cu hidroxid de calciu sau cu ciment Portland în prezenţa apei, capătă proprietăţi liante chiar la temperatura obişnuită [2].

Activitatea adaosurilor la lianţii silicioşi se apreciază după cantitatea de oxid de calciu ce o poate fixa un liant, în timpul prizei şi întăririi.

S-a constatat că cu cît un adaus va conţine mai mult SiO_2 şi Al_2O_3 în stare amorfă, cu atît mai mare va fi capacitatea lui de a fixa oxid de calciu şi ca urmare activitatea creşte.

M. Farran [3] arată că oricare ar fi natura adaosului la ciment, în cazul în care între adaos şi ciment are loc o reacţie chimică, se obţine un ciment cu rezistenţe mecanice superioare. Totuşi sînt şi cazuri cînd fenomenul de aderenţă dintre adaos şi ciment se realizează prin punerea în comun a ochiurilor reţelelor cristaline, a mineralelor ce există în adaos şi a reţelelor cristaline formate în urma reacţiilor chimice dintre agregat şi ciment, realizîndu-se în acest mod o aderenţă pur mecanică; rezistenţele mecanice ale cimentului cresc datorită frecărilor interioare a cristalelor.

În lucrarea de faţă s-a folosit ca adaos baritina la cimentul Portland *P*400 şi s-a urmărit studiul creşterii rezistenţelor mecanice ale cimentului pe mortare. Adaosul de baritină la lianţii silicioşi prezintă importanţă prin faptul că se micşorează consumul de lianţi şi totodată atribuie lianţilor unele proprietăţi speciale.

În Republica Socialistă Romînia există zăcăminte importante de baritină în regiunea Dobrogea, la Somova, şi în regiunea Suceava, la Ostra [4]; în consecinţă s-ar putea obţine pe scară industrială mortare şi betoane cu adaos de baritină.

În studiul nostru s-a folosit baritina de la Ostra, a cărei compoziţie chimică este dată în tabelul 1.

Tabelul 1

Compoziţia chimică a două probe de baritină provenite din două filoane diferite

Denumirea componenţilor	Conţinutul %	
	Baritina *A*	Baritina *B*
$BaSO_4$	90,00	88,33
$BaCO_3$	2,81	7,07
$CaSO_4$	0,66	—
$CaCO_3$	urme	urme
CaF_2	—	—
Fe	0,41	0,281
Al	—	—
SiO_2	6,12	4,31

Din analiza chimică a probelor de baritină rezultă că cea mai indicată pentru adaos este proba *A*, deoarece are un conţinut mai ridicat în $BaSO_4$ şi SiO_2, componenţi ce ajută la compactizarea şi impermeabilizarea cimentului (mortarului de ciment).

2. Partea experimentală

Pentru a determina rezistenţele mecanice ale cimentului s-a folosit dozajul 1:3 (liant şi nisip normal) la care s-a stabilit apa de amestecare. Cu acest dozaj s-au confecţionat cuburi de 7×7 cm şi brichete; probele au fost încercate la 7 zile şi 28 zile de la confecţionare, atît la compresiune cît şi la tracţiune.

Rezultatele obţinute au servit ca termeni de comparaţie pentru probele cu adaos de baritină, reprezentate în tabelul 2.

Probele reprezentate în acest tabel s-au confecţionat scăzînd proporţia de baritină din ciment, atît pentru tipul de baritină *A* cît şi pentru tipul de baritină *B*. Rezistenţele mecanice la compresiune şi la tracţiune pun în evidenţă, comparativ cu proba martor, diminuarea lor pe măsură ce creşte proporţia de baritină (probele A_4).

Înlocuind cimentul cu baritină *A* în proporţie de 15...20%, din dozajul menţionat, rezistenţele mecanice (R_c şi R_{tr}) la 28 zile se menţin aproximativ la aceeaşi valoare ca la proba martor; pentru baritina *B* proporţia admisă este de numai 15%, deci adaosul de baritină este în funcţie de puritatea baritinei.

Pentru a cerceta influenţa baritinei ca adaos, menţinîndu-se constante dozajul 1:3 şi cantitatea de apă de amestecare, s-au confecţionat cuburi cu adaos de baritină în proporţie de la 15% la 90% pentru baritina *A* şi pînă la 40% pentru baritina *B*.

Valorile rezistenţelor mecanice (R_c şi R_{tr}) sînd date în tabelul 3.

– Bul. Inst. Polit. Iaşi, XII (XVI), f–2, 1966

Tabelul 2

Adaos de baritină A şi B scăzut din cantitatea de ciment

Denumirea probei	Dozaj				Tipuri de baritină		R_c kgf/cm²		R_{tr} kgf/cm²	
	Ciment *P*400 g	Nisip g	Baritină g	Apă g	*A*	*B*	la 7 zile	la 28 zile	la 7 zile	la 28 zile
Martor	500	1 500	—	160	—	—	282	412	25,40	29,18
A_1	425	1 500	75	160	15	—	344	428	22,80	28,35
A_2	400	1 500	100	160	20	—	328	420	22,80	25,80
A_3	375	1 500	125	160	25	—	328	364	21,40	24,60
A_4	350	1 500	150	160	30	—	325	336	19,40	23,40
A_1	425	1 500	75	160	—	15	284	422	23,00	27,70
A_2	400	1 500	100	160	—	20	276	386	22,60	25,35
A_3	375	1 500	125	160	—	25	268	384	20,80	23,45
A_4	350	1 500	150	160	—	30	254	376	18,45	20,30

Tabelul 3

Adaos de baritină A şi B adăugat la cantitatea de ciment

Denumirea probei	Dozaj				Proporţia de baritină %		R_c kgf/cm²		R_{tr} kgf/cm²	
	Ciment *P*400 g	Nisip g	Baritină g	Apă g	Tip *A*	Tip *B*	la 7 zile	la 28 zile	la 7 zile	la 28 zile
Martor	500	1 500	—	160	—	—	282	412	25,40	29,18
B_1	500	1 500	75	160	15	—	320	408	28,50	31,40
B_2	500	1 500	100	160	20	—	324	424	29,75	33,05
B_3	500	1 500	125	160	25	—	356	438	30,10	36,55
B_4	500	1 500	150	160	30	—	392	452	34,10	37,45
B_5	500	1 500	200	160	45	—	452	496	36,20	38,95
B_6	500	1 500	250	160	50	—	498	555	40,20	39,75
B_7	500	1 500	300	160	60	—	527	570	43,50	40,81
B_8	500	1 500	350	160	70	—	—	395	—	35,00
B_9	500	1 500	400	160	80	—	—	360	—	32,00
B_{10}	500	1 500	450	160	90	—	—	373	—	36,30
B_1	500	1 500	75	160	—	15	320	404	23,30	28,90
B_2	500	1 500	100	160	—	20	326	418	25,10	32,35
B_3	500	1 500	125	160	—	25	334	430	27,85	34,65
B_4	500	1 500	150	160	—	30	368	436	29,30	37,10
B_5	500	1 500	200	160	—	40	376	480	29,80	39,90

Datele din acest tabel arată că la dozajul 1:3, adăugîndu-se baritina *A* în proporţie de 15...60%, rezistenţele mecanice cresc comparativ cu proba martor chiar şi faţă de cele obţinute în tabelul 2; la adaos de baritină *B* creşterile rezistenţelor mecanice sînt ceva mai reduse, comparativ cu cele de la adaosul de baritină *A*, de aceea în cele ce urmează vom folosi ca adaos numai baritina *A*. La adaosul de baritină *A* rezistenţa R^c creşte la 7 zile cu 87% şi la 28 zile cu 38%, iar rezistenţa R_{tr} creşte la 7 zile cu 71% şi la 28 zile cu 39%. La adaosul de baritină tip *B*, rezistenţa R_c la 7 zile creşte cu 33% şi la 28 zile cu 16,5% iar rezistenţa R_{tr} la 7 zile creşte numai cu 17% şi la 28 zile cu 37%. Tot din tabelul 3 se mai constată că la o proporţie ridicată de baritină, rezistenţele mecanice scad sub limita probei martor (B_8). În consecinţă considerăm că proporţia optimă de adaos de baritină este de 60%, furnizînd un mortar cu rezistenţe mecanice ridicate ($R_c = 570$ kgf/cm² — proba B_7). Baritina adăogată la ciment a fost adusă la o fineţe înaintată, încît pe sita de 4900 ochiuri/cm² nu rămînea un rest mai mare ca 10%. Prin adaosul de baritină fină se măreşte cantitatea de părţi fine din mortar şi contactul dintre liant şi agregat (nisip normal) devine mai intim, mortarul devenind mai compact. Pe de altă parte solubilitatea în timp (28 zile) a $BaSO_4$ [5] şi a SiO_2 amorf conţinut în baritină creşte, formînd geluri, care cu $Ca(OH)_2$ din ciment formează hidrosilicaţi de Ca şi Ba, ce măresc rezistenţele mecanice ale mortarului. Pe această cale se explică obţinerea unor rezistenţe mecanice mai mari cu baritina *A*, analiza chimică (v. tabelul 1) punînd în evidenţă o proporţie mai ridicată de $BaSO_4$ şi SiO_2 decît în cazul baritinei *B*.

Pentru a se obţine un ciment cu calităţi superioare s-a încercat adaosul format dintr-un amestec de 50% litargă şi 50% baritină, necalcinat şi calcinat, în proporţii diferite. Amestecul folosit a fost adus la o asemenea fineţe încît pe sita de 4900 ochiuri/cm² să nu rămînă un reziduu mai mare ca 10%. Rezultatele obţinute sînt date în tabelul 4.

Tabelul 4

Adaos de amestec 50% PbO + 50% $BaSO_4$

Denumirea probei	Dozaj						R_c la 28 zile	R_{tr} la 28 zile
	Ciment *P* 400 g	Amestec 50% PbO + 50% $BaSO_4$			Nisip g	Apă g	kgf/cm²	kgf/cm²
		%	g					
Martor	500	—	—		1 500	160	412,00	29,18
I	500	20	100	Necalcinat	1 500	160	345,00	29,20
II	500	30	150		1 500	160	518,66	31,57
III	500	40	200		1 500	160	622,00	39,20
I	500	20	100		1 500	160	516,00	32,66
II	500	30	150	Calcinat	1 500	160	534,00	40,65
III	500	40	200		1 500	160	559,00	38,75

Datele din acest tabel scot în evidenţă faptul că la un adaos de 40% amestec 50% PbO+50% $BaSO_4$ necalcinat se obţine un ciment cu o rezistenţă la compresiune $R_c = 622$ kgf/cm², superioară celei corespunzătoare adaosului de 60% baritină ($R_c = 570$ kgf/cm²), rezistenţa la tracţiune ($R_{tr} = 39{,}20$ kgf/cm²) fiind ceva mai scăzută decît cea a cimentului obţinut cu adaos de baritină 60% ($R_{tr} = 40{,}81$ kgf/cm²). Această micşorare a rezistenţei la tracţiune se explică prin faptul că particulele de litargă fiind inerte nu realizează o coeziune bună în masa de ciment; creşterea rezistenţei la compresiune se datoreşte densităţii mari a litargei, care contribuie la compactizarea pastei de ciment.

Prin calcinarea amestecului la 800°C şi folosindu-l ca adaos la ciment în aceleaşi condiţii, rezistenţele mecanice cresc pe măsură ce proporţia de adaos se măreşte, însă sînt ceva mai scăzute decît în cazul cimentului cu amestec necalcinat, ceea ce ne face să considerăm că o parte din $BaSO_4$ şi SiO_2 din baritină se leagă cu litarga sub formă de PbO_4Ba şi $PbSiO_3$ avînd solubilităţi reduse şi în consecinţă nu reacţionează complet cu hidroxidul de calciu liber din ciment, pentru a forma hidrosilicaţi de Ca, Ba şi Pb, care contribuie la mărirea rezistenţei mecanice.

Pentru a cerceta influenţa litargei în amestecul de litargă şi baritină calcinat s-au studiat diverse probe, la care s-a variat proporţia de litargă din amestec. Rezultatele obţinute sînt date în tabelul 5.

Adaosul la ciment a unui amestec calcinat de 30% PbO + 70% baritină măreşte rezistenţele mecanice ale mortarului în timp ce adaosul unui amestec de 70% PbO + 30% baritină micşorează rezistenţele mecanice faţă de cele ale cimentului cu adaosul de 50% PbO + 50% baritină (tabelul 4). Proporţia mărită de litargă din amestec leagă prin calcinare o cantitate sporită de $BaSO_4$ şi SiO_2 din baritină sub formă de plumbaţi şi silicaţi, care sînt inerţi şi nu intră în reacţie cu $Ca(OH)_2$ liber din ciment pentru a forma hidrosilicatul de bariu şi calciu; aceştia contribuie la mărirea rezistenţelor mecanice ale mortarelor.

Condiţiile de calitate ale mortarelor cu adaos de baritină şi amestec de baritină şi litargă (50% baritină + 50% litargă) sînt redate în tabelul 6.

Din datele înscrise în acest tabel rezultă că în raport cu proba martor rezistenţele mecanice ale mortarelor cu adaos de baritină şi de amestec de baritină şi litargă sînt superioare, gradul lor de segregare este mic, deci apa de amestecare nu are tendinţa de a se separa, greutatea unitară este ceva mai ridicată din cauza greutăţii specifice mari a baritinei, respectiv a amestecului, iar consistenţa este normală. Cît priveşte timpul de priză acesta diferă faţă de cel de la proba martor fiind redus în special la mortarul cu adaos de amestec 50% litargă şi 50% baritină, ceea ce dovedeşte că litarga este un accelerator de priză mai puternic decît baritina. Probele martor cu adaos de baritină au fost supuse la încercările de gelivitate (−15°C), la 25 de cicluri de îngheţ şi dezgheţ; comportarea lor a fost bună, probele nu au pierdut din greutate şi nici nu au apărut fisuri,

Tabelul 5

Adaos de amestec calcinat: a) *30% PbO + 70% baritină;* b) *70% PbO + 30% baritină*

Denumirea probei	Dozaj							R_c la 28 zile	R_{tr} la 28 zile
	Ciment *P*400	Amestec calcinat de: 30% PbO+70% baritină		70% PbO+30% baritină		Nisip	Apă		
	g	%	g	%	g	g	g	kgf/cm²	kgf/cm²
Martor	500	—	—	—	—	1 500	160	412,00	29,18
I	500	20	100	—	—	1 500	160	519,33	37,25
II	500	30	150	—	—	1 500	160	550,00	39,00
III	500	40	200	—	—	1 500	160	577,00	45,46
I	500	—	—	20	100	1 500	160	428,00	26,60
II	500	—	—	30	150	1 500	160	457,00	31,50
III	500	—	—	40	200	1 500	160	486,00	32,90

Tabelul 6

Condiţiile de calitate ale mortarelor cu amestec necalcinat de litargă + baritină

Denumirea probei	Dozaj						R_c la 28 zile	R_{tr} la 28 zile	S	G_u	C	Durata prizei		Gelivitate
	A/C	Nisip	Baritină		Amestec necalcinat 50% litargă + + 50% baritină							începutul prizei ore, minute	sfîrşitul prizei ore, minute	
		g	%	g	%	g	kgf/cm²	kgf/cm²		kgf/m³	cm			cicluri
Martor	0,32	1 500	—	—	—	—	412	29,18	0,6	2 145	7,5	20′	4h20′	—
I	0,32	1 500	60	300	—	—	570	40,81	0,33	2 255	6,0	20′	3h	25
II	0,32	1 500	—	—	40	200	622	39,20	0,33	2 245	7,5	20′	1h15′	—

Tabelul 7

Rezistența mortarului la coroziunea apei de mare

Denumirea probei	Nisip g	A/C	Baritină %	Baritină g	Introduse la 3 zile de la confecționare în: Apă R_c (14 zile) kgf/cm²	Apă R_{tr} (14 zile) kgf/cm²	Apă de mare c R_c (14 zile) kgf/cm²	Apă de mare c R_{tr} (14 zile) kgf/cm²	Apă de mare $2c$ R_c (14 zile) kgf/cm²	Apă de mare $2c$ R_{tr} (14 zile) kgf/cm²	Introduse la 7 zile de la confecționare în: Apă R_c (14 zile) kgf/cm²	Apă R_{tr} (14 zile) kgf/cm²	Apă de mare c R_c (14 zile) kgf/cm²	Apă de mare c R_{tr} (14 zile) kgf/cm²	Apă de mare $2c$ R_c (14 zile) kgf/cm²	Apă de mare $2c$ R_{tr} (14 zile) kgf/cm²	Introduse la 14 zile de la confecționare în: Apă R_c (14 zile) kgf/cm²	Apă R_{tr} (14 zile) kgf/cm²	Apă de mare c R_c (14 zile) kgf/cm²	Apă de mare c R_{tr} (14 zile) kgf/cm²	Apă de mare $2c$ R_c (14 zile) kgf/cm²	Apă de mare $2c$ R_{tr} (14 zile) kgf/cm²	Introduse la 28 zile de la confecționare în: Apă R_c (90 zile) kgf/cm²	Apă R_{tr} (90 zile) kgf/cm²	Apă de mare c R_c (90 zile) kgf/cm²	Apă de mare c R_{tr} (90 zile) kgf/cm²	Apă de mare $2c$ R_c (90 zile) kgf/cm²	Apă de mare $2c$ R_{tr} (90 zile) kgf/cm²
I	1 500	0,32	—	—	248	20,80	236	20,10	224	19,80	282	25,20	240	24,60	232	24,20	380	27,30	364	26,80	321	26,00	400	28	380	27,60	374	27,20
II	1 500	0,32	60	300	417	29,00	408	28,70	402	28,10	428	30,40	412	29,00	408	28,40	445	33,70	431	32,20	410	31,00	532	36,6	504	35,50	460	34,30
$R_{C_B}-R_{C_M}$	—	—	—	—	169	8,20	172	8,60	178	8,30	146	5,20	172	4,40	176	4,20	65	6,40	67	5,40	89	5,00	132	8,6	124	7,90	86	7,10
%	—	—	—	—	68,20	39,40	72,80	42,80	79,50	41,90	51,70	20,62	71,60	17,89	75,90	17,35	17,10	23,42	18,34	20,18	27,72	19,20	33	30,70	32,60	28,60	23	26,10

fapt ce ne-a sugerat ideia ca aceste probe să fie încercate şi la coroziunea apei de mare, în vederea folosirii la digurile maritime.

Mortarul cu adaos de litargă şi baritină avînd priza rapidă şi rezistenţă mare la compresiune, se poate folosi în lucrările de finisare şi la colmatarea rosturilor şi a fisurilor ce apar în lucrările rutiere.

3. Proprietăţi caracteristice ale cimentului de bariu

În literatura de specialitate [5] sînt semnalate asemănările şi deosebirile dintre cimenturile silicioase de calciu, stronţiu şi bariu. Pentru cimentul silicios de bariu se foloseşte ca materie primă witheritul ($BaCO_3$) sau baritina ($BaSO_4$) şi argila refractară săracă în oxid de calciu.

În cazul cînd se foloseşte sulfatul de bariu şi argila refractară ca materii prime temperatura de formare a clincherului este foarte ridicată (1 600°C). Deoarece carbonatul de bariu disociază termic la 1 250°C, este mai convenabil să se lucreze cu acest produs.

Prin folosirea carbonatului de bariu, reacţia de formare a silicaţilor începe la temperaturi mai joase ; de exemplu formarea silicatului dibaric ($2BaO.SiO_2$) începe la 775°C şi se termină la 1 250°C, iar la temperatura de 1 050°C începe să se formeze silicatul tribaric ($3\,BaO.SiO_2$), a cărei intensitate de formare creşte la temperaturi depăşind 1 250°C, cînd întreaga cantitate de carbon de bariu este disociată termic.

Formarea silicatului tribaric se consideră terminată la 1 350°C, atunci cînd se pleacă de la carbonat şi la peste 1 450°C ci ' se pleacă de la sulfat de bariu, în cazul cimentului silicios de bariu.

Pe lîngă silicaţii dibaric şi tribaric, care au propi ctăţi liante, se mai formează disilicatul monobaric, trisilicatul dibaric, silicatul monobaric şi după Grube şi Trucksess se mai formează şi silicatul tetrabaric, care încă nu s-a putut indentifica ; aceşti silicaţi nu au proprietăţi liante.

În ceea ce priveşte viteza de hidratare a cimentului silicios de bariu, aceasta depinde de gradul de solubilitate a hidroxidului, carbonatului şi sulfatului de bariu.

Solubilitatea compuşilor de bariu la 18°C diferă; de exemplu, cel mai solubil este trioxidul de bariu (3,3598 %), urmează apoi carbonatul de bariu (0,0016 %) şi sulfatul de bariu, care are o solubilitate redusă (0,0002 %). Aşadar priza şi întărirea cimentului silicios de bariu sînt date de hidroxidul de bariu, fiind mai rapide decît la cimentul Portland.

Cimentul silicios de bariu are faţă de cimentul silicios de calciu (Portland) unele proprietăţi superioare ca: rezistenţa la atacul apei de mare şi a apei sulfatate, rezistenţa la temperaturi înalte şi rezistenţa la penetraţia radiaţiilor ionizate (razele α, β, γ sau X şi radiaţia de neutroni).

Ţinînd seamă de aceste proprietăţi ale cimentului silicios de bariu ne-am orientat spre folosirea baritinei ca adaos la cimentul Portland, pentru a cerceta rezistenţa chimică a acestuia faţă de apa de mare. Rezultatele experimentale sînt consemnate în tabelul 7.

În acest tabel se dau rezultatele încercărilor relative la probe cu ciment Portland $P400$ (I) şi la probe cu ciment Portland şi adaos de 60% baritină (II). Probele înainte de a fi introduse în apă de canal şi apă de mare de concentraţie c şi $2c$ au fost ţinute în atmosferă umedă timp de 3; 7; 14 şi 28 zile.

Apa de mare folosită conţinea: 15,6 g/l NaCl, 2 g/l $MgCl_2$, 1 g/l $MgSO_4$ şi 0,7 g/l $CaSO_4$.

Din examinarea datelor din tabelul 7 reiese că cu cît timpul de imersiune a probelor în atmosfera umedă este mai mare, cu atît cresc şi rezistenţele mecanice în cele trei medii. Rezistenţele mecanice la probele cu adaos de baritină sînt superioare celor ale probei martor (I), fapt ce dovedeşte că baritina, ca adaos la cimentul silicios, îi conferă acestuia proprietatea de a fi rezistent la acţiunea agresivă a apei de mare. Rezistenţa chimică ridicată a cimentului cu adaos de baritină se explică prin aceea că sulfatul de bariu şi carbonatul de bariu din compoziţia baritinei contribuie la impermeabilizarea betoanelor şi mortarelor precum şi la ameliorarea proprietăţilor hidraulice.

Concluziile definitive asupra rezistenţei chimice a cimentului cu adaos de baritină se vor putea trage într-o lucrare viitoare, prin prelungirea duratei timpului de imersiune a probelor în mediul agresiv la peste 90 zile.

4. Concluzii

Din studiul comportării cimentului Portland $P400$ cu adaos de baritină şi de amestec de litargă şi baritină, se pot trage unele concluzii referitoare la caracteristicile mortarului întărit şi la rezistenţa la coroziunea apei de mare.

A. Caracteristicile mortarului întărit cu adaos de baritină şi de amestec de litargă şi baritină

a) Dacă se înlocuieşte la mortarul 1 : 3 liantul cu baritină în proporţie de 15...20%, rezistenţele mecanice se menţin în jurul celor ale probei martor.

b) Adaosul optim de baritină la mortarul 1 : 3 este de 60%; la această proporţie se obţin mortare cu rezistenţe mecanice ridicate ($R_c = 570$ kgf/cm^2).

c) Folosind un adaos (la mortarul 1 : 3) constituit din 50% litargă şi 50% baritină, necalcinat, în proporţie de 40%, se obţin mortare cu rezistenţe mecanice ridicate ($R_c = 622$ kgf/cm^2), iar prin folosirea aceluiaşi amestec, însă calcinat, rezistenţele mecanice sînt ceva mai reduse ($R_c = 559$ kgf/cm^2).

d) Dacă se modifică compoziţia amestecului — de exemplu 30% litargă şi 70% baritină (calcinat) — folosindu-l ca adaos la mortar în proporţie de 40%, se obţin rezistenţe mecanice apropiate de cele ale mortarului

cu adaos de 60% baritină ($R_c = 577$ kgf/cm^2); utilizînd amestecul de 70% litargă şi 30% baritină, ca adaos în aceeaşi proporţie, rezistenţele mecanice scad ($R_c = 486$ kgf/cm^2).

e) Condiţiile de calitate ale mortarului cu adaos de 60% baritină corespund unui mortar normal, cu excepţia faptului că sfîrşitul prizei este mai mic (3 h) iar rezistenţa la gelivitate (25 cicluri) mai mare. La mortarul cu 40% amestec 50% litargă şi 50% baritină timpul de priză este mult micşorat (1 h 45'), ceea ce indică că acest amestec este accelerator de priză.

B. Rezistenţa mortarului cu adaos de baritină la acţiunea corozivă a apei de mare

Pentru a determina rezistenţele mortarului la coroziunea apei de mare s-au confecţionat probe cu şi fără adaos de baritină care au fost introduse în apă, în apa de mare de concentraţie c şi $2c$, după 3; 7; 14 şi 28 zile de la confecţionare. Probele au fost supuse încercărilor la rezistenţele mecanice după 14 zile şi după 90 zile. Au rezultat următoarele concluzii:

a) Rezistenţele mecanice, atît la proba martor cît şi la probele cu adaos de baritină, cresc pe măsură ce intervalul de timp de la confecţionarea probelor pînă la imersiunea lor în modul agresiv creşte.

b) Diferenţele dintre rezistenţele mecanice ale probei martor şi cele ale probelor cu adaos de baritină descresc în timp şi în funcţie de concentraţia apei de mare. Astfel, după 90 zile de imersiune în mediu agresiv de concentraţie $2c$ rezistenţa la compresiune descreşte procentual de la 79,50% la 23%, fiind însă superioară celei a probelor martor.

d) Adaosul de baritină la cimentul Portland îi îmbunătăţeşte proprietăţile anticorozive faţă de apa de mare.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de geologie şi geotehnică,
Laboratorul de materiale de construcţii

BIBLIOGRAFIE

1. Steopoe Al., *Materiale de construcţii.* Ed. tehn., Buc., 1964, pp. 150—158.
2. Duriez M., Marambide J., *Nouveau traité de matériaux de construction.* T. I, Paris, 1961, pp. 805—873.
3. Neniţescu C. D., *Chimie Generală.* Ed. II-a, Ed. tehn. Buc., 1963, pp. 679—705.
4. Moskvin V. M., *Coroziunea betonului.* ESAC, Buc., 1955, pp. 268—319, (trad. din l. rusă).
5. Braniski Al., Rev. des matér. de constr. et de trav. publ., 1962, *560.*

EINFLUSS DES SCHWERSPATZUSATZES AUF DEN PORTLANDZEMENTEIGENSCHAFTEN

(Zusammenfassung)

Durch feinen Schwerspatzusatz im Portlandzement $P400$ erhielt man einen hohen mechanisch widerstandsfähigen Mörtel.

Mischt man gut homogenisierten Schwerspat mit Bleiglätte und setzt man die Mischung zu Portlandzement, erhielt man ebenfalls einen hohen mechanisch widerstandsfähigen Mörtel.

Der durch Zusatz von 60% Schwerspat erhaltene Mörtel, entspricht einem normalen Mörtel, ausgeschlossen das Ende der Abbindenzeit des Betons die weniger aus 3 Stunden dauert. Trotzdem, der Schwerspatzusatz verleiht dem Mörtel linige spezifische Eigenschaften, erhöht den Frostrissigheitswiderstand, den Korrosionswiderstand gegen Meerwasser.

Beton mit Schwerspatzusatz kann beim Baufundamente und in dem Bau der Dämme verwendet werden.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 631.41

DINAMICA UMIDITĂŢII ŞI SĂRURILOR SOLUBILE LA SOLUL ALUVIAL GLOMERULAR, PROFUND ARGILO-LUTOS, SLAB SALINIZAT ŞI GLEIZAT

DE

LEONIDA GUŞTIUC, EUGEN GHEORGHIU şi MARIA POENESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

Solurile aluviale sînt considerate obişnuit ca soluri cu caractere determinate de un exces de umiditate, mai precis ca soluri hidromorfe.

Dacă această afirmaţie, privită în general, este justă, făcînd însă o analiză mai detaliată a umidităţii diferitelor soluri aluviale, se constată că gradul lor de hidromorfism este foarte diferit.

Mai mult decît atît, printre solurile aluviale sînt unele care au un regim hidric extrem de deosebit, începînd de la solurile tipice înmlăştinate şi pînă la solurile cu un deficit de umiditate periodic şi chiar permanent în cursul celei mai mari părţi a perioadei de vegetaţie (solurile aluviale de pe grindurile privalelor cu textură nisipoasă) [1].

În literatura de specialitate sînt publicate numeroase materiale cu privire la caracterizarea regimului hidric al solurilor aluviale, însă o sistematizare şi o clasificare a tipurilor de regimuri de umiditate aproape că nu s-a realizat pînă în prezent [3]. Acest fapt se datoreşte diversităţii condiţiilor naturale ale luncii — hidrologice, hidrogeologice, litologice, de microrelief şi în fine de vegetaţie şi sol. Aceste condiţii variază foarte mult atît pe întreaga lungime a cursului apei, cît şi transversal, în diferite puncte ale aceleiaşi lunci.

2. Litologia şi hidrogeologia albiei majore a rîului Bahlui

Lunca rîului Bahlui prezintă caracteristici deosebite faţă de multe alte rîuri din ţara noastră, din punct de vedere al condiţiilor naturale amintite.

Albia majoră a rîului Bahlui nu prezintă variaţii mari de microrelief, nu există privale adînci cu grinduri înalte şi nici depresiuni (japşe) cu denivelări mai mari, caracteristice marilor rîuri. Există o denivelare ceva mai pronunţată spre albia minoră, un fel de grind, atît la actualul curs al rîului cît şi la vechea albie părăsită (în dreptul satului Leţcani, între cotele 51,00...48,34 m şi Valea Mare între cotele 47,73...47,16 m).

În partea din aval de Iași apar cîteva privale mici împotmolite, aproape imperceptibile.

Albia minoră a Bahluiului, a cărei adîncime variază de la 1 m în partea din amonte și pînă la 3,50...3,80 m în partea din aval, străbate aproape în tot traseul său o argilă. Din forajele ce s-au efectuat în lunca Bahluiului, precum și din cele executate de Direcția de Sistematizare, Arhitectură și Proiectarea Construcțiilor din Iași, în zona de extindere a orașului în această luncă, reiese că grosimea stratului de argilă pe care se formează solurile aluviale este mai mare în zona orașului și în aval, variind între 3,80...7,90 m și scade în amonte de zona orașului, variind între 4...2 m.

Stratul de argilă este alcătuit dintr-o serie de alternanțe caracterizate prin prezența petelor și vinișoarelor de culoare ruginie, a concrețiunilor de carbonat de calciu și feromanganoase cu puncte de oxizi de mangan, cantități variabile de cloruri și mai mulți sulfați. Sub 85 cm apar în mod obișnuit procese de gleizare care se mențin pînă la stratul freatic (fig. 1).

Grosimea acestui strat de argilă, în partea centrală, variază mai puțin, însă se subțiază în părțile laterale — spre terasa inferioară — și în unele locuri dispare pe mici porțiuni, fiind înlocuit de straturi de lut argilos sau chiar nisip argilos.

Sub acest strat de argilă, unde grosimea lui este mai mică (3,20...2,00 m), urmează obișnuit un strat de argilă lutoasă sau lut nisipos de grosime variabilă (2,5...3,5 m), apoi un strat de nisip pînă la adîncimea de 9...11,50 m. Acolo unde stratul de argilă de la suprafață este de 6... 7,50 m grosime urmează stratul de nisip, care se menține la aceeași cotă inferioară.

Stratul de nisip este urmat de argila bazală, care în zona orașului Iași și în aval se găsește mai spre adîncime, iar în amonte este situată ceva mai sus, în jur de 10 m adîncime. Către versanți, stratul de argilă se ridică, în unele locuri, mai spre suprafață (5,50 m). În aval, spre Tg. Frumos, este situat la 6...7 m.

Stratul freatic, în partea centrală a luncii, chiar cînd cursul rîului deviază mult spre zona de lîngă terasă, variază între limite foarte largi (3,20...9,0 m). Apropierea stratului freatic de nivelele de 3,20...4,00 m adîncime pare a fi în legătură cu apropierea stratului de nisip de suprafață, mai ales cînd vine în contact direct cu stratul de argilă de deasupra și cînd grosimea acestuia este mai mică.

Apariția unui strat freatic la adîncimea de 1,50...2,00 m este sesizată frecvent în zona apropiată terasei inferioare, unde materialul coluvial este depus peste stratul de argilă, sau în zona de devagare a văilor care se deschid în lunca Bahluiului și au depus la viituri material aluvionar peste stratul de argilă al albiei majore, deasupra căreia se menține un strat freatic.

Din această prezentare sumară a litologiei albiei majore a Bahluiului și după datele ce se vor prezenta cu privire la dinamica umidității și a sărurilor din profilul studiat, reiese clar că regimul sezonier al stratului freatic

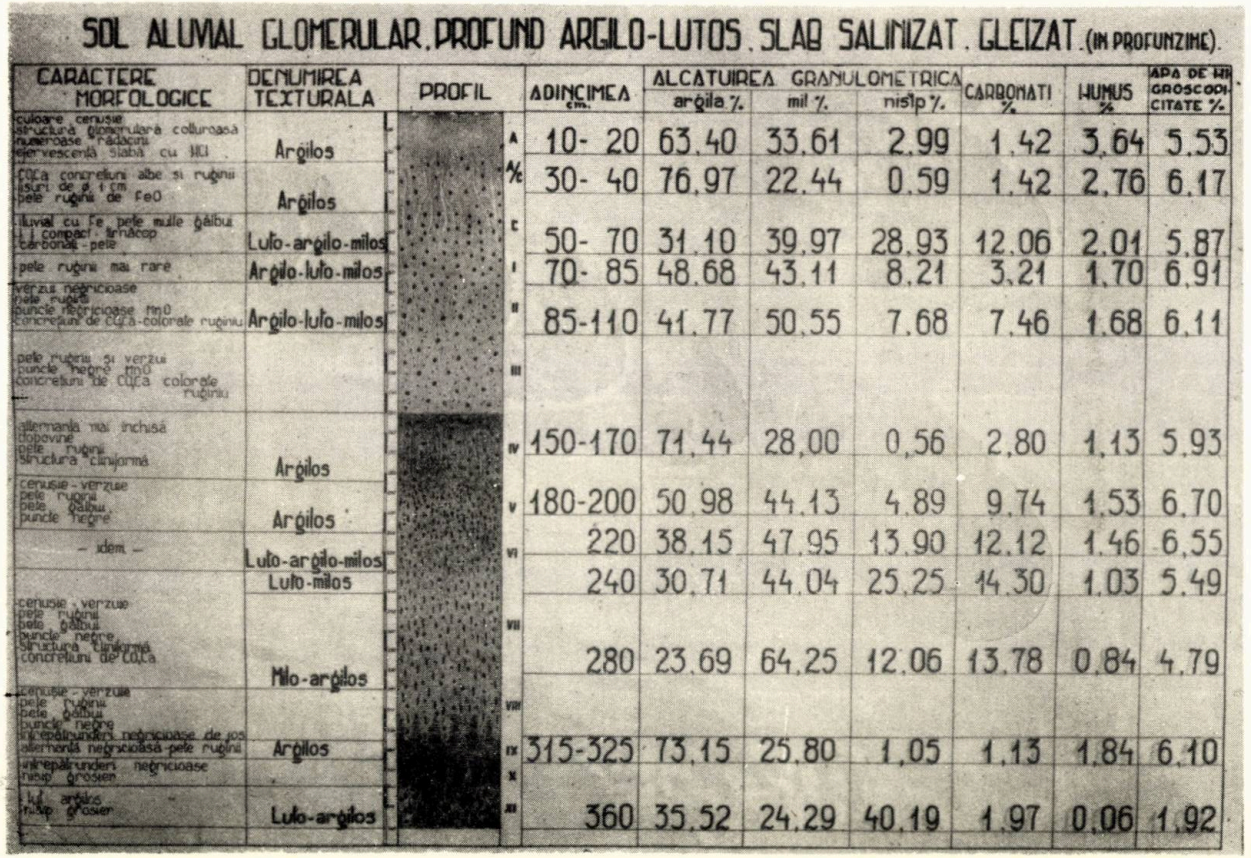


Fig. 1. — Sol aluvial glomerular, profund argilo-lutos, slab salinizat, gleizat în profunzime.

nu este de tip hidrologic și nu are nici o legătură cu variația nivelului din rîu. Albia minoră a rîului curge printr-o argilă foarte greu permeabilă, a cărei grosime depășește în general cu mult adîncimea acestei albii.

3. Metoda de cercetare

Pentru lămurirea problemei regimului de umiditate al unor soluri aluviale din lunca Bahluiului au fost luate în studiu, în cursul anilor 1963 și 1964, dinamica umidității și aceea a sărurilor ușor solubile la un sol aluvial glomerular, profund argilo-lutos, slab salinizat și gleizat [2]. Acest tip de sol este destul de răspîndit în lunca Bahluiului (fig. 1).

Profilul solului se caracterizează prin o structură glomerulară și o textură argiloasă de la suprafață pînă la 40 cm adîncime apoi textura este ceva mai puțin fină variind între luto-argiloasă și argilo-lutoasă, pînă la adîncimea de 150 cm, unde apare o alternanță argiloasă (pînă la adîncimea de 184 cm), de culoare cenușiu închisă (sol îngropat).

Mai jos urmează o alternanță tot argiloasă, situată la adîncimi cuprinse între 184...210 cm, cu caracter pronunțat de gleizare. În continuare se succed o serie de alternanțe de grosimi variabile, cu texturi luto-prăfoase cu gleizare pronunțată, pînă la adîncimea de 315 cm.

De la 315 cm și pînă la 325 cm apare o alternanță de culoare cenușie (sol îngropat) mai închisă decît alternanța de la 150...184 cm. Atît deasupra acestei alternanțe, cît și sub aceasta, se extind un fel de scurgeri negricioase de același material ca și alternanța, pe o adîncime de circa 15...20 cm.

Sub această alternanță urmează un lut argilos cu gleizare pronunțată și cu cantitate apreciabilă de nisip (40%), iar la 360 cm apare stratul freatic.

După efectuarea lucrărilor de regularizare a rîului Bahlui solul nu mai este supus viiturilor, singura sursă de umiditate fiind precipitațiile atmosferice.

Unitatea pentru cercetare a fost fixată pe islazul de la ieșirea din orașul Iași, între șoseaua ce duce la Tomești și rîul Bahlui. Probele de sol s-au ridicat aproximativ la mijlocul distanței între baza pantei și rîu, la nivelele stabilite în funcție de alternanțele caracteristice profilului, pînă la adîncimea de 360 cm. La 360 cm s-au luat probele de apă freatică.

Cercetările au început în aprilie 1963, prin ridicarea probelor de sol și de apă freatică de două ori pe lună: între 4...6 și 19...21 ale fiecărei luni, cu excepția lunilor de iarnă (ianuarie și februarie), cînd probele s-au luat o dată pe lună. Probele de sol s-au ridicat cu sonda, de fiecare dată la distanța de circa 3 m de forajul precedent. Probele de sol de la suprafață (0 ... 10 cm și 10 ... 20 cm) s-au luat în trei repetiții.

La fiecare probă de sol s-au determinat: umiditatea momentană, conținutul în clor (metoda Mohr) și conținutul total de săruri ușor solubile (electrometric). La probele de apă s-a determinat conținutul în Cl', conținutul în SO''_4 și reziduul sec.

Datele obținute au fost calculate în procente și reprezentate prin chronoizoplete.

Cercetările au fost întreprinse cu scopul de: a) a studia regimul hidric al acestor soluri aluviale cu textură fină, în condițiile anilor 1963...1964; b) a urmări dinamica sărurilor pe profil, în vederea studiului evoluției procesului de salinizare; c) a scoate în evidență anumite particularități cu caracter hidroameliorativ.

4. Interpretarea rezultatelor

Cantitatea de precipitații căzută în anii cercetați este diferită și după datele stațiunii de la aeroportul Iași, suma precipitațiilor atmosferice din anul 1963 a fost de 498,50 mm, iar în anul 1964 ceva mai mult și anume 541,10 mm.

Examinînd precipitațiile atmosferice pentru aceeași stațiune pe o perioadă de 10 ani (anii 1955...1964) se constată o cantitate minimă de precipitații în anul 1959, însumînd 369,40 mm, iar cantitatea maximă, în anul 1961, a fost de 593,60 mm. Deci în această perioadă apare o diferență între cantitatea maximă și cea minimă de 224,20 mm.

Efectuînd media cantităților de precipitații căzute în această perioadă se obține 509,2 mm. Dacă se compară cu cantitățile de precipitații din anii în care s-au efectuat cercetările se constată că aceste valori sînt foarte apropiate și depășesc media pe 10 ani cu o diferență de numai 10,7...31,8 mm.

a) *Dinamica umidității.* Analizînd diagrama umidității în decursul celor doi ani se deosebesc următoarele zone cu umidități apropiate (fig. 2):

1° Partea superioară a solului (0...70 cm), cu o textură argiloasă pînă la 40 cm, cu variații mari a umidității, caracterizat prin fisuri cu diametrul de 1 cm, care se păstrează pînă în luna februarie a fiecărui an. Sub 40 cm urmează un orizont luto-argilos, compact, îmbogățit în Fe_2O_3 și carbonați.

2° Zona următoare, cuprinsă între 70...140 (150) cm, cu o textură argilo-lutoasă, în care are loc o fluctuație a umidității legată pe de o parte de precipitațiile atmosferice și pe de altă parte de cantitatea de apă ce se mai oprește deasupra alternanței argiloase (sol îngropat) ce se află mai jos. Umiditatea variază între 25...35%.

3° Zona cuprinsă între 140 (150)...184 cm — alternanța negricioasă cu textura argiloasă (sol îngropat) și chiar mai jos, pînă la 220 cm, este caracterizată printr-o umiditate mai ridicată și mai constantă, cuprinsă între 40...50%, în cea mai mare parte a întregului interval.

4° Zona între 220...280 cm are o umiditate mai scăzută, cuprinsă între 25...35%, care însă se menține constantă în întregul interval.

5° Zona foarte scurtă cuprinsă între 280...300 (315) cm, cu o cantitate sporită de umiditate (între 40...50%), care se găsește deasupra alternanței argiloase (sol îngropat).

6° Alternanța negricioasă (sol îngropat) între 300 (315)...325 cm are o umiditate constantă, cuprinsă între 30...40%.

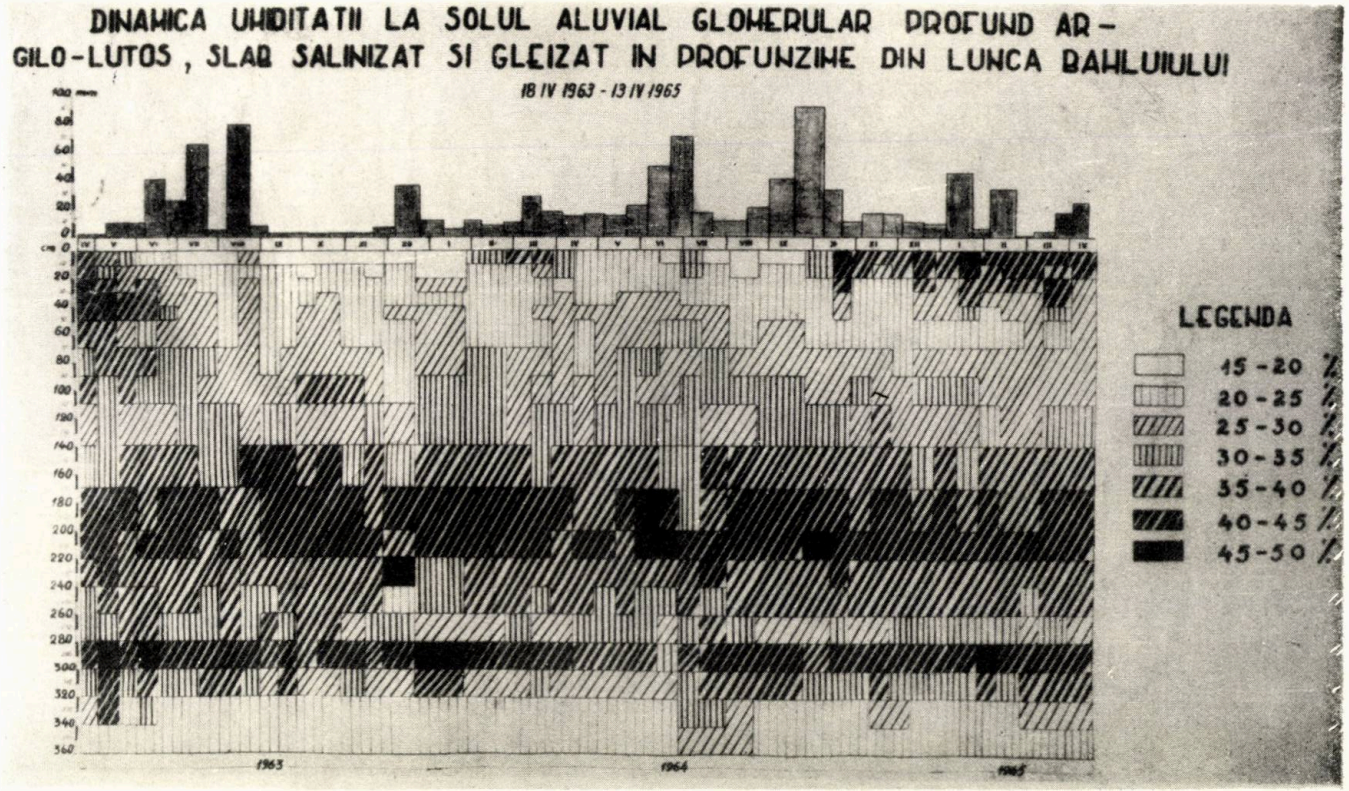


Fig. 2. — Dinamica umidităţii la solul aluvial glomerular, profund argilo-lutos, slab salinizat şi gleizat în profunzime din lunca Bahluiului; 18 IV 1963—13 IV 1965.

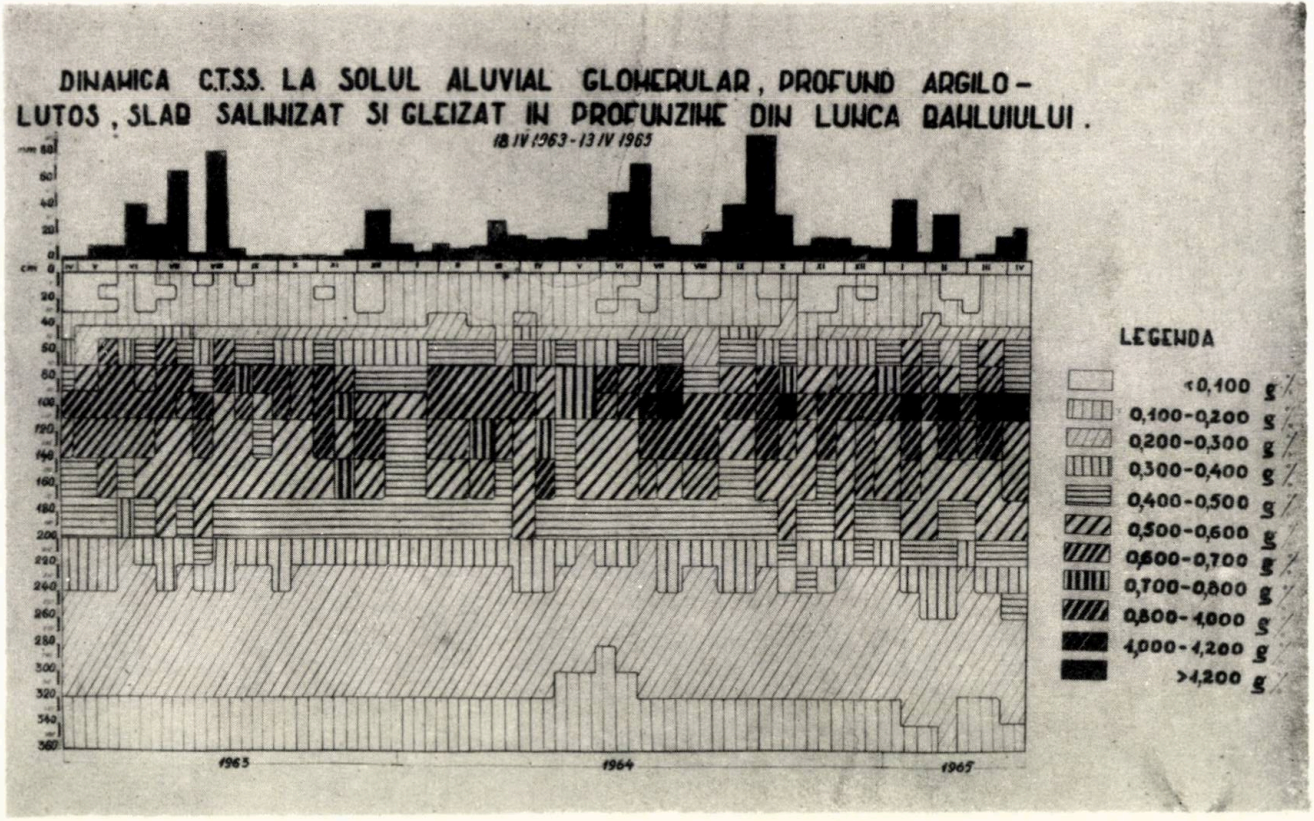


Fig. 3. — Dinamica C.T.S.S. la solul aluvial glomerular, profund argilo-lutos, slab salinizat și gleizat în profunzime din lunca Bahluiului; 18 IV 1963—13 IV 1965.

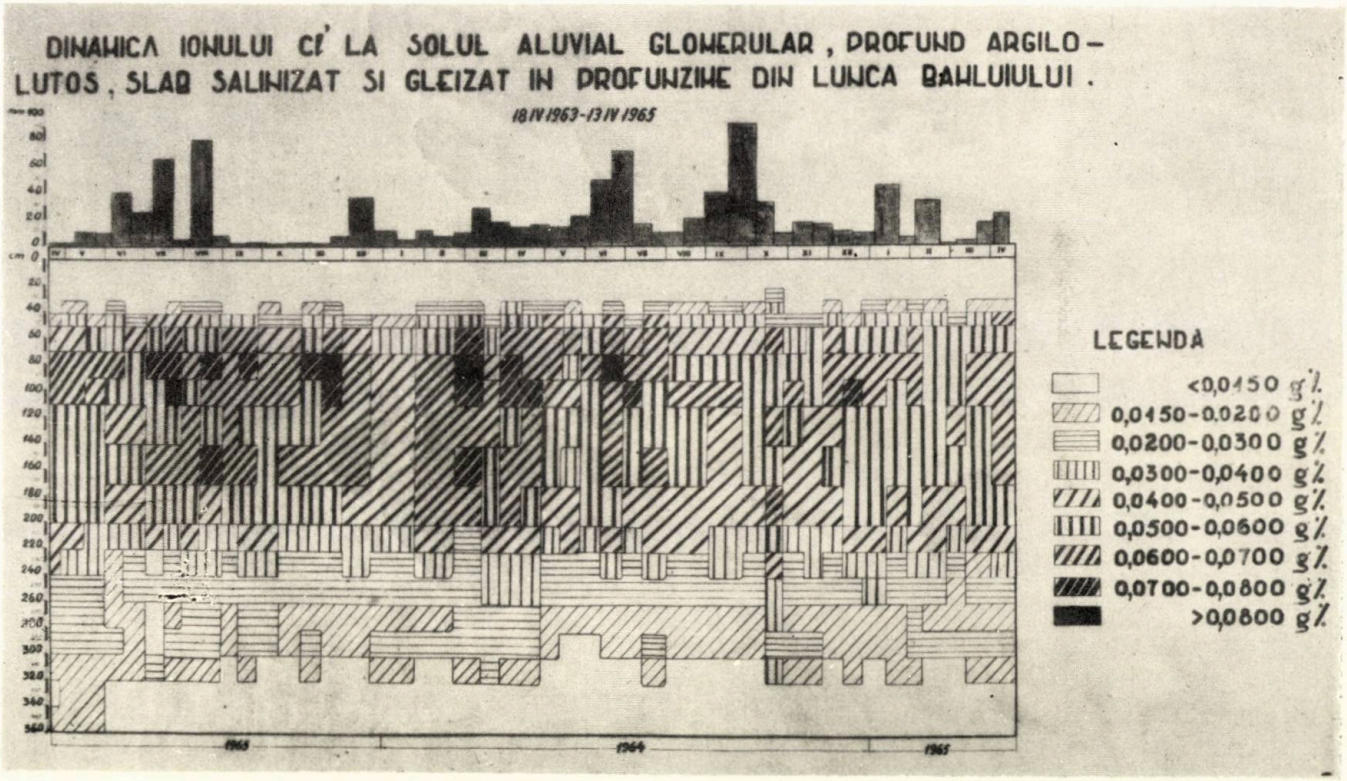


Fig. 4. — Dinamica ionului Cl' la solul aluvial glomerular, profund argilo-lutos, slab salinizat și gleizat în profuzime din lunca Bahluiului; 18 IV 1963—13 IV 1965.

7° Ultima zonă, sub alternanța negricioasă, pînă la stratul freatic situat la adîncimea de 360 cm, cu o umiditate constantă cuprinsă între 20...25%.

În afară de aceasta se mai constată că atunci cînd cantitatea de precipitații în intervalul de o lună depășește 100 mm (de ex. intervalul 5 VI... 6 VII 1964) are loc o confluere a apei aflate deasupra straturilor impermeabile cu stratul freatic, cu toată textura fină a alternanței (sol îngropat) de la 300(315)...325 cm. În acest mod se pune în evidență o discontinuitate în ceea ce privește umiditatea ultimei zone. De asemenea are loc o creștere a umidității pe verticală.

În cazul cînd cantitatea de precipitații se apropie de 100 mm (martie-aprilie 1963 — 98,6 mm) sau chiar cînd depășește 100 mm (septembrie 1964— 130 mm)— această cantitate de umiditate urmînd după o perioadă secetoasă— nu se produce confluerea apelor de precipitație cu stratul freatic ce coboară numai puțin sub ultima alternanță negricioasă (sol îngropat).

Dacă se iau în considerație anii cei mai secetoși din perioada 1955...1964 (421 mm) se poate afirma cu precizie că în cazul acesta apare o zonă clară cu umiditate scăzută (sub 20%) între stratul freatic și umiditatea reținută în alternanțele aflate deasupra acestuia.

Regimul hidric al acestui sol în decursul timpului, datorită texturii și alternanțelor respective și în legătură cu cantitatea de precipitații și repartiția acestora în cursul anului s-ar încadra în acel alternopercolativ.

b) *Dinamica sărurilor.* Examinînd în paralel diagramele conținutului total în săruri solubile și în clor se disting mult mai clar următoarele zone (fig. 3 și 4):

1° De la suprafață și pînă la adîncimea de 40 cm se menține aproape constantă cantitatea, în special de clor — mai puțin de 0,0150 g%, în timp ce conținutul total de săruri variază între 0,100...0,200 g%.

2° Între 40...70 cm apare o zonă cu o gamă mai întinsă a cantităților de clor, cuprinse între 0,0200...0,0700 g%, și de săruri solubile, cuprinse între 0,200... 0,700 g%.

3° Între 70...200 cm se întîlnește zona cu cantitățile cele mai mari și mai puțin variabile în conținutul de clor — între 0,0500 și peste 0,0800 g%, — iar conținutul de săruri solubile este cuprins între 0,700 și peste 1,200 g%, în special la adîncimile de 70...140 cm. Este tocmai zona caracterizată prin alternanțe argiloase, în care se include și solul îngropat.

4° Între 200...240 cm cantitatea de clor scade, fiind cuprinsă între 0,0200...0,0500 g%. De asemenea și conținutul în săruri solubile scade fiind cuprins între 0,200...0,400 g%.

5° Sub 240 cm și pînă la 320 cm adîncime conținutul în clor este mai scăzut, fiind cuprins între 0,0150...0,0300 g%, cu numeroase variații în perioada studiată. Cantitatea de săruri solubile scade la 0,200...0,300g %, și se menține constantă în întreaga perioadă a celor doi ani.

6° De la 320 cm adîncime și pînă la stratul freatic cantitatea de clor este minimă (mai puțin de 0,0150 g%), indentică cu cea de la suprafață și constantă. Conținutul în săruri solubile scade la 0,100...0,200 g%, fiind uniform pe întregul interval.

Din analiza diagramelor conținutului total de săruri solubile și a clorului se constată că maximul de acumulare se păstrează în intervalul de adîncimi 70...200 (210) cm, adică în alternanțele argiloase ce se găsesc între aceste nivele.

Conținutul ridicat în săruri al acestei zone este consecința probabilă a pătrunderii sărurilor din apele din viituri în trecut, prin spălarea versanților erodați ai bazinului hidrografic al Bahluiului, și în măsură mult mai redusă a stratului freatic.

c) *Stratul freatic.* Adîncimea stratului freatic s-a menținut constantă la 360 cm, iar ascensiunea în foraj avea loc pînă la 2,70 m. Din punct de vedere al compoziției chimice și al variației în timp a acesteia, se clasifică în apă *sulfatică către sulfato-clorurică.*

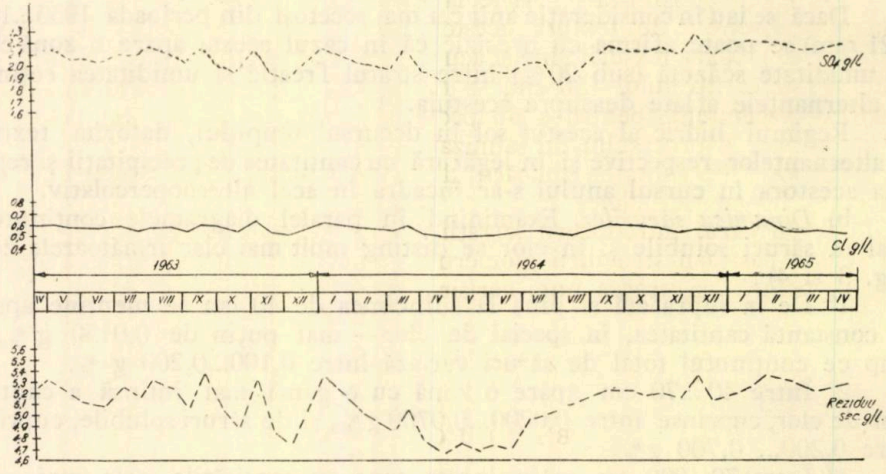


Fig. 5. — Variația conținutului în SO_4'', Cl' și reziduu sec al stratului freatic.

Din diagramă se constată o perfectă corelație din punct de vedere cantitativ în întreaga perioadă studiată în privința ionului de clor și SO_4'' precum și a reziduului sec (fig. 5).

Din examinarea variației conținutului în Cl', SO_4'' și reziduu sec în funcție de cantitatea de precipitații atmosferice, în decursul perioadei studiate, se constată că nu se poate pune în evidență nici o legătură. Se pare că această slabă variație a gradului de mineralizare a stratului freatic depinde și de modul de alimentare al acestuia. Probabil stratul freatic este alimentat prin alte straturi mult mai permeabile, aflate la anumite distanțe și poate chiar de pe versanți, imprimîndu-i în acest chip un caracter alohton.

5. Concluzii

Din analiza rezultatelor obținute în decursul a doi ani de cercetări se desprind următoarele concluzii:

1. Datorită alternanțelor cu textură argiloasă ce se găsesc între adîncimile 150...210 cm are loc o acumulare mai mare de umiditate în această zonă, ceea ce are drept efect accentuarea procesului de gleizare în profilul solului, începînd chiar de la 85 cm.

2. Prezența alternanței argiloase negricioase (sol îngropat) poate favoriza formarea unui strat freatic efemer în anii cu precipitații mai abundente (1961 — 593,60 mm). Această situație are drept efect crearea unor condiții nefavorabile pentru dezvoltarea arborilor și pomilor fructiferi pe aceste soluri [4], situație caracteristică luncii Bahluiului.

3. Procesul salinizării variate la aceste soluri, atît în trecut cît și astăzi, depinde exclusiv de textura acestor alternanțe și de dinamica umidității.

4. Din cauza texturii fine și acumulării unei cantități mai mari de umiditate deasupra nivelului 150 cm, se recomandă aplicarea sistemului de irigație prin aspersiune, pentru a nu provoca înmlăștinarea solului, urmată de o accentuare a procesului de salinizare.

5. În eventualitatea aplicării drenajului, amplasarea drenurilor se va face la 150 cm adîncime.

6. În cazul introducerii irigațiilor este necesar de aplicat o agrotehnică în sensul păstrării structurii glomerulare și afînării cît mai bune a stratului arabil, pentru asigurarea unei aerisiri optime a solului.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de geologie și geotehnică

BIBLIOGRAFIE

1. Добровольский Г. В., Бабьева И. П., Лобутев А. П., Почвоведение, 1960, *11*, стр. 7.
2. Guștiuc L., Lucr. șt. Inst. Agr. Iași, 1959, p. 7.
3. Бладыченский С. А., Почвоведение, 1958, *6*, стр. 8.
4. Зайделман Ф. Р., Почвоведение, 1963, *4*, стр. 7.

ДИНАМИКА ВЛАЖНОСТИ И РАСТВОРИМЫХ СОЛЕЙ В АЛЮВИАЛЬНОЙ ЗЕРНИСТОЙ ПОЧВЕ, ГЛУБОКО ИЛИСТОЙ, СЛАБО ЗАСОЛЕННОЙ И ОГЛЕЕННОЙ ИЗ ПОЙМЫ РЕКИ БАХЛУЙ, В УСЛОВИЯХ 1963 И 1964 ГОДОВ

(Резюме)

После краткого описания поймы реки Бахлуй анализируется литология алювиальных отложений и глубина залегания грунтовых вод и взаимосвязь между этими и гидрологическим режимом реки.

Представляется морфологическое описание почвенного профиля и аналитические данные о гранулометрическом составе, гумусе и карбонатах, а также описывается методика исследования.

Исследуется также динамика влажности в этих алювиальных почвах, динамика солей по профилю до 360 см глубины в виду изучения эволюции процесса засоления и выявляются некоторые особенности гидроамелиоративного характера.

В связи с распределением атмосферных осадков в исследуемых годах (1963...1964) анализируется динамика влажности и указывается, что на поверхности каждого чередующегося отложения с тяжелым механическим составом (погребеная почва) происходит накопление влаги (25...35%). Под последним чередующимся отложением такого же механического состава и до (погребеная почва) грунтовой воды влажность остаетсятя неизменной между 20 ... 25%.

Анализируя распределение влажности в период проведения обследований видно, что благодаря механическому составу и чередующимся отложениям из почвенного профиля, водный режим почвы складывается в сторону периодически промывного типа.

Диаграммы содержащие общее количество растворенных солей и Cl' иона показывают, что максимум накопления происходит в чередующихся отложениях с тяжелым механическим анализом. Происхождение этих солей имеет место за счет проникновения с поверхности талых вод в которых и находятся эти соли.

В отношение грунтовой воды, как видно из диаграммы, вариация степени минерализации в период проведения обследований не имеет ни какой связи с просачиванием поверхностной воды и зависит только от алохтонного питания.

Делаются следующие заключения:

1. В некоторые годы, а также в некоторые периоды года, существуют условия способствующие образованию верховодки.
2. Процесс засоления этих почв зависит от механического состава чередующихся отложений (погребеная почва) динамики влажности.
3. Рекомендуется орошение этих почв дождеванием для избежания процессов заболачивания и засоления.
4. При орошении этих почв необходимо закладывать дрены на глубину в 150 см

Объяснение рисунков

Рис 1. — Профиль алювиальной зернистой почвы, глубоко илистой, слабо засоленной и оглеенной — с некоторыми химическими и физическими данными и краткое морфологическое описание.

Рис. 2. — Динамика влажности алювиальной зернистой почве, глубоко илистой, слабо засоленной и оглеенной из поймы реки Бахлуй (18 IV 1963 — 13 IV 1965).

Рис. 3. — Динамика иона Cl' алювиальной зернистой почвы, глубоко илистой, слабо засоленной и оглеенной из поймы реки Бахлуй (18 IV 1963 — 13 IV 1965).

Рис. 4 — Динамика общего количества растворимых солей алювиальной зернистой почвы, глубоко илистой, слабо засоленной и оглеенной из поймы реки Бахлуй (18 IV 1963 13 — IV 1965).

Рис. 5 — Вариация содержания SO_4'', Cl' и сухого остатка в грунтовой воде в периоде исследования.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1—2, 1966

Industrie uşoară

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XII (XVI), вып. 1—2, 1966

Легкая промышленность

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XII (XVI), 1—2, 1966

Light Industry Engineering

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 677 ; 517.514

CONTRIBUŢIE LA STUDIUL UNOR PROBLEME DE PROGRAMARE LINIARĂ INTERESÎND INDUSTRIA TEXTILĂ

DE

MALCA BERCOVICI, ANA TRIANDAF şi CONSTANŢA STANCIUC

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

În rezolvarea unei probleme relative la obţinerea beneficiului optim la două produse A şi B de la fabrica „Suveica", Bucureşti, s-a utilizat metoda de programare parametrică, elaborată de profesorul Robert Llewellyn de la Colegiul North Carolina State [2].

În problemă se cere să se determine vectorul X ce satisface ecuaţia:

$$AX = b \tag{1}$$

şi maximalizează funcţia

$$f = cX, \tag{2}$$

unde componentele lui b sînt funcţii liniare de un singur parametru real.

Respectînd datele problemei, inegalitatea (1) şi egalitatea (2), devin

$$\left\{\begin{array}{rl} 44x_1 + 47x_2 \geqslant & 83\lambda + 0{,}0044, \\ 12x_1 + 11x_2 \leqslant & -0{,}2\lambda + 0{,}254, \\ 192x_1 + 193x_2 \geqslant & -19\lambda + 24{,}13, \\ 640x_1 + 897x_2 \leqslant & 925\lambda + 0{,}6, \\ 12x_1 + 13x_2 = & 0{,}62, \\ 80x_1 + 83x_2 \leqslant & -10\lambda + 12{,}84, \end{array}\right. \tag{1'}$$

parametrul λ reprezentînd timpul maxim necesar unei faze de producţie, care maximalizează funcţia:

(2′) $$f = -0{,}328x_1 + 0{,}073x_2,$$

x_1 şi x_2 reprezentînd numărul metrilor respectivi din produsele A şi B.

Introducînd variabilele slabe pentru a transforma inegalităţile în egalităţi, şi variabilele artificiale pentru a pleca cu o soluţie de bază se obţine sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} 44x_1 + 47x_2 - x_9 + x_3 = 83\lambda + 0{,}0044, \\ 12x_1 + 11x_2 + x_4 = -0{,}2\lambda + 0{,}254, \\ 192x_1 + 193x_2 - x_{10} + x_5 = -19\lambda + 24{,}13, \\ 640x_1 + 897x_2 + x_6 = 925\lambda + 0{,}6, \\ 12x_1 + 13x_2 + x_7 = 0{,}62\lambda, \\ 80x_1 + 83x_2 + x_8 = -10\lambda + 12{,}87. \end{cases}$$

Se cere să se determine x_1 şi x_2 în intervalele de variaţie a parametrului λ, ce maximalizează funcţia (2′).

Pentru determinarea funcţiei extremale s-au efectuat trei iteraţii, începînd cu valoarea nulă a parametrului, folosind metoda simplex primală.

Pentru $\lambda = 0$ se găseşte vectorul soluţie parametric

$$X = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1{,}7\lambda + 0{,}00009 \\ -21{,}7\lambda + 0{,}252 \\ -359{,}3\lambda + 24{,}4496 \\ -658{,}64\lambda + 0{,}516 \\ -22{,}809\lambda + 0{,}6188 \\ -147{,}08\lambda + 12{,}83 \end{bmatrix}.$$

Pentru $\lambda < 0{,}0007$ vectorul soluţie are toate componentele pozitive. Peste această valoare a parametrului toate componentele sînt pozitive, afară de a patra componentă, care este negativă.

Pentru $\lambda > 0{,}0007$ problema se aseamănă cu problema simplex duală, înainte de a ajunge la soluţie.

Pentru această valoare a parametrului se determină o nouă soluţie, care poate fi obţinută numai prin formarea altei iteraţii.

Substituind în vectorul de restricţie $\lambda = 0{,}0007 + \lambda'$, deci $\lambda' = \lambda - 0{,}0007$, se obţine vectorul soluţie:

$$X = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1{,}0175\lambda' + 0{,}0013728 \\ -11{,}3\lambda' + 0{,}239024 \\ -216{,}21\lambda' + 23{,}851 \\ 34{,}9\lambda' + 0{,}52 \\ -38{,}757\lambda' + 0{,}568 \\ -94{,}637\lambda' + 12{,}729 \end{bmatrix}.$$

Pentru $0 \leqslant \lambda' \leqslant 0{,}014$, deci pentru $0{,}007 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}021$, vectorul soluție are toate componentele pozitive. Pentru valori situate în afara acestui interval toate componentele sînt pozitive, cu excepția celei de a cincia.

Prin urmare se substituie din nou în vectorul de restricție $\lambda' = 0{,}014 + \lambda''$. Formînd pentru această valoare o nouă iterație se obține:

$$X = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2{,}9588\lambda'' + 0{,}014632 \\ -0{,}2\lambda'' + 0{,}07488 \\ -19\lambda'' + 20{,}69644 \\ 83\lambda'' + 0{,}97758 \\ 925\lambda'' + 0{,}618 \\ 10\lambda'' + 11{,}33892 \end{bmatrix}.$$

Pentru $\lambda'' < 0{,}3744$ toate componentele sînt pozitive iar pentru $\lambda'' > 0{,}3744$ toate componentele sînt pozitive, cu excepția celei de a doua.

Formînd o nouă iterație pentru $\lambda'' = \lambda''' + 0{,}3744$ se obține:

$$X = B^{-1}b = \begin{bmatrix} -0{,}0164\lambda''' + 0{,}14432 \\ 6{,}922\lambda''' + 0{,}0109 \\ -15{,}478\lambda''' + 13{,}638 \\ 83{,}859\lambda''' + 31{,}017 \\ 941{,}158\lambda''' + 345{,}077 \\ -25{,}118\lambda''' + 7{,}509 \end{bmatrix}.$$

Pentru $0 \leqslant \lambda''' \leqslant 0{,}299$, deci pentru $0{,}3954 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}6934$, toate componentele vectorului soluție sînt pozitive, iar pentru $\lambda''' > 0{,}299$ toate componentele sînt pozitive, cu excepția componentei a șasea.

Substituind în vectorul de restricție $\lambda''' = \lambda^{IV} + 0{,}299$ se obține vectorul soluție

$$X = B^{-1}b = \begin{vmatrix} 0{,}913\lambda^{IV} + 0{,}638 \\ 21{,}15\lambda^{IV} - 12{,}29 \\ 4{,}28\lambda^{IV} - 2{,}583 \\ 88{,}68\lambda^{IV} + 54{,}772 \\ 1\,187{,}91\lambda^{IV} + 481{,}896 \\ 0{,}121\lambda^{IV} + 0{,}659 \end{vmatrix}.$$

Pentru $\lambda^{IV} > 0{,}603$, deci pentru $\lambda > 1{,}297$, toate componentele vectorului soluţie sînt pozitive. În aceste condiţii problema este soluţionată.

De remarcat este faptul că pentru $\lambda = 0$ se utilizează metoda simplex primală; numărul de iteraţii în această metodă este încheiat cînd se obţine pentru vectorul soluţie un interval de variaţie pozitiv al parametrului λ.

Pentru $\lambda > 0$ se utilizează metoda simplex duală, deoarece pentru aceste valori ale parametrului, λ se găseşte cuprins în vectorul de restricţie. Soluţia ce convine problemei este

$$0{,}3954 \leqslant \lambda \leqslant 0{,}6934$$

pentru care se obţine

$$x_1 = 8{,}162 \text{ m/min}, \quad x_2 = 9{,}543 \text{ m/min}.$$

Rezultatele obţinute conduc la un beneficiu al întreprinderii de 2,1 % faţă de beneficiul actual de 1,83 %.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de matematici I
şi
Fabrica „Suveica",
Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. Mihoc Gh., Urseanu V., *Matematici aplicate în statistică.* Edit. Acad. R. P. R., Buc., 1962.
2. Llewellyn R. W., *Linear programming.* Holt, Rinehart and Winston, 1964.
3. Danzing G. B., Fulkerson D. R., Johnson S. M., Oper. Res., 1954, **2**, *4*, pp. 393—410.

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE D'UN PROBLÈME DE PROGRAMMATION LINÉAIRE INTÉRESSANT L'INDUSTRIE TEXTILE

(Résumé)

On étudie un problème de production textile en utilisant la méthode de programmation linéaire paramétrique.

On a obtenu des résultats qui permettent à l'entreprise de réaliser un bénéfice de 2,1%, supérieur au bénéfice actuel de 1,82%.

Les résultats acquis ont permis aux entreprises textiles l'augmentation de la production par la modification adéquate d'une phase technologique.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 677.31 ; 661.252 ; 542.69

INFLUENŢA SOLUŢIILOR DILUATE DE ACID SULFURIC ASUPRA LÎNII

DE

MIŞILIM GRINDEA ŞI SAVEL IFRIM

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noembrie 1962

1. Introducere

Acidul sulfuric este utilizat în prelucrarea industrială a lînii, în procesul de carbonizare precum şi în procesele tinctoriale.

În procesul de carbonizare acidul sulfuric se utilizează în concentraţii ridicate, de 40 ... 50 g/l, însă în vopsirea lînii se utilizează în concentraţii mult mai reduse şi anume 2...3% faţă de fibra de lînă, ceea ce corespunde la concentraţia de 1...4 g/l, considerînd că vopsirea se efectuează în raport de flotă de 1/20.

În această lucrare se urmăreşte studiul influenţei acidului sulfuric asupra lînii în soluţii apoase diluate. Temperatura de lucru este cea utilizată în vopsirea lînii, respectiv 100°C pentru toate probele executate. S-a variat concentraţia în acid sulfuric şi durata de tratare. Influenţa exercitată de soluţiile de acid a fost urmărită prin următoarele metode : a) determinări de pH, b) solubilitatea în alcalii, c) solubilitatea în uree-bisulfit, d) solubilitatea în caprolactamă-bisulfit; e) determinări de azot labil (solubil).

2. Partea experimentală

a) *Purificarea lînii.* Lîna brută a fost degresată cu tetraclorură de carbon în aparatul Soxhlet, spălată apoi cu apă distilată la 30° ... 35°C şi uscată în aer la temperatura camerei. Impurităţile rămase au fost îndepărtate manual şi final s-a spălat din nou cu tetraclorură de carbon.

b) *Tratarea cu soluţii acide.* Probe de lînă purificată s-au tratat la fierbere cu soluţii de acid sulfuric timp de 30; 60; 120 şi 240 min şi cu un raport de flotă de 1/50. S-a variat şi concentraţia în acid sulfuric, lucrîndu-se cu concentraţii de 0,25; 1; 2 şi 3 g/l respectiv 1,25; 5; 10 şi 15% faţă de materialul fibros.

După tratare probele de lînă au fost spălate cu apă distilată pînă ce s-au îndepărtat urmele de acid sulfuric. S-a controlat cu hidroxid de bariu. După spălare lîna a fost lăsată să se usuce în atmosferă, la temperatura camerei.

Soluţiilor acide de tratare a lînii precum şi celor rezultate după tratament li s-au făcut determinări de pH; valorile obţinute sînt date în tabelul 1.

Tabelul 1

Determinarea pH-ului

Conc. H_2SO_4 g/l	pH-ul soluţiilor iniţiale	pH-ul după 30 minute de tratare	60	120	240
0,25	2,50	3,9	4	5,1	5,8
1	2,15	2,75	2,9	3	3,16
2	2,09	2,3	2,45	2,68	2,73
3	1,95	1,95	2,3	2,42	2,49

c) *Solubilitatea în alcalii.* Pentru determinarea solubilităţii în alcalii s-a utilizat metoda lui Harris şi Smith [1], [2]. S-a lucrat cu probe de cîte 400 mg lînă şi cu un raport de flotă de 1/100. Rezultatele obţinute, raportate la sută, sînt prezentate în tabelul 2, fiecare rezultat fiind media a 8 determinări.

Solubilitatea în alcalii pentru lîna netratată este de 18%.

Tabelul 2

Solubilitatea în alcalii

Conc. H_2SO_4 g/l	Solubilitatea după 30 minute de fierbere	60	120	240
0,25	15,49	16,43	18,34	21,82
1	22,80	25,51	28,19	42,32
2	24,81	34,28	47,46	64,38
3	27,58	41,20	58,07	73,49

d) *Solubilitatea în uree-bisulfit.* Pentru determinarea solubilității lînii în uree-bisulfit s-a utilizat metoda lui K. Less și E. F. Elsworth [3], [4]. Rezultatele obținute sînt prezentate în tabelul 3, fiecare rezultat reprezentînd media a 8 determinări.

Tabelul 3

Solubilitatea în uree-bisulfit

Conc. H_2SO_4	Solubilitatea după			
	30	60	120	240
g/l	minute de fierbere			
0,25	9,92	11,21	15,42	18,45
1	18,01	21,08	24,64	13,80
2	25,44	31,19	39,58	53,96
3	31,62	37,40	44,16	64,74

Solubilitatea în uree-bisulfit pentru lîna netratată este de 18,46%.

e) *Solubilitatea în caprolactamă-bisulfit.* Determinarea solubilității lînii în caprolactamă-bisulfit s-a efectuat utilizînd o soluție de 50 g caprolactamă și 3 g metabisulfit pentru 100 ml reactiv [5], lucrîndu-se la 65°C timp de 60 min. Rezultatele obținute sînt prezentate în tabelul 4, fiecare rezultat constituind media a cîte 5 determinări.

Tabelul 4

Solubilitatea în caprolactamă-bisulfit

Conc. H_2SO_4	Solubilitatea după			
	30	60	120	240
g/l	minute de fierbere			
0,25	12,38	14,43	15,55	17,16
1	15,72	17,67	22,09	27,74
2	19,12	22,66	29,19	13,88
3	22,53	24,99	31,88	36,88

Lîna netratată are solubilitatea în caprolactamă-bisulfit de 13,90%.

f) *Determinări de azot labil.* Pentru determinarea azotului labil s-a utilizat metoda propusă de Krais și Schleber [6]. Rezultatele obținute, exprimate în procente, sînt prezentate în tabelul 5.

Tabelul 5

Determinarea azotului labil

Durata de tratare min	Concentraţia acidului sulfuric g/l			
	0,25	1	2	3
30	3,59	4,07	4,17	4,70
	3,43	3,83	4,31	4,76
60	3,75	4,56	4,86	5,54
	4,30	4,80	4,90	5,30
120	4,62	4,90	5,54	5,69
	4,27	5,05	5,20	5,74
240	4,77	5,09	8,28	10,57
	5,19	6,02	8,45	11,20

Lîna netratată are 2,59% azot labil.

3. Interpretarea rezultatelor

a) *Determinările de pH.* Din rezultatele determinărilor de pH prezentate în tabelul 1 se observă că acesta creşte cu timpul de tratare, datorită legării acidului sulfuric de către fibra de lînă. Din fig. 1 se observă de asemenea că pH-ul creşte mai mult la începutul tratamentului, creşterea fiind apoi mai lentă pe măsură ce durata de tratare a lînii cu acid este mai îndelungată. Acest fapt arată că reacţia de legare a acidului sulfuric de către lînă are loc, în cea mai mare parte, la începutul contactului dintre lînă şi acid. Această observaţie concordă cu constatările lui R. L. Elliott şi ale colaboratorilor săi, care arată că legarea acidului sulfuric de lînă atinge un maximum după un timp scurt de tratare [7]. La aceeaşi concluzie se ajunge studiindu-se interacţiunea lînă-acid sulfuric, urmărită pe cale radioactivă [8].

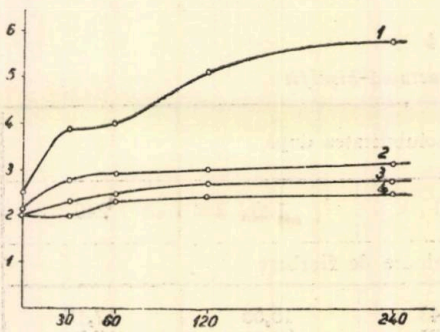


Fig. 1

b) *Solubilitatea în alcalii.* Analizînd rezultatele din tabelul 2 se observă că solubilitatea în alcalii a lînii tratată cu acid sulfuric creşte atît cu durata de tratare cît şi cu creşterea concentraţiei acidului.

Comparînd însă solubilitatea în alcalii funcţie de timp (fig. 2) cu solubilitatea funcţie de concentraţia acidului (fig. 3), se constată că solubi-

litatea variază puțin în cazul concentrațiilor mai mici și a unui timp scurt de lucru; se constată de asemenea că solubilitatea în hidroxid de sodiu crește mult mai repede cu creșterea concentrației în acid sulfuric decît cu creșterea timpului de tratare.

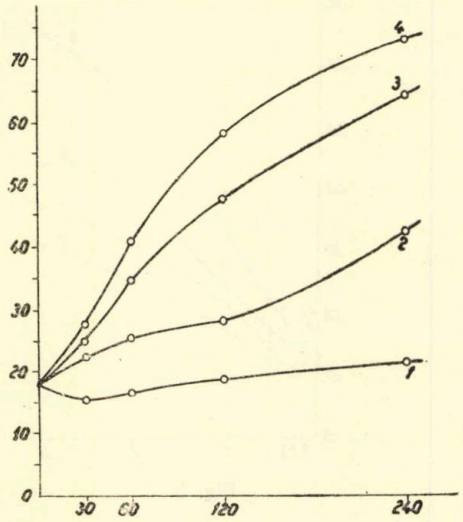


Fig. 2

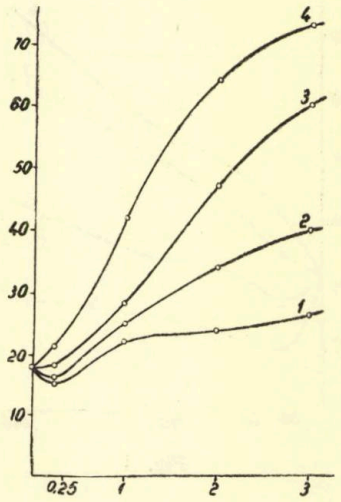


Fig. 3

c) *Solubilitatea în uree-bisulfit.* Datele din tabelul 3 arată că solubilitatea lînii care a suferit un tratament acid crește în reactivul uree-bisulfit, atît cu creșterea concentrației acidului cît și cu prelungirea duratei de tratare. Faptul că solubilitatea lînii tratate în mediu acid crește în uree-bisulfit, se explică prin aceea că acidul acționînd hidrolitic asupra legăturilor peptidice, permite ca în prezența agentului de reducere a legăturilor cistinice (bisulfitul) și în prezența ureei care desface punțile de hidrogen, să treacă o cantitate de polipeptide în soluție, cu atît mai mare cu cît au fost hidrolizate mai multe legături peptidice. (Se știe că în mediu acid puntea cistinică nu este atacată [9]).

De asemenea comparînd solubilitatea în uree-bisulfit funcție de timp (fig. 4) cu solubilitatea funcție de concentrația acidului (fig. 5) se constată, ca și în cazul solubilității în alcalii, că solubilitatea crește mai repede funcție de concentrația acidului decît funcție de timp.

d) *Solubilitatea în caprolactamă-bisulfit.* Datele din tabelul 4 arată că solubilitatea lînii care a suferit un tratament acid crește în reactivul caprolactamă-bisulfit. Solubilitatea crește odată cu prelungirea duratei de tratare precum și cu ridicarea concentrației acidului sulfuric în soluțiile de tratare, ca și în cazul reactivului uree-bisulfit.

Comparînd solubilitatea lînii în caprolactamă-bisulfit cu solubilitatea în uree-bisulfit, respectiv fig. 6 cu fig. 4 şi fig. 7 cu fig. 5, se observă că solubilitatea variază mai lent şi mai uniform în cazul reactivului capro-

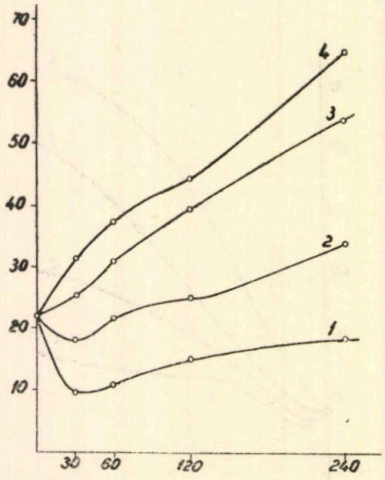


Fig. 4

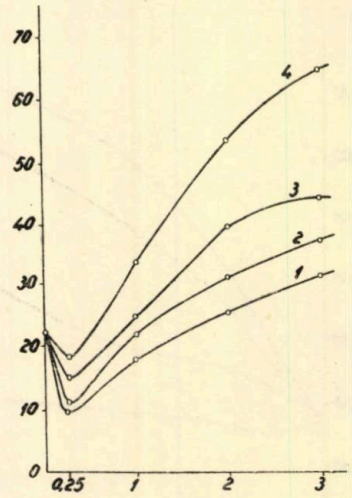


Fig. 5

lactamă-bisulfit decît în cazul reactivului uree-bisulfit. De asemenea valorile solubilităţii în caprolactamă-bisulfit sînt mai mici decît cele obţinute în cazul reactivului uree-bisulfit, datorită comportării diferite a caprolactamei comparativ cu ureea [5].

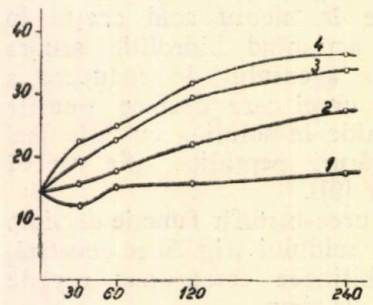


Fig. 6

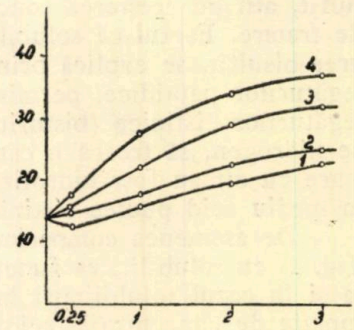


Fig. 8

e) *Determinările de azot labil.* Prin azot labil sau solubil se înţelege azotul care în mediu uşor oxidant şi alcalin poate trece în soluţie. Cu cît lîna este mai degradată cu atît cantitatea de azot labil este mai mare.

Datele din tabelul 5 arată că azotul labil creşte atît cu timpul de tratare cît şi cu concentraţia acidului sulfuric. Urmărind creşterea de azot labil funcţie de timp (fig. 8) se constată că acesta creşte mai mult în cazul concentraţiilor ceva mai ridicate, în special după un interval mai îndelungat de tratare (peste 120 min).

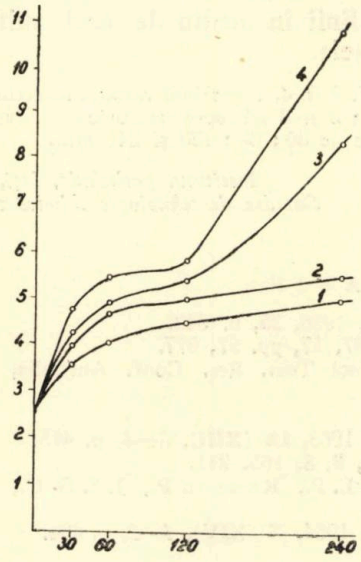


Fig. 8

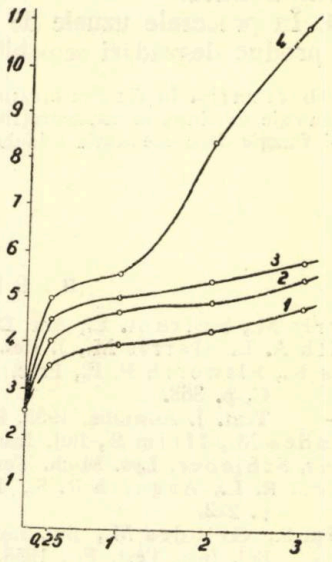


Fig. 9

Din fig. 9 se observă că azotul labil creşte cu concentraţia acidului în mod uniform la durate mai mici de tratare şi creşte mult mai repede atunci cînd timpul de tratare depăşeşte 120 min. Acest test arată că degradarea acidă a lînii în timpul operaţiilor tinctoriale se petrece în foarte mică măsură, însă creşterea concentraţiei acidului faţă de fibră sau a timpului de lucru este contraindicată. Şi acest indice arată că acidul sulfuric lucrează hidrolitic asupra lînii.

4. Concluzii

Studiind influenţa acidului sulfuric în soluţii diluate asupra lînii merinos, prin determinări de pH, indici de solubilitate în hidroxid de sodiu $n/10$, uree-bisulfit, caprolactamă-bisulfit, precum şi prin variaţia de azot labil, se desprind următoarele concluzii:

1. Determinările de pH arată că acidul sulfuric se leagă mai repede de fibra de lînă în special în prima fază de tratare.

2. Solubilitatea în alcalii pune în evidenţă faptul că factorul concentraţie este mai important în procesul de degradare acidă a lînii decît factorul timp, ceea ce se constată şi prin testul uree-bisulfit şi determinările de azot labil.

3. Atît determinările de azot labil cît şi testurile de solubilitate arată că acţiunea acidului sulfuric diluat asupra cheratinei din lînă este de natură hidrolitică.

4. În procesele uzuale de vopsire a lînii în mediu de acid sulfuric nu se produc degradări sensibile ale acesteia.

Observaţie. În figurile prezentate curbele *1*, *2*, *3*, *4*, reprezintă variaţia indicelui respectiv funcţie de timp, la concentraţiile de 0,25; 1; 2 şi 3 g/l acid sulfuric, sau variaţia indicelui funcţie de concentraţia acidului, la duratele de 30; 60; 120 şi 240 min.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de tehnologie chimică textilă

BIBLIOGRAFIE

1. Harris M., Smith A. L., Am. Dyestuff Rep., 1936, **25**, p. 542.
2. Smith A. L., Harris M., J. Res. N. B. S., 1937, **17**, pp. 97, 577.
3. Less K., Elsworth F. F., Proc. Internat. Wool Text. Res. Conf. Australia, 1955, **C**, p. 363.
4. — Text. J. Australia, 1955, **9**, p. 30.
5. Grindea M., Ifrim S., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, **IX (XIII)**, *3—4*, p. 415.
6. Krais, Schleber, Lps. Msch. Textilind., 1929, **9**, S. 165, 211.
7. Elliott R. L., Asquith R. S., Hopper M. E. P., Rawson P., J. S. D. C., 1960, p. 222.
8. Ifrim S., Grindea M., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X (XIV)**, *1—2*, p. 434.
9. * * * Bul. Inst. Text. Fr., 1958, **76**, p. 109.

INFLUENCE DES SOLUTIONS DILUÉES D'ACIDE SULPHURIQUE SUR LA LAINE

(Résumé)

On étudie l'influence exercitée par l'acide sulphurique, dans des solutions diluées, sur la laine, à l'aide des déterminations de pH, des indices de solubilité et de la variation d'azote labile.

On y montre que l'acide sulfurique s'unit plus rapidement à la fibre de laine dans la première phase du traitement. La concentration de l'acide joue un role plus important dans la dégradation acide de la laine, que le facteur temps. Pendant la teinture de la laine dans un milieu acide celle-ci ne subit de dégradations sensibles.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 677 31; 661.321

DESPRE MODIFICĂRILE CHIMICE ALE FIBREI DE LÎNĂ TRATATĂ CU CARBONAT DE SODIU

DE

SAVEL IFRIM şi MIŞILIM GRINDEA

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

În literatură se întîlnesc numeroase lucrări care urmăresc acţiunea carbonatului de sodiu asupra lînii [1], [2]. Această acţiune se manifestă în primul rînd printr-o scădere a solubilităţii lînii în reactivul uree-bisulfit. Scăderea solubilităţii în uree-bisulfit a lînii tratate în mediu alcalin se explică prin creşterea gradului de reticulare a cheratinei, formîndu-se noi legături transversale, lantioninice.

Unele lucrări [3], [4] presupun formarea lantioninei din cistină, ipoteză care însă nu s-a verificat practic.

Zahn şi colaboratorii săi [5] au tratat lîna cu carbonat de sodiu $n/10$ la 45°C şi au găsit că solubilitatea în uree-bisulfit scade mult comparativ cu lîna netratată, fără ca conţinutul în cistină să se schimbe, timpul de tratare fiind maximum 45 min. Acest rezultat conduce la concluzia că scăderea solubilităţii lînii în reactivul uree-bisulfit nu poate fi explicată prin conversia cistinei în lantionină.

Harris consideră că deşi valoarea conţinutului în cistină este constantă, totuşi posibilitatea formării lantioninei nu poate fi exclusă.

Schöberl şi Wagner [6] au găsit că prin tratarea unui amestec de cistină şi cisteină în mediu alcalin, se formează lantionină. Aceste observaţii precum şi unele determinări experimentale au condus pe Zahn şi colaboratorii săi la presupunerea că trebuie să existe o relaţie între formarea de lantionină şi conţinutul în grupe tiolice ale lînii şi că la formarea lantioninei în lîna tratată alcalin contribuie ionii $R—S^-$.

Din cercetările experimentale întreprinse cu lîna neredusă, redusă şi tratată cu *N*-etil maleinimidă (*N*-etil maleinimida reacţionează cu grupele tiolice, blocîndu-le), Zahn şi colaboratorii săi trag concluzia că există o corelaţie directă între conţinutul de grupe tiolice din lînă şi formarea de lantionină. De asemenea aceiaşi autori presupun că reacţia de formare a lantioninei în mediu slab alcalin se explică printr-un atac direct al cisteinei combinate asupra legăturii cistinice, conform schemei [5]:

(A) $$\begin{matrix} S—S—CH_2—L \\ | \\ L—CH_2 \end{matrix} + {}^-S—CH_2—L \rightarrow \begin{matrix} —S—S—CH_2—L \\ \\ L—CH_2—S—CH_2—L. \end{matrix}$$

Din acest mecanism rezultă că puntea cistinică îşi modifică doar poziţia, conţinutul în grupări cistinice rămînînd constant, formîndu-se lantionină din grupele tiolice libere, al căror conţinut trebuie să scadă (grupele tiolice dispărînd ca atare).

Profesorul Zahn şi colaboratorii săi trag concluzia că lantionina se formează după acest mecanism atunci cînd lîna este tratată în mediu alcalin, pînă la temperatura de 45°C. Dar, în lucrarea citată, autorii nu urmăresc direct variaţia conţinutului în grupe tiolice, funcţie de diferiţi factori.

Plecînd de la ipoteza profesorului Zahn, în această lucrare se urmăreşte variaţia conţinutului în grupe tiolice şi a sulfului total din lîna tratată cu carbonat de sodiu, funcţie de concentraţia carbonatului de sodiu şi de temperatura de lucru. De asemenea s-a determinat şi solubilitatea lînii în reactivul uree-bisulfit şi în caprolactamă-bisulfit.

2. Partea experimentală

Lîna purificată a fost tratată cu soluţie de carbonat de sodiu de diferite concentraţii (0,2...10 g/l) la temperatura de 50°C, timp de 60 min. S-a lucrat cu un raport de flotă de 1/50. După tratare lîna a fost spălată cu apă distilată. Probelor uscate în aer la temperatura camerei li s-a determinat solubilitatea în uree-bisulfit [4] şi în caprolactamă-bisulfit [7]. Rezultatele acestor determinări sînt date în tabelul 1, fiecare dată din tabel reprezentînd media a cinci determinări.

Tabelul 1

Proba de lînă	Concentraţia în Na_2CO_3 g/l	Solubilitatea în: uree-bisulfit %	Solubilitatea în: caprolactamă-bisulfit %
Lînă netratată	—	18,11	16,42
I	0,2	9,33	15,42
II	0,5	9,20	13,50
III	1	9,00	13,30
IV	2	6,26	9,70
V	5	3,47	5,47
VI	10	2,07	5,00

Aceloraşi probe de lînă, tratate cu carbonat de sodiu, li s-a determinat şi conţinutul în sulf total şi conţinutul în grupe mercaptanice.

Determinarea sulfului s-a efectuat prin metoda iodometrică, iar determinarea conţinutului în grupe tiolice s-a făcut după metoda lui Zahn [8], utilizînd ca reactiv hidroxifenilmercurul.

Hidroxifenilmercurul a fost preparat prin oxidarea difenilmercurului cu permanganat de potasiu [9, S. 125], iar difenilmercurul s-a preparat

din bromură de fenil şi amalgam de sodiu (2...3%) în prezenţă de acetat de etil [9, S. 94]. Hidroxifenilmercurul a avut, după purificare, punctul de topire la 251°...252°C.

Rezultatele determinării conţinutului de sulf şi a conţinutului în grupe tiolice sînt prezentate în tabelul 2.

Tabelul 2

Proba de lînă	Concentraţia în Na_2CO_3 g/l	Conţinutul în :	
		sulf %	grupe tiolice µmoli/g
Lînă netratată	—	4,38	11,9
I	0,2	4,32	11,4
II	0,5	4,16	10,4
III	1	4,30	9,0
IV	2	4,32	6,3
V	5	4,36	5,4
VI	10	4,26	3,3

În continuare s-a tratat lîna cu carbonat de sodiu variind temperatura de lucru (45°...80°C) dar menţinînd constantă concentraţia în carbonat de sodiu. S-a utilizat un acelaşi raport de flotă de 1/50, timpul de tratare fiind 60 min iar concentraţia în carbonat de sodiu de 5 g/l.

Modificările produse în fibră au fost urmărite de asemenea prin solubilitatea în uree-bisulfit şi în caprolactamă-bisulfit, rezultatele fiind prezentate în tabelul 3.

Tabelul 3

Proba de lînă	Temperatura de lucru °C	Solubilitatea în :	
		uree-bisulfit %	caprolactamă-bisulfit %
Lînă netratată	—	18,11	16,42
I	45	13,78	10,88
II	50	9,59	8,06
III	60	2,62	2,66
IV	70	0,10	0,31
V	80	0,00	0,00

De asemenea, s-a determinat şi sulful total precum şi conţinutul în grupe tiolice, rezultatele fiind date în tabelul 4.

Tabelul 4

Proba de lînă	Temperatura de lucru °C	Conţinutul în: sulf %	Conţinutul în: grupe tiolice µmoli/g
Lînă netratată	—	4,40	11,9
I	45	4,40	8,6
II	50	4,38	5,6
III	60	4,36	3,3
IV	70	4,28	1,9
V	80	3,82	1,9

3. Interpretarea rezultatelor

Din analiza datelor cuprinse în tabelele 1 şi 3 se observă că solubilitatea lînii în uree-bisulfit şi în caprolactamă-bisulfit, scade atît cu creşterea concentraţiei carbonatului de sodiu din soluţiile de tratare (tabelul 1) cît şi cu creşterea temperaturii de tratare, cînd concentraţia carbonatului este menţinută constantă (tabelul 3). Aceste observaţii duc la concluzia că în tratamentul lînii cu carbonat de sodiu s-a produs o creştere a gradului de reticulare a cheratinei, ceea ce explică scăderea solubilităţii în reactivii menţionaţi.

Dacă se urmăresc rezultatele referitoare la conţinutul de sulf din aceleaşi probe de lînă (v. tabelele 2 şi 4) se constată că acesta nu variază decît la temperaturi depăşind 70°C. Datorită conţinutului constant în sulf nu se poate admite formarea lantioninei din cistină. Totuşi solubilitatea în uree-bisulfit descreşte faţă de cea a lînii netratate. Această scădere nu se poate explica nici prin creşterea reticulării cheratinei datorită transformării punţii cistinice intralanţuri în interlanţuri, deoarece în prezenţa bisulfitului are loc reducerea legăturii —S—S—, indiferent de poziţia acesteia în macromoleculă.

Din tabelele 2 şi 4 se observă însă scăderea conţinutului în grupe tiolice atît cu creşterea concentraţiei carbonatului cît şi cu creşterea temperaturii pînă la 70°C. Tragem concluzia că şi în aceste condiţii de tratare alcalină, grupele tiolice contribuie la formarea lantioninei după mecanismul indicat de reacţia (A).

La temperaturi mai ridicate (peste 70°C), datorită faptului că au loc pierderi de sulf iar solubilitatea în uree-bisulfit şi caprolactamă-bisulfit este practic nulă, se poate admite formarea de lantionină şi din cistină, conform schemei:

$$R'—S—S—R'' \rightarrow R'—S—R''+S.$$

Părerea [5] după care lantionina se formează în timpul efectuării testului de solubilitate în uree-bisulfit, este discutabilă.

Cauza scăderii solubilităţii lînii în uree-bisulfit rezidă în însăşi tratamentul alcalin la care a fost supusă lîna. Modificările chimice ce au loc în fibră, în special formarea de lantionină, se petrec în timpul atacului alcalin.

4. Concluzii

Din studiul influenţei carbonatului de sodiu asupra lînii prin testul de solubilitate în uree-bisulfit şi caprolactamă-bisulfit, precum şi prin determinarea conţinutului în grupe tiolice şi de sulf total, se desprind următoarele concluzii:

1. Scăderea solubilităţii lînii în reactivul uree-bisulfit sau caprolactamă-bisulfit are loc atît cu creşterea concentraţiei în carbonat de sodiu, în soluţiile de tratare, cît şi cu creşterea temperaturii de lucru.

2. La tratarea lînii cu carbonat de sodiu, în condiţiile prezentei lucrări, nu se constată variaţii în conţinutul de sulf total din lînă, decît a temperaturi mai mari de 70°C.

3. Conţinutul în grupe tiolice libere din lîna tratată cu carbonat de sodiu, scade atît funcţie de creşterea concentraţiei în carbonat de sodiu cît şi funcţie de creşterea temperaturii de lucru, pînă la 70°C.

4. În timpul tratării lînii cu carbonat de sodiu grupele tiolice libere contribuie la reticularea cheratinei atît funcţie de creşterea concentraţiei în carbonat de sodiu cît şi funcţie de creşterea temperaturii de lucru.

5. La temperaturi superioare celei de 70°C este posibilă formarea lantioninei şi din cistină, eliminîndu-se sulf.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de tehnologie chimică textilă

BIBLIOGRAFIE

1. Less K., Peryman R. V., Elsworth F. F., J. Text. Inst., 1960, *717,* p. 51.
2. Grindea M., Ifrim S., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1962, **VIII (XII)**, *1—2,* p. 189.
3. Less K., Elsworth F. F., J. S. D. C., 1952, **68,** p. 207.
4. — Proc. Internat. Wool Text. Res. Conf. Australia, 1955, **C,** p. 363.
5. Zahn H., Kunitz F. W., Hildebrand P., J. Text. Inst., 1960, *740,* p. 12.
6. Schöberl A., Wagner A., Proc. Internat. Wool Text. Res. Conf. Australia, 1955, **C,** p. 11.
7. Grindea M., Ifrim S., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, **IX (XIII)**, *1—2,* p. 415.
8. Zahn H., Gerthsen T., Meichebeck H., Mel. Textber., 1962, **43,** S. 1179.
9. Dreher E., Otto R., A, **154.**

SUR LES MODIFICATIONS CHIMIQUES DE LA FIBRE DE LAINE TRAITÉE AU CARBONATE DE SODIUM

(Résumé)

On étudie la variation du contenu des groupes de thyol et du soufre total de la laine traitée avec du carbonate de sodium. Les résultats acquis ont été mis en corrélation avec la solubilité de la laine dans les reactifs urée-bisulphite et caprolactame-bisulphite. On parvient ainsi à confirmer la possibilité d'obtenir la lanthyonine à partir de la cistéine lors du traitement de la laine avec du carbonate de sodium.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

УДК 675.026

ОБ ОТНОШЕНИИ КОЖ ХРОМОВОГО И ТАННИДНОГО ДУБЛЕНИЯ К СУХОМУ НАГРЕВУ

Р. С. УРУДЖЕВ и Г. И. КУТЯНИН

В отличие от сваривания коллагена в обводненном состоянии, отношение кожи к сухому нагреву изучено недостаточно. Встречающиеся в отдельных литературных истчноиках сведения о поведении кожи при сухом нагреве часто бывают неполными и противоречивыми. Это объясняется прежде всего использованием для исследования термических свойств кожи разных методов и больше всего различных теплопроводящих сред (парафин, глицерин, минеральное масло, воздух и др.), которые вступая во взаимодействие с коллагеном, изменяют его отношение к действию тепла.

Метод, предложенный одним из авторов [1] для исследования термостойкости кожи, лишен этих недостатков. Более того он доступен и прост. Сущность данного метода заключается в том, что образец испытываемой кожи определенного размера, закрепленный между зажимами прибора под натяжением груза (весом 5 г) и соединенный с индикатором градуированной шкалы, опускается в теплопроводящую среду из легкоплавкого металлического сплава (типа сплава Вуда).

Нагревая среду с определенной скоростью и наблюдая за движением стрелки на шкале прибора определяется виличина деформации (усадка или удлинение) испытываемого материала.

Мы исследовали по данному методу поведение кож хромового и таннидного дубления в интервале температур 75° ... 300° С.

Некоторые показатели химического анализа физико-механического испытания исследованных кож приведены в таблице 1.

Испытания проводились на образцах, вырезанных вдоль хребта размерами 50×3 мм (рабочая часть). Подготовленные к испытанию образцы прикреплялись между зажимами прибора и опускались в металлический сплав с температурой 75°С. Температура теплопроводящей среды повышалась со скоростью 5°С в минуту. По движению стрелки на градуированной шкале прибора отмечались начало и величина деформации (усадки или удлинения) кожи.

По полученным данным строились кривые зависимости величины деформации от температуры и начального содержания влаги в испытываемых образцах.

Таблица 1

Показатели химического анализа и физико-механические испытания исследованных кож

№№ п/п	Показатели анализа и испытания	Хромовй опоек	Юфть таннидного дубления
1	Влага, (%)	16,0	13,1
2	Вымываемые дихлорэтаном, (%)	2,1	1,8
3	Окись хрома, (%)	4,99	—
4	Вымываемые водой общие, (%)	—	2,7
5	Зола общая, (%)	—	1,9
6	Дубящие связанные, (%)	—	29,4
7	Число продуба	—	45,1
8	pH хлоркалиевой вытяжки	4,6	5,2
9	Предел прочности при рызрыве, (кгс/мм^2)	1,76	1,9
10	Сопротивление разрыву лицевого слоя, (кгс/мм^2)	1,76	1,9
11	Удлинение при напряжении в 1 кгс/мм^2 (%)	15,3	7,0
12	Средняя толщина, (мм)	0,91	1,4

Испытывались 7 групп образцов хромового опойка и 8 групп образцов юфти таннидного дубления с различным содержанием влаги (в пределах от 2...3% до 112 ... 115% к абсолютно сухому весу кожи). Исследования проводились на ранее описанном в работе [2] приборе.

Ниже приводятся данные, наиболее полно характеризуюшие закономерности поведения испытываемых кож при сухом нагреве, и дается их обсуждение.

На графике (рис. 1) показаны результаты сухого нагрева образцов кожи хромового дубления с начальной влажностью 2...3%, 14...16% и 65 ... 70%. Эти кривые показывают, что с повышением содержания влаги в образцах кожи понижается температура начала ее усадки и растет величина усадки.

Однако необходимо учесть, что линейные размеры испытываемой кожи заметно изменяются в процессе сушки и увлажнения перед испытанием. Так, при подсушивании в эксикаторе над серной кислотой (с удельным весом 1,84) воздушносухие образцы хромового опойка усаживались на 4% от их начальной длины, а при доведении влажности до 65 ... 70 размеры параллельных образцов (по длине) увеличились на 7%. Таким образом, при изменении содержания влаги в образцах хромовой кожи в интервале от 2 ... 3% до 65 ... 70% их длина колеблется до 11% от начальной величины.

На рис. 2 построены кривые зависимости величины усадки образцов кожи от температуры и начальной влажности с учетом изменения их длин в результате увлажнения и подсушивания перед испытанием.

Такое построение графика дало возможность проследить за процессом выравнивания под действием нагрева размеров образцов, которые оказались неодинаковыми из-за различной их влажности перед испытанием. Как показывают эти кривые, в начале нагрева более интенсивно усаживаются влажные образцы. По мере повышения температуры кривая этих образцов сближается с кривыми остальных групп образцов, а при температуре около 180°С все кривые сливаются и продолжают находиться в таком состоянии до конца испытания. Совмещение всех трех кривых при температуре около 180°С указывает на то, что влага оказывает влияние на величину усадки кожи хромового дубления при сухом нагреве лишь в интервале указанной температуры. Очевидно,

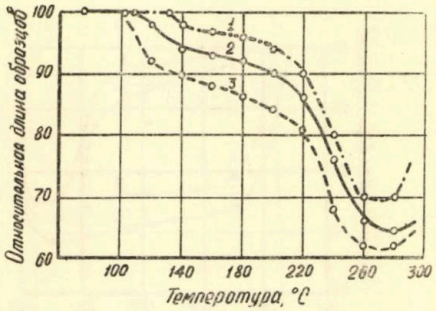


Рис. 1. — Зависимость величины усадки хромовой кожи (опоек) при сухом нагреве от начальной влажности.
Усадка образцов кожи с влажностью: *1* — 2...3%, *2* — 14...16%, *3* — 65...70%.

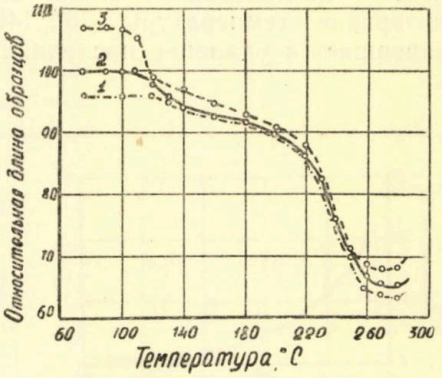


Рис. 2. — Зависимость величины усадки хромовой кожи (опоек) при сухом нагреве от начальной влажности (при учете изменений размеров образцов перед испытанием).
Усадка образцов кожи с влажностью: *1* — 2...3%, *2* — 14...16%, *3* — 65...70%.

характер этого влияния сводится к тому, что при увлажнении кожи расстояния между ее структурными элементами увеличиваются, вызывая соответственное увеличение площади всего образца полуфабриката. При нагреве влага из кожи постепенно удаляется, расстояния между ее структурными элементами вновь сокращаются и испытываемые образцы приобретают в определенных интервалах температуры прежние размеры. Таким образом, влага не вызывает прироста усадки хромовой кожи за счет сваривания коллагена т. е. ее влияние ограничивается лишь изменением размеров образцов кожи за счет внедрения и последующего удаления воды под действием тепла. Такое представление подтверждается и тем фактором, что максимальный прирост усадки влажных образцов кожи (10%) по сравнению с усадкой подсушенных образцов кожи при сухом нагреве равен величине изменения размеров тех же образцов (11%), вызванного изменением степени их влажности перед

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

испытанием. Отклонение в пределах до 1% может быть отнесено к ошибке опыта.

Данные графика (рис. 2) указывают на возможность удаления последних остатков влаги из кожи при сухом нагреве в интервале температуры 170°...180°С. При температуре выше 180°С, по-видимому, усадка кожи происходит лишь под действием подводимого тепла, как на это указывалось ранее в работах одного из авторов [1]. Проведенное нами экспериментальное наблюдение за процессом удаления влаги из образцов хромового опойка при их сухом нагреве подтвердило правильность упомянутого вывода.

Как показано на рис. 3, при сухом нагреве кожи (в условиях нашего исследования) влага из кожи более интенсивно выходит в интервале температуры 75°...140°С, а при температуре 170°...180°С завершается удаление последних ее остатков.

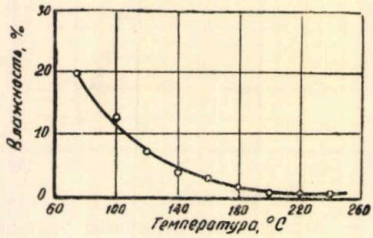


Рис. 3. — Процесс удаления влаги из образцов хромового опойка при сухом нагреве со скорстью 5°С в минуту.

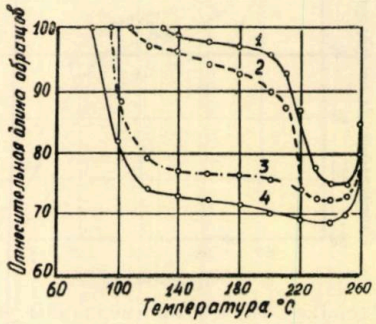


Рис. 4. — Зависимость величины усадки юфти таннидного дубления при сухом нагреве от начальной влажноси.
Усадка образцов юфти с влажностью: *1* — 6...7%, *2* — 33...35%, *3* — 37...40%, *4* — 112...115%.

Таким образом, при сухом нагреве кожи хромового дубления с различной начальной влажностью (от 2...3% до 65...70%) в интервале температуры до 180°С не происходит ее сваривание. Рост величины усадки кожи с увеличением начального содержания влаги связано с восстановлением первоначальных размеров образцов, изменившихся в результате их увлажнения перед испытанием. Очевидно, постепенное удаление влаги из кожи при ее сухом нагреве и наличие в ее структуре более прочных поперечных связей, образованных солями хрома, являются главными факторами, предохраняющими ее от сваривания.

В отличие от хромовой кожи, кожа таннидного дубления выдерживает сухой нагрев (в пределах до 180°С) лишь при содержании определенного количества влаги.

Подробную информацию о величине и характере деформации кожи таннидного дубления при сухом нагреве мы получили в результате проведенной серии экспериментов.

Полученные данные приведены в таблице 2.

Таблица 2

Зависимость величины усадки образцов кожи таннидного дубления при сухом нагреве от начальной их влажности

№№ п/п	Влажн. %% к абс. сух. весу кожи	Темп. нач. усадки °С	Величина усадки (%% от начальной длины) при температуре (°С)									
			80	100	120	140	160	180	200	220	240	260
1	6... 7	128	—	—	—	1,5	2,5	3	4,5	13	25	15
2	16... 18	118	—	—	1	3	4	5,5	7	13	28	20
3	28... 30	108	—	—	2,5	3,5	5	6,5	8	14	28	20
4	33... 35	108	—	—	1	4	6	7,5	10	26	28	20
5	37... 40	94	—	12	21	23	23,5	24	24,5	25,5	28	20
6	50... 60	88	—	12	22	23	24,5	25,5	25,5	26,5	27	0
7	80... 85	84	—	18	23	23,5	28	25,5	25,5	26,5	27	0
8	112...115	82	—	18	26	27,5	28	28,5	40	31	31,5	20

Данные таблицы показывают, что с повышением начального содержания влаги в коже таннидного дубления температура начала ее усадки понижается от 128°С при влажности 6...7% до 108% при влажности 28...30%. Дальнейшее повышение содержания влаги от 28...30% до 33...35% не изменяет температуру начала сухой усадки.

Однако, в отличие от усадки хромовой кожи, при повышении влажности образцов кожи таннидного дубления до 37...40% вновь наблюдается как падение температуры начала усадки, так и резкое возрастание величины усадки еще в начале нагрева (при температуре 82°...94°С). Такое явление при сухом нагреве мы графически изобразили на рис. 4.

Кривые, приведенные на этом графике, показывают, что образцы кожи таннидного дубления при сухом нагреве дают усадку, обусловленную удалением влаги, лишь при ее содержании в пределах 33...35%. Эта величина влажности бесспорно находится в пределах содержания гидрационной влаги в коже.

Увеличение содержания влаги выше указанного уровня ведет к свариванию образцов дермы, выдубленной таннидами, при температуре 82°...94°С, как это мы видим на рисунке.

Таким образом, кожа таннидного дубления оказывается устойчивой к действию сухого нагрева (в интервале до 180°С) при содержании в ней влаги в пределах гидрационной влаги. Очевидно, в

пределах этой влажности взаимодействие между смежными цепями белка полностью не ослаблено, т. е. сохраняется определенное количество поперечных связей между ними, препятствующих их переходу в относительно изогнутое состояние. По мере повышения температуры, влага из кожи постепенно удаляется и взаимодействие между полипептидными цепями усиливается, вызывая (в интервале температуры до 180°С) лишь сухую усадку материала, а не сваривание.

С увеличением содержания влаги выше предельного содержания гидратационной влаги, молекула воды, двухсторонне связанная прочно с полярными группами белка, очевидно, теряет эту связь с одной из этих групп и ассоциирует несколько молекул дополнительно введенной влаги. Этим обеспечивается с одной стороны, ослабление взаимодействия между смежными цепями, с другой стороны увеличение расстояния между ними за счет вклинивания новых молекул воды. Это обстоятельство, очевидно является главной причиной сваривания кожи таннидного дубления в сухой среде при повышении начального содержания влаги выше предела содержания гидратационной влаги.

Необходимо отметить, что влажность испытываемых образцов кожи в момент начала усадки или сваривания фактически должна быть несколько меньше чем в начале нагрева, так как в интервале температуры от начала нагрева до начала усадки (75°...82°С и 75°...128°С) происходит удаление части этой влаги.

Однако, поскольку трудно установить точное содержание влаги в момент начала усадки или сваривания, мы приняли начальную влажность, как показатель влажности при определении ее влияния на термостойкость кожи.

Полученные нами результаты исследования позволяют сделать вывод, что кожа хромового дубления более устойчива к действию сухого нагрева, чем кожа таннидного дубления. Заметное снижение термостойкости кожи танидного дубления происходит с увеличением начального содержания влаги в ней выше 33...35%.

Поступила в 18 VI 1965

Московский институт народного хозяйства им. Плеханова, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Кутянин Г. И., ДАН СССР, 1952, **82**, стр. 405.
2. Кутянин Г. И., Уруджев Р. С., Зав. лабор, 1964, *9*.

ASUPRA COMPORTĂRII PIEILOR TĂBĂCITE CU SĂRURI DE CROM SAU CU TANIDE ÎN CAZUL ÎNCĂLZIRII USCATE

(Rezumat)

Se studiază rezistenţa la temperatură a pieilor tăbăcite cu săruri de crom şi a celor tăbăcite cu tanide în mediu de aliaj uşor fuzibil (de tip Wood).

Se stabileşte că la încălzire uscată pieile tăbăcite cu săruri de crom, cu umiditate, iniţială diferită (de la 2...3% pînă la 65...70%), în intervalul de temperatură pînă la 180°C

nu ajung la starea de sudură. Din contra, pieile tăbăcite cu tanide suportă încălzirea uscată (pînă la 180°C) avînd numai o umiditate inițială pînă la 33...35% ; o umiditate mai mare decît cea arătată produce sudura pielei chiar la o temperatură de 82°...94°C.

La încălzirea uscată a pielei (în condițiile acestui experiment) umiditatea pielei dispare treptat, odată cu creșterea temperaturii. Dispariția mai intensă a umidității se produce la temperaturi de 75°...140°C, iar la 170°...180°C dispar ultimele resturi de umiditate. Începînd cu temperatura de 180°C se produce deformația termică pură a colagenului deshidratat.

Explicația figurilor

Fig. 1. — Dependența contracției pielei de crom (de vițel) de umiditatea inițială, la încălzire uscată. Contracția probelor cu umiditate de: *1* — 2..3%, *2* — 14...16%, *3* — 65...70%.

Fig. 2. — Dependența contracției pielei de crom (de vițel) de umiditatea inițială, la încălzire uscată (cu considerarea variației dimensiunilor probelor înainte de experiență). Contracția probelor de piele cu umiditatea de: *1* — 2...3%, *2* — 14...16%, *3* — 65...70%.

Fig. 3. — Procesul de evacuare a umidității din probele de piele-crom la încălzire uscată cu viteza de 5°C/min.

Fig. 4. — Dependența contracției iuftului cu tăbăcire tanidă, la încălzire uscată, în funcție de umiditate. Contracția probelor cu umiditate de: *1* — 6...7%, *2* — 33...35%, *3* — 37...40%, *4* — 112...115%.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

C. Z. 675.026

CONTRIBUŢII LA STUDIUL COMPORTĂRII PIEILOR DE FEŢE PRELUCRATE ÎN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA, LA CONFECŢIONAREA ÎNCĂLŢĂMINTEI

DE

AGLAIA CHIRIŢĂ şi GH. CHIRIŢĂ

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

În industria confecţiilor din piele tendinţa actuală este de a se produce o proporţie însemnată de încălţăminte flexibilă, comodă şi uşoară, aplicîndu-se procedee tehnologice moderne, cum sînt sistemele de confecţionare prin lipire şi vulcanizare. În anul 1963, din totalul încălţămintei produse în ţara noastră, 65% a fost încălţăminte flexibilă obţinută prin cele două sisteme de confecţionare menţionate [1].

Procedeul vulcanizării tălpilor monolite din cauciuc compact sau cauciuc microporos, direct pe feţele din piele, constituie unul din procedeele cele mai moderne de confecţionare a încălţămintei. În ultimul timp acest procedeu a luat o extindere apreciabilă datorită faptului că prezintă numeroase avantaje şi anume: exclude necesitatea subsecţiilor de pregătire a tălpii şi a tocului, deci reduce pe de-o parte manopera şi pe de altă parte spaţiile industriale, apoi exclude operaţiile de polisat şi lustruit talpa, face posibilă fixarea impermeabilă a părţii de jos la partea de sus a încălţămintei, realizează economie de material, o productivitate ridicată etc.

Sistemul de confecţionare a încălţămintei prin vulcanizare impune pieilor de feţe să aibă o bună aderenţă la talpa de cauciuc, pentru o îmbinare cît mai perfectă a acestora şi să nu-şi modifice proprietăţile fizico-chimice şi organoleptice sub acţiunea temperaturii de vulcanizare de 140°C.

Problema pieilor de feţe de încălţăminte, utilizate în sistemul de confecţionare prin vulcanizare, a preocupat pe mulţi cercetători, iar în literatură se găsesc numeroase indicaţii referitoare la modificările pe care le poate suferi pielea la temperatura de vulcanizare [2]...[4]. Astfel, la pieile pentru feţe de încălţăminte tăbăcite în crom cu o baie şi finisate în mod obişnuit, s-au semnalat următoarele modificări la temperatura de vulcanizare: contracţia suprafeţei, rigidizarea pielii, reducerea rezistenţelor mecanice (rezistenţa la tracţiune, la sfîşiere, la crăparea feţei şi rezistenţa feţei la flexiuni repetate), reducerea elasticităţii pielii, modificarea culorii peliculei de acoperire, desprinderea ei etc.

În țara noastră, Institutul de Cercetări de pielărie și cauciuc din București a studiat posibilitatea îmbunătățirii finisării cu coloranți de acoperire a pieilor de fețe de încălțăminte confecționate prin vulcanizare. În acest scop s-au folosit lianți polimeri termostabili, insolubili în acetonă și rezistenți la temperaturi ridicate. De asemenea, în compoziția vopselelor de acoperire s-au utilizat pigmenți care nu-și modifică nuanța cu ridicarea temperaturii.

În lucrarea de față s-a studiat influența temperaturii de vulcanizare (140°C) asupra pieilor de tip box cu fața corectată și box cu fața naturală, produse în principalele fabrici din pielărie din țara noastră. S-a cercetat: a) influența gradului de umiditate al pieilor în momentul încălzirii la 140°C și b) variația suprafeței și a caracteristicilor fizico-mecanice ale pieilor, în urma încălzirii la 140°C.

La confecționarea încălțămintei prin vulcanizare, pielea pentru fețe vine în contact cu calapodul fierbinte și talpa de cauciuc supusă vulcanizării la 140°C. De aceea, pentru a reproduce cît mai apropiat procesul de încălzire a pielii de fețe în timpul vulcanizării încălțămintei, ar fi indicat să se utilizeze aliajul Wood [5], care prezintă avantajul de a realiza un contact metalic de suprafață foarte intim cu pielea, fără a o impregna. R. Lasserre [3] a dovedit că încălzirea în atmosferă de aer, la etuvă, sau în aliaj metalic, nu are drept efect apariția unor diferențe sensibile la contracția pieilor. De aceea, în lucrarea de față, încălzirea probelor de piele, în toate încercările, s-a efectuat în etuvă.

Pentru a aprecia influența duratei de încălzire asupra degradării pielii, în toate încercările probele au fost menținute la temperatura de 140°C timp de 15 min și respectiv 30 min. Pentru a ține seama de faptul că gradul de umiditate al pielii poate modifica rezistența sa la căldură, o serie de probe de piele au fost condiționate timp de 2 zile, la temperatura camerei și la 65% umiditate relativă — care reprezintă condițiile modului de condiționare clasic adoptat pentru încercările fizico-mecanice ale pieilor finite, — iar o altă serie de probe de piele au fost condiționate timp de 5 ore, la etuvă, la 95°C. După menținerea pieilor timp de 5 ore la 95°C, umiditatea lor nu este mai ridicată decît 0,15% [3]. Probele, după cele două moduri de condiționare, au fost supuse apoi la temperatura de 140°C, unele timp de 15 min și altele timp de 30 min, urmărindu-se contracția suprafeței și variația caracteristicilor fizico-mecanice.

2. Comportarea boxurilor din Republica Socialistă România, supuse la temperatura de vulcanizare

S-a studiat contracția suprafeței și variația principalilor indici fizico-mecanici, după încălzirea la temperatura de 140°C, a 25 probe de box cu fața corectată și de box cu fața naturală, colectate de la fabricile de pielărie: „Tăbăcăria minerală Jilava", București, „Flacăra Roșie", București, „Pionerul", București, „Partizanul", Bacău, „I. R. P.", Timișoara și „Clujana", Cluj; analiza lor chimică și fizico-mecanică este dată în tabelul 1.

Tabelul 1

Analiza chimică şi fizico-mecanică a boxului

Probe de box de la fabrica de pielărie :	Umiditatea %	Cenuşa %	Cr_2O_3 %	Substanţe grase %	Alungirea sub sarcina de 1 kgf/mm² %	Rezistenţa la crăparea feţei kgf/mm²	Alungirea la crăparea feţei %	Rezistenţa la rupere kgf/mm²	Alungirea la rupere %
Box cu faţa corectată									
„Tăbăcăria minerală Jilava", Bucureşti	15,23	5,76	3,36	3,00	18,90	2,98	41,30	3,83	51,10
„Pionerul", Bucureşti	13,47	5,09	4,46	4,41	16,10	2,42	32,80	2,80	40,90
„Flacăra Roşie", Bucureşti	12,82	7,03	3,62	3,13	19,0	1,47	29,5	2,09	44,5
„I. R. P.", Timişoara	12,71	5,95	4,70	4,02	13,25	2,87	32,0	3,35	42,37
Box cu faţa naturală									
„Partizanul", Bacău	14,02	5,11	3,95	4,56	25,5	1,52	34,5	3,06	56,3
„Clujana", Cluj	12,55	4,45	3,65	4,59	83,30	1,52	43,0	2,32	59,37

a) *Variația suprafeței pielilor de tip box datorită încălzirii la temperatura de vulcanizare*

Pentru a se studia variația parametrilor suprafeței pielilor de tip box datorită încălzirii la 140°C s-au efectuat două serii de încercări. O primă serie, după condiționare în exicatoare la o umiditate relativă de 65%, s-au supus direct încălzirii la etuvă, la 140°C, timp de 15 min, iar o a doua serie, după condiționare au fost încălzite timp de 5 ore, la etuvă, în scopul eliminării umidității și apoi au fost supuse temperaturii de 140°C, timp de 15 min. În urma încălzirii la 140°C, probele de box cu fața naturală n-au suferit nici o modificare din punct de vedere organoleptic. În schimb, probele de box cu fața corectată și în special cele de la „Tăbăcăria minerală Jilava", au devenit mai rigide și cu fața aspră. Probelor din ambele serii de încercări li s-a măsurat suprafața în vederea determinării contracției în raport cu suprafața lor inițială și apoi au fost ținute 8 zile la umiditatea relativă de 65%, la temperatura camerei. După două zile și respectiv după 8 zile, s-a cercetat dacă suprafața probelor nu revine la starea inițială. Rezultatele determinărilor sînt trecute în tabelul 2.

Rezultă că atît probele supuse direct la temperatura de 140°C, după condiționare, cît și cele care au fost tratate în prealabil la temperatura de 95°C timp de 5 ore, se contractă între 9,01% și 12,87%. La aceeași probă de piele, considerîndu-se valorile medii a multor epruvete, s-ar părea că contracția este aproximativ aceeași, fie că proba s-a încălzit direct la 140°C, fie că în prealabil a fost ținută timp de 5 ore la temperatura de 95°C. Apreciind însă individual comportarea epruvetelor, rezultatele multor probe au arătat că la încălzirea la 140°C, după o uscare prealabilă de 5 ore la 95°C, se obține o contracție mai puternică. Acest aspect s-ar putea explica prin faptul că pielile tăbăcite în crom, complet uscate, au o temperatură de contracție mai mică decît cele cu un anumit grad de umiditate [2]. Se constată, de asemenea, că prin condiționare ulterioară, probele care au fost tratate la 140°C (cu sau fără uscare prealabilă) pierd o parte din contracția lor. Dacă se consideră egală cu 100 contracția inițială a probelor, după 8 zile de condiționare probele își revin în suprafață în proporție de 19,60 ... 41,88% (tabelul 2). Acest fapt înseamnă că la încălzirea la 140°C au loc în interiorul pielii o serie de modificări care schimbă aranjamentul ordonat al catenelor macromoleculare, modificări care nu sînt reversibile în condiții ulterioare de umiditate. Faptul că 80,40 ... 58,12% din contracția pielii la încălzirea ei la 140°C este nereversibilă, atrage atenția asupra faptului că și proprietățile fizico-mecanice ale pielii vor fi influențate de tratamentul termic.

b) *Influența încălzirii pielilor la temperatura de 140°C asupra caracteristicilor lor fizico-mecanice*

S-a stabilit mai sus că în cursul încălzirii la 140°C pielile suferă o contracție care este însoțită adesea de o oarecare întărire. Acest aspect reprezintă o indicație că a intervenit o anumită modificare în structura

Tabelul 2

Variația suprafeței boxurilor fabricate în Republica Socialistă România, în urma încălzirii la 140°C

Probe de box de la fabrica de pielărie :	Contracția după 15 min de încălzire la 140°C	Contracția probelor (%) tratate la 140°C după o condiționare ulterioară de :		Revenirea suprafeței probelor după 8 zile de condiționare ulterioară % din contracția inițială	Contracția după 15 min de încălzire la 140°C, după ce în prealabil probele au fost încălzite timp de 5 ore la 95°C	Contracția probelor (%) tratate la 140°C, după o condiționare ulterioară de :		Revenirea suprafeței după 8 zile de condiționare ulterioară % din contracția inițială
	%	2 zile	8 zile		%	2 zile	8 zile	
Box cu fața corectată								
„Tăbăcăria minerală Jilava", București	12,24	11,25	9,80	19,93	12,35	10,98	10,06	18,50
„Pionerul", București	11,96	10,36	9,02	24,58	11,74	9,99	8,56	27,08
„Flacăra Roșie", București	11,15	8,10	7,58	33,81	12,87	10,17	9,46	35,94
„I. R. P.", Timișoara	11,12	8,94	8,11	27,00	11,85	9,79	7,86	33,75
Box cu fața naturală								
„Partizanul", Bacău	11,24	9,50	8,54	24,02	11,02	9,11	8,86	19,60
„Clujana", Cluj	9,01	7,05	5,52	38,73	10,29	7,64	5,98	41,88

fizică și prin urmare în proprietățile fizico-mecanice ale pielii. Diverși autori au semnalat aceste variații pentru diferite piei finite [3], [6], [7].

Pentru a se urmări influența exercitată asupra caracteristicilor fizico-mecanice ale pieilor de tip box din țara noastră, prin încălziri la 140°C, s-au efectuat două serii de încercări la care s-a urmărit variația rezistenței la rupere și la crăparea feței precum și alungirea la rupere, alungirea la crăparea feței și alungirea sub sarcina de 1 kgf/mm^2.

La prima serie de încercări, probele de piele ștanțate sub formă de epruvete (conform STAS) în vederea încercărilor fizico-mecanice, după o condiționare de două zile la temperatura camerei și la 65% umiditate relativă, au fost încălzite la 140°C, unele timp de 15 min și altele 30 min. După tratarea la 140°C probele s-au condiționat timp de 48 ore într-un mediu cu 65% umiditate relativă și apoi s-au rupt la dinamometru. În cea de a doua serie de încercări s-a procedat analog cu deosebirea că între perioada de condiționare și cea de încălzirea la 140°C probele au fost păstrate timp de 5 ore la etuvă, la temperatura de 95°C, în vederea îndepărtării umidității.

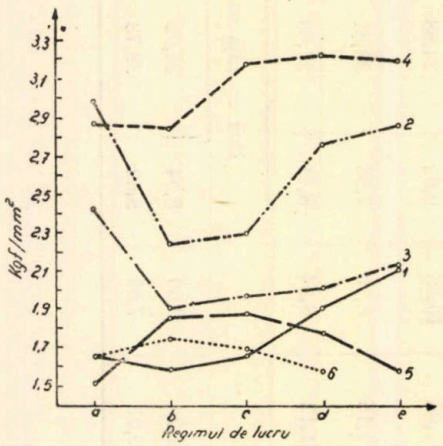


Fig. 1. — Variația rezistenței la crăparea feței.

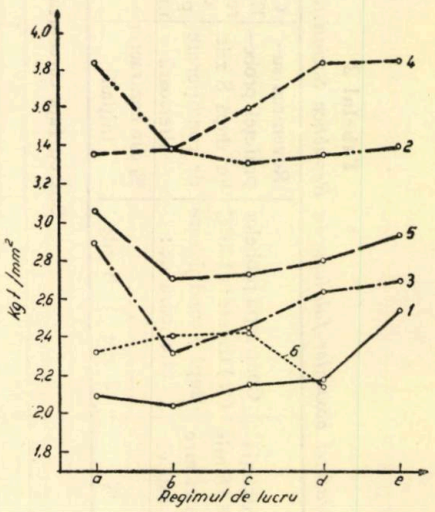


Fig. 2. — Variația rezistenței la rupere.

Rezultatele medii ale determinărilor fizico-mecanice ale celor 25 mostre de box, pe care s-au efectuat experimentările, sînt trecute în tabelul 3 și în fig. 1 ... 5, în care diferitele încercări sînt notate cu *a* ... *e*, cu următoarele semnificații: *a* — probe martor, *b* — probe uscate 5 ore la 95°C și apoi tratate 15 min la 140°C, *c* — probe uscate 5 ore la 95°C și apoi tratate 30 min la 140°C, *d* — probe tratate la 140°C timp de 15 min, di-

Tabelul 3

Variația indicilor fizico-mecanici ai boxurilor fabricate în Republica Socialistă România, încălzite la 140°C

Proveniența și numărul probelor	Regim de lucru	Alungirea sub sarcina de 1 kgf/mm² %	Rezistența la crăparea feței kgf/mm²	Alungirea la crăparea feței %	Rezistența la rupere kgf/mm²	Alungirea la rupere %
Box cu fața corectată						
„Flacăra Roșie", București, 2 probe	*a*	19,0	1,65	29,5	2,09	44,5
	b	12,75	1,58	23,7	2,03	36,0
	c	12,00	1,65	25,5	2,14	37,75
	d	13,25	1,90	26,0	2,17	38,5
	e	11,00	2,10	27,0	2,53	35,75
„Tăbăcăria minerală Jilava", București, 5 probe	*a*	18,9	2,98	41,3	3,83	51,10
	b	12,5	2,24	32,1	3,37	50,50
	c	11,9	2,29	34,6	3,30	52,50
	d	12,2	2,76	36,4	3,34	45,70
	e	12,0	2,86	38,6	3,49	48,50
„Pionerul", București, 5 probe	*a*	16,10	2,42	32,80	2,89	40,90
	b	12,10	1,90	25,50	2,31	37,00
	c	13,60	1,96	28,30	2,43	37,30
	d	14,30	2,01	28,80	2,63	40,60
	e	12,70	2,12	29,00	2,69	38,20
„I. R. P.", Timișoara, 4 probe	*a*	13,25	2,87	32,00	3,35	42,37
	b	8,40	2,84	28,5	3,37	37,10
	c	8,25	3,17	29,8	3,59	37,00
	d	8,10	3,22	30,8	3,83	38,20
	e	8,00	3,19	31,2	3,84	39,50
Box cu fața naturală						
„Partizanul", Bacău, 3 probe	*a*	25,5	1,52	34,5	3,06	56,3
	b	19,5	1,85	32,3	2,7	50,3
	c	17,5	1,87	30,6	2,72	55,1
	d	18,0	1,77	33,5	2,8	55,0
	e	20,0	1,57	31,6	2,93	59,8
„Clujana", Cluj	*a*	23,30	1,65	43,0	2,32	59,37
	b	16,10	1,74	31,7	2,40	43,3
	c	16,20	1,69	31,2	2,41	51,1
	d	16,7	1,57	32,0	2,13	48,9
	e	—	—	—	—	—

rect după condiționare, *e* — probe tratate la 140°C timp de 30 min, direct după condiționare.

Curbele din fig. 1 ... 5 au fost numerotate cu numere de la *1* la *6*, cu următoarele semnificații: *1* — box cu fața corectată, „Flacăra Roșie", București, *2* — box cu fața corectată, „Tăbăcăria minerală Jilava", București, *3* — box cu fața corectată, „Pionerul", București, *4* — box cu fața corectată, „I. R. P.", Timișoara, *5* — box cu fața naturală, „Partizanul", Bacău, *6* — box cu fața naturală, „Clujana", Cluj.

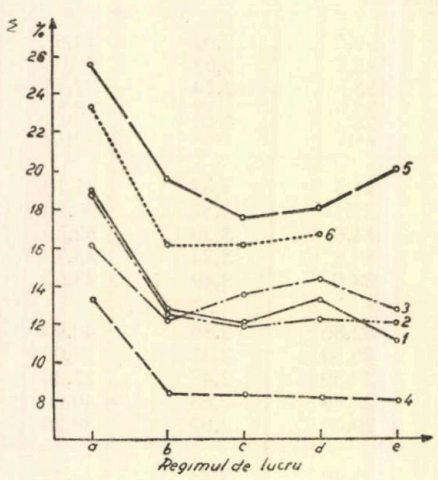


Fig. 3. — Variația alungirii sub sarcina de 1 kgf/mm².

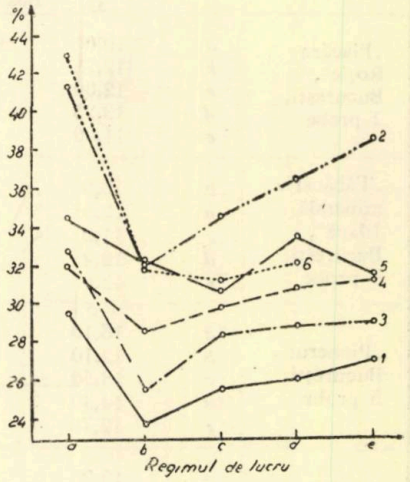


Fig. 4. — Variația alungirii la crăparea feței.

Rezistența la crăparea feței după tratarea pieilor la temperatura de 140°C este strîns legată de natura coloranților de acoperire care s-au folosit la finisare (fig. 1).

În majoritatea cazurilor rezistența la crăparea feței este mai puțin influențată în cazul tratării la 140°C, imediat după condiționarea probelor de piele.

Încălzirea la 140°C produce în general o micșorare a rezistenței pieilor la tracțiune, așa cum se observă din fig. 2. Această micșorare variază de la 0 la 20% în cazul încălzirii la 140°C, timp de 15 min, după ce în prealabil probele de piele s-au uscat 5 ore la 95°C. Rezistența la tracțiune este mai puțin micșorată în cazul încălzirii la 140°C, imediat după condiționarea probelor.

Alungirea sub sarcina de 1 kgf/mm², alungirea la crăparea feței și alungirea la rupere sînt mai mici în majoritatea cazurilor, după încălzirea pieilor la 140°C (după cum se constată din fig. 3 ... 5). Diferențele cele

mai sensibile se înregistrează la alungirea la crăparea feței și la alungirea sub sarcina de 1 kgf/mm², în cazul probelor tratate la 140°C, după o uscare prealabilă timp de 5 ore la 95°C (pct. *b*) din diagrame.

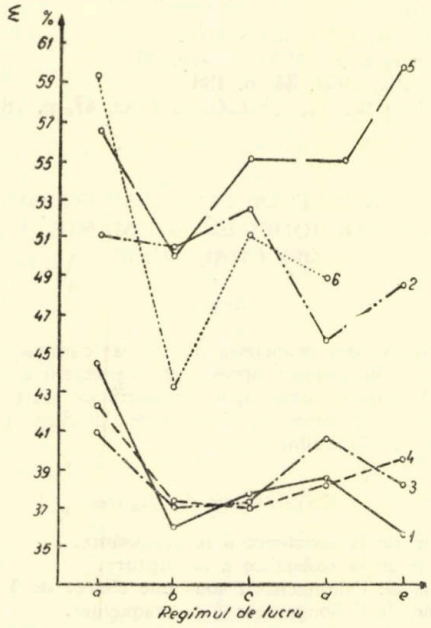


Fig. 5. — Variația alungirii la rupere.

3. Concluzii

Analizînd rezultatele obținute în urma studiului întreprins mai sus, rezultă că pieile de fețe de încălțăminte de tip box, cu fața naturală sau cu fața corectată, prelucrate în mod obișnuit, în urma încălzirii la 140°C timp de 15 min, suferă o contracție de 10...12%. Dacă înainte de a fi încălzite la această temperatură pieile sînt uscate în prealabil aproape complet, se pare că contracția este ceva mai accentuată.

În general, atît rezistența la rupere cît și alungirea probelor tratate la 140°C se micșorează mult în comparație cu valorile acelorași indici ai probelor martor; aceste micșorări sînt accentuate în cazul cînd pieile se supun încălzirii la 140°C complet uscate (a se vedea valorile în punctele *b* și *c* din diagrame).

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de confecții din piele
și
Catedra de tehnologia pielii,
înlocuitorilor de piele și tananților

BIBLIOGRAFIE

1. Sencovici Al., Ind. Uşoară, 1964, *8*, p. 393.
2. Егоркин Н. И., Лег. пром., 1949, *3*, стр. 12.
3. Lasserre R., Bul. de l'A.F.C.I.C. et Docum. Scient. et Techn. des Ind. du Cuir, 1957, *9*, pp. 155—194.
4. *** Schuh und Leder, 1960, *10*, S. 288.
5. Кутянин Г. И., Коллоид. ж., 1953, *1*, стр. 36.
6. Hough A. T., J.S.L.T.C., 1950, **34**, p. 138.
7. Gregori J. C., Roddy W. T., J.A.L.C.A., 1952, **47**, p. 787.

CONTRIBUTIONS À L'ÉTUDE DU COMPORTEMENT DES CUIRS POUR EMPEIGNES, FABRIQUÉS EN ROUMANIE, À LA CONFECTION DES CHAUSSURES

(Résumé)

On a étudié la variation des propriétés physico-mécaniques du box naturel et du box à fleur corrigé (fabriqué en Roumanie) après leur traitement à la température de 140°C.

Par rapport aux échantillons témoins, les échantillons traités à 140°C pendant 15 minutes, ont enregistré une contraction en surface de 10...12% et un abaissement notable des propriétés de résistence et de l'allongement.

Explications des figures

Fig. 1. — Variation de la résistance à la craquelure.
Fig. 2. — Variation de la résistance à la rupture.
Fig. 3. — Variation de l'allongement sous une charge de 1 kgf/mm^2.
Fig. 4. — Variation de l'allongement à la craquelure.
Fig. 5. — Variation de l'allongement à la rupture.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 1–2, 1966

RECENZII РЕЦЕНЗИИ
BOOK REVIEWS COMPTES RENDUS
BUCHBESPRECHUNGEN RECENSIONI
ANALISIS DE OBRAS

1. KURATOWSKI K., *Introduction à la théorie des ensembles et à la topologie.* Monographie nr. 15 de l'Enseignement Mathématique, Genève, 1966, X + 305 pp.

Cartea este traducerea revizuită și completată, în limba franceză, a ediției engleze apărută în 1961, care era tradusă după originalul în limba poloneză, apărut în 1955; în prefață se indică modificările și completările față de ediția engleză, care sînt importante mai cu seamă în ceea ce privește topologia.

Prima parte a lucrării privește noțiunile de teoria mulțimilor necesare oricărui matematician, expuse în opt capitole foarte ușor de parcurs și de asimilat.

În partea a doua se expune în 14 capitole și în relativ puține pagini un număr uimitor de noțiuni și rezultate topologice. Natural, autorul vădește oarecare preferință pentru definirea unei topologii cu ajutorul închiderii, teorie al cărui promotor a fost D-sa cu mai bine de patru decenii în urmă. Expunerea este cu adevărat magistrală și cititorul este natural și fără greutate condus la înțelegerea unor teoreme destul de dificile, cum sînt acelea legate de numele lui Tietze, Brouwer, Jordan ori Urîson.

În rezumat, cartea se poate recomanda călduros nu numai debutanților ci și specialiștilor pentru care va constitui cu siguranță o lectură plăcută. Să mai remarcăm mulțimea exercițiilor și problemelor și excelentele condiții grafice în care este editată lucrarea.

*

Rev. gives oven in Romanian language some details concerned with this new excellent book.

Al. Climescu

2. BĂLAN ȘT., IVANOV I., *Din istoria Mecanicii.* Ed. Șt., Buc., 1966, 763 pp.

Ref. indică mai jos unele detalii privitoare la conținutul de o deosebită valoare a volumului *Din Istoria Mecanicii*, recomandînd totodată traducerea lui în limbi de mare circulație. Se așteaptă cu nerăbdare apariția volumelor următoare din această vastă operă.

*

Les auteurs ont eu l'idée bien heureuse de faire présenter à un cercle assez large de spécialistes les traits essentiels du développement historique des principes de la Mécanique rationnelle les plus saillants. Après avoir exposé dans les chapitres bien documentés et bien attrayants les origines de la Mécanique, les progrés de celle-ci lors du Moyen Age, de l'époque de la Renaissance jusqu'à nos jours, on y trouve nombre de détails et l'analyse profonde de l'évolution des idées concernant le levier et le plan incliné, la notion du moment, la loi de composition des forces, la théorie du centre de gravité, le principe des travaux virtuels et d'autres encore. Une riche bibliographie qui accompagne chaque chapitre, de nombreuses figures très soigneusement choisies et exécutés en somme, toute la présentation typographique se joignent harmonieusement à son contenu, tout en justifiant la recommendation du réf, de faire traduire l'oeuvre des auteurs dans d'autres langues d'usage international courant. Qu'il nous soit permis en terminant de paraphraser les mots de M. Louis de Broglie, Prix Nobel, extraits de la préface à *l'Histoire de la Mécanique* par René Dugas: „Que les auteurs soient vivement remerciés de nous avoir donné un ouvrage remarquable qui restera un document de premier ordre pour les enseignants de la Mécanique".

D. Mangeron

3 BĂDĂRĂU E., POPESCU I., *Gaze ionizate. Descărcări electrice în gaze.* Ed. Tehn., Buc., 1965.

Această carte reprezintă continuarea monografiei *Gaze ionizate. Procese fundamentale* publicată de aceiași autori în anul 1963. Lucrarea tratează fenomenele de bază ale trecerii curentului electric prin gaze, prezentînd aspectele clasice cît și probleme de mare actualitate ale fizicii „celei de a patra stări a substanței" — plasma.

Cartea cuprinde trei capitole mari. Primul este consacrat dezvoltării ionizării și străpungerii gazelor. În linii largi aici se studiază conductibilitatea electrică a gazelor, procesele de ionizare, dezvoltarea ionizării în cîmp electric omogen și neomogen precum și străpungerea gazelor la presiuni joase și înalte.

Capitolul 2 al lucrării tratează descărcarea luminiscentă și arcul electric. În această parte, după ce sînt prezentate caracteristicile generale ale acestor descărcări, se studiază detaliat regiunea cea mai importantă pentru menținerea descărcării și anume părțile catodice ale descărcării luminiscente și ale arcului electric.

Capitolul 3, intitulat „Plasma descărcărilor electrice în gaze și aplicațiile ei", este consacrat studiului coloanei pozitive, descărcărilor electrice de mare intensitate și instabilităților în plasmă. Capitolul se termină cu aplicațiile descărcărilor electrice în gaze, atît de importante pentru știința și tehnica modernă. Dintre acestea menționăm: tuburile cu catod rece, generatorii cuantici cu plasmă, convertizorii termoionici, plasmatronul, motorul ionic și propulsia cu plasmă, instalațiile pentru producerea reacțiilor termonucleare ș.a.

Cartea se încheie cu o bogată bibliografie. Ea conține 703 titluri, dintre care multe ale autorilor români (106 titluri), fapt ce scoate în evidență importanța contribuției științei românești la studiul descărcărilor electrice în gaze.

Scrisă metodic și cu claritatea bine cunoscută tuturor lucrărilor conduse de acad. prof. dr. doc. Eugen Bădărău, monografia *Gaze ionizate* se adresează în primul rînd fizicienilor și inginerilor care se specializează în această ramură a fizicii. În măsură egală ea este utilă și tuturor cadrelor didactice de fizicieni, cărora le oferă multe aspecte ale descărcării în gaze original prezentate și care îi pun la curent cu cele mai noi probleme ale fizicii plasmei.

*

Le réf. expose ci-dessus en langue roumaine nombre de détails concernant le nouveau volume *Gas ionisés. Décharges électriques dans les gas*, par E. Bădărău et I. Popescu.

C. Ruscior

4. BASOLO FRED, JOHNSON RONALD C., *Coordination Chemistry*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1964, 180 pp.

Lucrarea intitulată *Chimie Coordinativă*, prin conținutul și modul de abordare a problemelor, se adresează studenților chimiști din anul I, însă poate fi folosită cu succes și de studenții din anii superiori, precum și de chimiștii analiști din laboratoare și uzine.

Materialul tratat este repartizat în 6 capitole și anume : I. Introducere și istoricul dezvoltării ; II. Legătura coordinativă ; III. Stereochimia ; IV. Metode de preparare și reacțiile compușilor coordinativi ; V. Ioni complecși stabili ; VI. Cinetica și mecanismul reacțiilor.

Teoriile legăturilor de valență și în special teoria cîmpului electrostatic cristalin și a orbitalului molecular, teorii care explică formarea, stabilitatea și labilitatea complecșilor metalici sînt tratate amănunțit și foarte explicit. Existența exercițiilor de la sfîrșitul fiecărui capitol contribuie la calitatea didactică a lucrării.

Lucrarea recenzată se bazează pe o bogată bibliografie, repartizată pe capitole, ceea ce ușurează orientarea cititorului în acțiunea de documentare suplimentară.

*

Rev. gives oven in Romanian language some details concerned with this new Benjamin's book.

Julieta Linde

5. BUNESCU V., IONESCU V., SOSEANU R., VASILESCU GH., *Raționalizarea caculelor în proiectarea mașinilor*. Edit. Tehn., Buc., 1965, 496 pp.

Cartea are meritul că reprezintă una dintre primele încercări de sintetizare a calculului unor organe, folosite frecvent în construcția de mașini, pe baza experienței unor institute de proiectări și uzine constructoare de mașini din țară, a experienței I.C.T.C.M. București și a unor institute de proiectări din străinătate.

Lucrarea cuprinde 12 capitole purtînd următoarele titluri : 1. Nomograme generale ; 2. Îmbinări (cu șuruburi, pene, știfturi și caneluri) ; 3. Arbori ; 4. Rulmenți ; 5. Lagăre de alunecare ; 6. Arcuri (elicoidale și cu disc) ; 7. Transmisii prin curele (late și trapezoidale) ; 8. Transmisii prin lanțuri (cu dinți, cu bucșe și role) ; 9. Mecanisme cu clichet ; 10. Angrenaje (cilindrice cu dantură dreaptă exterioară și interioară, cu cremalieră, cu roți conice și melcate) ; 11. Rugozitatea suprafețelor ; 12. Abateri de formă și poziție.

Calculul este prezentat sub forma unor formulare în care relațiile sînt incluse în ordinea normală, însoțite, de la caz la caz, de desenul piesei, de date geometrice și constructive, de tabele ajutătoare și de nomograme. Datorită acestui mod de prezentare, cartea simplifică, în mare măsură, munca de documentare a proiectanților.

Le réf. présente ci-dessus nombre de détails concernant le volume élaboré par V. Bunescu, V. Ionescu, R. Soseanu, Gh. Vasilescu à savoir *Rationalisation des calculs des machines.*

Gh. Iliescu

6. *** *Wind Effects on Building and Structures*. Proceedings of the conference held at the National Physical Laboratory Teddington, Middlesex, on 26th, 27th and 28th June, 1963. Dept. of Sci. a. Industrial Research, National Physical Laboratory, Symposium No. *16*. Vol. I, London, Her Majestr's Stationary Office, 1965, VII + + 430 pp ; vol. II, 431—852 pp.

Volumele de lucrări recenzate aici au drept subiect, pentru prima oară concentrat într-o conferință internațională, problema acțiunii vîntului asupra clădirilor și structurilor. Organizată de către Secția de Aerodinamică a Laboratorului național

de Fizică din Anglia, cu colaborarea Secției de studiu a comportării clădirilor de pe lîngă Institutul de inginerie civilă și Institutul de inginerie structurală, conferința a atras o participare masivă de specialiști, în număr de peste 300, proveniți din mai bine de 20 țări.

În cadrul lucrărilor conferinței s-au prezentat 24 de referate ținute în șase ședințe plenare, consacrate unor subiecte mai restrînse. Textele complete ale conferințelor au fost incluse în volumele recenzate, o dată cu prezentările rezumative ale discuțiilor purtate. Din ansamblul bogat al tematicii discutate, menționăm aici problema determinării experimentale a sarcinilor provocate de vînt în tuneluri aerodinamice, oscilațiile aerodinamice ale podurilor suspendate, oscilațiile liniilor de transmisie produse de vînt, ale turnurilor, catargelor etc.

Actualitatea lucrărilor expuse la conferință merge în paralel cu preocupările și tematica unor cercuri de cercetători și oameni de știință din țara noastră. Ea este în rezonanță, în particular, cu unele preocupări ale catedrelor de Dinamica construcțiilor și de Mecanică de la Institutul politehnic din Iași.

*

The reviewed two volumes are devoted to the research concerning with Wind Effects on Building and Structures, presented at the International Conference, which is believed to be the first held on its subject. It was organised by the English Aerodynamics Division of the National Physical Laboratory with the collaboration of the Building Research Station, the Institution of Civil Engineers, and the Institution of Structural Engineers.

Veronica Radu

R F1812

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC

DIN IAŞI

SERIE NOUĂ

Tomul XII (XVI)

FASC. 3—4

1966

1967 AUG 2 9

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC

DIN IAȘI

SERIE NOUĂ

Tomul XII (XVI)

FASC. 3—4

1966

COLEGIUL DE REDACȚIE

Prof. emerit dr. doc. GH. ALEXA, prof. ing. D. ATANASIU, prof. ing. C. CALISTRU, prof. ing. T. GOLGOȚIU, prof. dr. doc. D. MANGERON (secretar), conf. ing. A. MARCHIȘ, prof. dr. doc. D. RUSU, prof. ing. A. ȘESAN, acad. prof. dr. doc. CRISTOFOR SIMIONESCU (președinte)

COMITETELE DE REDACȚIE ALE SECȚIILOR

MATEMATICI, MECANICĂ TEORETICĂ, FIZICĂ

Prof. dr. doc. Al. Climescu
Prof. Gh. Ciobanu
Prof. dr. doc. V. Petrescu

CHIMIE

Prof. dr. doc. M. Dima
Conf. dr. ing. Gh. Chiriță
Conf. ing. Gh. Botez

ELECTROTEHNICĂ, ELECTRONICĂ

Conf. dr. ing. D. Bărbulescu
Prof. dr. doc. N. Boțan
Conf. dr. ing. L. Sebastian

MECANICĂ TEHNICĂ

Prof. dr. doc. T. Fărcaș
Prof. ing. G. d'Albon
Conf. ing. Cr. Linde

CONSTRUCȚII, HIDROTEHNICĂ

Prof. emerit ing. A. Cernătescu
Conf. ing. Vl. Boghian
Conf. ing. C. Ciobanu
Lector ing. A. Radu

INDUSTRIE UȘOARĂ

Prof. ing. I. Ștefănescu
Conf. ing. V. Copilu
Conf. ing. V. Cociu

REDACȚIA

Prof. dr. doc. D. MANGERON (redactor responsabil)
Lector ing. A. BRAIER (secretar)
Lector ing. H. ROSMAN (secretar)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Tomul XII (XVI), fasc. 3—4 1966

SUMAR

Pag.

REDACŢIONALE XVI

MATEMATICĂ. MECANICĂ TEORETICĂ. FIZICĂ

AL. CLIMESCU, Asupra ecuaţiei funcţionale a distributivităţii unilaterale (I) (franc.; rez. rom.) 1
AL. TERRACINI (Italia), O observaţie privind hipersuprafaţa cubică acoperită de corzile unei suprafeţe Veronese (ital.; rez. rom.) . . 7
C. BENZAKEN (Franţa), Pseudo-latice distributive şi aplicaţii (I) (franc.; rez. rom.) 13
M. PICONE (Italia), D. MANGERON (Republica Socialistă România), Criterii suficiente de extremum referitoare la probleme generale de calculul variaţiilor şi aplicaţii la studiul sistemelor polivibrante (I) (engl.; rez. rom.) 19
I. ENESCU, Asupra caracterului de algebre polinomiale al unor numere hipercomplexe utilizate în studiul unor oscilaţii liniare (rom.; rez. franc.) 23
A. M. KRALL (U.S.A.), Asupra valorilor proprii ale unui operator diferenţial neautoadjunct de ordinul al doilea (engl.; rez. rom.) . . 29
T. G. EZROHI (U.R.S.S.), Asupra proprietăţilor reprezentărilor convexe ale cercului (rusă; rez. rom.) 33
T. A. BURTON (Canada), Perturbaţia ecuaţiilor diferenţiale (engl.; rez. rom.) 39
A. B. VASILIEVA (U.R.S.S.), Metode de cercetare a proceselor oscilatorii, descrise de ecuaţii de tip neutru cu argument întîrziat mic (rusă; rez. rom.) 47
D. D. BAINOV (R. P. Bulgaria), Asupra calculului exponentului caracteristic al unei ecuaţii de ordinul doi (rusă; rez. rom.) . . . 53
V. MURGESCU, Legi normale de distribuţie a erorilor aleatoare (rom.; rez. franc.) 55
A. BRAIER, Reprezentarea simbolică a produselor de funcţii (franc.; rez. rom.) 63
E. KISS, GH. FĂRCAŞ, Rădăcini comune ale unui număr oarecare de ecuaţii algebrice de grad superior (rom.; rez. rusă) . . . 71
I. RUSU, C. HUIU, Suprafeţe topografice în geometria reprezentativă plan-axială (rom.; rez. franc.) 77

Pag.

W. NOWACKI (R. P. Polonă), Funcţiile lui Green pentru un mediu termoelastic (problema cvazi-statică) (engl.; rez. rom.) . . . 83
I. GRINDEI, Tensiuni termice în corpuri cilindrice izotrope plasate într-un cîmp de temperatură discontinuu (rom.; rez. franc.) . . . 93
K. KANTA RAY (India), Notă asupra torsiunii unui cilindru circular compus (engl.; rez. rom.) 99
S. NIANG (Senegal), Ecuaţii generale ale dinamicii analitice a sistemelor constante şi funcţia $\mathcal{R}$ (I) (franc.; rez. rom.) 103
E. TOKACI, P. SIMA, V. OLARU, Asupra ecuaţiilor lui Mangeron relative la sisteme materiale de masă discontinuu variabilă (franc.; rez. rom.) 111
I. STAN, I. POP, Asupra mişcării de rotaţie a unui lichid conductor (engl.; rez. rom.) 117
S. S. SANNIKOV (U.R.S.S.), Semi spinori şi reprezentări cuadriforme ale grupului rotaţiilor (franc.; rez. rom.) 121

CHIMIE

T. GOLGOŢIU, I. ROŞCA, Studiul termogravimetric şi al spectrului de absorbţie în infraroşu al acetaţilor complecşi de fier trivalent (rom.; rez. franc.) 127
B. P. BURÎLEV (U.R.S.S.), Unele proprietăţi termodinamice ale aliajelor pe bază de germaniu şi fier (rusă; rez. rom.) 139
C. LEONTE, C. CALISTRU, M. GĂBURICI, Modele macrocinetice ale procesului de dizolvare-reacţie chimică-formare de germeni, în condiţiile corespunzătoare fabricării acidului fosforic prin procedeul umed (rom.; rez. engl.) 147
S. SAVENCU, A. BORDEA, M. ROZMARIN, F. MATEI, Dozarea amperometrică a ionului SeO_3^{2-} cu acetat de plumb (rom.; rez. rusă) . 157
R. VASILIU, ŞT. IVĂŞCANU, N. CIUREANU, Studiul porozităţii depozitelor de nichel pe fier (rom.; rez. engl.) 161
R. Z. TUDOSE, T. SĂVEANU, GH. CRISTIAN, Procese de transfer între lichide nemiscibile (I) (rom.; rez. rusă) 167
I. MATEI, E. COMANIŢĂ, Obţinerea unor derivaţi ai 5-mercapto-1,2,4-triazolului (II) (rom.; rez. franc.) 175
I. MATEI, S. VASILIU, M. PĂSTRĂVANU, Condensarea 4,5-dinitro-acenaftenchinonei cu dimetil şi dietilanilină, produşi de reducere şi coloranţi (rom.; rez. franc.) 187
M. MARINESCU, E. MATEI, Cercetări privind cinetica uscării pieilor (II) (rom.; rez. franc.) 193

ELECTROTEHNICĂ. ELECTRONICĂ

E. LUCA, O. SCUTARU, A. VASILIU, I. LUCA, Influenţa ultrasunetelor asupra proprietăţilor dielectrice ale unor ferite (I) (rom.; rez. franc.) 205
N. V. BOŢAN, L. CANTEMIR, B. PONOMAREV, E. BALABAN, Caracteristici şi posibilităţi de utilizare ale unui amplificator magnetic trifazat cu miez central unic (rom.; rez. rusă) 211
V. PRISĂCARU, C. HUŢANU, Cu privire la amplasamentul optim din punct de vedere energetic al aparatelor de iluminat simetrice şi punctiforme (rom.; rez. franc.) 217
L. PREDA, Analiza indicaţiilor unui wattmetru (contor) monofazat montat într-o reţea trifazată cu trei conductoare, în regim dezechilibrat (simplu simetric), la modificarea nesimetriei reţelei (rom.; rez. engl.) 225

Pag.

P. POGÎNGEANU, Comportarea punții Owen, studiată cu ajutorul transformării conforme (rom.; rez. franc.) 233
K. ARABAGIAN (R. P. Bulgaria), Considerații asupra influenței tensiunii de înaltă frecvență aplicate joncțiunii PN în modulatoarele cu elemente semiconductoare (rom.; rez. engl.) 239
V. G. DANKO (U.R.S.S.), Asupra alegerii metodei de calcul a cîmpului termic în pachetul de tole (rusă; rez. rom.) 245
A. NICOLAIDE, Cupluri parazite și pierderi suplimentare în sarcină la mașinile asincrone (rom.; rez. franc.) 251
I. BERGMAN, P. LEONTE, Asupra posibilității funcționării unui motor trifazat serie cu colector cu dublu rînd de perii ca motor derivație (rom.; rez. germ.) 263
AL. POEATĂ, L. PREDA, A. DANIȘ, Daunele provocate de întreruperea alimentării cu energie electrică la fabricarea produselor din mase plastice (rom.; rez. rusă) 277
H. ROSMAN, Determinarea experimentală a domeniilor de existență ale coeficienților de transfer ai unui cuadripol diport liniar, pasiv și reciproc 289

MECANICĂ TEHNICĂ

D. MANGERON, GH. SILAȘ, L. BRÎNDEU, A. HEGEDÜS, C. ENĂCHESCU, Dinamica sistemelor vibropercutante (I) (rom.; rez. ital.) . 297
V. KOMKOV (U.S.A.), O metodă de analiză și sinteză a sistemelor mecanice utilizînd matrice (engl.; rez. rom.) 307
L. CIOBANU, F. POTERAȘ, A. OPREA, M. BERCOVICI, SP. DELEANU, Aplicarea unor clase de soluții ale ecuațiilor polivibrante în studiul dinamicii mecanismelor și mașinilor (I) (rom.; rez. engl.) . 315
GH. MUNTEANU, N. ORLANDEA, A. ORĂNESCU, E. ORĂNESCU, GH. DELIU, I. GOIA, B. BĂLAN, Algoritmul de formare a curbelor de înfășurare liniară aparținînd mecanismelor plane complexe folosind metoda tangențială și aplicații (I) (engl.; rez. rom.) . . 319
V. I. ARABAGI (U.R.S.S.), Asupra regimului efectiv de frînare (rusă; rez. rom.) 323
N. IRIMICIUC, SP. DELEANU, E. RUSU, Determinări grafice de momente de inerție mecanice la corpuri omogene cilindrice drepte, cu secțiuni transversale oarecari (rom.; rez. franc.) 325
C. CIOBANU, M. RĂDULESCU, O metodă grafică pentru determinarea coeficientului de debit al deversoarelor de măsură (rom.; rez. franc.) 331
N. N. KOCINA (U.R.S.S.), Asupra unor probleme de mișcare a gazului nestabil în cazul simetriei cilindrice și sferice (rusă; rez. rom.) . 337
D. HORBANIUC, Deducerea ecuației axei deformate la grinzi cu secțiune variabilă în trepte și aplicarea ei la grinzi continue de acest fel (germ.; rez. rom.) 347
A. RĂILEANU, D. NICOLESCU, Determinarea constantelor și exponenților din relațiile momentului de torsiune și a forței axiale la burghierea oțelurilor românești grupa oțel crom pentru rulmenți, STAS Nr. 1456—61 (rom.; rez. franc.) 355
V. P. SERDIUK (U.R.S.S.), Asupra determinării sarcinilor în transmisiile cu lanț (rusă; rez. rom.) 357
A. NANU, V. POPOVICI, AL. NICHICI, Cercetări teoretice și experimentale asupra debitării metalelor prin procedeul electroeroziv anodomecanic (rom.; rez. rusă) 363
GH. IONESCU, D. COSTESCU, L. SCOROBEȚIU, Normalizarea cu flacără gaz metan a oțelurilor sudate de tip Cr-Mo-V (rom.; rez. rusă) . 379

Pag.

CONSTRUCȚII. HIDROTEHNICĂ

N. TUTOȘ, A. VULPE, Rezolvarea sistemelor de *n* ecuații algebrice liniare cu *n* necunoscute prin utilizarea „operatorului de eliminare" (rom.; rez. engl.) 387

C. AMARIEI, N. ORLOVSCHI, E. NEACȘU, A. VULPE, L. TANASACHI, Asupra formării articulațiilor plastice la cadre metalice (rom.; rez. franc.) 393

N. UNGUREANU, Simplificări în rezolvarea grinzilor pe mediu elastic, cu moment de inerție variabil în trepte (rom.; rez. franc.) . . 399

V. TARASOV, C. APREUTESEI, GH. GAVRILOV, Contribuții la determinarea coordonatelor punctelor topo-geodezice inaccesibile (rom.; rez. franc.) 405

H. MATZKE (R.D.G.), Aplicarea mașinilor electronice de calcul în construcții (germ.; rez. rom.) 409

A. MIHUL, D. ZĂICESCU, A. ERDELYI, Sisteme noi de panouri precomprimate după două direcții cu armătura dispusă după trasee poligonale (rom.; rez. franc.) 421

A. CERNĂTESCU, C. MARTINIUC, T. SILION, V. CIUBOTARU, C. MIHĂILESCU, Contribuții la studiul stabilității versanților din raza orașului Iași (rom.; rez. germ.) 431

AL. CHELĂRESCU, GH. BÎGU, E. PĂUNEL, O. NICHITA, GH. BOȚOMAN, Rocile calcaroase din lungul rîului Prut — sursă de materie primă pentru fabricarea cimentului (rom.; rez. franc.) . . 437

C. BRANIȘTE, E. PĂUNEL, GH. BÎGU, O. NICHITA, AL. CHELĂRESCU, A. BORDEA, M. ROZMARIN, GH. MOROI, Studiul rocilor calcaroase din masivul Rarău în vederea valorificării lor ca materiale pentru construcții (rom.; rez. rusă) 445

A. N. GRACIAN, P. P. GAIDJUROV, (U.R.S.S.), Proprietățile clinkerului de ciment Portland în funcție de compoziția mediului gazos la ardere (rusă; rez. rom.) 451

L. GUȘTIUC, Clasificarea cernoziomurilor din Moldova (rom.; rez. rusă) 455

V. ZBEGAN, M. TELEGUȚ, V. MĂEREAN, C. JURA, M. GIURCONIU, GH. CREȚU, I. MIREL, Cercetări de laborator și aplicarea studiului de tratare a apei subterane feruginoase (rom.; rez. rusă) . 461

V. BLIDARU, C. CISMARU, A. LEO MIZA, Lucrări de irigații în zone cu cantități mari de precipitații, executate cu posibilități locale (rom.; rez. rusă) 467

R. MANDACHE, A. DIMA, Unele aspecte ale organizării raționale a transporturilor pe șantierele de hidrotehnică agricolă (rom.; rez. rusă) . 479

INDUSTRIE UȘOARĂ

A. TRIANDAF, M. BERCOVICI, V. STOENESCU, Rezolvarea unei probleme de producție din întreprinderile textile (rom.; rez. franc.) . 483

M. ZEIDMAN, Caracteristicile benzilor aleatoare formate din amestecuri de fibre (engl.; rez. rom.) 489

B. D. SEMAK, G. Z. BONDEA, (U.R.S.S.), Studiul influenței compoziției fibrelor și a finisării unor țesături asupra uzurii lor la spălat (rusă; rez. rom.) 503

F. VĂLU, I. LUCA, Intensificarea procesului de vopsire prin cîmpuri electrice de înaltă frecvență și prin cîmpuri magnetice (rom.; rez. engl.) 507

A. CHIRIȚĂ, GH. CHIRIȚĂ, Studii privind obținerea pieilor pentru fețe de încălțăminte cu termostabilitate ridicată (rom.; rez. franc.) . 513

KIM ZONG WAN (R. D. Coreeană), Asupra formei Sakai, unul din patrimoniile culturii naționale coreene (franc.; rez. rom.) . . 521

RECENZII 527

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Том XII (XVI), вып. 3—4 1966 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

ОТ РЕДАКЦИИ XV

МАТЕМАТИКА. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. ФИЗИКА

АЛ. КЛИМЕСКУ, О функциональном уравнении односторонного распределения (франц.; рез. рум.) 1
АЛ. ТЕРРАЧИНИ (Италия), Заметка о кубической гиперповерхности покрытой хордами поверхности Веронезе (итал.; рез. рум.) . . 7
К. БЕНЗАКЕН (Франция), Распределительные псевдо-структуры и применения (I) (франц.; рез. рум.) 13
М. ПИКОНЕ (Италия), Д. МАНЖЕРОН (С. Р. Румыния), Теоремы достаточности в общих вариационных задачах и применения в исследовании проблематики поливолновых граничных задач (I) (англ.; рез. рум.) 19
И. ЕНЕСКУ, О характере полиномиальных алгебр некоторых гиперкомплексных чисел используемых в исследовании линейных колебаний (рум.; рез. франц.) 23
А. М. КРАЛЛ (США), О характеристических числах одного сингулярного несамосопряженного уравнения второго порядка (англ.; рез. рум.) . 29
Т. Г. ЭЗРОХИ (СССР), О некоторых свойствах выпуклых отображений круга (русск.; рез. рум.) 33
Т. А. БУРТОН (Канада), Возмущения дифференциальных уравнений (англ.; рез. рум.) 39
А. Б. ВАСИЛЬЕВА (СССР), Методы исследования колебательных процессов, описываемых уравнениями нейтрального типа с малым запаздыванием (русск.; рез. рум.) 47
Д. Д. БАЙНОВ (Н. Р. Болгария), К вычислению характеристических показателей для одного уравнения второго порядка (русск.; рез. рум.) 53
В. МУРДЖЕСКУ, Нормальные законы распределения случайных ошибок (рум.; рез. франц.) 55
А. БРАЙЕР, Символическое представление произведений функций (франц.; рез. рум.) 63
Е. КИСС, Г. ФЭРКАШ, Общие корни произвольного числа алгебраических уравнений высшего порядка (рум.; рез. русск.) 71
И. РУСУ, К. ГУИУ, Топографические поверхности в плоско-аксиальной изобразительной геометрии (рум.; рез. франц.) 77

Стр.

В. НОВАЦКИ (Н. Р. Польша), Функции Грина для термоэластичной среды (квазистатическая задача) (англ.; рез. рум.) 83
И. ГРИНДЕЙ, Тепловые напряжения в цилиндрических изотропных телах, расположенных в поле с прерывной температурой (рум.; рез. франц.) 93
К. КАНТА РАЙ (Индия), О кручении сложного кругового цилиндра (англ.; рез. рум.) 99
С. НИАНГ (Сенегал), Общие уравнения аналитической динамики для постоянных систем и функция $\mathcal{R}$ (I). 103
Е. ТОКАЧ, Р. СИМА, В. ОЛАРУ, Уравнения аналитической механики Манжерона для материальных систем с разрывно-изменяющейся массой (франц.; рез. рум.) 111
И. СТАН, И. ПОП, О вращении электропроводимой жидкости (англ.; рез. рум.) 117
С. С. САННИКОВ (СССР), Представления групп вращений полуспинорами и квадриформами (франц.; рез. рум.) 121

ХИМИЯ

Т. ГОЛГОЦИУ, И. РОШКА, Инфракрасное термогравиметрическое и спектрографическое исследование сложных ацетатов тривалентного железа (рум.; рез. франц.) 127
Б. П. БУРЫЛЕВ (СССР), Некоторые термодинамические свойства сплавов на основе германия и железа (русск.; рез. рум.) . . . 139
К. ЛЕОНТЕ, К. КАЛИСТРУ, М. ГЭБУРИЧ, Макрокинетические модели процесса растворимости-химической реакции-образования зародышей, в соответствующих условиях производства мокрым способом фосфорной кислоты (рум.; рез. англ.) 147
С. САВЕНКУ, А. БОРДЯ, Г. МОРОЙ, М. РОЗМАРИН, Ф. МАТЕЙ, Амперметрическое определение иона SeO_3^{2-} ацетатом свинца (рум.; рез. русск.) 157
Р. ВАСИЛИУ, Ш. ИВЭШКАНУ, Н. ЧУРЯНУ, Изучение пористости осадков никеля на железе (рум.; рез. англ.) 161
Р. З. ТУДОСЕ, Т. СЭВЯНУ, Г. КРИСТИАН, Передаточные процессы между несмешивающимися жидкостями (I) (рум.; рез. русск.). . 167
И. МАТЕЙ, Е. КОМАНИЦЭ, Получение производных 5-меркапто-1, 2, 4-триазола (II) (рум.; рез. франц.) 175
И. МАТЕЙ, С. ВАСИЛИУ, М. ПЭСТРЭВАНУ, Конденсация 4,5-динитроаценафтенхинона с диметил и диэтиланилином, продукты их восстановления и красители (рум.; рез. франц.) 187
М. МАРИНЕСКУ, Е. МАТЕЙ, К исследованию кинетики сушки кож (II) (рум.; рез. франц.) 193

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА. ЭЛЕКТРОНИКА

Е. ЛУКА, О. СКУТАРУ, А. ВАСИЛИУ, И. ЛУКА, Влияние ультразвуков на диэлектрические свойства некоторых ферритов (I) (рум.; рез. франц.) 205
Н. В. БОЦАН, Л. КАНТЕМИР, Б. ПОНОМАРЕВ, Е. БАЛАБАН, Характеристики и возможности использования трехфазного магнитного усилителя с одним центральным сердечником (рум.; рез. русск.) . . 211
В. ПРИСЭКАРУ, К. ГУЦАНУ, К оптимальному расположению симметричных и точечных светильников с энергетической точки зрения (рум.; рез. франц.) 217
Л. ПРЕДА, Анализ показаний монофазного ваттметра монтированного в трехфазную сеть с тремя проводниками при неустановившемся режиме (просто-симметричном) с точки зрения изменений несимметричности сети (рум.; рез. англ.) 225

Стр.

П. ПОГЫНДЖЯНУ, Поведение моста Овена рассматриваемое при помощи конформного отображения (рум.; рез. франц.) 233
К. АРАБАДЖЯН (Н. Р. Болгария), К применению исследований влияния напряжений высоковольтных частот на PN связь в модуляторах с полупроводниковыми элементами (рум.; рез. англ.) . . . 239
В. Г. ДАНЬКО (СССР), К выбору метода расчета температурного поля в шихтованном пакете (русск.; рез. рум.) 245
А. НИКОЛАИДЕ, Паразитные пары и дополнительные потери в асинхронных машинах в действии (рум.; рез. франц.) 251
И. БЕРГМАН, П. ЛЕОНТЕ, О возможности преобразования трехфазного сериесного коллекторного двигателя с двойным рядом щеток — в шунтовый (рум.; рез. нем.) 263
А. ПОЯТЭ, Л. ПРЕДА, А. ДАНИЦ, Ущербы вызванные перерывом электроснабжения при переработке пластмассы (рум.; рез. русск.) . . 277
Г. РОСМАН, Экеперментальное определение областей существования коэффициентов передачи взаимного пассивного линейного четырехполюсника (рум.; рез. франц.). 289

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Д. МАНЖЕРОН, Г. СИЛАШ, Л. БРЫНДЕУ, А. ХЕГЕДЮШ, К. ЕНЭКЕСКУ, Динамика виброударных систем (I) (рум.; рез. итал.) . 297
В. КОМКОВ (США), Метод анализа и синтеза механических систем при помощи матричного исчисления (англ.; рез. рум.) . . . 307
Л. ЧОБАНУ, Ф. ПОТЕРАШ, А. ОПРЯ, М. БЕРКОВИЧ, С. ДЕЛЯНУ, Применение некоторых новых классов решений поливолновы уравнений в исследовании машин и механизмов (I) (рум.; рез. англ.) . . 315
Г. МУНТЯНУ, Н. ОРЛАНДЯ, А. ОРЭНЕСКУ, Г. ДЕЛИУ, И. ГОЯ, Б. БЭЛАН, Алгорифм образования тангенциальным методом линейно-огибающих шатунных кривых плоских сложных механизмов с несколькими ведущими звеньями и применения (I) (англ.; рез. рум.) . . 319
В. И. АРАБАДЖИ (СССР), Об эффективном режиме торможения (русск.; рез. рум.) 323
Н. ИРИМИЧУК, С. ДЕЛЯНУ, Е. РУСУ, Графическое определение моментов механической инерции в прямых цилиндрических однородных телах, с любыми поперечными сечениями (рум.; рез. франц.) . . . 325
К. ЧОБАНУ, М. РЭДУЛЕСКУ, Графический метод определения коэффициента дебита измерительных диверсоров (рум.; рез. франц.) . 331
Н. Н. КОЧИНА (СССР), О некоторых задачах неустановившегося движения газа в случае цилиндрической и сферической симметрии (русск.; рез. рум.) 337
Д. ГОРБАНЮК, Выведение уравнения расчета упругой линии балки ступенчато-переменного сечения и использование его и для многопролетной такой-же балки (нем.; рез. рум.) 347
А. РЭИЛЯНУ, Д. НИКОЛЕСКУ, Определение параметров главной силы резания в процессе продольного строгания румынских сталей (рум.; рез. франц.) 355
В. П. СЕРДЮК (СССР), К вопросу определения динамических нагрузок на приводные цепи (русск.; рез. рум.) 357
А. НАНУ, В. ПОПОВИЧ, А. НИКИЧ, Теоретические и экеспериментальные исследования срезки металлов анодомеханическим электроэрозивным способом (рум.; рез. русск.) 363
Г. ИОНЕСКУ, Д. КОСТЕСКУ, Л. СКОРОБЕЦИУ, Нормализация газовым пламенем сварных сталей, типа Cr-Mo-V (рум.; рез. русск.) . . 379

Стр.

СТРОИТЕЛЬСТВО. ГИДРОТЕХНИКА

Н. ТУТОШ, А. ВУЛПЕ, Решение систем n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными способом использования „оператора исключения“ (рум.; рез. англ.) 387

К. АМАРИЕЙ, Н. ОРЛОВСКИЙ, Е. НЯКШУ, А. ВУЛПЕ, Л. ТАНАСАКИ, Образование гибких соединений в металлических рамах (рум.; рез. франц.) 393

Н. УНГУРЯНУ, Упрощение решения задачи балки на упругом основании со ступенчато-переменным моментом инерции (рум.; рез. франц.) . 399

В. ТАРАСОВ, К. АПРЕУТЕСЕЙ, Г. ГАВРИЛОВ, К определению координат недоступных геодезических точек (рум.; рез. франц.) . . . 405

Х. МАТЦКЕ (ГДР), Применение ЭВМ в строительстве (нем.; рез. рум.) . 409

А. МИХУЛ, Д. ЗЭИЧЕСКУ, А. ЕРДЕЛИ, Новые системы двухсторонне предварительнонапряженных панелей с полигональным расположением арматуры (рум ; рез. франц.) 421

А. ЧЕРНЭТЕСКУ, К. МАРТИНЮК, Т. СИЛИОН, В. ЧУБОТАРУ, К. МИХЭЙЛЕСКУ, К исследованию укрепления склонов в окрестности города Яссы (рум.; рез. франц.) 431

А. КЕЛЭРЕСКУ, Г. БЫГУ, Е. ПЭУНЕЛ, О. НИКИТА, Г. БОЦОМАН, Известковые залежи по реке Пруту — годный материал для производства цемента (рум.; рез. франц.) 437

К. БРАНИШТЕ, Е. ПЭУНЕЛ, Г. БЫГУ, О. НИКИТА, А. КЕЛЭРЕСКУ, А. БОРДЯ, М. РОЗМАРИН, Г. МОРОЙ, Исследование известковых залежей массива Рарэу в виду использования их как строительный материал (рум.; рез. русск.) 445

А. Н. ГРАЧЬЯН, П. П. ГАЙДЖУРОВ, (СССР), Свойства клинкера белого портландцемента в зависимости от состава газовой среды при обжиге (русск.; рез. рум.) 451

Л. ГУШТЮК, Классификация черноземов Молдовы (рум.; рез. русск.) . 455

В. ЗБЕГАН, М. ТЕЛЕГУЦ, В. МЭЕРЯН, К. ЖУРА, М. ДЖУРКОНИУ, Г. КРЕЦУ, И. МИРЕЛ, Лабораторные испытания и применение исследования по обработке подземной железистой воды (рум.; рез. русск.) 461

В. БЛИДАРУ, К. ЧИСМАРУ, А. ЛЕО МИЗА, Орошение в зонах избыточного увлажнения осуществляемое местными средствами (рум.; рез. русск.) 467

Р. МАНДАКЭ, А. ДИМА, Некоторые аспекты рациональной организации транспорта на гидротехнических строительных площадках в сельском хозяйстве (рум.; рез. русск.) 479

ЛЕГКАЯ ПРОМЫШЛЕННОРТЬ

А. ТРИАНДАФ, М. БЕРКОВИЧ, В. СТОЕНЕСКУ, Решение производственной задачи в текстильной промышленности (рум.; рез. франц.) . 483

М. ЗЕЙДМАН, Характеристики случайных полос образованных из смеси волокон (англ.; рез. рум.) 489

Б. Д. СЕМАК, Г. З. БОНДЯ, (СССР), Исследование влияния волокнистого состава и отделки некоторых платьевых тканей на их износ от стирок (русск.; рез. франц.) 503

Ф. ВЭЛУ, И. ЛУКА, Усиление процесса крашения способом электрического поля высокого напряжения и магнитным полем (рум.; рез. англ.) 507

А. КИРИЦЭ, Г. КИРИЦЭ, Получение кожи для верха обуви высокой термоустойчивости (рум.; рез. франц.) 513

КИМ ЗОНГ ВАН (Корейская Д. Р.), Форма Сакай одно из приобретений корейской национальной культуры (франц.; рез. рум.) . . 521

РЕЦЕНЗИИ 527

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Vol. XII (XVI), fasc. 3—4 1966

CONTENTS

Pag.

EDITORSHIP'S ANNOUNCEMENTS XVI

MATHEMATICS. THEORETICAL MECHANICS. PHYSICS

AL. CLIMESCU, Sur l'équation fonctionnelle de la distributivité unilatérale (II) (French; Romanian summary) 1
AL. TERRACINI (Italy), Una osservazione sull'ipersuperficie cubica ricoperta dalle corde di una superficie di Veronese (Italian, Romanian summary) 7
C. BENZAKEN (France), Pseudo-treillis distributifs et Applications (I) (French; Romanian summary) 13
M. PICONE (Italy), D. MANGERON (Romania), Sufficiency Theorems concerned with General Variational Problems and Applications to Polyvibrating Boundary Value Problems (I) (English; Romanian summary) 19
I. ENESCU, Sur le caractère polynômiale de certains nombres hypercomplexes utilisés dans l'étude des oscillations linéaires (Romanian; French summary) 23
A. M. KRALL (U.S.A.), On the Eigenvalues of a Singular Nonself-Adjoint Differential Operator of Second Order (English; Romanian summary) 29
T. G. EZROHI (U.S.S.R.), Some Properties Concerned with Cercle-s Convex Representations (Russian; Romanian summary) . . . 33
T. A. BURTON (Canada), Perturbation of Differential Equations (English; Romanian summary) 39
A. B. VASILIEVA (U.S.S.R.), Studies Concerned with Oscillating Processes Described by Neutral Type Equations with Retarded Argument (Russian; Romanian summary) 47
D. D. BAINOV (Bulgaria), Characteristic Exponent Calculus Concerned with one Second Order Differential Equation (Russian; Romanian summary) 53
V. MURGESCU, Lois normales de distribution des erreurs aléatoires (Romanian; French summary) 55
A. BRAIER, Représentation symbolique des produits de fonctions (French; Romanian summary) 63

Pag.

E. KISS, GH. FĂRCAŞ, Racines communes d'un nombre quelconque d'équations algébriques d'ordre supérieur (Romanian ; Russian summary) 71
I. RUSU, C. HUIU, Surfaces topographyques dans la géometrie représentative plane-axiale (Romanian ; French summary) . . . 77
W. NOWACKI (Poland), Green's Functions for an Thermoelastic Medium (Quasi-Static Problem) (English ; Romanian summary) . . 83
I. GRINDEI, Tensions thermiques dans des corps cylindriques isotropes situés dans un champs de température discontinu (Romanian ; French summary) 93
K. KANTA RAY (India), Note on the Torsion of a Composite Circular Cylinder (English ; Romanian summary) 99
S. NIANG (Sénégal), Equations générales de dynamique analytique des systèmes constants et fonction $\mathcal{R}$ (I) (French ; Romanian summary) . 103
E. TOKACI, P. SIMA, V. OLARU, Sur les équations de Mangeron pour les systèmes matériels de masse discontinument variable (French ; Romanian summary) 111
I. STAN, I. POP, Concerning the Rotation of an Electrically Conducting Liquid (English ; Romanian summary) 117
S. S. SANNICOV (U.S.S.R.), Groups of Rotations Representations by Semi-Spinors and Quadriforms (French ; Romanian summary) . . 121

CHEMISTRY

T. GOLGOŢIU, I. ROŞCA, L'étude thermogravimétrique et spectrographique de l'absorbtion dans l'infrarouge des acétates complexes de fer trivalent (Romanian ; French summary) 127
B. P. BURÎLEV (U.S.S.R.), Propriétés thermodinamiques des alliages à base de germanium et de fer (Russian ; Romanian summary) . 139
C. LEONTE, C. CALISTRU, M. GĂBURICI, Macrokinetic Models for the Process of Dissolution-Chemical Reaction-Forming of Germs in the System of Producing of Phosphoric Acid by Humid Process (Romanian ; English summary) 147
S. SAVENCU, A. BORDEA, GH. MOROI, M. ROZMARIN, F. MATEI, Determinazione ampermetrica dell'ione SeO_3^{2-} tramite l'acetata di piombo (Romanian ; Russian summary) 157
R. VASILIU, ŞT. IVĂŞCANU, N. CIUREANU, The Porosity Study of the Nichel Coatings on Iron (Romanian ; English summary) . . 161
R. Z. TUDOSE, T. SĂVEANU, GH. CRISTIAN, Processus de transfert entre des liquides non-miscibles (Romanian ; Russian summary) . 167
I. MATEI, E. COMANIŢĂ, Sur la préparation de certains dérivés du 5-mercapto-1,2,4-triazole (Romanian ; French summary) . . 175
I. MATEI, S. VASILIU, M. PĂSTRĂVANU, La condensation de 4,5-dinitroacénaphtenquinone avec diméthyl et diéthylaniline, produits de réduction et colorants (Romanian ; French summary) . . . 187
M. MARINESCU, E. MATEI, Etudes sur la cinétique du séchage des cuirs (II) (Romanian ; French summary) 193

ELECTRICAL ENGINEERING. ELECTRONICS

E. LUCA, O. SCUTARU, A. VASILIU, I. LUCA, L'influence des ultrasons sur les propriétés diélectriques de certaines ferrites (Romanian ; French summary) 205
N. V. BOŢAN, L. CANTEMIR, B. PONOMAREV, E. BALABAN, Caractéristiques et possibilités d'utilisation d'un amplificateur magnétique triphasé avec noyau central (Romanian ; Russian summary) . . 211

Pag.

V. PRISĂCARU, C. HUȚANU, Problèmes touchant l'emplassement optime du point de vue énergétique des appareils d'éclairage symétriques et pointiformes (Romanian; French summary) . . 217
L. PREDA, The Analysis of the Indications of a Single Phased Wattmeter Mounted in a Network with three Conductors, in an Unbalanced Regim (Simplly Symetrical) at the Modification of the Network's Asymetry (Romanian; English summary) . . . 225
P. POGÎNGEANU, L'étude à l'aide de la transformation conforme du comportement du pont Owen (Romanian; French summary) . 233
K. ARABAGIAN (Bulgaria), Considerations on the Influence of the High-Frequency Voltage Applied to the PN Junction in the Modulator Built up with Semiconductor Elements (Romanian; English summary) 239
V. G. DANKO (U.S.S.R.), A propos du choix de la méthode de calcul du champ thermique dans le paquet de tôles (Russian; Romanian summary) 245
A. NICOLAIDE, Couples parasites et pertes supplémentaires en charge dans les machines asynchrones (Rumanian; French summary) . 251
I. BERGMAN, P. LEONTE, Über die Arbeitsmöglichkeit als Nebenschlussmotor der Dreiphasenreihenchlussmotoren mit doppelte Bürstensatz (Romanian; German summary) 263
AL. POEATA, L. PREDA, A. DANIȘ, Pertes produites par l'interruption du courant électrique dans la fabrication des outils de masses plastiques (Rumanian; Russian summary) 277
H. ROSMAN, Détermination expérimentale des domaines d'existence des coefficients de transfert d'un quadripôle diporte linéaire, passif et réciproque (Romanian; French summary) 289

MECHANICAL ENGINEERING

D. MANGERON, GH. SILAȘ, L. BRÎNDEU, A. HEGEDÜS, C. ENĂCHESCU, Dinamica dei sistemi vibropercuttanti (I) (Romanian; Italian summary) 297
V. KOMKOV (U.S.A.), A method of Analysis or Synthesis of Mechanical Systems, using „Vertex" Matrices (Engfish; Romanian summary) . 307
L. CIOBANU, F. POTERAȘ, A. OPREA, M. BERCOVICI, SP. DELEANU, Polyvibrating Equations Solutions Applied in the Dynamics of Mechanisms and Machines (I) (Romanian English summary) . . 315
GH. MUNTEANU, A. ORĂNESCU, E. ORĂNESCU, GH. DELIU, I. GOIA, B. BĂLAN, Linear Enveloping Curves Belonging to Plane Mechanisms with more Motive Elements Equations Formation Algorithm Using the Tangential Method and Applications (I) (English; Romanian summary) 319
V. I. ARABADJI (U.S.S.R.), On the Effective Freigning Regime (Russian; Romanian summary) 323
N. IRIMICIUC, SP. DELEANU, E. RUSU, Construction graphique des moments d'inertie mécaniques des corps homogènes cylindriques droits ayant des sections transversales arbitraires (Romanian; French summary) 325
C. CIOBANU, M. RĂDULESCU, Méthode graphique pour la détermination du débit des déversoirs de mesure (Romanian; French summary) 331
N. N. COCHINA, (U.S.S.R.), Some Problems Concerned with a Non Steady Gaz Motion in the Case of Cylindrical and Spherical Symmetry (Russian; Romanian summary) 337

Pag.

D. HORBANIUC, Ableitung der Gleichung der Biegungslinie bei Trägern mit veränderlichem Querschnitt in Stufen und ihre Anwendung bei Durchlaufträgern mit demselben Querschnitt (German ; Romanian summary) 347

A. RĂILEANU, D. NICOLESCU, Détermination des paramètres des forces de coupe et des moments concernant le perçage des aciers roumains standardisés, STAS 1456—61 (Romanian ; French summary) . 355

V. P. SERDIUK (U.S.S.R.), Sur la détermination des efforts dans les transmissions à chaîne (Russian ; Romanian summary) 357

A. NANU, V. POPOVICI, Al. NICHICI, Recherches théoriques et expérimentales sur le débitage des métaux par le procédé électroérosif anodomécanique (Romanian ; Russian summary) 363

GH. IONESCU, D. COSTESCU, L. SCOROBEȚIU, Normalisation par une flamme à gaz des acièrs soudés Cr-Mo-V (Romanian ; Russian summary) 379

CONSTRUCTIONS. HYDROTECHNICS

N. TUTOȘ, A. VULPE, The Solving of *n* Linear Algebraic Equations with *n* Unknowns by Means of the „Eliminating Operator" (Romanian ; English summary) 387

C. AMARIEI, N. ORLOVSCHI, E. NEACȘU, A. VULPE, L. TANASACHI, Sur l'apparition des rotules plastiques des ossatures métalliques (Romanian ; French summary) 393

N. UNGUREANU, Simplifications dans la résolution des poutres sur un milieu élastique avec moment d'inertie variable en échelles (Romanian ; French summary) 399

V. TARASOV, C. APREUTESEI, GH. GAVRILOV, Sur la détermination des coordonnées des points géodésiques inaccessibles (Romanian ; Russian summary) 405

H. MATZKE (D.D.R.), Anwendungen elektronischer Rechenautomaten in Bauwessen (German ; Romanian summary) 409

A. MIHUL, D. ZĂICESCU, A. ERDELYI, Des nouveaux systèmes de panneaux en béton armé précontraint d'après deux directions avec armature disposée selon des tracés polygonaux (Romanian ; French summary) 421

A. CERNĂTESCU, C. MARTINIUC, T. SILION, V. CIUBOTARU, C. MIHĂILESCU, Beitrag zum Studium der Stabilität von natürlichen Böschungen im Umfang der Stadt Iași (Romanian ; German summary) 431

AL. CHELARESCU, GH. BIGU, E. PĂUNEL, O. NICHITA, GH. BOTOMAN, Roches calcaires de la vallée du Prouth, source de matière première pour la fabrication du ciment (Romanian ; French summary) 137

C. BRANIȘTE, E. PĂUNEL, GH. BIGU, O. NICHITA, AL. CHELARESCU, A. BORDEA, M. ROZMARIN, GH. MOROI, Étude des roches calcaires du massif de Rarău en vue de leur valorisation comme matériaux de construction (Romanian ; Russian summary) . . 445

A. N. GRACIAN, P. P. GAIDJUROV, (U.S.S.R.), Propriétés du clinker pour ciment Portland en fonction de la composition du milieu gazeux au brulement (Russian ; Romanian summary) . . 451

L. GUȘTIUC, La classification des tchernosioms de la Moldavie (Romanian ; Russian summary) 455

Pag.

V. ZBEGAN, M. TELEGUȚ, V. MĂEREAN, C. JURA, M. GIURCONIU, GH. CREȚU, I. MIREL, Recherches de laboratoire et application de l'étude du traitement des eaux souterraines ferrugineuses (Romanian ; Russian summary) 461

V. BLIDARU, C. CISMARU, A. LEO MIZA, Travaux d'irrigations dans des zones riches en précipitations, réalisés avec des possibilités locales (Romanian ; Russian summary) 467

R. MANDACHE, A. DIMA, Aspects concernant l'organisation rationelle des transports sur les chantiers d'hydrotechnique agricole (Romanian ; Russian summary) 479

LIGHT INDUSTRY ENGINEERING

A. TRIANDAF, M. BERCOVICI, V. STOENESCU, La résolution d'un problème de production concernant les entreprises textiles (Romanian ; French summary) 483

M. ZEIDMAN, The Characteristics of the Random Slivers Composed of Fibre Blends (English ; Romanian summary) 489

B. D. SEMAK, G. Z. BONDEA, (U.S.S.R.), The Influence of the Fibres Structure and Crease on the Wear Subjected to Repeated Washing (Russian ; Romanian summary) 503

F. VĂLU, I. LUCA, The Intensification of the Dyeing Process Through Electric Fields of High Frequency and through Magnetic Fields (Romanian ; English summary) 507

A. CHIRIȚĂ, GH. CHIRIȚĂ, Études concernant l'obtention des cuires à dessus, résistants à la température de 140°C, utilisés dans la fabrication des chaussures vulcanisées (Romanian ; French summary) 513

KIM ZONG WAN (Korean Democratic Republic), Sur la forme Sakai, un des patrimoines de la culture nationale coréenne (French ; Romanian summary) 521

BOOKS REVIEWS 527

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

REDACŢIONALE

EDITORSHIP'S ANNOUNCEMENTS

ОТ РЕДАКЦИИ

Articole ale colaboratorilor externi primite la redacţia revistei *Buletinul Institutului politehnic din Iaşi*

Papers received from the external collaborators by the Editorial Staff of the *Bulletin of the Polytechnic Institute of Jassy*

Статьи внеинститутских сотрудников полученные редакцией журнала *Известия Ясского политехнического института*

DINCULESCU C., (Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej, Bucureşti), *L'analyse d'un schéma de protection des stations contre les surtensions à l'aide des déchargeurs à résistance variable.*

MIHĂILESCU S. ŞT., (Institutul de fizică atomică al Academiei Republicii Socialiste România, Bucureşti). *Consideraţiuni de mecanică asupra sapelor cu conuri pentru foraj.*

ДОЙЧ И., (Политехнический институт, Брашов), *Общий характер уравнения Клапейрона.*

САННИКОВ С. С., (Физико-технический институт АН УССР, Харьков), *Разложение прямого произведения представлений группы Лоренца* L_3.

ILIESCU N., (Institutul politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej", Bucureşti), *Creşterea preciziei în rezolvarea unor probleme ale rezistenţei materialelor cu ajutorul analogiei de reţea electrică.*

VALLÉE R., (Faculté des sciences, Besançon, France), *Fluides parfaits en théorie relativiste hexadimensionnelle.*

STAICU C. I., (Universitatea din Bucureşti), *Problema fundamentală a analizei dimensionale generale.*

BHATNAGAR N. S., GUPTA R. P., (University of Roorkee, India), *Large Deformation of Circular Membranes under Creep.*

CHANNABASAPPA M. N., (Department of Mathematics, Indian Institute of Technology, New Delhi, India), *Laminar flow in an annulus under the influence of a pulsating pressure gradient.*

DAVIS W. J., (Mathematics Department, The Ohio State University, Columbus, U.S.A.), *Solution Representations for Linear Initial Value Problems.*

GOVINDA REDDY P., (Depatment of Mathematics, Indian Institute of Technology, New Delhi, India), *Effect of Wall Conductance on the Laminar Flow of a Conducting Visco-Elastic Fluid.*

БАЙНОВ Д. Д., ПАРТИНОВА Н. А., (Машинно-электротехнический институт, София, Болгария), *Метод решения автономной квазилинейной системы с n степенями свободы при наличии нескольких групп соизмеримых частот.*

ТОМАШЕВИЧ Ф. В., КУРТЯКОВ С. У., (Таганрогский Радиотехнический институт, СССР), *О разложении по неортогональной системе элементов.*

ИВАНОВ В. И., КУЗНЕЦОВА-ЛЕНШИНА Н. Я., (Институт органической химии АН Кирг. ССР, Фрунзе), *Строение молекул целлюлозы и их деструкция.*

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3—4, 1966

Matematici, Mecanică teoretică, Fizică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XII (XVI), вып. 3—4, 1966

Математика, Теоретическая механика, Физика

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XII (XVI), 3—4, 1966

Mathematics, Theoretical Mechanics, Physics

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. D. 517.948

SUR L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DE LA DISTRIBUTIVITÉ UNILATÉRALE (II)

PAR

AL. CLIMESCU

1. Dans [2] on a observé que la recherche de solutions particulières, si possible complètes, de l'équation

$$f(x,g(y,z)) = g(f(x,y),f(x,z)) \tag{1}$$

est encore un problème intéressant, par exemple parce qu'il revient à trouver les endomorphismes de g (chaque $f(a,x)$ étant un tel endomorphisme, d'ailleurs librement choisi).

Cette Note est consacrée à l'obtention de certaines classes complètes de solutions, l'opération g étant donnée.

2. Soit $M = \{0,1\}$, les symboles étant intérprétés comme les restes mod 2.

Lemme I. *Soit $g(x,y)$ définie sur $M \times M$. Les endomorphismes possibles étant $\varphi_0(x) = 0$, $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = 1 + x$, $\varphi_3(x) = 1$, on a:*

$g(x,y)$ admet $\varphi_0(x)$ si et seulement si $g(0,0) = 0$.

$g(x,y)$ admet toujours $\varphi_1(x)$.

$g(x,y)$ admet $\varphi_2(x)$ si et seulement si $g(1+x,1+y) = 1 + g(x,y)$.

$g(x,y)$ admet $\varphi_3(x)$ si et seulement si $g(1,1) = 1$.

Proposition II. *Si $M = \{0,1\}$ on peut déterminer toutes les solutions $< M,f,g >$ de l'équation* (1).

Il suffit de parcourir les 16 possibilités pour g, d'appliquer la lemme I, et de construire les fonctions f correspondantes. Voici les résultats :

I. $g(x,y)$ admet φ_0 et φ_1, donc 4 fonctions f possibles ;

II. $g(0,x) = 0$, $g(1,x) = x$; φ_0, φ_1, φ_3, donc 8 fonctions f ;

III. $g(0,x) = 0$, $g(1,x) = 1 + x$; φ_0, φ_1, donc 4 possibilités pour f ;

IV. $g(0,x) = 0$, $g(1,x) = 1$; φ_0, φ_1, φ_2, φ_3, 16 possibilités pour f ;

V. $g(0,x) = x$, $g(1,x) = 0$; φ_0, φ_1, 4 possibilités pour f ;

VI. $g(0,x)=x$, $g(1,x)=x$; φ_0, φ_1, φ_2, φ_3, 16 possibilités pour f;
VII. $g(0,x)=x$, $g(1,x)=1+x$; φ_0, φ_1, 4 possibilités pour f;
VIII. $g(0,x)=x$; $g(1,x)=1$; φ_0, φ_1, φ_3, 8 possibilités pour f;
IX. $g(0,x)=1+x$, $g(1,x)=0$; φ_1, donc $f=y$ (uniquement déterminée);
X. $g(0,x)=1+x$, $g(1,x)=x$; φ_1, φ_3, 4 possibilités pour f;
XI. $g(0,x)=1+x$, $g(1,x)=1+x$; φ_1, φ_2, 4 possibilités pour f;
XII. $g(0,x)=1+x$, $g(1,x)=1$; φ_1, φ_3, 4 possibilités pour f;
XIII. $g(0,x)=1$, $g(1,x)=0$, φ_1, φ_2, donc 4 possibilités pour f;
XIV. $g(0,x)=1$, $g(1,x)=x$; φ_1, φ_3, donc 4 possibilités pour f;
XV. $g(0,x)=1$, $g(1,x)=1+x$; φ_1, donc $f=y$ (uniquement déderminée);
XVI. $g(x,y)=1$; φ_1, φ_3, 4 possibilités pour f.

Des 256 couples (f,g) possibles, 86 sont donc des solutions de (1).

3. Dans [1], on a mis en relief l'importance des résultats d'unicité dans la théorie des équations fonctionnelles. Les cas IX et XV de la proposition II, d'ailleurs algébriquement isomorphes, montrent que le problème de l'unicité peut être posé pour l'équation (1).

Proposition II. *Si* $M=\{0,1,\ldots,n\}$ (les symboles étant interprétés comme les restes mod $(n+1)$) *il existe des fonctions g pour lesquelles* $f(x,y)=y$ (donc f est uniquement déterminée par g).

Il suffit de prendre $g(x,x)=1+x$ et $g(x,y)=0$ si $x\neq y$. En effet si φ est un endomorphisme de g, on doit avoir $\varphi[g(x,y)]=g[\varphi(x),\varphi(y)]$. Si $x=y$ et $\varphi(0,0)=p$, on a $\varphi[g(0,0)]=\varphi(1)=g[\varphi(0,\varphi(x)]=g(p,p)=1+p$ et en général $\varphi(q)\geqslant n+q \pmod{(n+1)}$. Mais $\varphi[g(0,1)]=\varphi(0)=p=g(p,p+1)=0$, donne $p=0$, et $\varphi(x)=x$ comme seul endomorphisme, donc $f(x,y)=y$. Le problème de trouver toutes les fonctions g ayant cette propriété est bien entendu toujours complètement résoluble. Contentons nous d'esquisser l'algorithme correspondant pour $n=2$. Il faut d'abord qu'on ait $g(x,x)\neq x$, ce qui conduit à l'exclusion des endomophismes constants. Il y a donc 8 possibilités pour le choix de $g(0,0)$, $g(1,1)$, $g(2,2)$ et on peut montrer que tous les types possibles sont isomorphes à l'un des deux types suivants:

$g(0,0)=1$, $g(1,1)=2$, $g(2,2)=0$ ou $g(0,0)=1$, $g(1,1)=0$, $g(2,2)=0$.

Pour le premier type, $\varphi[g(x,x)]=\varphi(x+1)=g[\varphi(x),\varphi(x)]$ donne comme endomorphismes possibles $\varphi_0(x)=x$, $\varphi_1(x)=1+x$, $\varphi_2(x)=2+x$, et il suffit d'éliminer $\varphi_1(x)$ pour trouver les fonctions cherchées.

Sous forme de tableau, la forme de g qui admet φ_1 comme endomorphisme est

(2)

	0	1	2
0	1	a	b
1	$1+b$	2	$1+a$
2	$2+a$	$2+b$	0

et soit g plus généralement donnée par

(3)

	0	1	2
0	1	a	b
1	c	2	d
2	e	f	0

Alors on a la

Proposition III. *$g(x,y)$ donnée par le tableau* (3) *détermine univoquement $f(x,x)=y$ si et seulement si la proposition*

$$(c=1+b)\wedge(d=1+a)\wedge(e=2+a)\wedge(f=2+b)$$

est fausse ($\wedge$ étant le symbole de la conjonction logique).

Si $g(0,0)=1$, $g(1,1)=0$, $g(2,2)=0$, on a pour un endomorphisme $\varphi[g(0,0)]=\varphi(1)=g[\varphi(0),\varphi(0)]$, $\varphi[g(1,1)]=\varphi(0)=g[\varphi(1),(\varphi(1)]$, $\varphi[g(2,2)]=g[\varphi(2),\varphi(2)]$; $\varphi(0)=0\Rightarrow\varphi(1)=1\Rightarrow\varphi(2)=2$ ou $\varphi(2)=1$. $\varphi(0)=1\Rightarrow\varphi(1)=0\Rightarrow\varphi(2)=0$. $\varphi(0)=2\Rightarrow\varphi(1)=0\Rightarrow\varphi(0)=0$ (contradictoire).

Il serait facile de déterminer g donneé par (3) qui admet $\varphi(x)=(0,1,1)$ ou $\varphi(x)=(1,0,0)$ comme endomorphismes et d'énoncer ensuite une proposition analogue à la proposition III.

4. Soit M et $N\subset M$, $N\neq\varnothing$. Si $<M,f,g>$ est une solution, on appellera N noyau de la solution si

$$(\forall x,\ \forall y)\,(f(x,y)\in N, g(x,x)\in N).$$

Proposition IV. *Si M est quelconque, on peut déterminer toutes les solutions $<M,f,g>$ ayant un noyau N à deux éléments.*

Désignons les éléments de N par 0, 1. La démonstration est faite d'une manière constructive pour tous les cas indiqués dans la proposition II.

Sélectionons les cas suivants:

a) $g(0,0)=g(0,1)=g(1,0)=g(1,1)=0$. Si φ est un endomorphisme utile, $\varphi(x)=0,1$ donc ce $\varphi[g(x,y)]=g[\varphi(x),\varphi(y)]=0$ et en particulier $\varphi(0)=0$. Si $\varphi(1)=0$, $g(x,y)$ peut être choisi arbitrairement ($=0,1$) et $\varphi(x)$ de même ($x\neq 0,1$). Si $\varphi(1)=1$, et si pour au moins un couple u, v on a $g(u,v)=1$, on arrive à la contradiction suivante: $\varphi[g(u,v)]=\varphi(1)=1=$ $=g[\varphi(u),\varphi(v)]=0$. En résumé: $g(x,y)\equiv 0$, $\varphi(0)=0$, $\varphi(x)=0,1$ ($x\neq 0$) ou $(\exists u,\exists v)\,g(u,v)=1$; alors $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=0,1$, $\varphi(x)=0,1$ si $x\neq 0,1$. Pour les deux cas la totalité des $f(x,y)$ est déterminée.

b) $g(0,x)=x$, $g(1,x)=1+x$ $(x=0,1)$. On peut avoir $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=0$ ou $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$. $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=0 \Rightarrow \varphi[g(x,y)]=0=$ $=g[\varphi(x),\varphi(y)] \Rightarrow \varphi(x)\equiv 0$ et $f\equiv 0$, g arbitraire $(=0,1$, pour les autres couples que ceux de $N\times N)$. $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$ implique ce qui suit: $\varphi(x)=0$, $\varphi(y)=0 \Rightarrow g(x,y)=0$; $\varphi(x)=0$, $\varphi(y)=1 \Rightarrow g(x,y)=1$; $\varphi(x)=1$, $\varphi(y)=0 \Rightarrow g(x,y)=1$; $\varphi(x)=1$, $\varphi(y)=1 \Rightarrow g(x,y)=0$.

$g(x,y)$ étant donnée, on peut avoir deux cas. On a $A\cup B=M$, $A\cap B=\varnothing$, $0\in A$, $1\in B$ avec la propriété: $x\in A$, $y\in A \Rightarrow g(x,y)=0$; $x\in A$, $y\in B \Rightarrow g(x,y)=1$; $x\in B$, $y\in A \Rightarrow g(x,y)=1$; $x\in B$, $y\in B \Rightarrow g(x,y)=0$. Alors $\varphi(x)=\begin{cases}0, \text{ si } x\in A\\ 1, \text{ si } y\in B\end{cases}$ est un endomorphisme et comme la décomposition de M est évidemment unique, g admet deux endomorphismes (l'autre étant $\varphi(x)=0$) ce qui permet de déterminer toutes les fonctions f.

Si une telle décomposition n'est pas possible, alors $\varphi(x)=0$ est le seul endomorphisme et $f(x,y)=0$.

c) $g(x,y)=1+y$: $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$ ou $\varphi(0)=1$, $\varphi(1)=0$. Supposons qu'on ait: $\varphi(x)=0$ si $x\in A$ $(0\in A)$, $\varphi(1)=1$ si $x\in B$ $(1\in B)$ et $A\cup B=M$. Alors $x\in A$, $y\in A \Rightarrow \varphi[g(x,x)]=g(0,0)=1 \Rightarrow g(x,y)\in B \Rightarrow$ $\Rightarrow g(x,y)=1$. $x\in A$, $y\in B \Rightarrow \varphi[g(x,x)]=g(0,1)=0 \Rightarrow g(x,y)\in A \Rightarrow g(x,y)=$ $=0$. $x\in B$, $y\in A \Rightarrow \varphi[g(x,y)]=g(1,0)=1 \Rightarrow g(x,y)\in B \Rightarrow g(x,y)=1$. $x\in B$, $y\in B \Rightarrow \varphi[g(x,y)]=g(1,1)=0 \Rightarrow g(x,y)\in A \Rightarrow g(x,y)=0$. Si une telle décomposition de M est possible (uniquement) $\varphi(x)$ est un endomorphisme. Si $\varphi(0)=1$, $\varphi(1)=0$ et si $\varphi(x)=0$, $(x\in A_1$, donc $1\in A_1)$; $\varphi(x)=1$ $(x\in B_1$, donc $0\in B_1)$, on a: $x\in A_1$, $y\in A_1 \Rightarrow \varphi[g(x,x)]=g(0,0)=1 \Rightarrow$ $\Rightarrow g(x,y)\in B_1 \Rightarrow g(x,y)=1$; $x\in A_1$, $y\in B_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow g(x,y)=0$; $x\in B_1$, $y\in A_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow g(x,y)=1$; $x\in B_1$, $y\in B_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow g(x,y)=0$. Les décompositions $M=A\cup B=A_1\cup B_1$ existent ou n'existent pas en même temps pour g donné et $A=B_1$, $B=A_1$, d'où: si une telle décomposition existe, $g(x,y)$ admet 2 endomorphismes ne prenant que les valeurs 0, 1, c'est-à-dire

$$\varphi_0(x)=\begin{cases}0 & x\in A\\ 1 & x\in B\end{cases} \quad \text{ou} \quad \varphi_1(x)=\begin{cases}0 & x\in B\\ 1 & x\in A\end{cases}$$

et si une telle décomposition n'existe pas, g n'admet pas d'endomorphisme ne prenant que les valeurs 0, 1, donc il n'existe pas de fonction f telle que $<M,f,g>$ soit une solution à noyau $=\{0,1\}$.

d) $g(0,0)=1$, $g(0,1)=g(1,0)=g(1,1)=0$. On doit avoir $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$ et soit $\varphi(x)=0$ si $x\in A$ $(0\in A)$, $\varphi(x)=1$ si $x\in A$ $(1\in B)$. $x\in A$, $y\in B \Rightarrow \varphi[g(x,x)]=g(0,0)=1 \Rightarrow g(x,y)\in B \Rightarrow g(x,y)=1$; $x\in A$, $y\in B \Rightarrow$ $\Rightarrow \ldots \Rightarrow g(x,y)=0$; $x\in B$, $y\in A \Rightarrow \ldots \Rightarrow g(x,y)=0$; $x\in B$, $y\in B \Rightarrow \ldots \Rightarrow$ $\Rightarrow g(x,y)=0$. Si une telle décomposition existe, $\varphi(x)$ mis en évidence est le seul endomorphisme de $g(x,y)$; si une telle décomposition n'existe pas, g n'admet pas d'endomorphisme ne prenant que les valeurs 0, 1 et il n'existe pas de solution $<M,f,g>$ à noyau $\{0,1\}$.

Observation. On a trouvé ici aussi des cas où g détermine univoquement f, mais relatifs à une classe particulière de fonctions f.

5. Les produits directs de fonctions $g(x,y)$ définies sur un ensemble à deux éléments donnent aussi des cas où l'on peut déterminer toutes les fonctions f correspondantes. Nous ne traiterons qu'un seul cas.

Soit $g(x,y) = (1+x)(1+y) \pmod 2$,

$$g[(a,b),(x,y)] = [(1+a)(1+x),(1+b)(1+y)] \tag{4}$$

(notés aussi $(a,b)(c,d)$) et $\varphi[(a,b)] = [\varphi_1(a,b), \varphi_2(a,b)]$ un endomorphisme de (4).

On a: $\varphi[(a,b)(c,d)] = \varphi[(1+a)(1+c),(1+b)(1+d)] = [\varphi_1[(1+a)(1+c),(1+b)(1+d)], \varphi_2[\dots]] = \varphi(a,b)\ \varphi(c,d) = [\varphi_1(a,b), \varphi_2(a,b)] \cdot [\varphi_1(c,d), \varphi_2(c,d)] = [[1+\varphi_1(a,b)][1+\varphi_2(c,d)], [1+\varphi_2(a,b)][1+\varphi_2(c,d)]]$. Pour $c = d = 0$ on obtient $\varphi_1(1+a,1+b) = [1+\varphi_1(a,b)][1+\varphi_1(0,0)]$. $\varphi_1(0,0) = 1 \Rightarrow \varphi_1(x,y) = 0$ (contradiction), donc $\varphi_1(0,0) = 0$ et $\varphi_1(1+a,1+b) = 1+\varphi_1(a,b)$, ce qui donne, en faisant les calculs $\varphi_1(a,b) = a$ ou $\varphi_1(a,b) = b$ et de même $\varphi_2(a,b) = a$ ou $\varphi_2(a,b) = b$. On obtient aussi 4 endomorphismes possibles: $\varphi_1[(x,y)] = (x,x)$, $\varphi_2[(x,y)] = (x,y)$, $\varphi_3[(x,y)] = (y,x)$, $\varphi_4[(x,y)] = (y,y)$ et on vérifie sans peine que tous les 4 conviennent.

Passons maintenant au cas d'un produit de 3 facteurs, donc $(x_1,x_2,x_3)(y_1,y_2,y_3) = [(1+x_1)(1+y_1),\dots,\dots]$ et soit $\varphi[(x_1,x_2,x_3)] = [\varphi_1(x_1,x_2,x_3), \varphi_2(\dots), \varphi_3(\dots)]$ un endomorphisme; on a donc: $\varphi[(1+x_1)(1+y_1),\dots,\dots,] = [\varphi_1[(1+x_1)(1+y_1), (1+x_2)(1+y_2), (1+x_3)(1+y_3)], \varphi_2[\dots], \varphi_3[\dots]] = [[1+\varphi_1(x_1,x_2,x_3)][1+\varphi_1(y_1,y_2,y_3)],\dots,\dots]$. Si $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ on obtient: $\varphi_1(1+x_1, 1+x_2, 1+x_3) = [1+\varphi_1(x_1,x_2,x_3)] \cdot [1+\varphi_1(0,0,0)]$. $\varphi_1(0,0,0) = 1$ conduit à une contradiction, donc $\varphi_1(0,0,0) = 0$ et $\varphi_1(1+x_1)1+x_2, 1+x_3) = 1+\varphi_1(x_1,x_2,x_3)$, $\varphi_1(0,0,0) = 0$. Soit $\varphi_1(1,0,0) = 1$, donc $\varphi_1(0,1,1) = 0$ et $\varphi_1[(1,x_2,x_3)(0,1,1)] = \varphi_1[(0,0,0)] = 0 = [1+\varphi_1(1,x_2,x_3)] \cdot [1+\varphi_1(0,1,1)] = 1+\varphi_1(1,x_2,x_3) \Rightarrow \varphi_1(1,x_2,x_3) = 1$. De même $\varphi_1[(0,1,1)(0,x_2,x_3)] = \varphi_1[(1,0,0)] = 1 = [1+\varphi_1(0,1,1)][1+\varphi_1(0,x_2,x_3)] = 1+\varphi_1(0,x_2,x_3) \Rightarrow \Rightarrow \varphi_1(0,x_2,x_3) = 0$. En résumé $\varphi_1(1,0,0) = 1 \Rightarrow \varphi_1(x_1,x_2,x_3) = x_1$.

On montre de même que $\varphi_1(0,1,0) = 1 \Rightarrow \varphi_1(x_1,x_2,x_3) = x_2$, $\varphi_1(0,0,1) = 1 \Rightarrow \Rightarrow \varphi_1(x_1,x_2,x_3) = x_3$. D'autre part $\varphi_1(1,0,0) = 0$ donne $\varphi_1(0,1,1) = 1$ et $\varphi_1[(1+x_1)(1+y_1), (1+x_2)(1+y_2), (1+x_3)(1+y_3)] = [1+\varphi_1(x_1,x_2,x_3)] \cdot [1+\varphi_1(y_1,y_2,y_3)]$; specialisé pour $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$ donne: $\varphi_1[(0,0,1)] = [1+\varphi_1(1,0,0)][1+\varphi_1(0,1,0)] = 1+\varphi_1(0,1,0)$, ce qui montre qu'au moins l'une des valeurs $\varphi_1[(1,0,0)]$, $\varphi_1[(0,1,0)]$, $\varphi_1[(0,0,1)]$ est égale à 1, donc on peut se borner à ne considérer que les cas $\varphi_1(1,0,0) = 1$ ou $\varphi_1(0,1,0) = 1$, ou $\varphi_1(0,0,1) = 1$ et alors $\varphi_1(x_1,x_2,x_3) = x_1$ ou x_2 ou x_3.

Le même raisonnement est valable pour φ_2 et φ_3. Il y a donc 27. endomorphismes possibles et on vérifie sans peine qu'ils le sont effectivement.

Il est maintenant facile d'énoncer le résultat général.

Proposition V. *Soit* $M = \prod_i M_i$, $i \in I$ *où* $(\forall_i)\, M_i = \{0,1\}$ *et soit* $(\dots, x_i, \dots) \in M$. *Si* $g(x,y)$ *écrite sous forme multiplicative est définie par* $(\forall_i)(\dots, x_i, \dots)(\dots, y_i, \dots) = (\dots, (1+x_i)(1+y_i), \dots)$ (mod 2) *et si* $\varphi[(\dots, x_i, \dots)] = [\dots, \varphi_i, \dots]$ *où* $\varphi_i = x_{\varphi(i)}$, $I \overset{\varphi}{\to} I$, *alors* φ *est un endomorphisme de* $g(x,y)$ *et on obtient ainsi tous les endomorphismes.*

En effet on a $\varphi[(\dots, x_i, \dots)(\dots, y_i, \dots)] = \varphi[(\dots, z_i, \dots)] = (\dots, z_{\varphi(i)}, \dots)$ où $z_i = (1+x_i)(1+y_i)$, donc $z_{\varphi(i)} = (1+x_{\varphi(i)})(1+y_{\varphi(i)})$, et d'autre part $\varphi[(\dots, x_i, \dots)]\,\varphi[(\dots, y_i, \dots,)] = (\dots, x_{\varphi(i)}, \dots)(\dots, y_{\varphi(i)}, \dots) = (\dots, (1+x_{\varphi(i)})\cdot(1+y_{\varphi(i)}), \dots)$. Pour achever la démonstration, supposons qu'on ait

$$\varphi[(\dots, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots)] = 0. \tag{5}$$

On a $\varphi[(\dots, x_i, \dots)] = (\dots, \varphi_i, \dots)$ et comme ci-dessus on voit que φ_i est constante. Si l'égalite (5) était vraie pour tous les i, φ serait constant, ce qui contredit le fait que $\varphi_i[(0, \dots 0, \dots, 0, \dots)] = 0$ et $\varphi_i[(1, \dots, 1, \dots, 1, \dots, 1, \dots)] = 1$. Donc pour au moins un i il faut remplacer (5) par $\varphi[\dots] = 1$ et le reste découle comme pour le cas de trois facteurs.

Reçue le 1 octobre 1966

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Mathématiques I

BIBLIOGRAPHIE

2. Aczél J., Jahresber. d. D. M. V., 1965, **67**, pp. 133—142.
1. Climescu Al., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVII)**, *1—2*, pp. 1—6.

ASUPRA ECUAŢIEI FUNCŢIONALE A DISTRIBUTIVITĂŢII UNILATERALE (II)

(Rezumat)

Se găsesc diverse cazuri cînd $g(x,y)$ fiind dată, se pot determina toate funcţiile $f(x,y)$ astfel încît ecuaţia (1) să fie satisfăcută.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. D. 513.621

UNA OSSERVAZIONE SULL'IPERSUPERFICIE CUBICA RICOPERTA DALLE CORDE DI UNA SUPERFICIE DI VERONESE[1])

DI

ALESSANDRO TERRACINI

1. Nell 1951 Beniamino Segre nella sua Nota [1][2]) ha posto il problema di determinare le ipersuperficie $f = 0$ la cui forma hessiana è divisibile per f^2. Alcuni mesi dopo un caso particolare di questo problema è stato considerato da A. Franchetta [2].

Durante una ricerca di cui non ho ancora pubblicati i risultati, nella quale figura un nuovo tipo di sistemi lineari ∞^5 di quadriche in S_5 con jacobiana indeterminata, ho avuto incidentalmente occasione di fissare la mia attenzione sulla hessiana dell'ipersuperficie cubica ricoperta dalla corde di una superficie di Veronese. Penso che vale la pena di pubblicare intanto questo risultato, sebbene elementare e piuttosto particolare; esso ha relazione con la questione menzionata in principio.

2. Incomincio con una dimostrazione sintetica del fatto che la hessiana H_4^6 dell'ipersuperficie cubica in questione W_4^3[3]) si riduce all'ipersuperficie stessa contata due volte. Una verifica analitica è accennata nel § 4. Nel § 5 do qualche notizie su un problema più generale.

Per chiarezza richiamo[4]) che in uno spazio proiettivo S_r i cui punti hanno coordinate proiettive omogenee $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{r+1}$ l'ipersuperficie di equazione

---

[1]) La presente Nota è la traduzione in italiano della mia Nota *A Remark on the cubic primal of S_5 which is filled by the chords of a Veronese Surface*, in corso di stampa in *Perspectives in Relativity and Geometry*, Indiana University Press.

[2]) La parte essenziale di tale lavoro era stata comunicata dall'A. in una conferenza tenuta il giorno 23 marzo 1950.

[3]) L'ipersuperficie considerata non appartiene alla classe delle ipersuperficie con hessiana indeterminata, come segue da [3]. Cfr. anche [2_2].

[4]) Per le nozioni che occorrono di geometria proiettiva iperspaziale cfr. [4], oppure [5].

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{r+1}) = 0$$

ha come hessiana la nuova ipersuperficie

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1,r+1} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2,r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{r+1,1} & f_{r+1,2} & \cdots & f_{r+1,r+1} \end{vmatrix} = 0,$$

dove ho posto

$$f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, r+1).$$

La hessiana ha ordine $(r+1)(n-2)$ se n è l'ordine dell'ipersuperficie data[5]).

Sia c una corda della superficie di Veronese F^4 : da c questa è proiettata su un S_3 secondo una superficie di 2-o ordine. Perciò in S_5 esiste una quadrica passante per la F^4 avente la corda c come retta doppia. Detta quadrica è necessariamente la quadrica polare di qualche punto di S_5. Pertanto ogni punto di c e quindi ogni punto della ipersuperficie W^4 è doppio per qualche quadrica polare. Ciò significa che l'ipersuperficie W^4 appartiene alla propria hessiana H_4^6.

3. La hessiana H_4^6 contiene insieme alla W_4^3 un'altra ipersuperficie cubica U_4^3 che a priori può, o no, coincidere con W_4^3. Il ragionamento che segue esclude la seconda possibilità: esso è basato sul fatto che — come risulta dalle righe che seguono — una superficie di Veronese è trasformata in se stessa da qualche omografia che porta A in B dove A, B sono punti arbitrari dello S_5 ambiente, nessuno dei quali appartiene alla W_4^3 luogo delle corde della superficie di Veronese considerata.

Rileviamo anzitutto che nella consueta rappresentazione di una superficie di Veronese su un piano Π a ogni punto ed a ogni iperpiano di S_5 corrispondono rispettivamente una conica inviluppo e una conica luogo in

---

[5]) Ricordiamo che in S_r, se le $f_i(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{r+1})$, $(i = 1, 2, 3, \ldots, r+1)$, dove le f_i sono forme quadratiche e si pone $f_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$, $(i, j = 1, 2, \ldots, r+1)$ dove soltanto il secondo indice di f significa derivazione, l'equazione (1) rappresenta un'ipersuperficie V_{r-1}^{r+1} che si chiama *jacobiana* del sistema lineare rappresentato da

$$\sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}) = 0.$$

La jacobiana è il luogo dei punti doppi delle quadriche del sistema lineare.

modo tale che a un punto e a un iperpiano che si appartengono corrispondono rispettivamente coniche apolari. Se α e β sono le immagini di A, B esse sono entrambe non degeneri. Come è ben noto esistono in Π ∞^3 omografie che portano α in β: le loro immagini in S_5 sono [6] ∞^3 omografie della superficie di Veronese in sé che portano A in B. Siccome ciascuna di queste omografie porta altresì la W_4^3 in se stessa la nostra asserzione risulta dimostrata.

4. Aggiungiamo un enno di verifica analitica di quanto è enunciato nel §2 senza entrare naturalmente in dettagli.

Partendo dalla rappresentazione parametrica della superficie di Veronese mediante due parametri u, v:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 = u^2 : v^2 : 1 : v : u : uv,$$

rappresentiamo la W_4^3 mediante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_6 & x_5 \\ x_6 & x_2 & x_4 \\ x_5 & x_4 & x_3 \end{vmatrix} = 0,$$

cioè mediante

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \equiv$$

$$\equiv x_1 x_2 x_3 + 2x_4 x_5 x_6 - x_1 x_4^2 - x_2 x_5^2 - x_3 x_6^2 = 0.$$

La hessiana della V_4^3 ha allora la equazione

$$H \equiv \begin{vmatrix} 0 & x_3 & x_2 & -2x_4 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & x_1 & 0 & -2x_5 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 & -2x_6 \\ -2x_4 & 0 & 0 & -2x_1 & 2x_6 & 2x_5 \\ 0 & -2x_5 & 0 & 2x_6 & -2x_2 & 2x_4 \\ 0 & 0 & -2x_6 & x_5 & 2x_4 & -2x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando il determinante si ottiene facilmente [6])

---

[6]) Il prof. Beniamino Segre al quale ho communicato il risultato che espongo nel presente lavoro mi ha scritto di aver trovato le seguente generalizzatione: se f denota un determinante simmetrico, di ordine $n > 2$ rispetto ai suoi $n(n+1)/2$ elementi, il suo hessiano H è dato da

$$H = (-1)^{(n-1)(n-2)/2} \, 2^{n(n-1)/2} \, (n-1) \, f^{(n+1)(n-2)/2}.$$

Per $n = 3$ questa proprietà ovviamente coincide con quella espressa da (2). La parte essenziale di questo risultato (senza specificare il coefficiente numerico, si trova gia nella [1])

(2) $$H = -16f^2.$$

La nostra asserzione è così controllata.

5. La parte essenziale del ragionamento del § 2 sussiste non soltanto per la superficie di Veronese, ma più generalmente per ogni F^4 appartenente allo S_5 proiettivo. Come è ben saputo, una F^4 di S_5, se non è una superficie di Veronese, è necessariamente una rigata razionale normale F^4; ma in questo caso, se essa non è un cono, le sue corde riempiono lo spazio ambiente. Ricordiamo che per tale F^4 sono possibili due casi, che cioè vi sono due tipi di rigate razionali normali F^4 di S_5 distinte da coni, dipendentemente dalla possibilità che: 1) la direttrice minima è una conica (e allora vi sono ∞^1 coniche direttrici); oppure 2) essa è una retta. In entrambi i casi il sistema lineare di quadriche passanti per F^4 ha dimensione 5: p. es. per il primo tipo ciò si vede facilmente rappresentando la F^4 su un piano in modo tale che le sue sezioni iperpiane abbiano per immagini cubiche con un dato punto doppio passanti per un ulteriore punto dato.

Quindi il ragionamento del § 2 dimostra che il sistema delle quadriche di S_5 passanti per una rigata F^4 razionale normale (di prima o di seconda specie) ha la jacobiana indeterminata (cfr. la nota 5). In questo modo si conclude che nello spazio S_5 esiste un tipo di sistema lineare ∞^5 di quadriche con jacobiana indeterminata che è essenzialmente nuovo rispetto agli analoghi sistemi lineari di quadriche in uno spazio avente un numero di dimensioni minore di 5 [7]).

Ora io ho provato circa 50 anni fa [8] che i sistemi lineari ∞_r di quadriche di S_r con jacobiana indeterminata hanno una parte fondamentale nella soluzione di due importanti problemi di geometria proiettiva differenziale, vale a dire:

A) determinazione delle V_k i cui spazi oscultatori [8]) insieme con quelli delle sezioni iperpiane generiche V'_{k-1} hanno dimensioni ω, ω^1 tali che sia $\omega^1 < \omega - 1$;

B) determinazione della V_k aventi le proprietà che la varietà W ricoperta dai loro S_k tangenti ha dimensioni $2k - l$ $(l \geqslant 1)$ mentre la V_k rappresenta soltanto d equazioni di Laplace linearmente indipendenti essendo

$$d \leqslant \frac{k(k-1)}{2} + l - 1,$$

[7]) Dopo terminato il presente lavoro, ho preso visione della Nota di Degoli [7], dove questo sistema lineare di quadriche è già considerato.

[8]) Lo spazio osculatore a una V_k in un suo punto x e lo spazio determinato dal punto x e dai suoi derivati primi e secondi rispetto ai k parametri essenziali ai quali la V_k e riferita. Essa si può anche definire come il minimo spazio contenente i piani osculatori in x alle curve della V_k passanti per tale punto.

ho invero dimostrato [8] dei teoremi secondo i quali la soluzione di entrambi i problemi A) e B) dipende dai sistemi lineari ∞^r di quadriche di S_r con jacobiana indeterminata (e loro generalizzazioni). Per avere una soluzione completa dei problemi A) B) è naturalmente necessario conoscere *tutti* i sistemi lineari ∞^r di quadriche di S_r con jacobiana indeterminata (e loro generalizzazioni). Per tale ragione nel mio lavoro citato ho potuto dare la souzione effettiva dei problemi A) e B) solamente per $k<5$. Il caso succlssivo $k=5$ è stato resoluto da L. Muracchini [9]. Spero che potrò peresto passare al primo caso successivo in qualche altra occasione.

Ricevuta il 28 V II 1965

Università di Torino, Italia

BIBLIOGRAFIA

1. Segre B., *Bertini Form and Hessian Matrices.* J. of the London Math. Soc., 1951, **26.**
2. Franchetta A., *Forme algebriche sviluppabili e relativa hessiana.* Rend. Acc. Lincei, s. *8*, **10**, pp. 386—389; *Sulle forme algebriche di S_r aventi l'hessiana indeterminata.* Rend. di Mat., Roma, 1954, **13**, *5.*
3. Perazzo U., *Sulle varietà cubiche la cui hessiana svanisce identicamente.* Giorn. di mat. di Battaglini, 1890, **38.**
4. Bertini E., *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi.* Spoerri, Pisa, 1907; 2-a ed., Principato, Messina, 1923.
5. Segre C., *Mehrdimensionale Räume.* In Enz. der Math. Wissenschaften, B. **III**, C. *7.*
6. — *Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano e alla sua rappresentazione sulla geometria dei complessi lineari di rette.* Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino, 1884—85, **XX**; *Opere.* A cura dell'Unione Mat ital., Vol. **IV**, Cremonese, Roma, 1956, pp. 1—17.
7. Degoli L., *Sui sistemi lineari di quadriche di S_r a jacobiana nulla di caratteristica $<r$.* Atti della Acc. delle Sc. di Bologna, 1963, **X**, *11*, p. 994.
8. Terracini A., *Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà.* Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino: Nota I, 1913—14, **XLIX**, pp. 215—247; Nota II, 1916—17, **XLI**, pp. 695—714; Nota III, 1919—20, **LV**, pp. 480—500,
9. Muracchini L., *Le varietà V_5 i cui spazi tangenti riempiono una varietà W di dimensione inferiore all'ordinario.* Riv. dell'Univ. di Parma: Parte I, 1951, **2**, pp. 435—462; Parte II, 1952, **3**, pp. 75—89.

O OBSERVAŢIE PRIVIND HIPERSUPRAFAŢA CUBICĂ ACOPERITĂ DE CORZILE UNEI SUPRAFEŢE VERONESE

(Rezumat)

Se demonstrează pe cale sintetică şi analitică că hessiana H_4^6 a hipersuprafeţei cubice acoperită de corzile unei suprafeţe a lui Veronese W_4^3 se reduce la respectiva hipersuprafaţă, socotită de două ori. Partea esenţială a raţionamentului subsistă şi în cazul mai general al unei F^4 oarecare, aparţinînd lui S_5 proiectiv.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. D. 519.56

PSEUDO-TREILLIS DISTRIBUTIFS ET APPLICATIONS

NOTE I

PSEUDO-TREILLIS DISTRIBUTIFS

PAR

C. BENZAKEN

Définitions et généralités

Définition 1. Un *pseudo-treillis* distributif est un ensemble E muni des deux opérations internes partout définies: la somme $+$ le produit . vérifiant les 4 règles:

$R1$ — E est un $+$ demi treillis (associativité, commutativité et idempotence de $+$);

$R2$ — E est un monoïde pour . (associativité);

$R3$ — le produit . est distributif par rapport à la somme

$$a \,.\, (b + c) = (a \,.\, b) + (a \,.\, c) \text{ et } (b + c) \,.\, a = (b \,.\, a) + (c \,.\, a);$$

$R4$ — la règle d'absorption est satisfaite

$$a + (a \,.\, b) = a + (b \,.\, a) = a.$$

Les trois premières règles font de E un *gerbier* [1]. La règle $R4$ montre que le produit est contractant. Comme les treillis distributifs apparaissent comme cas particuliers de telles structures, nous préférerons le nom de pseudo-treillis distributif à celui de gerbier contractant.

Nous omettrons parfois le qualificatif de distributif et parlerons de pseudo-treillis.

On peut, (sans trop perdre de généralité) supposer l'existence d'unités $0\,(+)$ et $1\,(.)$ et vérifier dans ce cas que: $0 \,.\, a = a \,.\, 0 = 0$ et $1 + a = 1$.

E est évidemment ordonné par $a \leqslant b \langle\Longrightarrow\rangle a + b = b$. Cet ordre compatible évidemment avec la somme, l'est aussi avec le produit car $a \leqslant b \Rightarrow a + b = b \Rightarrow (a \,.\, x) + (b \,.\, x) = (b \,.\, x)$ ($R3$) et donc $a \,.\, x \leqslant b \,.\, x$ (idem pour $x \,.\, a \leqslant x \,.\, b$). En outre $a \,.\, b \leqslant a$ (resp. b) à cause de $R4$.

Définition 2. P étant une partie de E, on désigne par *fermeture, de* P la partie $\bar{P} = \{x;\ x \in E:\ \exists y \in P:\ x \leqslant y\}$.

Naturellement $P \subset \bar{P}$. P est dit *fermé* ou *héréditaire* si $P = \bar{P}$.

L'ensemble des parties de E est muni des opérations $+$ et $.$ mais $P+P \neq P$. Notons toutefois (si P est fermé) que $E.P=P$ si E admet 1, sinon $E.P \subset P$. Plus généralement $Q.P \subset P$ si P est fermé.

Notons aussi que l'intersection (au sens des ensembles) de deux parties fermées est fermée ainsi que l'union d'ailleurs.

Cas particulier d'un demi treillis décomposable

E étant un $+$ demi treillis, il se peut que $\forall x, y, z$ vérifiant $x \leqslant y+z$, alors il existe ξ et ζ tel que $x=\xi+\zeta$ avec $\xi \leqslant y$ et $\zeta \leqslant z$; on dira alors que le demi treillis E est lui-même décomposable. Dans ce cas nous avons la

Proposition 1. *Si P et Q sont deux parties fermées de E pseudo-treilis décomposable alors $P+Q$ est fermée.*

En effet $(P+Q) \subset \overline{(P+Q)}$. Montrons l'inclusion inverse $x \in (P+Q)$, cela veut dire que $x \leqslant y$ avec $y \in P+Q$; donc $x \leqslant a+b$, $a \in P$ et $b \in Q$; E étant décomposable $x=\alpha+\beta$, $\alpha \leqslant a$, $\beta \leqslant b$, mais comme P et Q sont fermés $\alpha \in P$ et $\beta \in Q$ donc $x \in P+Q$.

2. Notions d'idéal et de congruence

On suppose dans ce qui suit que le pseudo-treillis E a un zéro: 0.

Définition 3. Un *idéal* (bilatère) de E est une partie $\mathcal{J} \subset E$ vérifiant a) $x, y \in \mathcal{J} \Rightarrow x+y \in \mathcal{J}$; b) $x \in \mathcal{J}$ et a quelconque $\Rightarrow x.a$ et $a.x \in \mathcal{J}$; c) $0 \in \mathcal{J}$.

On pourrait définir de même idéal à droite (resp. à gauche). Chaque fois que l'on parlera d'idéal sans précision supplémentaire, il s'agira alors d'idéal bilatère.

Proposition 2. *Si $\mathcal{J}$ est un idéal, $\overline{\mathcal{J}}$ l'est.*

En effet: a) $x, y \in \overline{\mathcal{J}} \Rightarrow x \leqslant \xi$, $y \leqslant \eta$ avec $\xi, \eta \in \mathcal{J}, x+y \leqslant \xi+\eta (\in \mathcal{J})$ donc $x+y \in \overline{\mathcal{J}}$; b) si $x \in \overline{\mathcal{J}} \Rightarrow x \leqslant \xi \in \mathcal{J} \Rightarrow a.x \leqslant a.\xi \in \mathcal{J}$, donc $a.x \in \overline{\mathcal{J}}$ (de même $x.a \in \mathcal{J}$); c) $0 \in \overline{\mathcal{J}}$ puisque $0 \in \mathcal{J}$.

L'ensemble des ideaux bilatères de E se notera $\mathcal{I}$, l'ensemble des ideaux fermés se notera $\overline{\mathcal{I}}$, l'ensemble E lui-même $\in \overline{\mathcal{I}} \subset \mathcal{I}$; de même l'ensemble réduit à $0 \in \overline{\mathcal{I}}$.

L'ensemble $\mathcal{I}$ est ordonné par inclusion. Nous avons en fait le

Théorème 1. *$\mathcal{I}$ est un treillis complet. $\overline{\mathcal{I}}$ est un $\bigwedge$-demi treillis et un ensemble $\bigwedge$-distribuant dans $\mathcal{I}$. Si E est décomposable, $\overline{\mathcal{I}}$ est alors un sous treillis distributif de $\mathcal{I}$.*

Il est facile en effet, de voir que l'intersection (au sens des ensembles) de deux idéaux $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ est un idéal $\mathcal{J}_1 \bigwedge \mathcal{J}_2$ (et c'est le plus grand contenu dans $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$). Nous pouvons définir $\mathcal{J}_1 \bigvee \mathcal{J}_2$ comme l'intersection de tous les idéaux contenant $\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$ (réunion au sens des ensembles).

(Il en existe au moins un: E lui-même). Montrons que cet idéeal $\mathcal{J}_1 \vee \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$.

Il est en effet évident que $\mathcal{J}_1 \vee \mathcal{J}_2 \supseteq \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$ puisque

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \in \mathcal{J}_1 \Rightarrow x_1 \in \mathcal{J}_1 \vee \mathcal{J}_2 \\ \text{et } x_2 \in \mathcal{J}_2 \Rightarrow x \in \mathcal{J}_1 \vee \mathcal{J}_2 \end{array}\right\} \rightarrow x_1 + x_2 \in \mathcal{J}_1 \vee \mathcal{J}_2 .$$

Par ailleurs $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$ est un idéal, comme on peut facilement le vérifier; donc $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_1 \vee \mathcal{J}_2$. Le treillis est complet, car un ensemble quelconque d'idéaux admet toujours une borne inférieure et une borne supérieure.

Considérons alors la restriction des opérations $\wedge$ et $\vee$ à $\bar{\mathcal{J}}$. Comme l'intersection de deux idéaux fermés est fermée $\bar{\mathcal{J}}$ est un $\wedge$-demi treillis. $\bar{\mathcal{J}}$ est $\wedge$-distribuant en ce sens que $\mathcal{J} \in \bar{\mathcal{J}}$ entraîne que $\mathcal{J} \wedge (\mathcal{J}_1 \vee \mathcal{J}_2) = (\mathcal{J} \wedge \mathcal{J}_1) \vee (\mathcal{J} \wedge \mathcal{J}_2)$ quel que soient les idéaux $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$.

En effet, on sait que le premier membre inclue le deuxième (propriété classique des treillis). Montrons l'inclusion inverse: $x \in \mathcal{J} \wedge (\mathcal{J}_1 \vee \mathcal{J}_2)$, donc $x \in \mathcal{J}$ et $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \mathcal{J}_1$, $x_2 \in \mathcal{J}_2$ d'où $x_1 \leqslant x \Rightarrow x_1 \in \mathcal{J}$; de même $x_2 \leqslant x \Rightarrow x_2 \in \mathcal{J}$, donc $x_1 \in \mathcal{J} \wedge \mathcal{J}_1$ et $x_2 \in \mathcal{J} \wedge \mathcal{J}_2$ et $x = x_1 + x_2 \in (\mathcal{J} \wedge \mathcal{J}_1) \vee (\mathcal{J} \wedge \mathcal{J}_2)$.

Enfin si E est décomposable, alors $\mathcal{J}_1 \vee \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$ est fermé et $\bar{\mathcal{J}}$ est alors un sous treillis distributif.

La notion d'idéal est très liée à celle de congruence. Nous rappelons la

Définition 4. On appelle *congruence sur* E, une relation r d'équivalence compatible avec les opérations de E: si donc $x\,r\,y$ et $a\,r\,b$ alors $(x + a)\,r\,(y + b)$ et $(x\,.\,a)\,r\,(y\,.\,b)$.

Une congruence définit une partition de E en classes, $r(x)$ désignera la classe de l'élément x de E, $r(0)$ sera par définition le *noyau* de la congruence.

L'ensemble $\mathcal{R}$ des congruences est lui-même partitionné en classes par l'équivalence $r_1 \sim r_2$ si $r_1(0) = r_2(0)$. L'ensemble $\mathcal{R}$ est ordonné partiellement par $r_1 \subseteq r_2$ si $\forall\, x, y$: $x\,r_1\,y \Rightarrow x\,r_2\,y$. Cela entraîne que $r_1(x) \subseteq r_2(x)$

Plus précisément, $\mathcal{R}$ est un treillis conformément au

Théorème 2. *$\mathcal{R}$ est un treillis complet.*

Pour la démonstration voir [1], [2].

Notons que $r_1 \vee r_2$ est la congruence définie par $x\,(r_1 \vee r_2)\,y \Longleftrightarrow$ il existe une suite finie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ d'éléments de E tels que $x = a_1$, $y = a_n$ et a_i est congru à a_{i+1} par l'une au moins des congruences r_1, r_2. Notons que de même $r_1 \wedge r_2$ est la congruence définie par $x\,(r_1 \wedge r_2)\,y \Longleftrightarrow x\,r_1\,y$ et $x\,r_2\,y$.

Définition 5. Une congruence r est dite *fermée* si elle est minimale dans sa classe.

Ce qui veut dire que toute congruence ϱ telle que $r(0) = \varrho(0)$ avec $\varrho \subseteq r$ entraîne $\varrho = r$. $\overline{\mathcal{R}}$ sera l'ensemble des congruences fermées de E.

Proposition 3. *Il y a une et une seule congruence fermée dans une classe de congruences.*

Notons en effet, que si deux congruences r_1 et r_2 sont équivalentes, $r_1 \wedge r_2$ leur est aussi équivalente. En effet, par hypothèse $r_1(0) = r_2(0) = K$; d'autre part $r_1 \wedge r_2(0) = r_1(0) \wedge r_2(0)$ en général, puisque $x r_1 0$ et $x r_2 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x(r_1 \wedge r_2) 0$ et $x(r_1 \wedge r_2) 0 \Rightarrow x r_1 0$ et $x r_2 0$; donc si r_1 et r_2 sont dans la même classe et fermées, $r_1 \wedge r_2$ est dans la même classe et $r_1 \wedge r_2 \subseteq r_1$ (resp. r_2) donc (hypothèse de fermeture) $r_1 \wedge r_2 = r_1$ (resp. r_2), donc $r_1 = r_2$. Les congruences fermées apparaissent donc comme étant uniquement déterminées par leur noyau.

Théorème 3. *Si r est une congruence, $r(0)$ est un idéal fermé et l'application ainsi définie de $\mathcal{R}$ dans $\overline{\mathcal{I}}$ est un $\wedge$-homomorphisme dont la restriction à $\overline{\mathcal{R}}$ est injective.*

En effet: a) $x, y \in r(0) \Rightarrow x r 0$ et $y r 0 \Rightarrow (x + y) r 0$ et $x + y \in r(0)$; b) $x r 0$ et a quelconque $(a.x) r 0 \Rightarrow a.x \in r(0)$, de même $(x.a)$; c) $0 r 0$ par définition, $r(0)$ est un idéal qui est fermé car $y \leqslant x$ et $x r 0$, alors $(x + y) r y$ mais $x + y = x$, donc $y r x r 0$ et $y \in r(0)$.

Cette application est un $\wedge$-homomorphisme puisque nous avons vu (proposition 3) que $r_1 \wedge r_2(0) = r_1(0) \wedge r_2(0)$. Notons que la restriction de cette application à $\overline{\mathcal{R}}$ est injective. Deux éléments distincts de $\overline{\mathcal{R}}$ r_1 et r_2 sont tels en effet que $r_1(0) \neq r_2(0)$ d'après la proposition 3.

Théorème 4 (réciproque). *A tout idéal $\mathcal{J}$ correspond une congruence $r_{\mathcal{J}}$ dont le noyau est $\overline{\mathcal{J}}$, deux idéaux donnant la même congruence si et seulement si ils ont même fermeture. En outre la congruence obtenue est fermée.*

L'application ainsi définie est un $\vee$-homomorphisme de $\overline{\mathcal{I}}$ sur $\overline{\mathcal{R}}$ (qui apparait donc comme un $\vee$-demi treillis) et sa restriction à $\overline{\mathcal{I}}$ est injective.

En effet: soit $r_{\mathcal{J}}$ la relation $x r_{\mathcal{J}} y \Leftrightarrow \exists a \in \mathcal{J} : x + a = y + a$; $r_{\mathcal{J}}$ est une équivalence comme il est très facile de le montrer. C'est une congruence parce que $x r_{\mathcal{J}} y \Rightarrow \exists a \in \mathcal{J} : x + a = y + a \Rightarrow x + z + a = y + z + a \Rightarrow$ $\Rightarrow (x + z) r_{\mathcal{J}} (y + z)$ et de même $(x + a) z = (y + a) z \Rightarrow x.z + a.z = y.z +$ $+ a.z$ et comme $a.z \in \mathcal{J} (x.z) r_{\mathcal{J}} (y.z)$; $r_{\mathcal{J}}(0) = \overline{\mathcal{J}}$: en effet $x r_{\mathcal{J}} 0 \Rightarrow x + a =$ $= a (a \in \mathcal{J}) \Rightarrow x \leqslant a$ et $x \in \overline{\mathcal{J}}$, réciproquement $x \in \overline{\mathcal{J}} \Rightarrow x \leqslant a (a \in \mathcal{J})$ donc $x +$ $+ a = a$ et $x r_{\mathcal{J}} 0$. Si $\overline{\mathcal{J}}_1 = \overline{\mathcal{J}}_2 \Rightarrow r_{\mathcal{J}1} = r_{\mathcal{J}2}$ car $x r_{\mathcal{J}1} y \Rightarrow x + a = y + a$, $a \in \mathcal{J}_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow a \in \overline{\mathcal{J}}_1 = \overline{\mathcal{J}}_2$, donc $a \leqslant \alpha$ avec $\alpha \in \mathcal{J}_2$ et $x + a + \alpha = y + a + \alpha = x + \alpha =$ $= y + \alpha$, donc $x r_{\mathcal{J}2} y$, donc $r_{\mathcal{J}1} \subseteq r_{\mathcal{J}2}$, de même $r_{\mathcal{J}2} \subseteq r_{\mathcal{J}1}$, d'où $r_{\mathcal{J}1} = r_{\mathcal{J}2}$; réciproquement si $r_{\mathcal{J}1} = r_{\mathcal{J}2}$ alors $\overline{\mathcal{J}}_1 = r_{\mathcal{J}1}(0) = r_{\mathcal{J}2}(0) = \overline{\mathcal{J}}_2$.

La correspondance $\mathcal{J} \to r_{\mathcal{J}}$ est un $\vee$-homomorphisme ; en effet, montrons que $r_{\mathcal{J}_1} \vee r_{\mathcal{J}_2} = r_{\mathcal{J}_1 \vee \mathcal{J}_2}$.

Si $x\, r_{\mathcal{J}_1 \vee \mathcal{J}_2}\, y$ alors $x + a = y + a$ avec $a \in \mathcal{J}_1 \vee \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$. Donc $a = a_1 + a_2$ avec $a_1 \in \mathcal{J}_1$ et $a_2 \in \mathcal{J}_2$. Il en résulte que $x + a_1 + a_2 = y + a_1 + a_2$, soit $(x + a_1)\, r_{\mathcal{J}_2} (y + a_1)$; mais $(x + a_1)\, r_{\mathcal{J}_1} x$ puisque $(x + a_1) + a_1 = x + a_1$ et $(y + a_1)\, r_{\mathcal{J}_1} y$, donc $x\, r_{\mathcal{J}_1} (x + a_1)\, r_{\mathcal{J}_2} (y + a_1)\, r_{\mathcal{J}_1} y$, donc $x\, (r_{\mathcal{J}_1} \vee r_{\mathcal{J}_2})\, y$; par suite $r_{\mathcal{J}_1 \wedge \mathcal{J}_2} \subseteq r_{\mathcal{J}_1} \vee r_{\mathcal{J}_2}$.

Réciproquement si $x\, (r_{\mathcal{J}_1} \vee r_{\mathcal{J}_2})\, y$ alors il existe une suite finie d'éléments $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ telle que x soit congru à a_1, a_i soit congru à a_{i+1} et a_{k-1} soit congru à y par au moins une congruence $r_{\mathcal{J}_1}$ ou $r_{\mathcal{J}_2}$, soit encore $x + \alpha_1 = a_1 + \alpha_1$, $a_1 + \alpha_2 = a_2 + \alpha_2$, $a_{k-1} + \alpha_k = y + \alpha_k$. Les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont éléments soit de $\mathcal{J}_1$ soit de $\mathcal{J}_2$; on tire alors de ces égalités que $x + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = y + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$, soit $x + \alpha = y + \alpha$ avec $\alpha = \sum \alpha_i$; mais $\alpha \in \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_1 \vee \mathcal{J}_2$, donc $x\, r_{\mathcal{J}_1 \vee \mathcal{J}_2}\, y$, donc $r_{\mathcal{J}_1 \vee \mathcal{J}_2} = r_{\mathcal{J}_1} \vee r_{\mathcal{J}_2}$.

Montrons que $r_{\mathcal{J}}$ est fermé : soit ϱ une congruence telle que $\varrho(0) = \overline{\mathcal{J}} = r_{\mathcal{J}}(0)$; montrons que $x\, r_{\mathcal{J}}\, y \Rightarrow x\, \varrho\, y$. En effet $x\, r_{\mathcal{J}}\, y \Rightarrow x + a = y + a$, $a \in \mathcal{J}$, donc $a\, \varrho\, 0$; par suite $(x + a)\, \varrho\, x$ et $(y + a)\, \varrho\, y$; comme $x + a = y + a$ nous déduisons $x\, \varrho\, y$; $r_{\mathcal{J}}$ est donc la plus petite congruence de sa classe, elle est donc fermée.

L'application précédente est sur $\overline{\mathcal{R}}$, car réciproquement toute congruence r fermée définit l'idéal $\mathcal{J} = r(0)$ fermé et $r_{\mathcal{J}} = r$; $\overline{\mathcal{R}}$ apparaît donc comme un $\vee$-demi treillis image isotone et biunivoque d'un $\wedge$-demi treillis $\overline{\mathcal{J}}$.

Corollaire 1. *$\overline{\mathcal{R}}$ et $\overline{\mathcal{J}}$ sont des treillis isomorphes.*

$\overline{\mathcal{J}}$ en effet est un $\wedge$-demi treillis et $\overline{\mathcal{R}}$ un $\vee$-demi treillis ; mais ce sont des treillis.. Il suffit pour $\overline{\mathcal{J}}$ de définir l'union $\overset{1}{\vee}$ comme $I_1 \overset{1}{\vee} I_2 = \overline{(I_1 \vee I_2)}$ et sur $\overline{\mathcal{R}}$ $r_1 \overset{1}{\wedge} r_2 =$ fermeture de $(r_1 \wedge r_2)$.

Corollaire 2. *Si E est décomposable $\overline{\mathcal{R}}$ et $\overline{\mathcal{J}}$ apparaissent comme des sous-treillis distributifs respectivement de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{J}$ et qui sont isomorphes.*

Reçue le 17 IX 1965

Université de Grenoble, France

BIBLIOGRAPHIE

1. Dubreil-Jacotin L., Lesieur L., Croisot R., *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnés et des treillis géométriques.* Gauthier-Villars, Paris, 1963.
2. Birckhoff G., *Lattice Theory.* American Mathematical Society, 1961.

BIBLIOTECA MUZEULUI KÖZPONTI 1848

PSEUDO-LATICE DISTRIBUTIVE ŞI APLICAŢII

Nota I. Pseudo-latice distributive

(Rezumat)

În această primă parte a lucrării se defineşte şi se studiază structura algebrică a pseudo-laticelor distributive, urmînd a se expune apoi un procedeu de construcţie a pseudo-laticelor plecînd de la monoizi ordonaţi, precum şi aplicaţii la studiul grafurilor.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

D. C. 519.311

SUFFICIENCY THEOREMS CONCERNED WITH GENERAL VARIATIONAL PROBLEMS AND APPLICATIONS TO POLYVIBRATING BOUNDARY VALUE PROBLEMS (I)

BY

MAURO PICONE
Honorary Member of the Socialist Republic of Romania Academy
and
D. MANGERON

1. In a set of his previous research work papers published mostly in the *Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei* [1], [2] and this *Bulletin* [3], [4] the first of the authors formulates a number of sufficient conditions for a vector function

$$y_0^{(x)}, \quad (y = y_1, y_2, \ldots, y_n, \; x = x_1, x_2, \ldots, x_r),$$

to minimize an integral of the form

$$I(y) = \int_D f[x, y(x), p(x)]\, dx \tag{1}$$

among all vectors $y(x)$, for which

$$y_0(x) - \varrho'(x) \leqslant y(x) \leqslant y_0(x) + \varrho''(x)$$

and $p(x) \in$ a set G in the p — space

$$p = \{p_{ih}, \; i = 1,2,\ldots,n; h = 1,2,\ldots,r\}, \quad p_{ih}(x) = \frac{\partial y^i}{\partial x^h}.$$

Here $\varrho'(x) + \varrho''(x) > 0$ for $x \in D$, $\varrho'(x), \varrho''(x) \geqslant 0$ for x on $D \cup FD$, and $\varrho'(x) = \varrho''(x) = 0$ on FD. One of his most important conditions is that there exist an invariant integral

$$I_v(y) = \int_D v[x, y(x), p(x)]\, dx \tag{2}$$

such that

$$f(x,y,p) - v(x,y,p) - f[x,y_0(x),p_0(x)] + v[x,y_0(x),p_0(x)] \geqslant 0$$

for all (x,y,p) in the sets described above.

The author exibits several types of integrands $v(x,y,p)$ which yield invariant integrals and derives the most general form of such integrands in the case where $r = n = 2$.

In an important particular case [5] the research is concerned with conditions under which a given extremal $z_0(x,y)$ of an integral

$$I(z) = \int_D f(x,y,z,z_x,z_y,z_{xx},z_{xy},z_{yy})\,dx\,dy \tag{3}$$

furnishes the absolute minimum among all functions $z(x,y)$ such that $z_0(x,y) - \varrho'(x,y) \leqslant z(x,y) \leqslant z_0(x,y) + \varrho''(x,y)$, where (z_x, z_y) belongs to a given convex set G in R_2, and (z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}) belongs to a given convex set K in R_3, and $z(x,y) = z_0(x,y)$, $z_x(x,y) = z_{0x}(x,y)$ and $z_y(x,y) = z_{0y}(x,y)$ on the boundary ∂D of D; here ϱ' and ϱ'' are non-negative functions which may be $+\infty$ for some or all (x,y). A first sufficient condition is that the quadratic form in 6 variables whose coefficients are the second derivatives of f with respect to (z,p,g,r,s,t) be non-negative definite for all the values admitted above.

The author then notes that the same result holds with f replaced by $f+g$, where g is the integrand of any integral whose value depends only on the given boundary values.

By using these results when f and g may depend on λ, he obtains results concerning the eigenvalues of the fourth-order equation $\Delta^2 z + \lambda w(x,y) z = 0$, the solutions of which are extremals of the integral $I(z)$, where

$$2f = r^2 + 2s^2 + t^2 + \lambda w(x,y) z^2 .$$

He introduces a rather general function g (integrand of an invariant integral) which involves 12 arbitrary functions and obtains results by choosing these functions in special ways.

In the general case the author also generalizes somewhat the sufficient condition that the quadratic form

$$\sum (f_{p_{ih}p_{jk}} \pi_{ih} \pi_{jk} + 2 f_{p_{ih}y_j} \pi_{ih} \eta_j + f_{y_i y_j} \eta_i \eta_j) \geqslant 0$$

for all (x,y,p) in the set above and all sets π_{ih} and η_i. He points out that the Weierstrass condition (non-negative definiteness of the π part of the form above for $y = y_0(x)$, $p = p_0(x)$ is not necessary. He also generalizes a method of finding bounds for eigenvalues related with polyharmonic boundary value problems [6], [7]. The papers [8], [9] deal finally with various extensions concerned with formulating of sufficient and necessary conditions for a minimum of pluridimensional integrals of any order for a vector function in many components.

2. Various applications concerned with the above mentioned results [10] are to be related with the following first formulated and partially solved by the second of the authors polyvibrating boundary value problems:

a) Let us consider the well known minimization problem [11]

$$\min\left[\int_a^b y^{(n)^2}\,dx \Big/ \int_a^b y^{(n-p)^2}\,dx\right] = [2u_{n,p}/(b-a)]^2,$$

$$u_{n,p} = \min \lambda > 0, \quad y^{(i)}(a) = y^{(i)}(b) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$y^{(2n)} - (-1)^p \lambda^{2p} y^{(2n-2p)} = 0.$$

The first of the applications to be published in one of the next issues of this Bulletin is concerned with the explicit minimization of the set of generalized variational problems containing „total derivatives" (*s.* [9])

$$\min\left[\int_R (D^{(n)} u)^2\,dv \Big/ \int_R (D^{(n-p)} u)^2\,dv\right] = u^2_{n,p,m} \Big/ \left[\prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i)^2\right], \tag{4}$$

$$R = \{a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$u_{n,p,m} = \min \lambda > 0, \quad dv = dx_1\,dx_2 \ldots dx_m,$$

$$D^{(2n)} u - (-1)^p \lambda^{(2p)} u^{(2n-2p)} = 0, \qquad D^{(j)} u\,|_{FR} = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{5}$$

realized using R. Courant minimax method by the second of the authors [12] in his Thesis accepted for higher degree.

b) In some of his previous papers [13] the second of the authors has developed from different points of view the boundary value problems concerning equations of non elliptic type [1].

He has established relations between the characteristic values of the boundary value problems

$$[A(x)\,u' + \lambda B(x)\,u]' + \lambda [B(x)\,u' + C(x)\,u] = 0 \tag{6}$$

on R, $u = 0$ on the boundary of R, and the minimum values of the functional

$$F(f) = \int_R A(x) f'^2(x)\,dx, \tag{7}$$

subject to the conditions that

$$H(f) = \int_R [2B(x) f(x) f'(x) + C(x) f^2(x)]\,dx = \pm 1, \tag{8}$$

and $f = 0$ on the boundary of R.

The novel aspects of the theorems lies in the interpretation of R as a m-dimensional rectangular domain and the symbol $'$ as designating total differentiation in the sense that

[1] This problem received due mention in large field of subsequent research papers belonging to well known scientists [14] ... [17].

$$u' \equiv Du \equiv \frac{\partial^m u}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m} \tag{9}$$

(Picone's sense [18]).

Dynamic programming of the above solved problems was also established.

In one of the author's next research papers various extensions of related to (4)...(9) variational problems will be discussed.

Some variational problems concerned with integro-differential polyvibrating systems will also be considered.

Received the 26 X 1965

National Academy dei Lincei, Rome, Italy
and
Polytechnic Institute of Jassy,

LITERATURE

1. Picone M., Atti Accad. Naz. dei Lincei, 1963, Memorie, Cl. Sci. fis., mat. e natur., s. *8*, **VII**, sez. **I**, *3*, pp. 33—58.
2. — Atti Accad. Naz. dei Lincei, 1962, Memorie. Cl. Sci. fis., mat. e natur., s. *8*, **VI**, sez. **I**, *12*, pp. 341—374.
3. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965,**XI** (**XV**), *1—2*, pp. 7—10.
4. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X** (**XIV**), *3—4*, pp. 21—26.
5. — *Criteri sufficienti nel Calcolo delle variazioni e loro applicazioni.* In the vol. *Atti del Simposio Lagrangiano.* Accad. Sci., Torino, 1964, pp. 1—20.
6. *** *Mauro Picone.* Academia Naz. dei XL, Annurio, Roma, 1961, pp. 294 a. foll.
7. Nicolescu M., *Fonctions polyharmoniques.* Hermann, Paris, 1935.
8. Picone M., Mangeron D., Bull. Acad. Royale des Sci. de Belgique (in print).
9. — Bull. Acad. Polon. Sci. (in print).
10. — Rev. Roum. Sci. Techn., Sér. Méc. appl. (in print).
11. Janet M., *Détermination explicite de certains minima.* Congrès International des, Mathématiciens, Zurich, 1932, 2 pp.
12. Mangeron D., Atti Accad. Naz. dei Lincei, Rend., Cl. Sci. fis., mat. e natur., 1932, s. *6*, **XVI**, *7—8*, pp. 305—310.
13. — J. Math. Anal. a Appl., 1964, **9**, *1*, pp. 141—146.
14. Favard J., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI** (**XV**), *1—2*, pp 17—20.
15. Kamytov T., Atti Accad. Naz. dei Lincei, Rend., Cl. Sci. fis., mat. e natur., 1964, s. *8*, **XXXVIII**, *5*, pp. 242—245.
16. Кривошеин Л.. Е., *Приближенное решение интегро-дифференциальных уравнени* АН Кирг ССР, Фрунзе, 1962.
17. Березанский Ю. Н., 1958, **122**, *6*, стр. 959—962.
18. Picone M., Ann. Sci. Univ. Jassy, *1*-e sect., 1940, **XXVI**, *1*, pp. 183—232.

CRITERII SUFICIENTE DE EXTREMUM REFERITOARE LA PROBLEME GENERALE DE CALCULUL VARIAŢIILOR ŞI APLICAŢII LA STUDIUL SISTEMELOR POLIVIBRANTE (I)

(Rezumat)

Autorii, luînd ca punct de plecare seria de cercetări proprii [1]...[5], [12], [13] referitoare la extinderi aprofundate a problematicii Calculului variaţiilor şi la studiul sistemelor polivibrante, fixează cadrul a două probleme privitoare la sistemele menţionate (4)...(9), rezolvate anterior de cel de al doilea autor prin metodele variaţionale clasice şi prin programare dinamică. Dezvoltări algoritmice corespunzătoare noilor rezultate în domeniul Calculului variaţional, stabilite de primul dintre autori, sînt cuprinse în lucrările autorilor [8]...[10].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 512.9

ASUPRA CARACTERULUI DE ALGEBRE POLINOMIALE AL UNOR NUMERE HIPERCOMPLEXE UTILIZATE ÎN STUDIUL UNOR OSCILAŢII LINIARE

DE

I. ENESCU

1. În [1]...[3] s-au studiat proprietăţile de structură ale algebrelor polinomiale peste cîmpul real. Printre altele, s-a arătat că dacă un element al unei algebre de ordin n peste cîmpul real, asociativă, comutativă şi cu unitate principală, are polinomul minimal de grad n, atunci algebra este polinomială şi admite o bază formată cu puterile x^n, $n = 0, 1, ..., n-1$.

În [4], în scopul studierii pe cale simbolică a mişcărilor forţate ale oscilatorilor liniari, supuşi acţiunii unor perturbaţii modulate armonic în amplitudine, s-au introdus trei tipuri de mărimi

$$P = a_1 + a_2 \mathrm{i} + a_3 \mathrm{j} + a_4 \mathrm{ij}, \tag{1}$$

cu $a_i\,(i = 1, ..., 4)$ reali şi i, j, ij (= ji) satisfăcînd respectiv relaţiile

$$\begin{gathered} \mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = -1,\ (\mathrm{ij})^2 = 1; \qquad \mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = 1,\ (\mathrm{ij})^2 = 1; \\ \mathrm{i}^2 = 1,\ \mathrm{j}^2 = -1,\ (\mathrm{ij})^2 = -1. \end{gathered} \tag{2}$$

Mărimile (1) care satisfac (2_1) s-au denumit în [4] polinioni $\mathcal{P}$, iar cele care verifică (2_2) sau (2_3) — polinioni $\mathcal{Q}$, respectiv polinioni $\mathcal{R}$.

În Nota de faţă se arată că polinionii $\mathcal{P}$ (1), (2_1); $\mathcal{Q}$ (1), (2_2) şi $\mathcal{R}$ (1), (2_3) formează respectiv algebre polinomiale, punîndu-se în evidenţă proprietăţile lor de structură.

2. Fie polinionii $\mathcal{P}$ (1), (2_1); pentru simplitatea scrierii să punem

$$1 = e_1,\ \mathrm{i} = e_2,\ \mathrm{j} = e_3,\ \mathrm{ij} = e_4. \tag{3}$$

Atunci tabela lor de înmulţire este

(4)

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-e_1$	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	e_4	$-e_1$	$-e_2$
e_4	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1

şi se verifică imediat că operaţia este asociativă.

Aşadar, polinionii $\mathcal{P}$ formează o algebră de ordin IV, asociativă, comutativă, cu unitate principală, peste cîmpul real.

Fie elementul $w = e_2 + e_4$. Avem $w^2 = -2e_3$, $w^3 = 2(e_2 - e_4)$, $w^4 = -4e_1$. Se vede că elementul $e_2 + e_4$ satisface ecuaţia $(e_2 + e_4)^4 + 4e_1 = 0$, ceea ce arată că polinomul

$$\varphi(\lambda) = \lambda^4 + 4 \tag{5}$$

este minimal pentru w. Atunci [1] am dovedit

Teorema 1. *Polinionii $\mathcal{P}$ formează o algebră polinomială de ordin IV peste cîmpul real, generată de polinomul* (5).

Baza de puteri este atunci [1]:

(6)

	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	u_1	u_2	u_3	u_4
u_2	u_2	u_3	u_4	$-4u_1$,
u_3	u_3	u_4	$-4u_1$	$-4u_2$
u_4	u_4	$-4u_1$	$-4u_2$	$-4u_3$

trecerea de la baza e_i la baza u_i $(i = 1, ..., 4)$ fiind dată de $e_1 = u_1$, $e_2 + e_4 = u_2$, $-2e_3 = u_3$ şi $2(e_2 - e_4) = u_4$. Apoi, întrucît polinomul generator se poate scrie $\lambda^4 + 4 = [(\lambda + 1)^2 + 1][(\lambda - 1)^2 + 1]$, rezultă [2] că algebra în chestiune este semisimplă şi este suma directă a două algebre de ordin II, izomorfe cu cîmpul complex, anume acelea generate de, respectiv, polinoamele $(\lambda + 1)^2 + 1$ şi $(\lambda - 1)^2 + 1$. Pentru găsirea bazei care pune în evidenţă acest lucru să luăm [3]

$$\frac{1}{2}(e_1 + e_4) = v_1, \quad \frac{1}{2}(e_2 - e_3) = v_2, \quad \frac{1}{2}(e_1 - e_4) = v_3, \quad \frac{1}{2}(e_2 + e_3) = v_4.$$

Un calcul simplu conduce în baza v_i la tabela

(7)

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	v_1	v_2	0	0
v_2	v_2	$-v_1$	0	0
v_3	0	0	v_3	v_4
v_4	0	0	v_4	$-v_3$

Am demonstrat deci

Teorema 2. *Polinionii $\mathcal{P}$ formează o algebră polinomială semisimplă, care este suma directă a două algebre izomorfe cu cîmpul complex, tabela de înmulțire care pune în evidență aceasta fiind dată de* (7).

Structura găsită explică de ce în [4] polinionii $\mathcal{P}$ au putut fi scriși a numere bicomplexe. Se vede apoi ușor că divizorii lui zero sînt elemencele de forma $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ și respectiv $\alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4$, cu α_i scalari.

3. In cazul polinionilor Q să punem

$$1 = e_1,\ \mathrm{i} = e_2,\ \mathrm{j} = e_3,\ \mathrm{ij} = e_4 \tag{8}$$

și observînd, ca și în cazul precedent, că produsul este asociativ, tabela de înmulțire în baza e_i este

(9)

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	e_1	e_4	e_3
e_3	e_3	e_4	e_1	e_2
e_4	e_4	e_3	e_2	e_1

Să considerăm elementul $w = \frac{3}{2} e_2 - \frac{1}{2} e_4$; un calcul evident arată că $w^2 = \frac{5}{2} e_1 - \frac{3}{2} e_3$, $w^3 = \frac{9}{2} e_2 - \frac{7}{2} e_4$, $w^4 = \frac{17}{2} e_1 - \frac{15}{2} e_3$ și se verifică imediat că $\left(\frac{17}{2} e_1 - \frac{15}{2} e_3\right) - 5\left(\frac{5}{2} e_1 - \frac{3}{2} e_3\right) + 4e_1 = 0$, ceea ce arată că polinomul

$$\varphi(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 \tag{10}$$

este minimal pentru elementul $w = \frac{3}{2} e_2 - \frac{1}{2} e_4$. Atunci [2] urmează

Teorema 3. *Polinionii Q formează o algebră polinomială de ordin IV peste cîmpul real, generată de polinomul* (10).

Luînd $e_1 = u_1$, $\frac{3}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_4 = u_2$, $\frac{5}{2}e_1 - \frac{3}{2}e_3 = u_3$, $\frac{9}{2}e_2 - \frac{7}{2}e_4 = u_4$ se obţine tabela de înmulţire în baza de puteri

(11)

	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	u_1	u_2	u_3	u^4
u_2	u_2	u_3	u_4	$5u_3 - 4u_1$
u_3	u_3	u_4	$5u_3 - 4u_1$	$5u_4 - 4u_2$
u_4	u_4	$5u_3 - 4u_1$	$5u_4 - 4u_2$	$21\,u_3 - 20\,u_1$

Intrucît $\varphi(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda + 2)$ rezultă [2]

Teorema 4. *Algebra polinionilor Q este semisimplă şi este suma directă a patru algebre de ordin I izomorfe cu cîmpul real.*

Făcînd schimbarea de bază $\frac{1}{4}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = v_1$, $\frac{1}{4}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4) = v_2$, $\frac{1}{4}(e_1 + e_2 - e_3 - e_4) = v_3$ şi $\frac{1}{4}(e_1 - e_2 - e_3 + e_4) = v_4$, tabela de înmulţire este

(12)

	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	v_1	0	0	0
v_2	0	v_2	0	0
v_3	0	0	v_3	0
v_4	0	0	0	v_4

Se observă şi pentru algebra polinionilor Q existenţa divizorilor lui zero a căror formă este evidentă din (12).

4. Cu notaţiile şi observaţia asupra asociativităţii făcute la §§ **2** şi **3**, tabela de înmulţire a polinionilor $\mathcal{R}$ este

(13)

	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	e_1	e_4	e_3
e_3	e_3	e_4	$-e_1$	$-e_2$
e_4	e_4	e_3	$-e_2$	$-e_1$

Punînd $w = e_2 + e_3$ un calcul evident conduce la $w^2 = 2e_4$, $w^3 = 2(e_3 - e_2)$, $w^4 = -4e_1$, ceea ce arată că acelaşi polinom (5) este minimal şi pentru elementul $w = e_2 + e_3$. Se constată deci că şi polinionii $\mathcal{R}$ formează o algebră polinomială de ordin IV, generată de polinomul (5) pus în evidenţă pentru polinionii $\mathcal{P}$, ceea ce dovedeşte că cele două algebre sînt izomorfe. Ţinînd seama că cele două algebre sînt generate de acelaşi polinom, pe acelaşi cîmp bază, rezultă

Teorema 5. *Algebra polinionilor $\mathcal{R}$ este identică cu aceea a polinionilor $\mathcal{P}$.*

Pentru polinionii $\mathcal{R}$ trecerea de la baza (13) la cea de puteri este dată de

$$e_1 = u_1, \quad e_2 + e_3 = u_2, \quad 2e_4 = u_3, \quad 2(e_3 - e_2) = u_4. \tag{14}$$

În sfîrşit, trecerea la baza v_i $(i = 1, \ldots, 4)$, care pune în evidenţă structura de sumă directă, este dată de

$$\frac{1}{2}\left(u_1 + \frac{3}{4}u_2 - \frac{1}{4}u_4\right) = v_1, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}u_2 + \frac{1}{4}u_4 + \frac{1}{2}u_3\right) = v_2,$$

$$\frac{1}{2}\left(u_1 - \frac{3}{4}u_2 + \frac{1}{2}u_4\right) = v_3, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}u_2 + \frac{1}{4}u_4 - \frac{1}{2}u_3\right) = v_4,$$

tabela de înmulţire fiind dată de (7).

Observăm, ca şi pentru polinionii $\mathcal{P}$, că structura găsită justifică scrierea polinionilor $\mathcal{R}$ ca numere bicomplexe, indicată în [4].

5. Trebuie observat că algebrele polinomiale îşi dovedesc utilitatea şi în probleme aplicative mai complexe, în cadrul unor procedee de reprezentare simbolică a unor perturbaţii de formă complicată, prezentate în [5] şi [6]. Astfel de probleme prezintă interes în tehnica actuală a oscilaţiilor liniare (reglare automată, seismologie etc.), respectivele algebre necesitînd o discuţie aparte.

Primită la 27 decembrie 1965

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de matematici II

BIBLIOGRAFIE

1. Enescu I., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *1–2*, pp. 49—53.
2. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *3—4*, pp. 25—28.
3. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *1—2*, pp. 17–20.
4. Braier A., Rosman H., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *1–2*, pp. 309—320.
5. Braier A., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *3—4*, pp. 93—100.
6. — Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *3–4* (sub tipar).

SUR LE CARACTÈRE POLYNÔMIALE DE CERTAINS NOMBRES HYPERCOMPLEXES UTILISÉS DANS L'ÉTUDE DES OSCILLATIONS LINÉAIRES

(Résumé)

En utilisant [1]...[3] on démontre que les nombres hypercomplexes (1), (2_1) ; (1), (2_2) et (1), (2_3) qu'interviennent dans certains problèmes concernant les oscillations linéaires [4], constituent respectivement des algèbres polynômiales et on met en évidence leurs propriétés de structure.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 517.432

ON THE EIGENVALUES OF A SINGULAR NONSELF-ADJOINT DIFFERENTIAL OPERATOR OF SECOND ORDER [1])

BY

ALLAN M. KRALL

1. The nonself-adjoint operator $ly = y'' + q(x)y$, where $q(x) = q_1(x) + i q_2(x)$, $q_1(x)$ and $q_2(x)$ are real valued, $\lim_{x \to a} q_2(x) = \delta$, $\lim_{x \to b} q_2(x) = \gamma$, was considered over an interval (a, b) in [1]. From l a nonself-adjoint operator L was defined in $L^2(a, b)$. The spectrum and adjoint of L were found, and a „spectral resolution" was derived.

If r is an arbitrary point in (a, b) it was shown that when $\lambda = \mu + i\nu$, $\nu \neq \gamma$, $ly = \lambda y$ has a solution $\psi(x, \lambda)$ in $L^2(r, b)$, and when $\nu \neq \delta$, $ly = \lambda y$ has a solution $h(x, \lambda)$ in $L^2(a, r)$. λ is an eigenvalue of L if and only if the Wronskian of $\psi(x, \lambda)$ and $h(x, \lambda)$ is zero. This paper wishes to characterize these eigenvalues, the zeros of $W[\psi, h]$.

In what follows every expression is a function of the complex variable λ. In the interest of notational clarity, it has been suppressed.

2. Let $\theta(x)$ and $\Phi(x)$ be the solutions of $ly = \lambda y$ satisfying $\theta(r) = 1$, $\theta'(r) = 0$, $\Phi(r) = 0$, $\Phi'(r) = -1$. We choose s in $[r, b]$ such that $|q_2(x) - \gamma| < |\nu - \gamma|/2$ for all x in $[s, b]$ when γ is finite, or such that $|q_2(x) - \nu| > \varepsilon$ for all x in $[s, b]$ for some $\varepsilon > 0$ when γ is infinite.

We then define

$$y_{1b}(x) = \theta'(s)\Phi(x) - \Phi'(s)\theta(x) \quad \text{and} \quad y_{2b} = \theta(s)\Phi(x) - \Phi(s)\theta(x).$$

In $[s, b)$ a sequence of nested circles $C(\beta)$ is found all containing a limit circle or limit point given by

---

[1]) This work was supported in part by NASA Grant No. NGR - 39 - 009 - 044.

$$M = \lim_{\beta \to b} \left[- \frac{y_{1b}(\beta) z_b + y'_{1b}(\beta)}{y_{2b}(\beta) z_b + y'_{2b}(\beta)} \right],$$

where z_b is any real number. $\psi(x)$ is then given by

$$\psi(x) = \theta(x)[-\Phi'(s) + M\Phi(s)] + \Phi(x)[\theta'(s) + M\theta(s)].$$

(See [1] and [2]).

Similarly we choose t in (a, r) such that $|q_2(x) - \delta| < |\nu - \delta|/2$ for all x in $(a, t]$ when δ is finite, or such that $q_2(x) - \nu| > \varepsilon$ for all x in $(a, t]$ for some $\varepsilon > 0$ when δ is infinite.

We define

$$y_{1a}(x) = \theta'(t)\Phi(x) - \Phi'(t)\theta(x) \quad \text{and} \quad y_{2a}(x) = -\theta(t)\Phi(x) + \Phi(t)\theta(x).$$

In $(a, t]$ a sequence of nested circles $C(\alpha)$ is found, all containing a limit circle or limit point given by

$$-m = \lim_{\alpha \to a} \left[- \frac{y_{1a}(\alpha) z_a + y'_{1a}(\alpha)}{y_{2a}(\alpha) z_a + y'_{2a}(\alpha)} \right],$$

where z_a is any real number. $h(x)$ is then given by

$$h(x) = -\theta(x)[\Phi'(t) + m\Phi(t)] + \Phi(x)[\theta'(t) + m\theta(t)].$$

(Again see [1] and [2]).

Lemma. *Let* $D_b(\beta) = y_{2b}(\beta) z_b + y'_{2b}(\beta)$, $D_a(\alpha) = y_{2a}(\alpha) z_a + y'_{2a}(\alpha)$. *Then*

$$W[\psi, h] = \lim_{\substack{\alpha \to a \\ \beta \to b}} \{[\Phi(\beta) z_b + \Phi'(\beta)][\theta(\alpha) z_a + \theta'(\alpha)] - [\theta(\beta) z_b + \theta'(\beta)][\Phi(\alpha) z_a + \Phi'(\alpha)]\}/[D_a(\alpha) D_b(\beta)].$$

Proof: We observe that $W[\psi, h]$ is independent of x. Computing $W[\psi, h]$ at $x = r$ we see

$$W[\psi, h] = [\Phi'(s) + M\Phi(s)][\theta'(t) + m\theta(t)] - [\theta'(s) + M\theta(s)][\Phi'(t) + m\Phi(t)].$$

Inserting the expressions for m and M and taking limits completes the proof.

Theorem 1. *If* $D_a(\alpha)$ *and* $D_b(\beta)$ *approach finite limits as* $\alpha \to a$ *and* $\beta \to b$, *then* $W[\psi, h] = 0$ *if and only if*

$$\lim_{\substack{\alpha\to a\\ \beta\to b}} \{[\Phi(\beta) z_b + \Phi'(\beta)][\theta(\alpha) z_a + \theta'(\alpha)] -$$

$$-[\theta(\beta) z_b + \theta'(\beta)][\Phi(\alpha) z_a + \Phi'(\alpha)]\} = 0.$$

Note that this last equation in no way depends upon the points $x = s$ or $s = t$.

In the limit point cases the value of M (or m) is independent of the choice of z_b (or z_a). Only in the limit circle cases does M (or m) vary with the choice of z_b (or z_a).

Theorem 2. *If the limit point case holds at a and b, then under the conditions of theorem 1,* $W[\psi, h] = 0$ *if and only if*

$$\lim_{\substack{\alpha\to a\\ \beta\to b}} [\Phi(\beta)\theta(\alpha) - \theta(\beta)\Phi(\alpha)] = 0, \quad \lim_{\substack{\alpha\to a\\ \beta\to b}} [\Phi(\beta)\theta'(\alpha) - \theta(\beta)\Phi'(\alpha)] = 0,$$

$$\lim_{\substack{\alpha\to a\\ \beta\to b}} [\Phi'(\beta)\theta(\alpha) - \theta'(\beta)\Phi(\alpha)] = 0, \quad \lim_{\substack{\alpha\to a\\ \beta\to b}} [\Phi'(\beta)\theta'(\alpha) - \theta'(\beta)\Phi'(\alpha)] = 0.$$

Proof: Multiply the expression in theorem 1 out and collect the coefficients of $z_a z_b$, z_a and z_b together. Since z_a and z_b are arbitrary the result follows.

Theorem 3. *If the limit point case holds at b, and the limit circle case holds at a, then under the conditions of theorem 1,* $W[\psi, h] = 0$ *if and only if*

$$\lim_{\substack{\alpha\to a\\ \beta\to b}} \{z_a[\Phi(\beta)\theta(\alpha) - \theta(\beta)\Phi(\alpha)] + [\Phi(\beta)\theta'(\alpha) - \theta(\beta)\Phi'(\alpha)]\} = 0,$$

$$\lim_{\substack{\alpha\to a\\ \beta\to b}} \{z_a[\Phi'(\beta)\theta(\alpha) - \theta'(\beta)\Phi(\alpha)] + [\Phi'(\beta)\theta'(\alpha) - \theta'(\beta)\Phi'(\alpha)]\} = 0.$$

A similar statement is valid if the limit circle case holds at b, and the limit point case holds at a.

3. These results are valid only in nonself-adjoint problems. They are not applicable in the self-adjoint case, since, in that instance, all eigenvalues lie on the real axis. There the existence of ψ and h cannot be established in general.

Received the 17 II 1966

The Pennsylvania State University,
University Park, Penna, U. S. A.

REFERENCES

1. Krall A. M., *On the expansion problem for nonself-adjoint ordinary differential operators of second order* (Submitted for publication).
2. — ДАН., 1965, **165**, *6*, стр. 1235—1237.

ASUPRA VALORILOR PROPRII ALE UNUI OPERATOR DIFERENȚIAL SINGULAR NEAUTOADJUNCT DE ORDINUL AL DOILEA

(Rezumat)

În [1] autorul a considerat în intervalul (a, b) operatorul neautoadjunct $ly = y'' + q(x)y$, în care $q(x) = q_1(x) + i\,q_2(x)$, $q_1(x)$ și $q_2(x)$ fiind reale și $\lim_{x\to a} q_2(x) = \delta$, $\lim_{x\to b} q_2(x) = \gamma$. Pornind de la l s-a definit un operator neautoadjunct L în $L^2(a, b)$. S-au determinat spectrul și adjunctul lui L, dîndu-se apoi și o „rezolvare spectrală".

Dacă r este un punct arbitrar în (a, b), s-a demonstrat că dacă $\lambda = \mu + i\nu$, $\nu \neq \gamma$, $ly = \lambda y$ are o soluție $\psi(x, \lambda)$ în $L^2(r, b)$ și dacă $\nu \neq \delta$, $ly = \lambda y$ are o soluție $h(x, \lambda)$ în $L^2(a, r)$. λ este o valoare proprie a lui L atunci și numai atunci cînd Wronskianul lui $\psi(x, \lambda)$ și $h(x, \lambda)$ este nul. În această lucrare se caracterizează aceste valori proprii, zerourile lui $W[\psi, h]$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

Д. К. 517.531

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ВЫПУКЛЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ КРУГА

Т. Г. ЭЗРОХИ

1. На коллоквиуме по классической теории функций в 1961 г. в Корнельском университете (США) было поставлено 17 задач. Одна из них следующая: пусть C окружность круга $|z|<1$, а C_1 простая замкнутая выпуклая кривая, лежащая в $|z|<1$. Существует ли такая однолистная в круге $|z|<1$ функция $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$, отличная от $f(z)\equiv z$, что $f(C)$ и $f(C_1)$ выпуклые кривые? [1].

В настоящей заметке дается положительный ответ на этот вопрос в том случае, когда выпуклая кривая C_1 обладает непрерывной или кусочно-непрерывной кривизной K_z, удовлетворяющей неравенству

$$K_z\geqslant h>0, \tag{1}$$

где h — некоторая константа. Рассматривается также тот случай, когда C_1 есть прямолинейный отрезок, причем в этом случае устанавливается общий вид функций, отображающих круг с разрезом по прямолинейному отрезку на выпуклую область также с разрезом по прямолинейному отрезку. Кроме того, изучается семейство выпуклых кривых в круге $|z|<1$, которые выпуклыми функциями отображаются на выпуклые кривые.

2. Пусть в круге $|z|<1$ задана выпуклая кривая, в каждой точке которой определена кривизна K_z. Обозначим через K_w кривизну образа при однолистном конформном отображении $w=f(z)$.

Известно, что

$$K_w=\frac{1}{|f'(z)|}\left[K_z+\mathcal{J}m\left(e^{i\alpha}\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\right], \tag{2}$$

где $e^{i\alpha}$ — орт касательной к кривой в рассматриваемой точке.

Найдем условие, которому должна удовлетворять кривая, чтобы для любой выпуклой функции выполнялось неравенство

$$K_w \geqslant 0. \tag{3}$$

Для этого найдем нижнюю границу изменения $\mathcal{J}m(e^{i\alpha} f''/f')$ для класса выпуклых функций.

Прежде всего отметим, что для выпуклых функций $w = f(z)$ в $|z| < 1$ нормированных условиями $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$,

$$\mathcal{J}m\left(\frac{e^{i\alpha} f''}{f'}\right) = \mathcal{J}m\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i(\alpha-\theta)}}{1 - ze^{-i\theta}}\, d\mu(\theta)\right] = \mathcal{J}m G_\mu,$$

где $\mu(\theta)$ — неубывающая функция на промежутке $[0, 2\pi]$ и $\int_0^{2\pi} d\mu(\theta) = 2\pi$.

Не уменьшая общности можно считать, что $\mu(\theta)$ — ступенчатая функция, имеющая скачки μ_k при $\theta = \theta_k$, $k = 1, 2, \ldots$ Пусть функция $\mu_0(\theta)$ — экстремальная. Будем варьировать функцию μ_0 следующим образом: скачок μ_m увеличим на ε, а скачок μ_k уменьшим на ε. Тогда получим

$$\mathcal{J}m\left\{G_{\mu_0} + \varepsilon\left[\frac{e^{i(\alpha-\theta_m)}}{1 - ze^{-i\theta_m}} - \frac{e^{i(\alpha-\theta_k)}}{1 - ze^{-i\theta_k}}\right]\right\}.$$

Так как ε может принимать любой знак, то, в силу того, что функция $\mu_0(\theta)$ — экстремальная,

$$\mathcal{J}m\left[\frac{e^{i(\alpha-\theta_m)}}{1 - ze^{-i\theta_m}}\right] = \mathcal{J}m\left[\frac{e_i{}^{(\alpha-\theta_k)}}{1 - ze^{-i\theta_k}}\right]$$

при любых m и k.

Отсюда следует, что $\mu_0(\theta)$ – одноступенчатая функция, т. е.

$$\mathcal{J}m\left(\frac{e^{i\alpha} f''}{f'}\right) = \mathcal{J}m\left[\frac{2e^{i(\alpha-\theta)}}{1 - ze^{-i\theta}}\right] = \mathcal{J}m\left(\frac{2e^{i\beta}}{r}\,\frac{\omega}{1-\omega}\right),$$

где $z = re^{i\varphi}$, $\alpha - \varphi = \beta$, $\omega = re^{i\psi}$, $\psi = \varphi - \theta$.

Нетрудно убедиться, что функция $\zeta = [\omega/(1-\omega)]\,(e^{i\beta}/r)$ отображает окружность $|\omega| = r$ в окружность

$$\left(x - \frac{r}{1-r^2}\cos\beta\right)^2 + \left(y - \frac{r}{1-r^2}\sin\beta\right)^2 = \left(\frac{1}{1-r^2}\right)^2.$$

Используя последнее, легко показать, что

$$\mathcal{I}m\left[\frac{2e^{i(\alpha-\theta)}}{1-ze^{-i\theta}}\right]\geqslant 2\left(\frac{r}{1-r^2}\sin\beta-\frac{r}{1-r^2}\right), \tag{4}$$

где $\sin\beta = r/\sqrt{r^2+r'^2}$.

Из соотношений (2) и (4) следует, что для выполнения условия (3) любой выпуклой функции, необходимо и достаточно чтобы для заданной кривой во всех точках выполнялось неравенство

$$K_z \geqslant 2\frac{1-r^2\sqrt{r^2+r'^2}}{1-r^2}. \tag{5}$$

Можно показать, что функция $(1-r\sin\beta)/(1-r^2)$ принимает экстремальное значение, если $r'(\varphi)=0$. Следовательно, для выполнения неравенства (3) для любой выпуклой функции достаточно, чтобы

$$K_z \geqslant 2\frac{1}{1+r_{\min}}. \tag{6}$$

Примеры. 1) Дана окружность $R^2=a^2+r^2-2\arccos(\varphi-\varphi_0)$. Легко убедиться, что $r_{\min}=R-a$ либо $r_{\min}=a-R$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что условие (6) выполняется для обоих случаев.

Таким образом получили известный факт: каждый круг выпуклыми функциями отображается на выпуклую кривую.

2) Дан эллипс с полуосями a и b. Известно, что для эллипса $K_{\min}=b/a^2$. Тогда для выполнения неравенства (3) достаточно, чтобы

$$\frac{b}{a^2}-\frac{2}{1+r_{\min}}\geqslant 0. \tag{7}$$

Очевидно, что $K_{\min}$ соответствует $r_{\min}$, если радиус-вектор перпендикулярен большой оси эллипса и проходит через центр симметрии эллипса. Неравенство (7) выполняется, как легко проверить, если $a>b\geqslant a^2$. Если же $a>a^2>b$, то существуют выпуклые функции, которые отображают эллипс на невыпуклую кривую.

3. Рассмотрим класс R_ε регулярных в круге $|z|<1$ функций

$$f(z)=z+\varepsilon\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n,$$

для которых $0<\varepsilon\leqslant 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2|a_n|\leqslant 1$.

Это класс выпуклых в $|z|<1$ функций. Для этого класса функций

$$(8)\qquad \left|\frac{e^{i\alpha}f''}{f'}\right| \leqslant \frac{\varepsilon\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n|r^{n-2}}{1-\varepsilon\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|r^{n-1}} \leqslant \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\delta},$$

где $\delta=\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|$.

Из соотношения (2) следует, что для того чтобы выпуклая кривая отображалась на выпуклую кривую достаточно, чтобы

$$(9)\qquad K_z-\left|\frac{e^{i\alpha}f''}{f'}\right|\geqslant 0.$$

Из соотношений (8) и (9) следует, что для любой выпуклой кривой, кривизна которой удовлетворяет условию (1), существует класс функций $R_\varepsilon(\varepsilon\leqslant K_z/(1+K_z\delta))$, каждая функция которого отображает данную выпуклую кривую на выпуклую кривую.

Покажем теперь, что если в круге $|z|<1$ дан прямолинейный отрезок, то существуют выпуклые функции, которые отображают его в прямолинейный отрезок, причем эти функции имеют вид

$$f(z)=\frac{1}{A}e^{Az+B}+C,$$

где A, B и C постоянные, $|A|\leqslant 1$.

Для доказательства предположим, что существует однолистная регулярная функция $w=f(z)$, $f(z)\neq 0$, $f'(z)\neq 0$, осуществляющая отображение отрезка, который образует угол α с осью Ox, в отрезок. Тогда

$$(10)\qquad \frac{\partial}{\partial s}\left(\arg\frac{dw}{dz}\right)=0,\qquad \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\ln\left|\frac{dw}{dz}\right|\right)=0,$$

где s — направление касательной, а ν — направление нормали к рассматриваемому отрезку. Система (10) может быть записана так

$$(11)\qquad \frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\sin\alpha=0,\qquad -\frac{\partial u}{\partial x}\sin\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha=0,$$

где $\ln f'(z)=u+iv=\ln|dw/dz|+i\arg(dw/dz)$.

Решая систему (11), имеем

$$v = v_\xi(y\cos\alpha - x\sin\alpha) = v_\xi(\eta), \quad u = u_\eta(x\cos\alpha + y\sin\alpha) = u_\eta(\xi),$$

причем, как легко убедиться, $ze^{-i\alpha} = \xi + i\eta$.

Так как u и v гармонические функции, то

$$v = \varphi_1(\xi)\eta + \varphi_2(\xi), \quad u = \psi_1(\eta)\xi + \psi_2(\eta).$$

В силу условий Коши-Римана

$$\varphi_1(\eta) = \psi_1(\xi) = a, \quad \psi_2(\eta) = b\eta + d, \quad \varphi_2(\xi) = -b\xi + e,$$

где a, b, d, e — постоянные. Тогда

$$u + iv = a(\xi + i\eta) - ib(\xi + i\eta) + d + ie = Az + B.$$

Таким образом $\ln f'(z) = Az + B$ и

$$f(z) = \frac{1}{A}e^{Az+B} + C,$$

причем, если $|A| \leqslant 1$, то указанные функции выпуклые.

Поступила 5 III 1963 г.

Киевскии политехническии Институт, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. * * * Notices Amer. Math. Soc., 1961, **8**, *6*, pp. 483—485.

ASUPRA PROPRIETĂŢILOR REPREZENTĂRILOR CONVEXE ALE CERCULUI

(Rezumat)

Se consideră următoarea problemă: fie C circumferinţa cercului $|z| < 1$, iar C_1 o curbă convexă simplă închisă, situată în $|z| < 1$; există în cercul $|z| < 1$ o funcţie univalentă $f(z) = z + a_2z^2 + \ldots$ diferită de $f(z) \equiv z$, astfel încît $f(C)$ şi $f(C_1)$ să fie curbe convexe ?

Răspunsul este pozitiv în cazul cînd curba convexă C_1 posedă o curbură continuă sau continuă pe porţiuni, ce satisface inegalitatea $K_z \geqslant h > 0$, unde h este o constantă arbitrară.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

D. C. 517.919

PERTURBATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

BY

T. A BURTON

1. Introduction

We consider a system of differential equations

$$X' = AX + f(X,t), \qquad (' = \mathrm{d}/\mathrm{d}t), \tag{1}$$

where A is an $n \times n$ constant matrix whose determinant is not zero, whose real characteristic roots have multiplicity of at most two and whose complex (but not real) roots are simple; f is a column vector function of the vector X and real variable t and is continuous for $|X| < \infty$. Here, and elsewhere, $|\cdot|$ stands for the usual Euclidean length.

The problem is to determine what stability or instability properties of $Y' = AY$ that (1) inherits under suitable conditions on f. Although the literature on this problem is voluminous, it was summarized for f linear by Bellman [1, pp. 32–64], was extended to local theorems for f nonlinear by Bihari [2], and was remarkably extended to global theorems by Brauer [3]. These are the main general works although many other more specific results have been obtained. Also, the above mentioned authors did not restrict their discussions regarding the multiplicity of the characteristic roots; but if this assumption is made, then one may obtain results which are stronger in some respects than those previously known. The assumption is not as strict as it might appear since by an arbitrarily small change in A (and consequently an arbitrarily small change in f) the assumption may always be realized [1, p. 25].

Two main lines of attack for problems such as these are Gronwall inequality methods and Liapunov's direct method. Both of these methods are deficient in that the first places restrictions on the norm of f even though a larger f might bring about stronger stability, while the latter method depends on the construction of Liapunov functions for which there is no algorithm. We circumvent both difficulties and utilize only the

functions given in (1) to ensure stability or instability and at the same time take advantage of the f function.

It will be assumed throughout this paper that no solution of (1) has finite escape time. Also, every solution will presumably start at $t = 0$ unless otherwise indicated.

2. Second Order Systems

We shall give a rather exhaustive account for second order systems and then show that this is easily extended to systems of any finite order due to our assumption on the multiplicity of the caracteristic roots of A. So assume for this section that A is a 2×2 matrix and without loss of generality we may assume that A is in real cononical form. For terminology which follows we refer the reader to Hurewicz [4, pp. 76—84].

Consider the system

$$Y' = AY \tag{2}$$

and the associated system

$$Y' = A^* Y, \tag{3}$$

where A^* is defined as follows. Let (2) be written as $y_1' = ay_1 + by_2$, $y_2' = cy_1 + dy_2$ and (3) as $y_1' = -cy_1 - dy_2$, $y_2' = ay_1 + by_2$, so that the orbits of (3) are orthogonal to those of (2). The following statements may be quickly verified.

1) If the null solution of (2) is a node, then the null solution of (3) is a vortex.

2) If the null solution of (2) is a saddle, then the null solution of (3) is a saddle.

3) If the null solution of (2) is a star node, then the null solution of (3) is a vortex.

4) If the null solution of (2) is a degenerate node, then the null solution of (3) is either a focus or a node.

5) If the null solution of (2) is a focus, then the null solution of (3) is a focus.

6) If the null solution of (2) is a vortex, then the null solution of (3) is a node.

In each of the above statements a conclusion about a node may mean any kind of a node and the distinction will not matter here.

Theorem 1. *Let $Y = 0$ be a stable node (or star node) for* (2). *If there exist nonnegative numbers R and M such that the inner product $[AX + f] \cdot AX > 0$ for $t > M$ and $|X| > R$, then every solution of* (1) *is bounded.*

Proof: Since no solution has finite escape time it suffices to consider any solution $X(X_0, t_0, t)$ of (1) such that $|X_0| > R$ and $t_0 > M$. There

is a periodic orbit of (3) through X_0 which we denote by C. We may assume that C lies in the region defined by $|X| > R$. On C the vector AX is orthogonal to C and points into the region bounded by C. If the inner product is positive then $AX + f(X, t)$, for X on C and $t \geqslant t_0$, also points into the interior of C. Thus C bounds $X(X_0, t_0, t)$.

Theorem 2. *Let $Y = 0$ be a stable node (or star node) for (2) and assume that M is quantified as in Theorem 1. If there exists a positive definite function $\alpha(X)$ continuous for $0 \leqslant |X| < \infty$ such that $[AX + f] \cdot AX \geqslant \alpha(X)$ for $t > M$ and all X, then every solution of (1) tends to zero as $t \to \infty$. If $M = 0$, then $X = 0$ is globally asymptotically stable.*

Proof: If for some X_0 and $t_0 > M$ the solution $X(X_0, t_0, t)$ did not tend to zero then it would asymptotically approach some periodic orbit C of (3). But in a sufficiently small annulus about C the inner product is greater than some positive number. Thus the asymptotic approach is impossible.

We shall use $\alpha(X)$, R, and M in the future under the same quantifications as in the last two theorems.

Theorem 3. *Let $Y = 0$ be a stable node (or star node) for (2). If $[AX + f] \cdot AX \leqslant -\alpha(X)$ for $|X| > R$ and $t > M$, then there exist unbounded solutions. If $R = 0$, then every nontrivial solution is unbounded.*

The proof of this theorem and the next two follow just as before.

The last three theorems show that, unless we deal with isolated sets of certain sufficiently small measure on which the inner product inequalities fail, we have obtained nearly the best possible conditions on f relative to A to insure stability or instability.

Theorem 4. *Let $Y = 0$ be an unstable node (or star node) for (2). If $[AX + f] \cdot AX < 0$ for $|X| > R$ and $t > M$, then all solutions of (1) are bounded. If $[AX + f] \cdot AX \leqslant -\alpha(X)$ for all X and $t > M$, then all solutions of (1) tend to zero as $t \to \infty$. If $[AX + f] \cdot AX \geqslant \alpha(X)$ for all X and $t > M$, then all solutions of (1) are unbounded.*

Notice that (3) could be written as $y_1' = cy_1 + dy_2$, $y_2' = -ay_1 - by_2$ and would have orbits orthogonal to those of (2). The orbits of (3) would be unchanged, but the direction of solutions along the orbits would be reversed.

Theorem 5. *Let $Y = 0$ be a vortex for (2) and let $Y = 0$ be a stable node for (3). If $[AX + f] \cdot A^* X > 0$ for $|X| > R$ and $t > M$, then all solutions of (1) are bounded. If $[AX + f] \cdot A^* X \geqslant \alpha(X)$ for all X and $t > M$, then all solutions of (1) tend to zero as $t \to \infty$; if $M = 0$, then $X = 0$ is globally asymptotically stable. If $[AX + f] \cdot A^* X \leqslant -\alpha(X)$ for all X and $t > M$, then all solutions of (1) are unbounded.*

Theorem 6. *Let $Y = 0$ be a stable focus for (2) and $Y = 0$ be a stable focus for (3). If $[AX + f] \cdot AX > 0$ and $[AX + f] \cdot A^* X > 0$ for $|X| > R$ and $t > M$, then all solutions of (1) are bounded. If*

$[AX+f]\cdot A^*X \geqslant \alpha(X)$ *for oll* X *and all* $t > M$, *then all solutions of* (1) *tend to zero as* $t \to \infty$; *if* $M = 0$ *then* $X = 0$ *is globally asymptotically stable.*

Proof: Let $|X_0| > R$, $t_0 > M$, and consider the solution $X(X_0, t_0, t)$. We may assume that $|X_0|$ is sufficiently large that the first two intersections of the solutions $Y(X_0, t_0, t)$ and $Y^*(X_0, t_0, t)$ for $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ of (2) and (3) respectively lie in the set defined by $|X| > R$. Let these intersections be $Y(X_0, t_0, t_0) = Y^*(X_0, t_0, t_0)$ and $Y(X_0, t_0, t_1) = Y^*(X_0, t_0, t_1)$. Now a simple closed curve is formed by the orbit of $Y(X_0, t_0, t)$ for $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, together with $Y^*(X_0, t_0, t)$ for $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. By the inner product inequalities $X(X_0, t_0, t)$ is contained inside this simple closed curve and hence is bounded. If the inequalities with $\alpha(X)$ are satisfied then the only way in which $X(X_0, t_0, t)$ could not tend to zero would be for $AX_1 + f(X_1, t)$ to approach zero as $t \to \infty$ for some X_1; but $[AX + f]\cdot A^*X \geqslant \alpha(X)$ renders this impossible unless $X_1 = 0$.

The proofs of the next two theorems proceed in the same manner as before.

In the following theorems we assume that $Y = 0$ is a saddle point for (2) with hyperbolic sectors S_1, S_2, S_3, and S_4. Then $Y = 0$ is a saddle point for (3) with hyperbolic sectors S_1^*, S_2^*, S_3^*, and S_4^*. We may assume that every solution of (2) intersecting the boundaries of S_2^* or S_4^* enters S_2^* or S_4^* respectively. Also, every solution of (3) intersecting the boundaries of S_1 or S_3 enters S_1 or S_3 respectively.

Theorem 7. *If* $[AX + f]\cdot AX \geqslant \alpha(X)$ *for* X *in either* S_2^* *or* S_4^* *and* $t \geqslant M$, *then* (1) *has unbounded solutions.*

Theorem 8. *If* $[AX + f]\cdot AX > 0$ *in* S_1^* *and* S_3^*, $[AX+f]\cdot AX < 0$ *in* S_2^* *and* S_4^*, $[AX + f]\cdot A^*X < 0$ *in* S_1 *and* S_3, *and if* $[AX + f]\cdot A^*X > 0$ *in* S_2 *and* S_4 *for* $t > M$ *and* $X \neq 0$, *then every solution of* (1) *is bounded. If the inequalities* „< 0“ *are replaced by* „$\leqslant -\alpha(X)$“ *and* „> 0“ *are replaced by* „$\geqslant \alpha(X)$“, *then every solution of* (1) *tends to zero as* $t \to \infty$; *if* $M = 0$, *then* $X = 0$ *is globally asymptotically stable.*

Theorem 9. *Let* $Y = 0$ *be a stable degenerate node for* (2) *and* $Y = 0$ *be either a stable node for* (3) *or a stable focus. If* $[AX + f]\cdot AX > 0$ *and* $[AX + f]\cdot A^*X > 0$ *for* $|X| > R$ *and* $t > M$, *then every solution of* (1) *is bounded. If* $[AX + f]\cdot A^*X \geqslant \alpha(X)$ *for all* X *and all* $t > M$, *then every solution of* (1) *tends to zero as* $t \to \infty$.

Proof: If $Y = 0$ is a focus for (3) then the proof proceeds in exactly the same manner as in Theorem 6. Assume $Y = 0$ is a stable node for (3). Then for $|X_0| > R$ and $t_0 > M$ we have the solutions $Y(X_0, t_0, t)$ and $Y^*(X_0, t_0, t)$ intersecting $|X| = R$ at t_1 and t_2 respectively. By the inner product inequalities the curves defined by $Y(X_0, t_0, t)$ for $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$

and $Y^*(X_0, t_0, t)$ for $t_0 \leqslant t \leqslant t_2$ bound $X(X_0, t_0, t)$ unless it enters the region $|X| < R$. Now consider the set of all $\bar{X}_0$ such that $|\bar{X}_0| = X_0$ and construct the corresponding curves $Y(\bar{X}_0, t_0, t)$ and $Y^*(\bar{X}_0, t_0, t)$ which intersect $|X| = R$. A finite number of these curves can be selected which start at t_0 and end on $|X| = R$ so that a simple closed curve is formed bounding $X(X_0, t_0\, t)$. That all solutions of (1) tend to zero as $t \to \infty$ if $[AX + f] \cdot A^* X \geqslant \alpha(X)$ should now be clear.

3. Higher Order Systems

We now assume that A is an $n \times n$ real matrix in real cononical form. That is, A consists of square blocks of real matrices $A_1, \ldots, A_s$, $B_1, \ldots, B_m$ down the main diagonal and zeros elsewhere and these blocks are at most 2×2 matrices. Thus we may represent these blocks by

$$A_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 \\ 1 & \lambda_j \end{pmatrix},$$

or $B_j = \lambda_j$ if B_j is a 1×1 matrix. In this form $Y' = AY$ can be considered as a set of systems. For each A_j we have the system

$$y_j' = \alpha_j y_j - \beta_j y_{j+1}, \quad y_{j+1}' = \beta_j y_j + \alpha_j y_{j+1}, \tag{4}$$

which we denote by $Y_j' = A_j Y_j$, where Y_j is the n-vector all of whose components are zero except for y_j and y_{j+1} in the j-th and $j+1$-st place, while A_j is augmented with zeros so that the vector $A_j Y_j + f$ will be defined. For each 2×2 matrix B_i we have the system

$$y_i' = \lambda_i y_i, \quad y_{i+1}' = y_i + \lambda_i y_{i+1}, \tag{5}$$

which we again denote by $Y_i' = B_i Y_i$ using the same convention as before. Thus far nothing has been arbitrary, but now certain decisions must be made. Denote the 1×1 matrices by $B_{i1}, B_{i2}, \ldots, B_{ir}$ and pair these (if there are more than one of them) into systems

$$y_{ij}' = B_{ij} y_{ij}, \quad y_{i(j+1)}' = B_{i(j+1)} y_{i(j+1)}, \tag{6}$$

for $j = 1, 3, 5, 7, \ldots$ until the B_{ik} are exhausted or only one is left over, and denote (6) by $Y_{ij}' = B_j Y_{ij}$ using the same convention as before for Y_{ij}. Now if there is one B_{ik} left over, or only one B_{ik} to begin with, then our selection is complete; but any other pairing of the B_{ik} could have been made.

This process has decomposed the n dimensional space into subspaces which can be treated separately just as two dimensional spaces. If n is odd then we have $(n-1)/2$ two dimensional spaces and one space of dimension one. If n is even then we have $n/2$ two dimensional spaces. Orbits of each $Y_j' = A_j Y$ or $Y_{ij}' = B_j Y_{ij}$ are cylinders in the n dimensional space. Stability and instability statements may now be obtained in exactly the same manner as for second order systems. It hardly seems worth while to go through all the counterparts of the arguments of the previous section, but an example might be in order.

Suppose that A is as 5×5 matrix and $Y' = AY$ is decomposed into the following systems

$$y_1' = -\beta y_2, \quad y_2' = \beta y_1 \tag{7}$$

is denoted by $Y_1' = A_1 Y_1$,

$$y_3' = \lambda_1 y_3, \quad y_4' = \lambda_2 y_4 \tag{8}$$

s denoted bi $Y_3' = B_3 Y_3$, and

$$y_5' = \lambda_3 y_5, \tag{9}$$

s denoted by $Y_5' = B_5 Y_5$. Assume that λ_1, λ_2, and λ_3 are negative.

Let $Y_1' = A_1^* Y_1$ denote the system orthogonal to (7) and let it be a stable node. Suppose that $[AX + f] \cdot A_1^* X_1 > 0$, $[AX + f] \cdot B_3 X_3 > 0$, and $[AX + f] \cdot B_5 X_5 > 0$ for all $|X| > R$ and $t > M$. Then every solution of (1) is bounded. To prove this, let C_1 be a periodic orbit of (7) and C_2 be a periodic orbit of $Y_3' = B_3^* Y_3$, both lying in the region defined by $|X| > R$. Let $x_5 = R_1$ and $x_5 = R_2$ denote planes lying in the region defined by $|X| > R$ with $R_1 > 0$ and $R_2 < 0$.

Now call the bounded region K which is composed of the intersection of the following regions: $R_2 < x_5 < R_1$, the region inside the cylinder C_1, and the region inside the cylinder C_2. Let $|X_0| > R$ and assume without loss of generality that X_0 lies in K. Let $X(X_0, t_0, t)$ be the solution of (1) for $t_0 > M$. The inner product inequalities prevent the solution from leaving K, so the solution is bounded.

Although our conditions are not comparable with those previously given, they are in some respects less stringent. For example, Brauer requires that $|f(X,t)| \leqslant \lambda(t)|X|$ where $\lambda(t)$ is continuous and $\int_0^\infty \lambda(t)\,dt < \infty$ which requires that $\liminf_{t\to\infty} |f(X,t)| = 0$ for fixed X. In particular, this condition could not hold for $f(X,t)$ periodic in t with a nontrivial period. Also,

Brauer's condition on f is a two sided inequality whereas ours are one sided inequalities.

The obtained results are to be related with a set of papers due to D. Mangeron and R. Chaléat [5], [6].

Received the 15 V 1965

University of Alberta,
Edmonton, Canada

REFERENCES

1. Bellman R., *Stability Theory of Differential Equations.* McGraw-Hill, New York, 1953.
2. Bihari I., *Researches of the Boundedness and Stability of the Solutions of Nonlinear Differential Equations.* Acta Math. Acad. Sci. Hung., 1957, **8**, pp. 261—278.
3. Brauer F., *Nonlinear Differential Equations with Forcing Terms.* Proc. Amer. Math. Soc., 1964, **15**, pp. 758–765.
4. Hurewicz W., *Lectures on Ordinary Differential Equations.* J. Wiley, New York, 1958.
5. Mangeron D., Chaléat R., *Approximations d'ordre supérieur dans la théorie des perturbations.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X (XIV)**, *3–4*, pp. 261–272.
6. — Rev. Roum. Sci. techn., Sér. Méc. appl., 1965, **10**, *4*, pp. 791—825.

PERTURBAŢIA ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE

(Rezumat)

Se studiază problema stabilităţii sau instabilităţii sistemului diferenţial $Y' = AY$, în corespondenţă cu sistemul (1), în care A este o matrice constantă $n \times n$ nesingulară, cu rădăcini caracteristice de multiplicitate cel mult egală cu doi şi ale cărei rădăcini complexe (şi nu reale) sînt simple; f este o funcţie vectorială unicclonară de vectorul X şi de variabila reală t, continuă pentru $|X| < \infty$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

Д. К. 517.919

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ УРАВНЕНИЯМИ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С МАЛЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А. Б. ВАСИЛЬЕВА

1. В ряде работ [1]...[8] изучалось асимптотическое поведение решения системы уравнений с отклоняющимся аргументом нейтрального типа

$$\dot{z}(t) = F(t, y(t), [y], [z]), \quad \dot{y} = z. \tag{1}$$

Здесь z и y векторы, $[z] = z(t-\mu)$, $[y] = y(t-\mu)$, μ малое вообще говоря зависящее от t запаздывание. При этом, как выяснилось, характерным является следующее свойство, вполне аналогичное тому, что имеет место для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных [11], [12]: процесс, описываемый (1), при малых μ представляет собой наложение двух процессов: 1° относительно медленно меняющееся состояние (производная по t имеет порядок 1) и притом не зависящее от μ в нулевом приближении по μ (это приближение определяется из системы, которую будем называть вырожденной и которая получается из (1), если там формально положить $\mu = 0$); 2° быстропеременный процесс (производная по t имеет порядок $1/\mu$). Процесс 2° может быть затухающим во времени (релаксационным), т. е. носить характер пограничного слоя. Этот случай наиболее хорошо изучен [1]...[5]. Ему будет посвящен § **2** настоящей статьи. Однако процесс 2° может иметь характер незатухающих со временем частых колебаний. Этот случай изучен хуже, но все же можно указать некоторые классы (1) для которых удается получить определенный результат. Этому будет посвящен § **3**.

2. Цель настоящего параграфа — указание правила построения асимптотики решения системы (1) для случая, когда имеет место пограничный слой. Краткости ради формулируем здесь это правило

для случая, когда $\mu = \text{const}$ а z и y одномерны. Отметим, однако, что аналогичный результат имеет место и для более сложных случаев (z, y векторы произвольного числа измерений, переменное запаздывание и др. [2], [4], [5]).

Определим решение (1) начальным условием

$$y = \varphi(t), \quad z = \dot{\varphi}(t), \quad (0 \leqslant t \leqslant \mu). \tag{2}$$

Будем предполагать, что в окрестности корня $z = \Phi(t, y, u)$ уравнения $z = F(t, y, u, z)$ выполнено условие

$$\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right| \leqslant a < 1, \tag{3}$$

которое назовем условием устойчивости.

Введем новое независимое переменное $\tau = t/\mu$. Тогда (1) и (2) примут вид

$$z(\tau) = F(\tau\mu, y(\tau), y(\tau - 1), z(\tau - 1)), \quad \frac{dy}{d\tau} = \mu z(\tau), \tag{4}$$

$$y = \varphi(\tau\mu), \quad z = \dot{\varphi}(\tau\mu), \quad (0 \leqslant \tau \leqslant 1). \tag{5}$$

Будем искать формальные решения (1) и (4) соответственно в виде разложений (x означает y и z в совокупности)

$$x = \bar{x}_0(t) + \mu \bar{x}_1(t) + \ldots, \tag{6}$$

$$x = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \ldots. \tag{7}$$

Эти разложения подставим в (1) и (4) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях μ. Отсюда получим уравнения для определения членов разложений (6), (7) — более простые, чем исходная с система (1). Чтобы из этих уравнений можно было определить нужные неизвестные, необходимо задать еще дополнительные условия. Их зададим в виде

$$z_k(\tau) = \tau^k \dot{\varphi}_k(0), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1; \quad y_k(0) = \begin{cases} \varphi(0), & k = 0, \\ 0, & k > 0, \end{cases} \tag{8}$$

$$\bar{y}_0(0) = \varphi(0), \quad \bar{y}_k(0) = \int_0^\infty \Pi_{k-1}[z(\tau)]\, d\tau, \quad (k > 0), \tag{9}$$

где по определению

$$\Pi_k[x(\tau)] = x_k - \sum_{i=0}^{k} \tau^i \bar{x}_{i,\,k-i} \tag{10}$$

(через $\bar{x}_{i,\,k-i}$ обозначен i-ый коэффициент разложения $\bar{x}_{k-i}(t)$ по t, через $\dot{\varphi}_k(0)$ — k-ый коэффициент разложения $\dot{\varphi}(t)$ по t).

Образуем сумму

$$X_n = \sum_{k=0}^{n} \mu^k \{x_k + \Pi_k[x(\tau)]\}. \tag{11}$$

При выполнении (3) и некоторых естественных требований гладкости на функцию $F(t, y, u, z)$ можно показать [1], [2], что (11) является асимптотической формулой для решения задачи (1), (2) с остаточным членом порядка μ^{n+1} равномерно на всем промежутке изменения независимого переменного $0 \leqslant t \leqslant T$. В частности с точностью μ, y и z представимы в виде $y = \bar{y}_0$, $z = \bar{z}_0 + \Pi_0[z(\tau)]$, где $\bar{y}_0$ и $\bar{z}_0$ удовлетворяют вырожденной системе, соответствующей (1) и условию $\bar{y}_0(0) = \varphi(0)$, а $\Pi_0[z(\tau)]$ определяется уравнением $\Pi_0 + \bar{z}_0(0) = F(0, \varphi(0), \Pi_0 + z_0(0))$ (заметим, что $z_0(0) = \Phi(0, \varphi(0), \varphi(0))$ и дополнительным условием $\Pi_0 = \dot{\varphi}(0) - \bar{z}_0(0)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ и, как нетрудно видеть, представляет собой ступенчатую функцию, убывающую как $\exp(-\alpha t/\mu)$ ($\alpha = \text{const} > 0$).

Если в (3) неравенства заменить на противоположные, то аналогичная асимптотика будет иметь место для задачи Коши при условиях, заданных в конце промежутка $[0, T]$. Если же $|\partial F/\partial z| = 1$, то могут возникнуть незатухающие частые колебания. Один из таких случаев рассмотрен в **§ 3** (система (13)).

Заметим, что в случае, когда решение вырожденной системы носит периодический характер, можно ставить задачу об отыскании периодических решений системы (1). Частично эта задача решена в [3].

3. Рассмотрим такие два частных случая системы (1):

а) линейную разностную систему ($z, B(t)$ — k-мерные векторы-столбцы., A — матрица)

$$z = A(t)[z] + B(t). \tag{12}$$

Соответствующую однородную систему ($B = 0$) будем отмечать номером (12′);

в) нелинейную систему вида

$$z = -[z] + f(t, y, [y]), \quad \dot{y} = z. \tag{13}$$

Для простоты будем считать z одномерным вектором, хотя аналогичный результат имеет место и для произвольного числа измерений [8]. В (13) реализуется один из случаев $|\partial F/\partial z| = 1$, о котором упоминалось в **§ 2.**

Обратимся к системе а). В теории обыкновенных дифференциальных уравнений известен метод (существенно использующий линейность уравнения), который дает общее описание быстрых процессов 2° независимо от того, носят они характер незатухающих колебаний или релаксационный характер (часто называемый методом ВБК), см. напр. [9, 10].

Как оказывается, для (12) можно развить аналогичный асимптотический метод [7]. Предположим, что в некотором промежутке изменения t, $0 \leqslant t \leqslant T$, корни характеристического уравнения $\mathrm{Det}\,(A(t) - \lambda(t)E) = 0$ удовлетворяют условиям $\lambda_i(t) \neq 0$, $\lambda_i(t) \neq 1$, $\lambda_i(t) \neq \lambda_k(t)$, $(i \neq k)$. Определим функции u_i, как решения элементарных разностных уравнений

$$u_i = \lambda_i[u_i], \quad u_i = \varphi_i(t, \mu), \quad (0 \leqslant t \leqslant \mu), \tag{14}$$

где $\varphi_i(t)$ пока произвольные функции. Будем искать решение (12), соответствующее корню λ_i, в виде ($\overset{(i)}{z}$, $\overset{(i)}{\alpha}$ векторы-столбцы)

$$\overset{(i)}{z} = \overset{(i)}{\alpha}\, u_i. \tag{15}$$

Подставляя в (12) и используя (14) получим (индекс i в ряде дальнейших выкладок, которые будут относиться к одному и тому же корню λ_i, для простоты опускаем)

$$\lambda\alpha = A[\alpha]. \tag{16}$$

Решение этой системы будем искать в виде формального разложения по μ

$$\alpha(t, \mu) = \alpha_0(t) + \mu\alpha_1(t) + \ldots. \tag{17}$$

Подставляем в (16) и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях μ. Сравнение коэффициентов при μ^0 дает

$$(A - \lambda E)\alpha_0 = 0. \tag{18}$$

Будем обозначать алгебраические дополнения элементов $\tilde{a}_{jk}$ матрицы $\tilde{A} = A - \lambda E$ через $\tilde{A}_{jk}$. Пусть $\tilde{A}_{kk}$ отлично от нуля всюду на $[0, T]$. Тогда $k - 1$ компонент вектора α_0 может быть выражено через k-ую компоненту, которая пока остается неизвестной, в виде

$$\alpha_{0i}(t) = \gamma_i(t)\alpha_{0k}(t), \quad (i = 1, \ldots, k-1), \tag{19}$$

где $\gamma_i(t)$ известные функции. Приравнивая теперь коэффициенты при η^1, получим

$$A\alpha_0' = (A - \lambda E)\alpha_1. \tag{20}$$

Для разрешимости этой системы должно выполняться условие

$$\sum_{j=1}^{k} \tilde{A}_{jk}\alpha_{0j}' = 0. \tag{21}$$

Подставляя (19) в (21), получим линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка относительно $\alpha_{0k}(t)$, которое решаем при условии $\alpha_{0k}(0) = 1$. После этого получим из (20)

$$\alpha_i(t) = \gamma_i(t)\alpha_{1k}(t) + \sigma_{1i}(t), \quad (i = 1, \ldots, k-1), \tag{22}$$

где $\gamma_i(t)$ те же, что в (19), а $\sigma_{1i}(t)$ тоже некоторые известные функции. Процесс можно продолжить и таким образом построить ряд (17).

Построим теперь еще один формальный ряд

$$\beta(t, \mu) = \beta_0(t) + \mu\beta_1(t) + \ldots, \tag{23}$$

коэффициенты которого определим, подставляя его в (12′) и приравнивая члены с одинаковыми степенями μ. При этом β_0 удовлетворяет алгебраической системе

$$(E - A)\beta_0 = B(t), \tag{24}$$

которая разрешима в силу условия $\lambda_i(t) \neq 1$. Для определения $\beta_n (n > 0)$ получаются системы с тем же определителем, но с другими правыми частями.

Таким образом для каждого λ_i можно определить $\overset{(i)}{\alpha}$ в виде (17), а также построить ряд β, от i не зависящий. Общее решение системы (12) будем строить в виде

$$z = \sum_{i=1}^{k} \overset{(i)}{\alpha}(t, \mu)u_i + \beta(t, \mu). \tag{25}$$

Определив здесь соответствующим образом $\varphi_i(t, \mu)$, т. е. u_i $(0 \leqslant t \leqslant \mu)$ можно удовлетворить различным дополнительным условиям и получить асимптотические выражения для решения различных задач. В [7] подробно разобрана задача Коши $z = z_0(t)$, $(0 \leqslant t \leqslant \mu)$.

Заметим, что, если $u_i = \varphi_i(t, \mu)$, $(0 \leqslant t \leqslant \mu)$, то как легко получить непосредственным вычислением $u_i = u_i\varphi_i(t - p\mu, \mu)$, $p = \mathrm{Entier}(t/\mu)$, где

$$\bar{u}_i = \lambda_i(t) \ldots \lambda_i(t - (p-1)\mu) \tag{26}$$

удовлетворяет тому же уравнению (11) и начальному условию $\bar{u} \equiv \equiv 1\,(0 \leqslant t \leqslant \mu)$.

Характер процесса, описываемого формулой (25) зависит от свойств элементарных решений (26), точнее, от них зависит характер быстропеременного процесса 2°, в то время как величина $\beta(t, \mu)$ описывает состояние 1°.

Пусть $\lambda(t) = r(t)\, e^{i\theta(t)}$. Тогда $\bar{u} = r(t) \ldots r(t - (p-1)\mu) \times \times e^{i[\theta(t) + \ldots + \theta(t-(p-1)\mu)]}$. Если $r > 1$, то имеет место раскачка, а при

$r < 1$ затухание колебаний. При $r = 1$, $\bar{u}$ имеет вид $\bar{u} = e^{i[\theta(t)+\ldots+\theta(t-(p-1)\mu)]}$ и дает незатухающие колебания. Особенно просто выглядит это выражение в случае $\theta = \theta_0 = \text{const}$, а именно тогда $\bar{u} = e^{ip\theta_0}$. Если $2\pi/\theta_0$ является рациональным числом, то $\bar{u}$ будет строго периодическим.

Обратимся теперь к случаю в). Для нелинейного случая даже в теории обыкновенных дифференциальных уравнений не имеется единого описания для колебательных и релаксационных процессов. Асимптотика, построенная в § **2** здесь уже не годится. Правда, попрежнему (11) при $\mu \to 0$.

Поступила 26 X 1965 г.

Московский Гос. Университет им. М. В. Ломоносова, Москва, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильева А. Б., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, **2**, *5*.
2. Рожков В. И., Сб. *Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы*. Прил. к Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, стр. 161—175.
3. — ПММ, 1963, **27**, *6*, стр. 1143 - 1147.
4. — Сб. Тр. сем. по дифф. уравнениям с отклоняющимся аргументом, *3* (в печати).
5. — Сб. Тр. сем. по дифф. уравнениям с отклоняющимся аргументом, *4* (в печати).
6. Васильева А. Б., Сб. Тр. по дифф. уравнениям с отклоняющимся аргументом, *4* (в печати).
7. — Сб. Тр. по дифф. уравнениям с отклоняющимся аргументом, *5* (в печати).
8. Плотников А. А., Сб. Тр. по дифф. уравнениям с отклоняющимся аргумонтом, *5* (в печати).
9. Камке Э., *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. М., 1950, гл. **6**, п. *25*, стр. 209.
10. Эрдейи А., *Асимптотические разложения*. М., 1962, гл. **4**.
11. Васильева А. Б., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, **3**, *4*.
12. Волосов В. М., Матем. сб., 1952, **30**, *72*, стр. 245—270.

METODE DE CERCETARE A PROCESELOR OSCILATORII, DESCRISE DE ECUAŢII DE TIP NEUTRU CU ARGUMENT ÎNTÎRZIAT MIC

(Rezumat)

Se consideră sistemul de ecuaţii cu argument întîrziat, de tip neutru (1), în care z şi y sînt vectori, $[z] = z(t-\mu)$, $[y] = y(t-\mu)$, cu μ argument întîrziat mic, depinzînd în general de t. Se indică procedeul de construcţie a soluţiei asimptotice a lui (1) în cazul relaxării, iar în cazul proceselor neamortizate se consideră sistemele particulare (12) şi (13), pentru care se poate construi soluţia.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

Д. К. 517.93

К ВЫЧИСЛЕНИЮ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Д. Д. БАЙНОВ

Рассмотрим уравнение второго порядка [1]

$$\ddot{x} = (\mu P_1 + \mu^2 P_2 \ldots) x, \tag{1}$$

где $P_1, P_2, \ldots$ непрерывные периодические функции t периода ω и ряд, стоящий в скобках, сходится при достаточно малых значениях μ.

При $\mu = 0$ соответствующее фундаментальное уравнение имеет двойной нулевой корень, которому соответствует одна группа решений. В [1] показано что при выполнении условия

$$\int_0^{\omega} P_1 dt = 0, \tag{2}$$

характеристические показатель разлагаются в ряды по целым степеням μ.

Ниже, применяя приём аналогичный [1], вычисляются характеристические показатели при невыполнении (2).

Сделаем в (1) подстановку

$$x = e^{\alpha t} y(t), \tag{3}$$

где α — искомый характеристический показатель, $y(t)$ — периодическая функция периода ω, причём α и y отыскиваются в виде рядов

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 \mu^{1/2} + \alpha_2 \mu + \alpha_3 \mu^{3/2} + \ldots, \\ y &= y_0 + y_1 \mu^{1/2} + y_2 \mu + y_3 \mu^{3/2} + \ldots, \end{aligned} \tag{4}$$

где $y_i(t)$ — периодические функции t периода ω.

После сделанной замены сравним коэффициенты при одинаковых степенях $\sqrt{\mu}$, получим дифференциальные уравнения для определения $y_i(t)$, $(i = 0,1,\ldots)$:

$$\begin{aligned} &\ddot{y}_0 = 0, \quad \ddot{y}_1 = -2\alpha_1 \dot{y}_0, \quad \ddot{y}_2 = P_1 y_0 - 2(\alpha_2 \dot{y}_0 + \alpha_1 \dot{y}_1) - \alpha_1^2 y_0, \\ &\ddot{y}_3 = P_1 y_1 - 2(\alpha_3 \dot{y}_0 - \alpha_2 \dot{y}_1 + \alpha_1 \dot{y}_2) - (2\alpha_1 \alpha_2 y_0 + \alpha_1^2 y_1) \end{aligned} \tag{5}$$

и. т. д. Для первого уравнения (5) $y_0 = M = 1$, так как решение y может быть помножено на произвольный постоянный множитель. Из второго уравнения (5) $y_1 = M_1$, где M_1 — произвольная постоянная.

Условие существования периодического решения третьего уравнения (5) даёт уравнение для определения α_1:

$$\alpha_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} P_1(t)\,\mathrm{d}t} \neq 0. \tag{6}$$

Для того, чтобы движение было устойчивым необходимо, чтобы вещественная часть каждой из величин α_1, определенных формулой (6), равнялась нулю, иначе одна из этих величин будет иметь положительную вещественную часть и движение будет неустойчиво.

Итак, необходимое условие устойчивости есть

$$\int_0^{\omega} P_1(t)\,\mathrm{d}t < 0. \tag{7}$$

Остальные α_k, $(k = 2,3,...)$ вычисляются аналогичным образом. Уравнения для них будут, как легко показать, линейными. Выбрав в качестве α_1 одну из величин (6), получим вполне определенные величины α_k, $(k = 2, 3,...)$. Например,

$$\alpha_2 = -\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\left[\int_0^{t}(P_1 - \alpha_1^2)\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}t.$$

Достаточным условием устойчивости является условие $\alpha_2 < 0$ (если $\alpha_2 \neq 0$).

Поступила 21 VII 1965 г.

Машинно-электротехнический Институт, София, Н. Р. Болгаря

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г., *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний.* Гостехиздат, М., 1956.

ASUPRA CALCULULUI EXPONENTULUI CARACTERISTIC AL UNEI ECUAȚII DE ORDINUL DOI

(Rezumat)

Se calculează exponentul caracteristic al ecuației (1) pentru cazul cînd el poate fi dezvoltat în serie după puterile lui $\mu^{1/2}$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3—4, 1966

C. Z. 519.2115

LEGI NORMALE DE DISTRIBUŢIE A ERORILOR ALEATOARE

DE

VIOREL MURGESCU

1. Introducere

În această Notă se prezintă în esenţă o generalizare naturală a raţionamentului lui Gauss prin care se ajunge la cunoscuta lege normală de distribuţie a erorilor aleatoare. Ea constă în considerarea unor valori medii de diferite ordine, care minimizează momentele centrate corespunzătoare [1]), cazul clasic corespunzînd valorii medii de ordinul al doilea (media aritmetică) şi momentului centrat de acelaşi ordin.

2. Valori medii şi abateri medii de diverse ordine

Fie X o variabilă aleatoare pentru care mulţimea valorilor sale este constituită de ansamblul a n măsurători independente, nu toate egale,

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n . \tag{1}$$

Fie încă $\tilde{x}$ o valoare medie a variabilei X, neprecizată încă, iar

$$v_i = \tilde{x} - x_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

abaterile corespunzătoare. Cu acestea dăm în continuare următoarele definiţii:

Definiţia 1. Se numeşte abatere de ordinul p a variabilei aleatoare X în raport cu valoarea ei medie $\tilde{x}$, numărul $\delta_{(p)}$ dat de expresia

$$\delta_{(p)} \overset{\text{def}}{=} \sum_{\alpha=1}^{n} (\tilde{x} - x_\alpha)^p = \sum_{\alpha=1}^{n} v_\alpha^p, \quad (p = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

[1]) Chiar dacă în cuprins întrebuinţăm aceleaşi denumiri pentru valorile medii şi momentele centrate de diferite ordine ca cele cunoscute din tratatele de specialitate, se va constata că valoarea lor diferă de a acestora din urmă, după cum rezultă din definiţiile ce urmează.

Definiţia 2. Se numeşte abatere medie de ordinul $2k$ a variabilei X, raportată la valoarea ei medie $\tilde{x}$, numărul $\mu_{(2k)}$ definit prin relaţia

$$\mu_{(2k)} \overset{\text{def}}{=} \left[\frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n} v_\alpha^{2k}\right]^{\frac{1}{2k}}, \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

În cazul particular cînd x este chiar media aritmetică a celor n măsurători, atunci (3) şi (4) definesc chiar momentele centrate şi abaterile medii obişnuite.

Definiţia 3. Se numeşte valoare medie de ordinul $2k$ a variabilei aleatoare X, numărul care realizează minimumul abaterii sale de ordinul $2k$.

După cum se va vedea în continuare, această definiţie are totdeauna sens în baza existenţei şi unicităţii numărului definit de ea. Pentru a arăta aceasta, să considerăm funcţia

$$\delta_{(2k)}(x) = \sum_{\alpha=1}^{n} (x - x_\alpha)^{2k},$$

în care ne propunem să găsim pentru x valoarea ce o extremizează. Efectuînd derivatele de primele două ordine ale lui $\delta_{(2k)}$, avem

$$\delta'_{(2k)} = 2k\sum_{\alpha=1}^{n} (x - x_\alpha)^{2k-1} \quad \text{şi} \quad \delta''_{(2k)} = 2k(2k-1)\sum_{\alpha=1}^{n} (x - x_\alpha)^{2k-2}. \tag{5}$$

Considerînd ecuaţia $\delta'_{(2k)} = 0$, adică

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (x - x_\alpha)^{2k-1} = 0, \tag{6}$$

se observă imediat că ea are o singură rădăcină reală. În adevăr, deoarece $\delta''_{(2k)}$ este strict pozitivă, — după cum se vede din (5), — rezultă că $\delta'_{(2k)}$ este strict crescătoare, şi cum ecuaţia (6) este de grad impar, deducem că ea are o singură rădăcină reală, pe care o notăm cu $\tilde{x}_{2k}$. Avem deci

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (\tilde{x}_{2k} - x_\alpha)^{2k-1} = 0 \tag{7}$$

şi $\delta''_{(2k)}(\tilde{x}_{2k}) > 0$, ceea ce ne arată că $\tilde{x}_{2k}$ astfel determinat este singurul număr ce realizează minimumul funcţiei $\delta_{(2k)}(x)$.

Prin urmare, în sensul definiţiilor date la început, rezultă că *abaterea de ordinul* $2k$ a variabilei aleatoare X are expresia

$$\delta_{(2k)} = \sum_{\alpha=1}^{n} (\tilde{x}_{2k} - x_\alpha)^{2k}, \tag{3'}$$

iar *abaterea medie de ordinul 2k* este de forma

$$\mu_{(2k)} = \left[\frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n}(\tilde{x}_{2k} - x_\alpha)^{2k}\right]^{\frac{1}{2k}}, \tag{4'}$$

ele fiind considerate în raport cu valoarea medie de același ordin, dată de (6).

Valoarea medie de ordinul $2k$ a variabilei aleatoare X, care este unica soluție reală a ecuației (6), sau scrisă desfășurat,

$$nx^{2k-1} - C_{2k}^{1} S_1 x^{2k-2} + \ldots + (-1)^p C_{2k-1}^{p} S_p x^{2k-p-1} + \ldots + \\ + C_{2k}^{1} S_{2k-2} x - S_{2k-1} = 0, \tag{6'}$$

unde

$$S_1 = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha, \quad S_2 = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^2, \ldots, \quad S_p = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^p, \ldots, \quad S_{2k-1} = \sum_{\alpha=1}^{n} x_\alpha^{2k-1},$$

se bucură de unele proprietăți remarcabile, pe care le expunem în continuare:

a) Dacă $\inf X$ și $\sup X$ sînt, respectiv, marginea inferioară și marginea superioară a mulțimii valorilor variabilei aleatoare X, atunci, oricare ar fi ordinul $2k$, avem

$$\inf X < \tilde{x}_{2k} < \sup X. \tag{8}$$

În adevăr, dacă am presupune că $\tilde{x}_{2k} \leqslant \inf X$, ar urma că toate abaterile $v_\alpha = (\tilde{x}_{2k} - x_\alpha)$ sînt negative sau nule și prin urmare am avea $\sum_{\alpha=1}^{n} v_\alpha^{2k-1} < 0$; la fel, dacă am presupune $\tilde{x}_{2k} \geqslant \sup X$, ar rezulta că toate abaterile v_α ar fi pozitive sau nule și prin urmare $\sum_{\alpha=1}^{n} v_\alpha^{2k-1} > 0$, în ambele cazuri fiind contrazisă tocmai egalitatea (7). Prin urmare au loc inegalitățile (8) în sens strict, deoarece, prin ipoteză, variabila X a fost considerată neidentic egală cu o constantă. Această proprietate justifică și denumirea de valoare medie de ordinul $2k$ pentru $\tilde{x}_{2k}$.

b) Din definiția lui $\tilde{x}_{2k}$ rezultă încă faptul că rădăcina reală a ecuației (6') este singura valoare ce realizează minimumul abaterii medii de ordinul $2k$, dată de (4).

c) Abaterea de ordinul $p = 2k - 1$ a variabilei aleatoare X, considerată în raport cu valoarea sa medie de ordinul $2k$, este nulă. Această proprietate rezultă din (7).

În particular, pentru $k = 1$, valoarea medie de ordinul 2 este tocmai media aritmetică a mulțimii măsurătorilor x_q, după cum se vede din (6) sau (6'), iar proprietățile enumerate mai înainte se reduc la cele corespunzătoare, bine cunoscute.

Mai facem observația că între valorile medii de diferite ordine nu există nici o relație de ordine, acest lucru putîndu-se arăta, în modul cel mai simplu, prin considerarea unor determinări particulare.

3. Legi normale de distribuție, de tip Gauss-Laplace

Fie V o variabilă aleatoare ale cărei valori $v_i = \tilde{x} - x_i$, $(i = 1, 2, \ldots)$, sînt erorile accidentale (2), raportate la o valoare medie $\tilde{x}$ a șirului de măsurători (1), considerată ca cea mai probabilă valoare a lui X. Să mai presupunem în continuare că sînt satisfăcute următoarele condiții:

1° V este o variabilă continuă al cărui domeniu de definiție este R, — aceasta datorită faptului că erorile accidentale pot lua, în principiu, orice valoare reală.

2° Repartiția variabilei V este continuă, densitatea sa de repartiție $\varphi(x)$ fiind o funcție derivabilă.

3° $\varphi(x)$ este o funcție astfel determinată, încît integralele

$$(9)\quad P(v \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt, \qquad (10)\quad P(x \leqslant v \leqslant x + dx) = \int_{x}^{x+\Delta x} \varphi(t)\,dt$$

și

$$(11)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1,$$

care reprezintă, respectiv, probabilitățile ca o eroare să fie inferioară numărului x, să fie cuprinsă între x și $x + dx$ și probabilitatea de certitudine, să aibă sens, oricare ar fi x.

4° Valoarea medie de ordinul $2k$, $\tilde{x}_{2k}$, este considerată ca cea mai probabilă valoare a variabilei X.

În aceste ipoteze, ne propunem să determinăm, în continuare, funcția densitate de probabilitate $\varphi(x)$. În acest scop, să observăm mai întîi că pentru Δx suficient de mic, aproximînd valoarea densității de repartiție pe intervalul $[x, x + \Delta x]$ prin $\varphi(x)$, obținem din (10)

$$(10')\quad P(x \leqslant v \leqslant x + dx) = \varphi(x)\,\Delta x.$$

Cum cele n măsurători sînt presupuse independente, urmează atunci că probabilitatea ca cele n erori v_i să fie cuprinse simultan în intervalele

$[v_i, v_i + \Delta x_i]$ respectiv, este egală cu produsul celor n probabilități de forma (10'), adică

$$P = \varphi(v_1)\,\varphi(v_2)\ldots\varphi(v_n)\,\Delta x_1\,\Delta x_2\ldots\Delta x_n, \tag{12}$$

numerele Δx_i fiind considerate suficient de mici. În virtutea ipotezei 4°, rezultă atunci că (12) reprezintă de asemenea probabilitatea ca X să se găsească într-o vecinătate a valorii medii considerată. Prin urmare, P trebuie să fie maximă pentru $x = \tilde{x}_{2k}$ și în consecință, derivata funcției

$$\Phi(x) = \varphi(x - x_1)\,\varphi(x - x_2)\ldots\varphi(x - x_n), \tag{12'}$$

a cărei existență este asigurată prin condiția 2°, trebuie să fie nulă pentru $x = \tilde{x}_{2k}$, sau, ceea ce este același lucru,

$$\frac{\Phi'(\tilde{x}_{2k})}{\Phi(\tilde{x}_{2k})} = \sum_{a=1}^{n} \frac{\varphi'(\tilde{x}_{2k} - x_a)}{\varphi(\tilde{x}_{2k} - x_a)} = 0. \tag{13}$$

Notînd încă

$$\tilde{x}_{2k} - x_a = u_a \tag{14}$$

și introducînd noile mărimi în (13) și (7), obținem egalitățile

$$\sum_{a=1}^{n} \frac{\varphi'(u_a)}{\varphi(u_a)} = 0 \quad \text{și} \quad (7') \quad \sum_{a=1}^{n} u_a^{2k-1} = 0, \tag{13'}$$

din care deducem, prin scădere, egalitatea

$$\sum_{a=1}^{n} \left(\frac{\varphi'(u_a)}{\varphi(u_a)} - C\,u_a^{2k-1} \right) = 0, \tag{15}$$

în care C este o constantă arbitrară. Cum măsurătorile x_a sînt independente, u_a sînt independente și în consecință egalitatea (15) are loc dacă și numai dacă fiecare termen din sumă este nul. Aceasta înseamnă că densitatea de repartiție $\varphi(x)$ trebuie să fie soluție a ecuației diferențiale

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} - C\,x^{2k-1} = 0. \tag{16}$$

Integrînd-o, obținem

$$\varphi(x) = C_1 \exp(C_2\,x^{2k}), \tag{17}$$

în care C_1 și $C_2 = C/2k$ sînt constante arbitrare. În virtutea condițiilor din 3°, trebuie ca $C_1 > 0$; de asemenea, pentru ca (11) să aibă sens, tre-

buie ca $C_2 < 0$ şi vom nota atunci $C_2 = -1/h^{2k}$, astfel încît (17) devine de forma

$$\varphi(x) = C_1 \exp\left[-\left(\frac{x}{h}\right)^{2k}\right]. \tag{17'}$$

Impunînd acesteia condiţia (11), C_1 se determină din relaţia

$$C_1^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\left(\frac{x}{h}\right)^{2k}\right] dx = \frac{2h}{k} \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{k}-1} \exp(-t^2)\, dt) = \frac{h}{k}\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right),$$

de unde

$$C_1 = \left[2h\Gamma\left(1+\frac{1}{2k}\right)\right]^{-1}. \tag{18}$$

Atunci (17') devine

$$\varphi(x) = \left[2h\Gamma\left(1+\frac{1}{2k}\right)\right]^{-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{h}\right)^{2k}\right], \tag{17''}$$

h urmînd a fi determinat pentru fiecare şir de măsurători în parte. Am ajuns prin urmare la următoarea

Teoremă. *Legea de probabilitate a erorilor accidentale, în ipoteza că acestea sînt raportate la valoarea medie de ordinul* $2k$, *este o lege normală pentru care densitatea de repartiţie este dată de* (17'').

În particular, pentru $k = 1$ se obţine din (17'')

$$\varphi(x) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{x}{h}\right)^2\right],$$

adică tocmai expresia densităţii de probabilitate corespunzătoare legii normale, cunoscută sub numele de legea lui Gauss-Laplace.

Pe baza celor stabilite, rezultă atunci din (10) că *probabilitatea* P_{2k} *ca o eroare să fie cuprinsă între numerele* a *şi* b *este*

$$P_{2k}(a \leqslant v \leqslant b) = \int_a^b \varphi(x)\, dx = \left[2h\Gamma\left(1+\frac{1}{2k}\right)\right]^{-1} \int_a^b \exp\left[-\left(\frac{x}{h}\right)^{2k}\right] dx. \tag{18}$$

Definind *funcţia erorilor de indice* k prin integrala

$$\Theta_k(x) \overset{\text{def}}{=} \left|\Gamma\left(1+\frac{1}{2k}\right)\right|^{-1} \int_0^x \exp(-t^{2k})\, dt, \tag{19}$$

pe care o mai putem nota și prin $\Theta_k(x) = \underset{(k)}{\operatorname{erf}}(x)$, ($\Theta_1(x)$ fiind chiar $\Theta(x)$), rezultă din (19) că

$$P_{2k}(a \leqslant v \leqslant b) = \frac{1}{2}\left[\Theta_k\left(\frac{b}{h}\right) - \Theta_k\left(\frac{a}{h}\right)\right]. \tag{18'}$$

Determinarea lui h în (17″) se face aproximînd momentul de ordinul $2k$ al variabilei aleatoare V (scris sub formă de integrală), prin abaterea medie de ordinul $2k$ a șirului de măsurători (1), luată în raport cu valoarea medie de același ordin — dată de (4′) —, adică de relația

$$\mu_{(2k)}^{2k} \approx \left[2h\,\Gamma\left(1+\frac{1}{2k}\right)\right]^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} \exp\left[-\left(\frac{x}{h}\right)^{2k}\right] dx. \tag{20}$$

Calculul ultimei integrale se face imediat prin substituția $x = hz^{1/k}$ și se obțin, în cele din urmă, pentru h valorile

$$h_{(k)} \approx \mu_{(2k)} \sqrt[2k]{2k}, \tag{21}$$

cărora de astă dată le-am atașat indicele k corespunzător.

Primită la 19 decembrie 1965

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de matematici II

LOIS NORMALES DE DISTRIBUTION DES ERREURS ALÉATOIRES

(Résumé)

En partant par définir la moyenne d'ordre $2k$ ($k=1,2,...$) d'une variable aléatoire X comme étant le nombre $\tilde{x}_{2k}$ qui réalise le minimum de l'écart moyen de même ordre (4), on trouve qu'elle est la seule solution réelle de l'équation (6), ou (6′). On établit encore quelques propriétés très simples pour $\tilde{x}_{2k}$, qui, pour $k=1$, devient la moyenne arithmétique des valeurs de X. Puis, en fixant des hypothèses convenables (1°,..., 4°), on arrive au théorème suivant: *la loi de probabilité des erreurs accidentelles, dans l'hypothèse qu'elles sont rapportées à la valeur moyenne d'ordre 2k, est une loi normale pour laquelle la densité de probabilité est donnée par* (17″).

Ensuite, on définit la fonction des erreurs d'ordre k (19) et on montre que la probabilité P_{2k} pour qu'une erreur soit située dans l'intervalle $[a, b]$ a l'expression (18′), où h est une constante dont la valeur est donnée par (21), comme fonction de l'écart moyen d'ordre $2k$ de la variable X. Pour $k=1$ on retrouve les résultats classiques.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. D. 521.91

REPRÉSENTATION SYMBOLIQUE DES PRODUITS DE FONCTIONS

PAR

ALFRED BRAIER

Extrait de la communication présentée à la sesion scientifique de l'Institut Polytechnique „Gh. Gheorghiu-Dej" de Bucarest, 27—29 Mai 1966

1. En vue de l'analyse du réponse des systèmes linéaires à l'action des perturbations de différentes formes, qui présent de l'intérêt dans la Mécanique des vibrations linéaires, on a étudié dans [1], [2] la représentation symbolique de certaines fonctions réelles d'une variable scalaire, par les éléments d'une algèbre, de manière que l'élément qui corresponde à la dérivée de la fonction soit obtenu par la multiplication de celui attaché à la fonction, par un certain élément, appartenant à l'algèbre et jouant le rôle d'opérateur de dérivation.

Dans cette Note on montre que si on connaît les algèbres capables de représenter symboliquement des fonctions réelles d'une variable, alors on obtient l'algèbre qui correspond au produit de ces fonctions, par le produit direct des algèbres respectifs, ce qui permet d'établir sans difficultés sa table de multiplication. Il en est évidente la porté de cet aspect pour les applications, où les perturbations qu'interviennent, présentant différents types de modulation, s'expriment souvent comme produits de fonctions simples. C'est le cas toujours quand la perturbation représente la sortie d'un système linéaire, à paramètres constants.

2. Soit, pour simplifier, deux fonctions réelles $f'(t)$ et $f''(t)$, de la variable t, dérivables,

$$(1) \qquad f' = \sum_{i=1}^{n} a'_i f'_i \quad \text{et} \quad f'' = \sum_{k=1}^{m} a''_k f''_k ,$$

où a'_i, $(i = 1,2,...,n)$ et a''_k, $(k = 1,2,...,m)$ sont des quantités réelles et f'_i, $(i = 1, 2,...,n)$ et f''_k, $(k = 1, 2,...,m)$ — des fonctions qui sont respec-

tivement solutions des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants

$$(2) \qquad \dot{f}'_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha'_{ij} f'_j, \quad (i = 1,2,...,n) \quad \text{et} \quad \dot{f}''_k = \sum_{r=1}^{m} \alpha''_{kr} f''_r, \quad (r = 1,2,...,m),$$

avec $f'_i = \mathrm{d}f'_i/\mathrm{d}t$ et $f''_k = \mathrm{d}f''_k/\mathrm{d}t$.

Soit ε'_i, $(i = 1,2,...,n)$ et ε''_k, $(k = 1,2,...,m)$ les éléments de certaines bases de deux algèbres d'ordre n et m, qui correspondent respectivement aux fonctions f'_i et f''_k de (1) et ont les tables de multiplication

$$(3) \qquad \begin{aligned} \varepsilon'_i \varepsilon'_j &= \sum_{l=1}^{n} \gamma'_{ijl} \varepsilon'_l, \quad (i, j = 1,2,...,n); \\ \varepsilon''_k \varepsilon''_r &= \sum_{s=1}^{n} \gamma''_{krs} \varepsilon''_s, \quad (k, r = 1,2,...,m). \end{aligned}$$

Nous supposons seulement que chaque algèbre (3) a élément unité

$$(4) \qquad u' = \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i \varepsilon'_i \quad \text{et} \quad u'' = \sum_{k=1}^{m} \lambda''_k \varepsilon''_k .$$

Les éléments w' et w'' des algèbres (3) qui correspondent respectivement aux fonctions (1) sont [1], [2],

$$(5) \qquad w' = \sum_{i=1}^{n} a'_i \varepsilon'_i \quad \text{et} \quad w'' = \sum_{k=1}^{m} a''_k \varepsilon''_k ,$$

tandis que ceux qui représentent symboliquement les dérivées des mêmes fonctions (1), s'obtiennent par la multiplication de w' et w'' respectivement par

$$(6) \qquad d' = \sum_{i=1}^{n} \beta'_i \varepsilon'_i \quad \text{et} \quad d'' = \sum_{k=1}^{m} \beta''_k \varepsilon''_k ,$$

qui jouent le rôle d'opérateurs de dérivation [1]).

Soit la fonction f produit de f' et f'' (1), c'est-à-dire

$$(7) \qquad f = f' f'' = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{(i-1)n+k} f_{(i-1)n+k} \; (= \sum_{\nu=1}^{mn} a_\nu f_\nu),$$

où on a introduit les notations

$$(8) \qquad \begin{aligned} &a_{(i-1)n+k} = a'_i a''_k \; (= a_\nu), \quad f_{(i-1)n+k} = f'_i f''_k \; (= f_\nu), \\ &(i = 1,2,...,n; \; k = 1,2,...,m \quad \text{ou} \quad \nu = (i-1)n + k = 1,2,...,mn). \end{aligned}$$

---

[1]) Rappellons [1] la liaison qui existe entre les α, β et γ de (2), (3), (6) :

$$\alpha'_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \beta'_l \gamma'_{lij}, \quad \alpha''_{kr} = \sum_{s=1}^{m} \beta''_s \gamma''_{skr} .$$

Formons le produit formel (w', w'') des éléments (5), qui représentent respectivement les fonctions (1),

$$w = (w', w'') = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{(i-1)n+k}\, \varepsilon_{(i-1)n+k} \left(= \sum_{\nu=1}^{mn} a_\nu\, \varepsilon_\nu\right), \tag{9}$$

où on a tenu compte de (8_1) et

$$\varepsilon_{(i-1)n+k} = (\varepsilon'_i, \varepsilon''_k), \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, m), \tag{10}$$

désigne une paire d'éléments, chacun choisit parmi ceux qui forment les bases respectives des algèbres (3).

Demandons que $\varepsilon_{(i-1)n+k}$ soit un élément de la base d'une algèbre d'ordre mn et qu'il représente symboliquement la fonction $f_{(i-1)n+k}$ (8_2). Pour établir la table de multiplication correspondante on doit observer que l'opération introduite jouit de la propriété

$$(w', w'')(z', z'') = (w'z', w''z''). \tag{11}$$

Alors, en tenant compte de (3) et de la notation (10) on aboutit à

$$\begin{cases} \varepsilon_{(i-1)n+k}\, \varepsilon_{(j-1)n+r} = \displaystyle\sum_{l=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} \gamma_{(i-1)n+k,\,(j-1)n+r,\,(l-1)n+s}\, \varepsilon_{(l-1)n+s}, \\ (i, j = 1, 2, \ldots, n;\ k, r = 1, 2, \ldots, m), \end{cases} \tag{12}$$

où les nouvelles constantes de structure sont

$$\begin{cases} \gamma_{(i-1)n+k,\,(j-1)n+r,\,(l-1)n+s} = \gamma'_{ijl}\, \gamma''_{krs}, \\ (i, j, l = 1, 2, \ldots, n;\ k, r, s = 1, 2, \ldots, m). \end{cases} \tag{13}$$

On déduit que l'algèbre (12) est le produit direct [3] des algèbres (3).

Donc l'élément (9) de l'algèbre de l'ordre mn (12) est capable de représenter symboliquement la fonction (7). On doit cependant obtenir l'élément de l'algèbre qui joue le rôle d'opérateur de dérivation. Dans ce but rappelons que

$$u'w' = w' \quad \text{et} \quad u''w'' = w'', \tag{14}$$

où u', u'' sont respectivement les éléments unité (4) des algèbres (3), et de même qu'ont lieu les correspondances

$$f' \leftrightarrow w',\ \dot{f}' \leftrightarrow d'w',\ f'' \leftrightarrow w'',\ \dot{f}'' \leftrightarrow d''w'',\ f = f'f'' \leftrightarrow w = (w', w''), \tag{15}$$

où d' et d'' sont les opérateurs de dérivation (6) pour les fonctions f' et f'' (1).

Alors, écrivons que

$$\dot{f} \leftrightarrow d\,w. \tag{16}$$

Mais, en vertu de (15), $\dot{f} = \dot{f}'f'' + f'\dot{f}'' \leftrightarrow (d'w',\ w'') + (w',\ d''w'') = (d'w',\ u''w'') + (u'w' + d''w'')$, où on a tenu compte de (14). En utilisant

la relation (11), $f \leftrightarrow (d', u'')(w', w'') + (u', d'')(w', w'') = [(d', u'') + (u', d'')]\, w$; donc

$$d = (d', u'') + (u', d''). \tag{16'}$$

En faisant appel maintenant aux expressions (4) et (6) $d = \left(\sum_{i=1}^{n} \beta'_i \varepsilon'_i\right) \times \times \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda''_k \varepsilon''_k\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda'_i \varepsilon'_i\right)\left(\sum_{k=1}^{m} \beta''_k \varepsilon''_k\right)$ et à l'aide de (10) on peut écrire

$$d = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \beta_{(i-1)n+k}\, \varepsilon_{(i-1)n+k}\,, \tag{17}$$

où

$$\begin{cases} \beta_{(i-1)n+k} = \lambda''_k \beta'_i + \lambda'_i \beta''_k\,, \\ (i = 1, 2, \ldots, n\,;\ k = 1, 2, \ldots, m). \end{cases} \tag{18}$$

3. On peut établir les relations qui existent entre les quantités a (8_1), ou entre les fonctions f (8_2), ou entre les éléments ε (10) de la base de l'algèbre (12). Par exemple, $a_{(l-1)n+k}\, a_{(p-1)n+q} (= a'_l a''_k a'_p a''_q) = a_{(p-1)n+k}\, a_{(l-1)n+q} (= a'_p a''_k a'_l a''_q)$ et en posant $\alpha = (l-1)n + k$, $\beta = (p-1)n + q$, $\gamma = (p-1)n + k$, $\delta = (l-1)n + q$ il en résulte

$$\begin{cases} a_\alpha a_\beta = a_\gamma a_\delta\,, \quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta = 1, 2, \ldots, mn), \\ \text{pour } \alpha + \beta = \gamma + \delta \text{ et } (\alpha + \gamma) - (\beta + \delta) = \text{multiple de } 2n. \end{cases} \tag{19}$$

Les relations (19) signifient que les quantités (9) présentent des particularités dans l'algèbre respective, où existent évidemment des éléments de la forme générale $\sum_{\nu=1}^{mn} a_\nu \varepsilon_\nu$, qui peuvent s'écrire comme somme de plusieurs éléments (9), (8) ; les fonctions qui leur correspondent seront des sommes de fonctions du type (7). Cette situation intervient dans les applications [4], [5].

Des relations de la même forme (19) ont lieu aussi pour les f (8_2) et les ε (10).

Le système d'équations qui est vérifié par les fonctions $f_{(i-1)n+k}$ s'obtient en prenant la dérivée du produit $f'_i f''_k$ et en tenant compte de (2) et des notations (8)

$$\begin{cases} \dot{f}_{(i-1)n+k} = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha'_{ij} f'_j\right) f''_k + \left(\sum_{r=1}^{m} \alpha''_{kr} f''_r\right) f'_i = \\ \qquad = \sum_{j=1}^{n} \alpha'_{ij} f_{(j-1)n+k} + \sum_{r=1}^{m} \alpha''_{kr} f_{(i-1)n+r}\,, \\ (i = 1, 2, \ldots, n\,;\ k = 1, 2, \ldots, m). \end{cases} \tag{20}$$

On peut écrire le système (20) sous une forme analogue à (2)

$$(21)\qquad \begin{cases} f_{(i-1)n+k} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{m} \alpha_{(i-1)n+k,(j-1)n+r}\, f_{(j-1)n+r}\,, \\ (i = 1,\ 2,\ldots, n;\ k = 1,\ 2,\ldots, m), \end{cases}$$

avec

$$(22)\qquad \alpha_{(i-1)n+k,(j-1)n+r} = \begin{cases} \alpha'_{ii} + \alpha''_{kk}\,, & \text{si } r = k,\ j = i\,; \\ \alpha'_{ij}\,, & \text{si } r = k,\ j \neq i\,; \\ \alpha''_{kr}\,, & \text{si } r \neq k,\ j = i\,; \\ 0\,, & \text{si } r \neq k,\ j \neq i. \end{cases}$$

4. *a*) Soit les fonctions

$$(23)\qquad f' = Ae^{ht}\sin(\omega t + \alpha),\quad f'' = \sin(pt + \beta),$$

représentables chacune (v. aussi [1], [2]) par des nombres complexes ($n = m = 2$)

$$(24)\qquad w' = A\cos\alpha\,\varepsilon'_1 + A\sin\alpha\,\varepsilon'_2\,,\quad w'' = \cos\beta\,\varepsilon''_1 + \sin\beta\,\varepsilon''_2\,,$$

avec les tables de multiplication (3)

$$(25)\qquad \begin{gathered} \varepsilon'^2_1 = \varepsilon'_1\,,\quad \varepsilon'_1\varepsilon'_2 = \varepsilon'_2\,\varepsilon'_1 = \varepsilon'_2\,,\quad \varepsilon'^2_2 = -\varepsilon'_1\,; \\ \varepsilon''^2_1 = \varepsilon''_1\,,\quad \varepsilon''_1\varepsilon''_2 = \varepsilon''_2\,\varepsilon''_1 = \varepsilon''_2\,,\quad \varepsilon''^2_2 = -\varepsilon''_1\,, \end{gathered}$$

et les opérateurs de dérivation (6)

$$(26)\qquad d' = \gamma\,\varepsilon'_1 + \omega\,\varepsilon'_2 \quad\text{et}\quad d'' = p\,\varepsilon''_2\,.$$

Alors, l'algèbre de l'ordre $mn = 4$ capable de représenter symboliquement les fonctions

$$(27)\qquad f(t) = Ae^{ht}\sin(\omega t + \alpha)\sin(pt + \beta)$$

aura la table de multiplication (12)

$$(28)\qquad \begin{array}{c|cccc} & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \\ \hline \varepsilon_1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_2 & -\varepsilon_1 & \varepsilon_4 & -\varepsilon_3 \\ \varepsilon_3 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & -\varepsilon_1 & -\varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 & \varepsilon_4 & -\varepsilon_3 & -\varepsilon_2 & \varepsilon_1 \end{array}.$$

En vertu de (9) on peut écrire $w = \sum_{\nu=1}^{4} a_\nu\,\varepsilon_\nu$, où (8)

$$(29)\qquad a_1 = A\cos\alpha\cos\beta,\ a_2 = A\cos\alpha\sin\beta,\ a_3 = A\sin\alpha\cos\beta,\ a_4 = A\sin\alpha\sin\beta,$$

l'opérateur de dérivation (17), (18) est

(30) $$d = h\varepsilon_1 + p\varepsilon_2 + \omega\varepsilon_3 .$$

On obtient donc l'algèbre des polynions $\mathcal{P}$, introduits dans [4] et qui ont permi [5] un étude détaillé du mouvement forcé de l'oscillateur linéaire, perturbé par (27). Les conditions (19) donnent ici $a_1 a_4 = a_2 a_3$, la signification particulière de laquelle a été soulignée dans [5].

De manière similaire on retrouve pour les fonctions $Ae^{ht}\,\mathrm{sh}\,(\omega t + \alpha)\times$ $\times \sin(pt + \beta)$ les polynions $\mathcal{R}$ et pour $Ae^{ht}\,\mathrm{sh}\,(\omega t + \alpha)\,\mathrm{sh}\,(pt + \beta)$ — les polynions $\mathcal{Q}$ (v. [4](On doit signaler que dans [6] on a montré que les polynions forment respectivement des algèbres polynômiales.

Les résultats qu'on vient d'obtenir expliquent la forme exponentielle [4] de l'élément de l'algèbre (28) attaché à (27). En posant $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \mathrm{i}\,(\mathrm{i}^2 = -1)$, $\varepsilon_3 = \mathrm{j}\,(\mathrm{j}^2 = -1)$, $\varepsilon_4 = \mathrm{ij}$ $(\mathrm{ij} = \mathrm{ji},\ (\mathrm{ij})^2 = 1)$, on a

(31) $$w = Ae^{\mathrm{i}\alpha}e^{\mathrm{j}\beta}, \quad \text{avec} \quad d = h + p\,\mathrm{i} + \omega\,\mathrm{j}\ ^{2}).$$

b) La fonction

(32) $$f(t) = (At + B)\,e^{ht}\sin(\omega t + \alpha)$$

est le produit des fonctions

(32′) $$f'(t) = (At + B)\,e^{ht} \quad \text{et} \quad f''(t) = \sin(\omega t + \alpha),$$

représentables par respectivement les nombres duals et complexes [1], [2]

(33) $$w' = A\varepsilon_1' + B\varepsilon_2' \quad \text{et} \quad w'' = \cos\alpha\,\varepsilon_1'' + \sin\alpha\,\varepsilon_2'',$$

avec les tables de multiplication

(34) $$\varepsilon_1'^2 = \varepsilon_1', \quad \varepsilon_1'\varepsilon_2' = \varepsilon_2'\varepsilon_1' = \varepsilon_2', \quad \varepsilon_2'^2 = 0$$

et (25_2), et les opérateurs de dérivation

(35) $$d' = h\varepsilon_1' + \varepsilon_2' \quad \text{et} \quad d'' = \omega\varepsilon_2'' .$$

Donc (32) peut être représentée symboliquement par l'algèbre (12)

(36)

	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4
ε_1	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4
ε_2	ε_2	$-\varepsilon_1$	ε_4	$-\varepsilon_3$
ε_3	ε_3	ε_4	0	0
ε_4	ε_4	$-\varepsilon_3$	0	0

---

[2]) Les a_ν, $(\nu = 1, 2, \ldots, 4)$ (29) et d (31_2) sont écrits ici avec une légère modification par rapport à [4] et [5].

(qui est l'algèbre de Sobrero [2]). La table de multiplication (36) a été aussi obtenue par la voie directe proposée dans [2].

Les a_ν, $(\nu = 1, 2, \ldots, 4)$ (8_1) sont

$$a_1 = A\cos\varphi, \quad a_2 = A\sin\varphi, \quad a_3 = B\cos\varphi, \quad a_4 = B\sin\varphi \tag{37}$$

et l'opérateur de dérivation (17), (18) est

$$d = \lambda\varepsilon_1 + \omega\varepsilon_2 + \varepsilon_3 . \tag{38}$$

c) De manière similaire on peut obtenir l'algèbre capable de représenter symboliquement les fonctions qui décrivent les oscillations modulées du type

$$f(t) = [A + B\sin(\omega t + \alpha)]\, e^{ht} \sin(pt + \beta), \tag{39}$$

se présentant comme produit des fonctions $[A + B\sin(\omega t + \alpha)]\, e^{ht}$ et $\sin(pt + \beta)$. La première est représentable par l'algèbre (v. [2])

(40)

	ε'_1	ε'_2	ε'_3
ε'_1	ε'_1	0	0
ε'_2	0	ε'_2	ε'_3 ,
ε'_3	0	ε'_3	$-\varepsilon'_2$

avec

$$a'_1 = A, \quad a'_2 = B\cos\alpha, \quad a'_3 = B\sin\alpha, \tag{41}$$
$$d' = h(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2) + \omega\varepsilon'_3 ,$$

et la seconde par (25_2), (24_2) avec $d'' = p\varepsilon''_2$.

On obtient pour (39) l'algèbre

(42)

	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6
ε_1	ε_1	ε_2	0	0	0	0
ε_2	ε_2	$-\varepsilon_1$	0	0	0	0
ε_3	0	0	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6 ,
ε_4	0	0	ε_4	$-\varepsilon_3$	ε_6	$-\varepsilon_5$
ε_5	0	0	ε_5	ε_6	$-\varepsilon_3$	$-\varepsilon_4$
ε_6	0	0	ε_5	$-\varepsilon_5$	$-\varepsilon_4$	ε_3

avec les a_ν, $(\nu = 1, 2, \ldots, 6)$, (8_1)

$$a_1 = A\cos\beta, \quad a_2 = A\sin\beta, \quad a_3 = B\cos\alpha\cos\beta, \tag{43}$$
$$a_4 = B\cos\alpha\sin\beta, \quad a_5 = B\sin\alpha\cos\beta, \quad a_6 = B\sin\alpha\sin\beta$$

et l'opérateur de dérivation (17), (18)

$$d = h(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + p(\varepsilon_2 + \varepsilon_4) + \omega\varepsilon_5 . \tag{44}$$

L'algèbre (42) est la somme directe des algèbres des nombres complexes et des polynions $\mathcal{P}$ (28). Le fait était prévisible en observant que (39) résulte par l'addition de deux fonctions du type (23_1) et (27) et en tenant compte du fait établit dans [1] que l'algèbre attachée à la somme de deux fonctions est la somme directe des algèbres attachées aux respectives fonctions (en particulier ici (25_1) et (28)).

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Mécanique théorique

BIBLIOGRAPHIE

1. Braier A., *Sur la représentation par des nombres hypercomplexes des fonctions réelles d'une variable.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *1-2*, pp. 89—96.
2. — *La représentation symbolique des fonctions qui vérifient des équations différentielles linéaires à coefficients constants.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1955, **XI (XVI)**, *3-4*, pp. 93—100.
3. Чеботарев Н. Т., *Введение в теории алгебр.* М.-Л., 1949.
4. Braier A., Rosman H., *Utilizarea polinionilor pentru studiul unor mişcări forţate ale sistemelor liniare.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *1-2*, pp. 309—320.
5. — *Mişcarea forţată a oscilatorului liniar supus la perturbaţii modulate armonic în amplitudine.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *1-2*, pp. 315—326.
6. Enescu I., *Asupra caracterului de algebre polinomiale al unor numere hipercomplexe utilizate în studiul vibraţiilor liniare.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *3-4*, pp. 23—28.

REPREZENTAREA SIMBOLICĂ A PRODUSELOR DE FUNCŢII

(Rezumat)

Se arată că dacă se cunosc algebrele de ordin n (3_1) şi ordin m (3_2), cu elementele unitate (4_1) şi (4_2), capabile să reprezinte simbolic respectiv funcţiile derivabile de variabilă reală f' (1_1) şi f'' (1_2) (astfel încît elementele algebrelor ataşate derivatelor acestora să se obţină prin înmulţirea elementelor (5_1) şi (5_2) ataşate lui f' şi f'' prin respectiv operatorii de derivare (6_1) şi (6_2)), atunci algebra capabilă să reprezinte simbolic funcţia $f = f'f''$ este produsul direct al algebrelor (3_1) şi (3_2), anume algebra de ordin mn (12), (13). Elementul acestei algebre ataşat lui $f'f''$ este (9), (8_1), iar operatorul de derivare este dat de (17).

Ca aplicaţii se obţine: pentru reprezentarea simbolică a funcţiei (27), algebra (28), cu operatorul de derivare (30); pentru funcţia (32) — algebra (36), cu operatorul de derivare (38); pentru (39) — algebra (42), cu operatorul de derivare (44).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 512.3

RĂDĂCINI COMUNE ALE UNUI NUMĂR OARECARE DE ECUAŢII ALGEBRICE DE GRAD SUPERIOR

DE

ELEMER KISS şi GH. FĂRCAŞ

1. Sînt cunoscute metodele lui Sylvester şi Bézout care dau condiţii necesare şi suficiente pentru ca două ecuaţii de orice grad să aibă rădăcini comune. De asemenea Kronecker a dat o condiţie necesară şi suficientă pentru ca mai multe ecuaţii de grad superior să aibă rădăcini comune.

În cele ce urmează vom da o condiţie necesară şi suficientă ca mai multe ecuaţii de grad superior să aibă rădăcini comune, condiţie diferită de cele cunoscute şi care pare a fi mai practică.

2. Pentru început să considerăm un sistem de n ecuaţii de gradul n cu o singură nedeterminată

$$\sum_{i=0}^{n} a_{ij}\, x^{n-i} = 0, \quad (i = 1,\ 2,\ldots,\ n), \tag{1}$$

unde coeficienţii a_{ij} şi x sînt elemente ale unui corp oarecare şi cel puţin unul din coeficienţii $a_{i0}\,(i = 1, 2,\ldots, n)$ este diferit de zero. Să presupunem că rangul matricei coeficienţilor acestui sistem este n.

Ataşăm ecuaţiilor (1) următorii vectori din spaţiul euclidian $n+1$-dimensional, E_{n+1}, exprimaţi în baza ortonormală $e_1, e_2,\ldots, e_{n+1}$,

$$v_i = (a_{i0},\ a_{i1},\ldots,\ a_{in}), \quad (i = 1,2,\ldots,\ n), \tag{2}$$

care sînt liniar independenţi.

Să construim următorul vector:

$$V = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_{n+1} \\ a_{10} & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n0} & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Observăm că vectorul V este un vector nenul din E_{n+1}. Esenţial este însă faptul că acest vector este perpendicular pe fiecare din vectorii sistemului (2), deoarece produsele scalare (v_i, V) sînt nule, adică

$$(v_i, V) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Dacă mai considerăm în E_{n+1} şi vectorul $v = (x^n, x^{n-1}, \ldots, x, 1)$, atunci putem constata cu uşurinţă că relaţiile (1) exprimă faptul că v este perpendicular pe fiecare din vectorii sistemului (2), adică

$$(v_i, v) = 0. \tag{5}$$

Din relaţiile (4) şi (5) rezultă

$$V = \lambda v, \tag{6}$$

unde $\lambda \neq 0$, deoarece vectorii v_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sînt liniar independenţi.

Dacă notăm prin D_i, $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ complementul algebric al elementului e_i, $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ din (3), relaţia (6) devine

$$D_1 e_1 + D_2 e_2 + \ldots + D_{n+1} e_{n+1} = \lambda (x^n e_1 + x^{n-1} e_2 + \ldots + e_{n+1}),$$

de unde

$$D_i = \lambda x^{(n+1)-i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1). \tag{7}$$

Din aceste ultime relaţii rezultă

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{D_2}{D_3} = \ldots = \frac{D_n}{D_{n+1}}, \tag{8}$$

care este condiţia necesară de compatibilitate a sistemului (1), adică condiţia necesară ca ecuaţiile (1) să aibă o rădăcină comună.

Vom arăta că această condiţie este şi suficientă. În adevăr, presupunînd relaţia (8) adevărată şi notînd prin λ determinatul D_{n+1}, obţinem relaţiile (7), care sînt echivalente cu (6). Înmulţind scalar pe (6) pe rînd cu vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_n$ se obţin ecuaţiile (1).

Prin urmare relaţia (8) este o condiţie necesară şi suficientă pentru ca ecuaţiile (1) să aibă o rădăcină comună. Observăm că are loc şi $x = D_i/D_{i+1}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, care arată că aplicarea condiţiei (8) conduce şi la găsirea rădăcinii comune.

3. Să considerăm acum $n - 1$ ecuaţii de grad n

$$f_i(x) = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x^{n-j} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{9}$$

unde matricea coeficienţilor are rangul $n - 1$. Dacă $\alpha \neq 0$ este o rădăcină comună a acestor ecuaţii, atunci putem scrie

$$(10)\quad f_i(x) = (x-\alpha)\sum_{j=0}^{n-1} a_{ij}\, x^{(n-1)-j} = (x-\alpha) f_i^{(1)}(x) = 0,\ (i = 1, 2,..., n-1),$$

unde

$$(11)\quad \alpha_{ij} = a_{i0}\alpha^j + a_{i1}\alpha^{j-1} + \cdots + a_{ij},\quad (i = 1, 2,..., n-1).$$

Ecuațiile (9) admit două rădăcini comune dacă ecuațiile $f_i^{(1)}(x) = 0$ din (10) au o rădăcină comună. Aplicînd acestor ecuații condiția (8) și ținînd seama de relațiile

$$\alpha_{i,s+1} - \alpha\,\alpha_{is} = a_{i,s+1},\quad (i = 1, 2,..., n-1),$$

$$\alpha_{is} - \alpha^2\,\alpha_{i,s-2} = \alpha\, a_{i,s-1} + a_{is},\quad (s = 2, 3,..., n-1),$$

care rezultă din (11), obținem

$$(12)\quad \frac{D_{12}}{D_{23}} = \frac{D_{23}}{D_{34}} = \cdots = \frac{D_{n-1,n}}{D_{n,n+1}},$$

unde $D_{i,i+1}$, $(i = 1, 2,..., n)$ reprezintă determinantul corespunzător matricei pătratice ce se obține prin suprimarea coloanelor i și $i+1$ din matricea formată cu coeficienții ecuațiilor (10), adică din matricea $\| a_{ij} \|$, $(i = 1, 2,..., n-1;\ j = 0, 1,..., n)$.

Relațiile (12) reprezintă condiția necesară și suficientă ca ecuațiile (9) să aibă două rădăcini comune.

Dacă considerăm $n-k$ ecuații de grad n, adică

$$(13)\quad f_i(x) = \sum_{j=0}^{n} a_{ij}\, x^{n-j} = 0,\quad (i = 1, 2,..., n-k),$$

unde rangul matricei coeficienților este $n-k$ și cel puțin unul dintre coeficienții a_{i0}, $(i = 1, 2,..., n-k)$ este diferit de zero, atunci condiția necesară și suficientă pentru ca ele să aibe $k+1$ rădăcini comune $(k < n-1)$ este

$$(14)\quad \frac{D_{12...(k+1)}}{D_{23...(k+2)}} = \frac{D_{23...(k+2)}}{D_{34...(k+3)}} = \cdots = \frac{D_{(n-k)...(n-1),n}}{D_{(n-k+1)...n,(n+1)}},$$

unde $D_{i(i+1)...(i+k)}$, $(i = 1, 2,..., n-k+1)$ sînt determinanții corespunzători matricelor pătratice ce se obțin din matricea $\| c_{ij} \|$, $(i = 1, 2,..., n-k;\ j = 0, 1,..., n)$, prin suprimarea coloanelor $i, i+1,..., i+k$.

Această condiție se poate stabili prin inducție completă, aplicată indicelui k. În adevăr, pentru $k = 0$ obținem condiția (8), iar pentru $k = 1$ condiția (12). Presupunînd condiția adevărată pentru $k-1$ și procedînd analog ca și în cazul găsirii lui (12) se obține (14). Prin urmare am demonstrat

Teorema 1. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca* $n-k$ *ecuaţii de grad* n *să aibă* $k+1$, $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ *rădăcini comune este existenţa relaţiilor* (14).

Să dovedim acum şi

Teorema 2. *Condiţia necesară ca un număr de* $m \geqslant n-k$ *ecuaţii de grad* n *să aibă* $k+1$ *rădăcini comune este ca rangul matricei coeficienţilor acestor ecuaţii să fie* $n-k$, $(k=0, 1, \ldots, n-1)$.

În adevăr, să considerăm $n-k$ ecuaţii de grad n care au $k+1$ rădăcini comune

$$(15)\quad f_i(x) = (x^{k+1} + a_1 x^k + \cdots + a_{k+1})(x^{n-k-1} + \alpha_{i1} x^{n-k-2} + \cdots + \alpha_{i,n-k-1}) = 0,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-k),$$

unde presupunem că

$$(16)\quad \begin{vmatrix} 1 & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,n-k-1} \\ 1 & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2,n-k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \alpha_{n-k,1} & \cdots & \alpha_{n-k,\,n-k-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

adică ecuaţiile (15) nu admit mai multe rădăcini comune decît $k+1$. Ecuaţiile (15) pot fi scrise

$$f_i(x) = x^n + (a_1 + \alpha_{i1}) x^{n-1} + (a_2 + a_1 \alpha_{i1} + \alpha_{i2}) x^{n-2} + \cdots + a_{k+1} \alpha_{i,\,n-k-1} = 0,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-k).$$

Aplicînd matricei coeficienţilor ecuaţiilor unele transformări elementare, obţinem următoarea matrice echivalentă

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,n-k-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2,n-k-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \alpha_{n-k,1} & \cdots & \alpha_{n-k,\,n-k-1} & 0 & \cdots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Ţinînd seama de (16) rezultă că $\operatorname{rang} A = n-k$.

Întrucît transformările aplicate mai sus afectează numai coloanele matricei coeficienţilor, rezultă că dacă am adăuga la ecuaţiile (15) oricîte altele ce au aceleaşi $k+1$ rădăcini comune, rangul matricei coeficienţilor tuturor ecuaţiilor obţinute va fi tot $n-k$.

4. Să considerăm cazul general

$$(17)\quad \sum_{j=0}^{s} a_{ij} x^{s-j} = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

unde cel puțin unul din coeficienții a_{i0}, $(i = 1, 2, ..., r)$ este diferit de zero. Se pot ivi două posibilități:

a) $r > s$; în acest caz înmulțind $r - s$ dintre aceste ecuații respectiv cu $x, x^2, ..., x^{r-s}$ și considerînd și ecuațiile rămase neînmulțite vom obține r ecuații de gradul r.

b) Dacă $r < s$ atunci înmulțind convenabil unele, sau chiar toate ecuațiile (17), cu $x, x^2, x^3, ...$ vom putea obține un sistem de ecuații al căror grad să fie egal cu numărul lor.

Deci din ecuațiile (17) se poate obține întotdeauna un sistem de ecuații al căror grad să fie egal cu numărul lor; fie n acest număr. Dacă rangul matricei coeficienților sistemului astfel obținut este $n - k$, $(k = 0, 1, ..., n - 1)$, atunci ecuațiile pot admite $k + 1$ rădăcini comune. Considerînd din acest sistem $n - k$ ecuații, care au rangul matricei coeficienților $n - k$, le putem aplica condiția (14).

Ca aplicație fie ecuațiile

$$(18) \qquad \begin{cases} f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0, & (a_0 \neq 0), \\ g(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n = 0, & (b_0 \neq 0), \end{cases}$$

unde presupunem că vectorii $v_1 = (a_0, a_1, ..., a_n)$ și $v_2 = (b_0, b_1, ..., b_n)$ sînt liniar independenți. Înmulțind fiecare din ecuațiile (18) respectiv cu $x, x^2, ..., x^{n-2}$ obținem $2n - 2$ ecuații de gradul $2n - 2$. Presupunînd că ele admit o rădăcină comună, din condiția (8) se poate ajunge la determinantul lui Sylvester. Ne putem convinge de acest lucru considerînd oricare pereche de rapoarte din (8) ținînd seama de regula lui Laplace de dezvoltare a unui determinant, precum și de proprietățile determinanților.

În încheiere să stabilim și

Teorema 3. *Dacă $n - k$ ecuații de grad n admit $k + 1$ rădăcini comune $(k = 0, 1, ..., n - 1)$, atunci valoarea comună a rapoartelor din (14) este egală cu produsul celor $k - 1$ rădăcini comune.*

În adevăr notînd cu $x_1, x_2, ..., x_{k+1}, x_{k+2}^{(i)}, ..., x_n^{(i)}$, $(i = 1, 2, ..., n - k)$ rădăcinile ecuațiilor (13), aceste ecuații pot fi scrise

$$f_i(x) = x^n + (x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} + x_{k+2}^{(i)} + \dots + x_n^{(i)}) x^{n-1} + \dots +$$
$$+ x_1 x_2 \dots x_{k+1} x_{k+2}^{(i)} \dots x_n^{(i)} = 0, \qquad (i = 1, 2, ..., n - k).$$

Calculînd pentru aceste ecuații valoarea oricăruia dintre rapoartele (14) și ținînd seama de proprietățile determinanților obținem

$$\frac{D_{12 \dots (k+1)}}{D_{23 \dots (k+2)}} = x_1 x_2 \dots x_{k+1}.$$

Primită la 15 decembrie 1964

Institutul pedagogic,
Tîrgu Mureș

BIBLIOGRAFIE

1. Myler-Lebedev, *Lecţii de algebră*. Ed. Acad. R.P.R., Buc., 1953.
2. Stoica M. D., Gaz. Mat. şi Fiz., Buc., 1962, s. **A**, *11-12*.

ОБЩИЕ КОРНИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЧИСЛА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

(Резюме)

Уравнения (14) представляют необходимое и достаточное условие, чтобы $n - k$ уравненпй порядка n, обладающих матриченым рангом коэффициентов равным $n - k$ имели бы $k + 1$, ($k = 0, 1, \ldots, n - 1$) общих корней. Указывается также, что это условие может быть применено и в общем случае, т. е. для производного чиела уравнений любого порядка.

Найденое условие отличается от доныне известных. Как ее применение, находится известное условие Сильвестера.

Доказывается также, что когда $n - k$ уравнений рорядка n разрешают $k + 1$ общих корней ($k = 0, 1, \ldots, n - 1$), тогда общая величина соотношений из (14) является равной произведению $k + 1$ общих корней.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 515.19

SUPRAFEŢE TOPOGRAFICE ÎN GEOMETRIA REPREZENTATIVĂ PLAN-AXIALĂ

DE

I. RUSU şi C. HUIU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

În lucrările [1]...[3] s-au pus bazele unei geometrii reprezentative plan axiale.

În lucrarea de faţă se prezintă rezultatele aplicării acestei metode la rezolvarea problemelor privind suprafeţele topografice.

2. Secţiuni plane în suprafeţe topografice

a) *Secţiunea cu un plan oarecare*

Pentru a găsi intersecţia dintre un plan $P(P_0, P_z)$ şi o suprafaţă topografică dată prin linii de nivel (fig. 1), se va construi linia de cea mai mare pantă a planului, ca ipotenuză a triunghiului P_zOU. Se consideră planele de nivel corespunzătoare liniilor de nivel, plane care au urmele axiale în punctele de cotă 100, 101, ... Se poartă apoi echidistanţa planelor pe cateta $P_{z_1}O$, care este cota urmei axiale a planului, rabătut în planul reprezentării de cotă 100. Se obţin astfel punctele $\overline{105}$, $\overline{104}$, ... , din care se duc perpendiculare la dreapta $P_{z_1}O$. Acestea intersectează linia de cea mai mare pantă $P_{z_1}U$ în punctele 105_1, 104_1, ... Prin punctele de diviziune obţinute se duc proiecţiile orizontalelor planului P, considerate ca intersecţii dintre acest plan şi planele de nivel utilizate.

Punctele de intersecţie dintre liniile de nivel şi orizontalele de aceeaşi cotă determină linia $gfedcbaa_1b_1c_1d_1e_1$, care este intersecţia căutată.

Pentru găsirea adevăratei mărimi a acestei linii, se rabat orizontalele planului P pe planul reprezentării II. În acest scop se rabate linia de cea mai mare pantă împreună cu gradaţiile sale; după rabatere aceasta se confundă cu proiecţia sa din planul II.

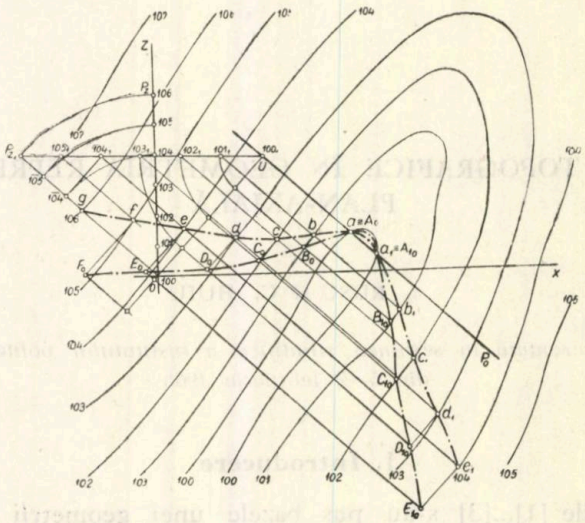


Fig. 1

Se trasează orizontalele prin diviziunile liniei de cea mai mare pantă rabătute, care se intersectează cu liniile de ordine de aceeaşi cotă (proiectantele rabătute ale punctelor liniei de intersecţie găsită).

Punctele de intersecţie $F, E, D, C, B, A, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1$, dintre orizontalele rabătute şi liniile de ordine menţionate, se unesc printr-o linie continuă, obţinîndu-se intersecţia rabătută în mărimea sa reală.

b) *Secţiunea cu un plan proiectant*

În cazul secţiunilor cu plane verticale se consideră sistemul de referinţă plan-axial şi suprafaţa topografică dată prin linii de nivel.

Cum fiecare linie de nivel este rezultatul secţionării reliefului cu planul de nivel de aceeaşi cotă, rezultă că în planul reprezentării se va lua pe axa OZ echidistanţa planelor de nivel, cu care se şi gradează. Astfel, în fig. 2 planul reprezentării II are cota 145, celelalte plane avînd cotele 146, 147,...,150, echidistanţa fiind 1 m. Punctele de cotă menţionate sînt de fapt urmele axiale ale planelor de nivel, care secţionînd relieful dau liniile de nivel.

Se reprezintă urma P_0 a planului vertical P. Acesta se intersectează cu planele de nivel după orizontalele de cotă corespunzătoare. Practic se

duc paralele la urma P_0 cu echidistanța de 1 m. Urma P_0 poate fi considerată orizontala de cotă 145; celelalte orizontale vor avea cotele 146, ..., 150.

Planul de secțiune P intersectează liniile de nivel în punctele $B(b, \bar{b})$, $B_1(b_1, \bar{b}_1)$, ..., $F(f, \bar{f})$, $F_1(f_1, f_1)$. Pentru a găsi adevărata mărime a liniei de secțiune se rabate planul P pe planul II.

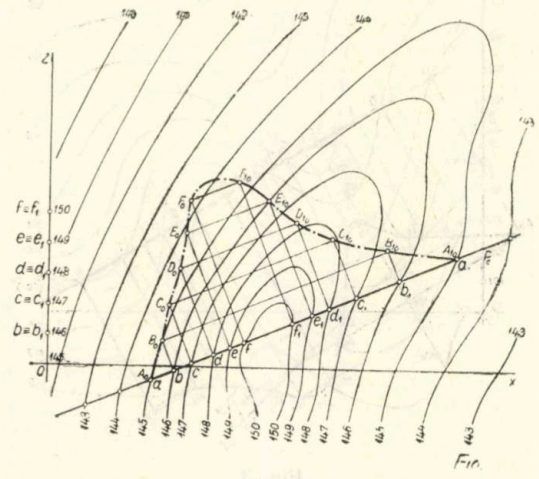


Fig. 2

Din proiecțiile orizontale a, a_1; b, b_1;...; f, f_1 se duc proiectantele punctelelor menționate rabătute în planul II, perpendiculare pe P_0. Acestea intersectează orizontalele de aceeași cotă în punctele A_0, A_{10}; B_0, B_{10};...; F_0, F_{10}. Unind aceste puncte printr-o linie continuă se obține secțiunea suprafeței topografice date cu planul vertical P, rabătută în planul II.

3. Intersecția unei drepte cu o suprafață topografică

Considerăm, ca și în cazurile precedente, o suprafață topografică dată prin linii de nivel și dreapta D dată prin punctele $E(\bar{e}, e)$ și $L(\bar{l}, l)$.

Planele de nivel vor fi reprezentate prin urmele axiale de cotă corespunzătoare liniilor de nivel, rezultate prin secționarea reliefului cu aceste plane (fig 3).

Planul P proiectant față de planul II dus prin $D(E, L)$ intersectează liniile de nivel în punctele $A(a, \bar{a})$, $B(b, \bar{b})$, ..., $K(k, \bar{k})$. Pozițiile rabătute ale acestor puncte pe planul II, a cărui cotă este 100 m (fig. 3), determină poziția rabătută Δ_0 a liniei de intersecție dintre planul P și suprafața topografică dată. Punctele acestei linii se obțin prin intersecția proiectantelor acestora cu orizontalele de aceeași cotă.

Punctele de intersecţie I_0, II_0, III_0 dintre poziţia rabătută D_0 a dreptei D şi poziţia rabătută Δ_0 a liniei de intersecţie Δ sînt poziţiile rabătute ale punctelor de intersecţie dintre dreapta dată şi suprafaţa topografică considerată.

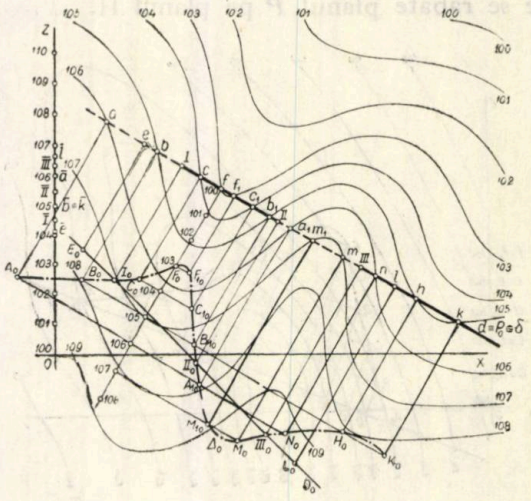


Fig. 3

Prin ridicarea planului P se găsesc pe d punctele I, II, III, care sînt proiecţiile în planul II ale punctelor căutate. Segmentele $I_0 I$, $II_0 II$ şi $III_0 III$ sînt cotele acestor puncte şi ele pot fi măsurate pe axa OZ începînd din origine în sens pozitiv determinînd astfel proiecţiile axiale I, II şi III ale aceloraşi puncte.

4. Aplicaţii

O problemă importantă o constitue construcţia proiecţiei amprizei unei căi de comunicaţie ce trebuie proiectată. Aceasta necesită cunoaşterea pantei căii, proiecţia acesteia în planul reprezentării, relieful unde se amplasează calea etc.

Considerînd că, pe o anumită porţiune, partea carosabilă intersectată cu planul taluzului terasamentului are ca rezultat o dreaptă a cărei pantă este panta căii, ne-am propus pentru rezolvare secţionarea unei suprafeţe topografice date cu un plan de pantă dată ce trece printr-o dreaptă dată. Planul de pantă dată este planul taluzului, iar dreapta este intersecţia acestuia cu partea carosabilă.

În baza celor expuse problema se rezumă la a duce un plan de pantă dată printr-o dreaptă dată.

Să considerăm dreapta $D\,(d,\ D_0)$. Dacă admitem că panta planului taluzului este $p = 2/3$, se trasează un cerc cu centrul în a (fig. 4 și 5), a cărui rază este, în cazul pantei admise, egală cu o lungime astfel încît $Z_A/r = 2/3$, Z_A fiind cota punctului A, iar r — raza cercului trasat; deci $Z_A = 2$ și $r = 3$. Se duce tangenta la acest cerc din U; ea este urma P_0 a planului P. Urma axială P_z se găsește construind triunghiul liniei de cea mai mare pantă pentru P_z, ținînd seamă că panta planului $p = 1/1$.

În fig. 6 s-a considerat relieful dat prin linii de nivel și dreapta $D\,(d,\ D_0)$. S-a dus planul P de pantă $p = 2/3$ prin dreapta D, planul reprezentării II fiind de cotă 10; apoi s-au reprezentat orizontalele acestuia de cotă rotundă. Intersectînd liniile de nivel cu orizontalele de aceeași cotă se obține linia δ de intersecție a suprafeței topografice date cu planul P, proiectată în planul reprezentării II.

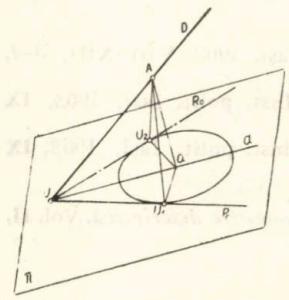


Fig. 4

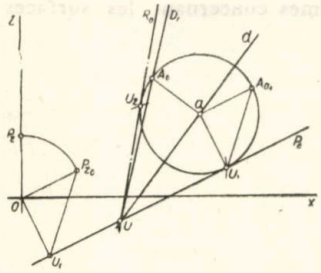


Fig. 5

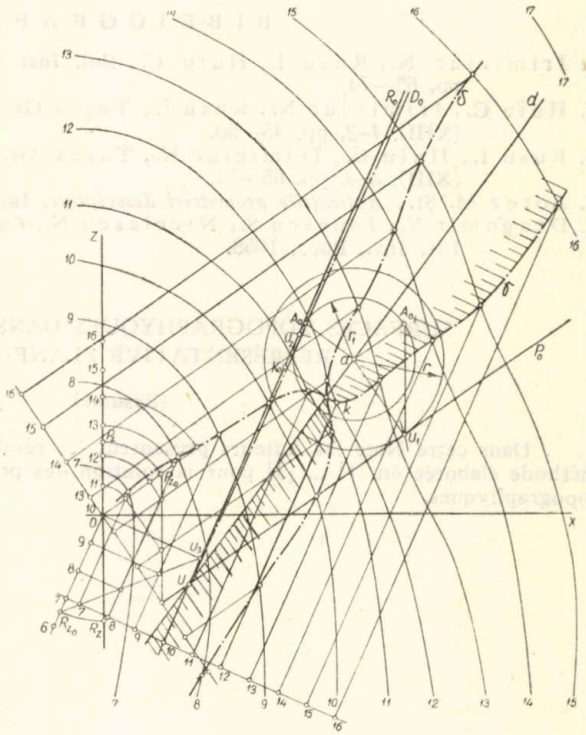


Fig. 6

Această linie intersectează proiecția d în k. Segmentul kK_0 este cota acestui punct în care se face trecerea de la taluz în umplutură la taluz în săpătură, sau de la rambleu la debleu. Desigur dacă platforma căii s-ar fi dat prin două drepte paralele, aceasta ar fi condus la reprezentarea completă a amprizei dar ar fi necesitat repetarea problemei tratate în care am urmărit doar principiul construcției amprizei în sistemul de referință plan-axial.

Să presupunem că panta taluzului în debleu este $p_1 = 1/1$; aceasta înseamnă că prin dreapta $D\,(d,\ D_0)$ trebuie dus un plan R de pantă indicată. În acest scop se trasează un

cerc cu centrul în a de rază astfel încît raportul $Z_A/r_1 = 1/1$; deci $Z_A = r_1$. Tangenta dusă din U la cercul de rază r_1 este de fapt urma planului tangent la conul de revoluţie de înălţime Z_A şi rază r_1 (fig. 6).

Planul R, aşa cum s-a arătat, este planul taluzului în săpătură. Se construiesc orizontalele acestui plan, care intersectate cu liniile de nivel de aceeaşi cotă dau un număr de puncte care unite printr-o linie γ determină linia de intersecţie dintre planul R al taluzului debleu cu suprafaţa topografică. S-a determinat astfel în epură poziţia amprizei axei $D(d, D_0)$.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de geometrie descriptivă şi desen

BIBLIOGRAFIE

1. Irimiciuc N., Rusu I,, Huiu C., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1962, **VIII (XII)**, *3-4*, pp. 65—74.
2. Huiu C., Irimiciuc N., Rusu I., Taşcă Gr., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, **IX (XIII)**, *1-2*, pp. 45—50.
3. Rusu I., Huiu C., Irimiciuc N., Taşcă Gr., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, **IX (XIII)**, *3-4*, pp. 65—74.
4. Botez M. Şt., *Aplicaţiile geometriei descriptive.* Iaşi, 1946.
5. Dragomir V., Ionescu S., Nicolescu N., *Curs de geometrie descriptivă.* Vol. **II**, Lit. Inv., Buc., 1958.

SURFACES TOPOGRAPHYQUES DANS LA GÉOMÉTRIE REPRÉSENTATIVE PLANE-AXIALE

(Résumé)

Dans cette Note les Auteurs présentent les résultats quant à l'application de la méthode élaborée en [1] ... [3] pour la solution des problèmes concernant les surfaces topographyques.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3—4, 1966

D. C. 539.319

GREEN'S FUNCTIONS FOR AN THERMOELASTIC MEDIUM (QUASI-STATIC PROBLEM)

BY

W. NOWACKI

1. In our previous papers [1] and [2] the Green functions for the dynamic thermoelastic problem were derived. In this Note we are concerned with the determination of displacements and temperature accompanying the deformations in an unbounded thermoelastic space for the case of a concentrated force and heat source. We assume that this force as well as the heat source are slowly changing in time. In the quasi-static problem the inertial members in equations of motion can be disregarded and, consequently, the fundamental equations of thermoelasticity may be formulated as follows:

$$\nabla^2\theta - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial\theta}{\partial t} - \eta \operatorname{div}\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{Q}{\varkappa}, \tag{1}$$

$$\mu\nabla^2\vec{u} + (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} + \vec{X} = \gamma\operatorname{grad}\theta. \tag{2}$$

Eq. (1) is an expanded equation of heat conduction, whereas Eq. (2) represents the displacement equation of the theory of elasticity. These equations are mutually coupled. The notations adopted in this paper are: $\vec{u}$ stands for the displacement vector; $\vec{X}$ — for the vector of body forces; $\theta = T - T_0$ denotes the difference between the absolute temperature T and the temperature characterizing the natural thermic state of the body, T_0; Q is the function describing the intensity of heat sources; μ and λ are Lamè's coefficients with reference to the isothermic state; $\varkappa = (k/\varrho c_\varepsilon)$ denotes a coefficient, wherein k is the heat conductivity constant, ϱ — density and c_ε — specific heat of the body, the deformation being assumed constant. Further, $\eta = \gamma T_0/k$, where $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$, α_t being the coefficient of linear heat dilatation; $Q = W/(\varrho c_\varepsilon)$, where W represents the quantity of heat gener-

ated in a volume unit of the body in a time unit. Functions $\vec{u}, \theta, X, Q$ are the functions of position and time.

Decomposition of the displacement and the body forces vectors into the potential and the solenoidal vectors respectively leads to:

$$\vec{u} = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{curl}\vec{\psi}, \tag{3}$$

$$\vec{X} = \varrho\,(\operatorname{grad}\vartheta + \operatorname{curl}\vec{\chi}). \tag{4}$$

We reduce the system of Eqs. (1) and (2) to the system of the following three equations:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\varkappa}\,\partial_t\right)\theta - \eta\,\partial_t\,\nabla^2\varphi = -\frac{Q}{\varkappa}, \tag{5}$$

$$\nabla^2\varphi = m\theta - \frac{1}{c_1^2}\,\vartheta, \tag{6}$$

$$\nabla^2\vec{\psi} = -\frac{1}{c_2^2}\,\vec{\chi}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\varrho}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}. \tag{7}$$

Let the concentrated force, varying in time and acting along the x_1 axis be applied at the origin of the coordinate system. It means that

$$X_j = \delta(x_1)\,\delta(x_2)\,\delta(x_3)\,\delta_{1j}\,f(t).$$

Now, let us assume that this force starts its action at the moment $t = 0^+$. We perform the Laplace integral transform on Eqs. (5)...(7). Introducing the transformation of the function

$$\mathcal{L}[g(t)] = \tilde{g}(p) = \int_0^\infty g(t)\,e^{-pt}\,dt, \quad p > 0,$$

and assuming homogeneous initial conditions, we reduce Eqs. (5)...(7) to the forms:

$$\left(\nabla^2 - \frac{p}{\varkappa}\right)\tilde{\theta} - \eta p\,\nabla^2\tilde{\varphi} = 0, \tag{8}$$

$$\nabla^2\tilde{\varphi} - m\tilde{\theta} = -\frac{1}{c_1^2}\,\tilde{\vartheta}, \tag{9}$$

$$\Delta^2\tilde{\psi}_i = -\frac{1}{c_2^2}\,\tilde{\chi}_i, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{10}$$

The quantities $\tilde{\vartheta}$ and $\tilde{\vec{\chi}}$ will be determined from the formulae:

$$\tilde{\vartheta}(\vec{x}, p) = -\frac{1}{4\pi\varrho}\int_B \tilde{\vec{X}}(\vec{x}', p)\,.\,\mathrm{grad}\left(\frac{1}{R(\vec{x}, \vec{x}')}\right)\mathrm{d}V(\vec{x}'), \tag{11}$$

$$\tilde{\vec{\chi}}(\vec{x}, p) = -\frac{1}{4\pi\varrho}\int_B \tilde{\vec{X}}(\vec{x}', p)\times\mathrm{grad}\left(\frac{1}{R(\vec{x}, \vec{x}')}\right)\mathrm{d}V(\vec{x}'), \tag{12}$$

whence

$$\tilde{\vartheta}(\vec{x}, p) = -\frac{1}{4\pi\varrho}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{R}\right)\tilde{f}(p),$$

$$\tilde{\chi}_1 = 0, \quad \tilde{\chi}_2 = \frac{1}{4\pi\varrho}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{R}\right)\tilde{f}(p), \tag{13}$$

$$\tilde{\chi}_3 = -\frac{1}{4\pi\varrho}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{R}\right)\tilde{f}(p), \qquad R = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}.$$

After eliminating the function φ from Eqs. (8) and (9), we obtain

$$(\nabla^2 - \beta^2)\,\tilde{\theta} = \frac{q\varepsilon}{4\pi\varrho\, c_1^2 m}\left(\frac{1}{R}\right)\tilde{f}(p),$$

$$\beta^2 = \frac{p}{\varkappa}(1 + \varepsilon), \quad \varepsilon = \eta m \varkappa. \tag{14}$$

The function expressed by Eq. (15) is the particular integral of Eq. (14)

$$\tilde{\theta} = \varepsilon A \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{e^{-\beta R}}{R} - \frac{1}{R}\right)\tilde{f}(p), \qquad A = \frac{1}{4\pi\varrho\, c_1^2 m(1 + \varepsilon)}. \tag{15}$$

On performing the inverse Laplace's transformation, we arrive at

$$\theta(\vec{x}, t) = \tag{16}$$

$$= -\varepsilon A \frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\frac{f(t)}{R} - \left(\frac{1 + \varepsilon}{4\pi\varkappa}\right)^{3/2}\int_0^t (t - \tau)^{-3/2} f(\tau)\exp\left[-\frac{R^2(1 + \varepsilon)}{4\varkappa(t - \tau)}\right]\mathrm{d}\tau\right\}.$$

Inserting Eq. (15) into (9), we get the following differential equation:

$$\nabla^2 \vec{\varphi} = B \vec{f}(p) \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\varepsilon \frac{e^{-\beta R}}{R} + \frac{1}{R}\right), \quad B = \frac{1}{4\pi \varrho c_1^2 (1+\varepsilon)}. \tag{17}$$

Taking into account that

$$\nabla^2\left(\frac{x_1}{R}\right) = -\frac{2x_1}{R^3}, \quad \nabla^2\left(\frac{e^{-\beta R}}{R}\right) = \beta^2 \frac{e^{-\beta R}}{R},$$

we obtain the particular integral of Eq. (17) in the form

$$\tilde{\vec{\varphi}}(\vec{x}, p) = \frac{B}{2} \frac{\partial}{\partial x_1}\left\{R + \frac{2\varepsilon\varkappa}{p(1+\varkappa)R} \exp\left[-R\sqrt{\frac{p(1+\varepsilon)}{\varkappa}}\right]\right\} \tilde{f}(p). \tag{18}$$

After carrying out the inverse Laplace transformation on function $\tilde{\vec{\varphi}}$, we have

$$\vec{\varphi}(\vec{x}, t) = \frac{B}{2} \frac{\partial}{\partial x_1}\left\{R f(t) + \frac{2\varepsilon\varkappa}{(1+\varepsilon)R} \int_0^t f(\tau) \operatorname{erfc}\left(\frac{R}{2}\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varkappa(t-\tau)}}\right) d\tau\right\}, \tag{19}$$

where

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-u^2} du.$$

The solution of Eqs. (10) is well-known:

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = \frac{1}{8\pi\mu} f(t) \frac{\partial}{\partial x_3}(R), \quad \psi_3 = -\frac{1}{8\pi\mu} f(t) \frac{\partial}{\partial x_2}(R).$$

Since

$$\operatorname{curl} \vec{\psi} = \frac{1}{8\pi\mu}\left\{\frac{1}{R} - \frac{\partial^2(R)}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2(R)}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2(R)}{\partial x_1 \partial x_3}\right\},$$

we may represent the components of displacement, by the formula (3):

$$u_j^{(1)} = \left[\left(\frac{B}{2} - \frac{1}{8\pi\mu}\right)\partial_1 \partial_j(R) + \frac{1}{8\pi\mu R}\delta_{1j}\right] f(t) +$$

$$+ \frac{B\varepsilon\varkappa}{1+\varepsilon} \partial_1 \partial_j \int_0^t \frac{f(\tau)}{R} \operatorname{erfc}\left(\frac{R}{2}\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varkappa(t-\tau)}}\right) d\tau, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}. \tag{20}$$

If we now transfer the point of application of the concentrated force from the origin of the coordinate system to the point (ξ), and direct this force along the x_k-axis, we will obtain formulae for displacements and the corresponding temperature

$$u_j^{(k)} = \left[\left(\frac{B}{2} - \frac{1}{8\pi\mu}\right)\partial_j \partial_k (R) + \frac{1}{8\pi\mu R}\delta_{jk}\right] f(t) +$$

(21)

$$+ \frac{\varepsilon\varkappa B}{1+\varepsilon}\partial_j \partial_k \int_0^t \frac{f(\tau)}{R}\operatorname{erfc}\left(\frac{R}{2}\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varkappa(t-\tau)}}\right) d\tau,$$

$$\theta^{(k)} = -\varepsilon A \partial_k \left\{\frac{f(t)}{R} - \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{4\pi\varkappa}} \int_0^t f(t-\tau)^{-3/2} \exp\left[-\frac{R^2(1+\varepsilon)}{4\varkappa(t-\tau)}\right]\right\} d\tau,$$

(22)

$$R^2 = (x_j - \xi_j)(x_j - \xi_j), \quad t \geq 0, \quad (j,k = 1,2,3).$$

Let us remark that displacement $u_j^{(k)}$ consists of two terms, the first varying with time similary as the function $f(t)$, and the other in the form of convolution, characterizing the conjugation of the field of deformation with that of temperature. The same holds true for the function $\theta^{(k)}$.

Assuming $f(t) = \delta(t)$ we obtain in virtue of Eqs. (21) and (22) Green's functions for our problem i. e. the action of the concentrated and instantaneous force acting at the point $(\vec{\xi})$ directed along the axis x_k.

$$U_j^{(k)}(\vec{x}, \vec{\xi}, t) = \left[\left(\frac{B}{2} - \frac{1}{8\pi\mu}\right)\partial_j \partial_k (R) + \frac{1}{8\pi\mu R}\delta_{jk}\right]\delta(t) +$$

(23)

$$+ \frac{B\varepsilon\varkappa}{1+\varepsilon}\partial_j \partial_k \left[\frac{1}{R}\operatorname{erfc}\left(\frac{R}{2}\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varkappa t}}\right)\right],$$

$$\Theta^{(k)} = -\varepsilon A \partial_k \left\{\frac{1}{R}\delta(t) - \left(\frac{1+\varepsilon}{4\varkappa t}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{R^2(1+\varepsilon)}{4\varkappa t}\right]\right\}.$$

(24)

If the concentrated force varies harmonically with time, i. e. for $X_j(\vec{x}, t) = \delta(\vec{x} - \vec{\xi})\delta_{jk} e^{-i\omega t}$, we obtain the equations of amplitudes, provided we replace in the Laplace transforms the parameter p by the parameter $-i\omega$, wherein ω stands for vibration frequency. Thus, function $\varphi(\vec{x}, t)$, for instance, will take the form:

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{B}{2} e^{-i\omega t} \frac{\partial}{\partial x_1}\left\{R - \frac{2\varepsilon\varkappa}{i\omega(1+\varepsilon)R}\exp\left[-R\left(\frac{-i\omega(1+\varepsilon)}{R}\right)^{1/2}\right]\right\}.$$

(25)

The displacements and the temperature pertinent to harmonic vibrations are given by the formulae

$$u_j^{(k)} = \left[\left(\frac{B}{2} - \frac{1}{8\pi\mu}\right)\partial_j\partial_k(R) + \frac{1}{8\pi\mu R}\delta_{jk}\right]e^{-i\omega t} + \tag{26}$$

$$+ \frac{\varepsilon\varkappa\, i B}{\omega(1+\varepsilon)}\partial_j\partial_k\left\{\frac{1}{R}\exp\left[-i\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)-\gamma R\right]\right\},$$

$$\theta^{(k)} = -\varepsilon A\partial_k\left\{\frac{1}{R}e^{-i\omega t} - \frac{1}{R}\exp\left[-i\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)-\gamma R\right]\right\}, \tag{27}$$

where

$$c = \frac{\omega}{\mathcal{R}e(h)} = \left(\frac{2\omega\varkappa}{1+\varepsilon}\right)^{1/2}, \quad \gamma = \mathcal{I}m(h) = \left[\frac{\omega(1+\varepsilon)}{2\varkappa}\right]^{1/2}, \quad h = \left[\frac{i\omega(1+\varepsilon)}{2\varkappa}\right]^{1/2}.$$

2. Let us now examine the non coupled problem. We apply the approximate classical equation of heat conductivity:

$$\nabla^2\theta - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial\theta}{\partial t} = 0, \tag{28}$$

instead of Eq. (1).

Passing from Eq. (1) to Eq. (28), we introduce into the results obtained the quantities $\eta = 0$ or $\varepsilon = 0$ respectively. In this way Eqs. (21) and (22) can be expressed as:

$$u_j^{(k)}(\vec{x}, t) = \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\left[\frac{x_i x_j}{R^3} + \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\delta_{jk}\left(\frac{1}{R}\right)\right]f(t), \quad \theta^{(k)} = 0. \tag{29}$$

It is to be noted that Eq. (29) can be written in this way:

$$u_j^{(k)}(\vec{x}, t) = \hat{u}_j^{(kj)}(\vec{x})f(t), \tag{30}$$

wherein $\hat{u}_j^{(k)}(\vec{x})$ is the Green function for the static problem, given by the known Kelvin's formula.

Basing on Green's functions as expressed by Eqs. (29) and (24) we may formulate further singularities. If we apply at point $(\xi_1 + \Delta\xi_1/2, \xi_2, \xi_3)$ the concentrated force $(P/\Delta\xi_1)f(t)$, acting along the x_1-axis, and, on the other hand, at point $(\xi_1 - \Delta\xi_1/2, \xi_2, \xi_3)$ the force $(P/\Delta\xi_1)f(t)$, acting along the negative axis x_1, then after passing $\Delta\xi_1 \to 0$ we obtain the following displacements, v_j, and temperature Θ:

$$v_j = -P\frac{\partial u_j^{(k)}}{\partial\xi_1}, \quad \Theta = -P\frac{\partial\theta^{(1)}}{\partial\xi_1}. \tag{31}$$

For $P = 1$ we get Green functions for the double force without a moment. Assume at the point $(\vec{\xi})$ a compression centre is acting, that is three dual forces, the first of them acting along the x_1, the second — along the x_2, and the third – along the x_3 axis. Denoting the displacement by the symbol $\hat{U}_j$ and the temperature by $\hat{\theta}$, both due to the action of the compression centre we have

$$\hat{U} = -(\partial_{1'} u_1^{(1)} + \partial_{2'} u_2^{(2)} + \partial_{3'} u_3^{(3)}) =$$

$$(32) \quad = -\left(B - \frac{1}{8\pi\mu}\right) f(t)\, \partial_j \left(\frac{1}{R}\right) + \frac{\varepsilon B}{2}\left(\frac{1+\varepsilon}{\pi\varkappa}\right)^{1/2} \partial_j \int_0^t \frac{f(t)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[\frac{-R^3(1+\varepsilon)}{4\varkappa(t-\tau)}\right] d\tau,$$

$$\hat{\theta} = -(\partial_{1'} \theta^{(1)} + \partial_{2'} \theta^{(2)} + \partial_{3'} \theta^{(3)}) =$$

$$(33) \quad = -\frac{\varepsilon A(1+\varepsilon)}{\varkappa R} \int_0^t \frac{\partial f(t)}{\partial \tau} \frac{1}{\sqrt{4\pi\varkappa(t-\tau)}} \exp\left[-\frac{R^2(1+\varepsilon)}{4\varkappa(t-\tau)}\right] d\tau, \quad \partial_{j'} = \frac{\partial}{\partial \xi_j}.$$

If the compression centre varies harmonically with time variable, we obtain

$$(33') \quad \hat{U}_j = -\left(B - \frac{1}{8\pi\mu}\right) \partial_j \left(\frac{1}{R}\right) e^{-i\omega t} - \varepsilon B\, \partial_j \left\{\frac{1}{R} \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{R}{c}\right) - \gamma R\right]\right\},$$

$$(34) \quad \hat{\theta} = \frac{\varepsilon(1+\varepsilon) A\, i\omega}{R\varkappa} \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{R}{c}\right) - \gamma R\right].$$

For the non-coupled problem ($\varepsilon = 0$) there is:

$$(35) \quad \hat{U}_j = \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \partial_j \left(\frac{1}{R}\right) f(t), \quad \hat{\theta} = 0.$$

Assume now that a concentrated, varying with time a heat source is acting at the origin of the coordinate system: $Q(R, t) = \delta(R) f(t)$. Elimination of function φ from Eqs. (5) and (6) and performance of Laplace transform yields

$$(36) \quad (\nabla^2 - \beta^2)\, \tilde{\theta} = -\frac{\delta(R) \tilde{f}(R)}{\varkappa}.$$

Particular integral of this equation constitues the function

$$(37) \quad \tilde{\theta} = \frac{1}{4\pi R\varkappa} e^{-\beta R} \tilde{f}(p), \quad R = (x_1^2 + x^2 + x^2)^{1/2}.$$

After performation of inverse Laplace transform the temperature will be expressed by the formula

$$\theta(R,t)=\frac{1}{4\pi\varkappa}\int_0^t f(\tau)\left(\frac{1+\varepsilon}{4\pi\varkappa}\right)^{1/2}(t-\tau)^{-3/2}\exp\left[-\frac{R^2(1+\varepsilon)}{4\varkappa(t-\tau)}\right]d\tau. \tag{38}$$

Function $\tilde{\varphi}$ will be determined from the equation:

$$\nabla^2\tilde{\varphi}=m\tilde{\theta}. \tag{39}$$

The following function is the particular integral of (39):

$$\tilde{\varphi}=\frac{m}{4\pi\varkappa\beta^2}\left(\frac{e^{-\beta R}}{R}-\frac{1}{R}\right)\tilde{f}(p). \tag{40}$$

When the inverse Laplace transformation is performed, we get

$$\varphi(R,t)=\frac{m}{4\pi(1+\varepsilon)R}\left\{\int_0^t f(\tau)\operatorname{erfc}\left[\left(R\frac{1+\varepsilon}{4\varkappa(t-\tau)}\right)^{1/2}\right]d\tau-\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\}. \tag{41}$$

The displacement, being the effect of the action of the heat source, may be obtained from the equation

$$u_j=\partial_j\varphi_j. \tag{42}$$

If now the heat source is transferred from the origin of the coordinate system to the point $(\vec{\xi})$, we have to put $R^2=(x_j-\xi_j)(x_j-\xi_j)$ in Eqs. (38), (41) and (42).

Returning to the non-coupled problem, we insert $\varepsilon=0$ in formulae (36)...(42). Thus, for the static problem there is

$$\theta(R)=\frac{1}{4\pi\varkappa R}. \tag{43}$$

The equation

$$\nabla^2\varphi=m\theta, \tag{44}$$

yields the particular integral

$$\varphi=\frac{m}{8\pi\varkappa}R+\text{const}. \tag{45}$$

Thus

$$u_j=\frac{m}{8\pi\varkappa R}(x_j-\xi_j). \tag{46}$$

Let us apply the concentrated force varying with time at point $(\vec{\xi})$ directed along the x_k. The formula for the temperature at the point $(\vec{\xi}')$ induced by the action of this force is given by the relation (15)

$$\tilde{\theta}_X(\vec{\xi}', \vec{\xi}, p) = \varepsilon A \partial_k \left[\frac{e^{-\beta R}}{R} - \frac{1}{R}\right] \tilde{f}(p), \quad R^2 = (\xi_j' - \xi_j)(\xi_j' - \xi_j). \tag{47}$$

Let us now apply the heat source at point $(\vec{\xi}')$ and determine the displacements u_k^Q at point $(\vec{\xi})$. Eq. (42) yields:

$$\tilde{u}_k^Q(\vec{\xi}, \vec{\xi}', p) = \frac{m}{4\pi\varkappa\beta} \partial_k \left[\frac{e^{-\beta R}}{R} - \frac{1}{R}\right] \tilde{f}(p), \quad R^2 = (\xi_i - \xi_i')(\xi_i - \xi_i'). \tag{48}$$

Comparing Eqs. (47) and (48) we arrive at

$$\tilde{\theta}_X(\vec{\xi}', \vec{\xi}, p) = \frac{\eta\varkappa p}{\gamma} \tilde{u}_k^Q(\vec{\xi}, \vec{\xi}', p). \tag{49}$$

This relation may be derived from the theorem on the reciprocity [3]. In the transformed form, the theorem on the reciprocity, for an unbounded region, takes the following form:

$$\eta\varkappa p \int_B (\tilde{X}_i \tilde{u}_i' - \tilde{X}_i' \tilde{u}_i)\, dV + \gamma \int_B (\tilde{Q}\tilde{\theta}' - \tilde{Q}'\tilde{\theta})\, dV = 0. \tag{50}$$

If we assume that

$$\tilde{X}_i = \delta(\vec{x} - \vec{\xi})\, \delta_{ik} \tilde{f}(p), \quad \tilde{X}_i' = 0,$$

$$\tilde{Q}' = \delta(\vec{x} - \vec{\xi})\, \bar{f}(p), \quad \tilde{Q}_i = 0, \quad \tilde{u}_k' = \tilde{u}_k^Q, \quad \tilde{\theta} = \tilde{\theta}_X,$$

then from Eq. (50) we obtain whence

$$\eta\varkappa p \int_B \delta(\vec{x} - \vec{\xi})\, \delta_{ik} \tilde{f}(p)\, \tilde{u}_i^Q(\vec{x}, \vec{\xi}', p)\, dV(\vec{x}) -$$

$$- \gamma \int_B \delta(\vec{x} - \vec{\xi}') \tilde{f}(p)\, \tilde{\theta}_X(\vec{x}, \vec{\xi}, p)\, dV(\vec{x}) = 0, \tag{51}$$

$$\tilde{\theta}_X(\vec{\xi}', \vec{\xi}, p) = \frac{\eta\varkappa p}{\gamma} \tilde{u}_k^Q(\vec{\xi}, \vec{\xi}', p),$$

in conformity with (49).

If the concentrated force and the heat source vary harmonically with time, then

$$\theta_X^*(\vec{\xi}', \vec{\xi}, \omega) = -\frac{i\omega\eta}{\gamma} \tilde{u}_k^{*Q}(\vec{\xi}, \vec{\xi}', \omega). \tag{52}$$

Received the 23 III 1965

Polish Academy of Sciences,
Warsaw, Poland

REFERENCES

1. Nowacki W., *Green functions for an thermoelastic medium* (I). Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 1964, **12**, p. 315.
2. — *Green functions for an thermoelastic medium* (II). Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 1964, **12**, p. 465.
3. Ionescu-Cazimir V., *Problem of linear coupled thermoelasticity* (I). *Theorems on reciprocity for the dynamic problem of coupled thermoelasticity*. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn., 1964, **12**, p. 473.

FUNCȚIILE LUI GREEN PENTRU UN MEDIU TERMOELASTIC (PROBLEMA CVAZI-STATICĂ)

(Rezumat)

În lucrările anterioare ale autorului [1], [2] s-au dedus funcțiile lui Green pentru problema termoelastică dinamică. În această lucrare se rezolvă problema propusă pentru cazul cvazi-static.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 539.319

TENSIUNI TERMICE ÎN CORPURI CILINDRICE IZOTROPE PLASATE ÎNTR-UN CÎMP DE TEMPERATURĂ DISCONTINUU

DE

I. GRINDEI

Comunicare prezentată în sesiunea științifică a Universității „Al. I. Cuza" din Iași, din octombrie 1965

1. În cazul unui corp elastic de rotație cu încărcare axial simetrică, plasat într-un cîmp de temperatură cu simetrie axială, apare o stare de tensiune axial simetrică [1].

Folosindu-ne de coordonatele cilindrice r, φ, z (axa z fiind luată în direcția axei de rotație a corpului), ecuațiile de echilibru elastic, în absența forțelor masice și în ipoteza simetriei axiale ($\sigma_{r\varphi} = \sigma_{z\varphi} = 0$), au forma

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0. \tag{1.1}$$

Notînd cu u componenta vectorului de deplasare în direcția radială și cu w deplasarea în direcția axei z, atunci relațiile între componentele tensorului de deformare și componentele vectorului de deplasare, în cazul simetriei axiale, au forma

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z},$$
$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right), \quad \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{z\varphi} = 0. \tag{1.2}$$

Relațiile dintre tensiuni și deformări, în cazul termoelastic, se scriu sub forma

$$(1.3)\quad \begin{cases} \sigma_{rr} = 2G\left(\varepsilon_{rr} + \dfrac{\mu}{1-2\mu}e - \dfrac{1+\mu}{1-2\mu}\alpha T\right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} = 2G\left(\varepsilon_{\varphi\varphi} + \dfrac{\mu}{1-2\mu}e - \dfrac{1+\mu}{1-2\mu}\alpha T\right), \\ \sigma_{zz} = 2G\left(\varepsilon_{zz} + \dfrac{\mu}{1-2\mu}e - \dfrac{1+\mu}{1-2\mu}\alpha T\right), \\ \sigma_{rz} = 2G\varepsilon_{rz}, \end{cases}$$

în care G reprezintă modulul de forfecare, μ — coeficientul lui Poisson, α — coeficientul de dilatare termică liniară, T — temperatura, iar

$$(1.4)\quad e = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

În virtutea relaţiilor (1.3) şi (1.2), ecuaţiile (1.1) iau forma următoare:

$$(1.5)\quad \begin{aligned} \Delta u - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial e}{\partial r} - \frac{2(1+\mu)}{1-2\mu}\alpha\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \\ \Delta w + \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial e}{\partial z} - \frac{2(1+\mu)}{1-2\mu}\alpha\frac{\partial T}{\partial z} = 0, \end{aligned}$$

unde $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Pentru găsirea unei soluţii particulare a sistemului (1.5), luăm deplasările u şi w sub forma

$$(1.6)\quad u = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

în care funcţia $\Phi(r, z)$ este aşa-numitul potenţial termoelastic al deplasărilor.

Ţinînd seama de (1.6), sistemul de ecuaţii (1.5) se reduce la ecuaţia

$$(1.7)\quad \Delta\Phi = \frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha T.$$

Cunoscută fiind o soluţie particulară $\Phi(r, z)$ a ecuaţiei (1.7), în virtutea formulelor (1.2) şi (1.6), obţinem:

$$(1.8)\quad \varepsilon_{rr} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r\,\partial z}.$$

Ţinînd seama de (1.8), formulele (1.3) devin

$$
\begin{aligned}
&\bar{\sigma}_{rr} = 2G\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \Delta\Phi\right), \quad \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = 2G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \Delta\Phi\right), \\
&\bar{\sigma}_{zz} = 2G\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \Delta\Phi\right), \quad \bar{\sigma}_{rz} = 2G\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r\,\partial z}.
\end{aligned} \tag{1.9}
$$

În general, tensiunile date de (1.9) nu vor satisface condițiile la limită impuse problemei. De aceea, asupra soluției particulare (1.9) urmează să adăugăm soluția generală a sistemului omogen de ecuații (1.5) ($T = 0$), aleasă în așa fel încît să satisfacă toate condițiile la limită impuse problemei.

O asemenea soluție poate fi construită cu ajutorul unei funcții biarmonice $L(r, z)$, numită funcția lui Love, în modul următor [2]:

$$
\begin{cases}
\overline{\overline{u}} = -\dfrac{1}{1-2\mu}\dfrac{\partial^2 L}{\partial r\,\partial z}, \quad \overline{\overline{w}} = \dfrac{1}{1-2\mu}\left[2(1-\mu)\Delta L - \dfrac{\partial^2 L}{\partial z^2}\right]; \\
\overline{\overline{\sigma}}_{rz} = \dfrac{2G}{1-2\mu}\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\mu\Delta L - \dfrac{\partial^2 L}{\partial r^2}\right), \\
\overline{\overline{\sigma}}_{\varphi\varphi} = \dfrac{2G}{1-2\mu}\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\mu\Delta L - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial L}{\partial r}\right), \\
\overline{\overline{\sigma}}_{zz} = \dfrac{2G}{1-2\mu}\dfrac{\partial}{\partial z}\left[(2-\mu)\Delta L - \dfrac{\partial^2 L}{\partial z^2}\right], \\
\overline{\overline{\sigma}}_{rz} = \dfrac{2G}{1-2\mu}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[(1-\mu)\Delta L - \dfrac{\partial^2 L}{\partial z^2}\right].
\end{cases} \tag{1.10}
$$

Presupunînd determinată funcția L, satisfăcînd ecuația $\Delta\Delta L = 0$ și condițiile la limită cerute, atunci tensiunile totale σ vor fi date de

$$\sigma = \bar{\sigma} + \overline{\overline{\sigma}}. \tag{1.11}$$

2. Să considerăm un corp cilindric izotrop, de lungime infinită și de rază R, plasat într-un cîmp de temperatură staționar și axial simetric $T(r, z)$. Presupunem că pe porțiunea $|z| < a$ suprafața laterală a cilindrului se află în contact termic cu mediul exterior avînd temperatura egală cu $T_0(z)$, iar pe porțiunea $|z| > a$ cilindrul acționează cu mediul exterior avînd temperatura nulă.

Funcția de distribuție a temperaturii $T(r, z)$ în corpul nostru cilindric va satisface ecuația propagării căldurii

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \tag{2.1}$$

cu condițiile la limită

$$\frac{\partial T}{\partial r} + h_0 T = 0, \quad r = R, \quad |z| > a, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} + hT = hT_0(z), \quad r = R, \quad |z| < a, \tag{2.3}$$

unde h_0 şi h sînt coeficienţii corespunzători ai schimbului de căldură.

Căutînd o soluţie a ecuaţiei (2.1) sub forma $T_1 = \varphi(z)\,\Psi(r)$ obţinem, dacă ţinem seama de sensul fizic al soluţiei

$$T_1 = (A \cos mz + B \sin mz)\, \mathrm{I}_0(mr), \tag{2.4}$$

în care A şi B sînt constante arbitrare, m — un parametru real, $\mathrm{I}_0(mr)$ fiind funcţia lui Bessel de ordinul zero şi de argument imaginar.

Soluţia generală a ecuaţiei (2.1) o vom căuta sub forma

$$T = \int_0^\infty T_1(r, z, m)\, \mathrm{d}m. \tag{2.5}$$

Ţinînd seama de (2.4), (2.5) şi de relaţiile

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{I}_0(mr)}{\mathrm{d}r} = m\,\mathrm{I}_1(mr), \quad \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{I}_0(mr)}{\mathrm{d}r^2} = m^2\left[\mathrm{I}_0(mr) - \frac{\mathrm{I}_1(mr)}{mr}\right],$$

condiţiile la limită (2.2) şi (2.3) iau forma

$$\int_0^\infty \mathrm{C}(m) \cos mz\, \mathrm{d}m + \int_0^\infty \mathrm{D}(m) \sin mz\, \mathrm{d}m = 0, \quad |z| > a, \tag{2.6}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{C}(m)(1 + M) \cos mz\, \mathrm{d}m + \int_0^\infty \mathrm{D}(m)(1 + M) \sin mz\, \mathrm{d}m = hT_0(z), \quad |z| < a, \tag{2.7}$$

unde

$$\mathrm{C}(m) = A[m\,\mathrm{I}_1(mR) + h_0\,\mathrm{I}_0(mR)], \tag{2.8}$$

$$\mathrm{D}(m) = B[m\,\mathrm{I}_1(mR) + h_0\,\mathrm{I}_0(mR)], \tag{2.9}$$

$$M = \frac{(h - h_0)\,\mathrm{I}_0(mR)}{m\,\mathrm{I}_1(mR) + h_0\,\mathrm{I}_0(mR)}.$$

Soluţia sistemului de ecuaţii integrale (2.6) şi (2.7) o vom căuta sub forma

$$\mathrm{C}(m) = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} f(t) \cos mt\, \mathrm{d}t, \tag{2.10}$$

$$D(m)=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} f(t)\sin mt\,dt, \tag{2.11}$$

în care $f(t)$ este o funcţie ajutătoare ce admite reprezentarea sub forma integralei Fourier

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-a}^{a} f(t)\cos mt\cos mz\,dt+\int_{-a}^{a} f(t)\sin mt\sin mz\,dt\right]dm= \tag{2.12}$$

$$=\begin{cases} 0, & |z|>a,\\ f(z), & |z|<a. \end{cases}$$

Înlocuind expresiile (2.10) şi (2.11) pentru $C(m)$ şi $D(m)$ în ecuaţia (2.6), ne convingem că această ecuaţie, în virtutea relaţiei (2.12), este identic verificată.

Dacă însă expresiile (2.10) şi (2.11) le introducem în condiţia (2.7), obţinem

$$f(z)+\int_{-a}^{a} f(t)\,G(z,t)\,dt=hT_0(z), \tag{2.13}$$

unde

$$G(z,t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{(h-h_0)\,I_0(mr)}{m\,I_1(mR)+h_0\,I_0(mR)}\cos[m(z-t)]\,dm. \tag{2.14}$$

Prin urmare, pentru $f(z)$ s-a obţinut o ecuaţie integrală de tip Fredholm de speţa a doua.

Cunoscută fiind funcţia $f(z)$, ca soluţie a ecuaţiei (2.13), cîmpul de temperatură va fi dat de formula

$$T(r,z)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{I_0(mr)\,dm}{hI_1(mR)+h_0\,I_0(mR)}\int_{-a}^{a} f(t)\cos[m(z-t)]\,dt. \tag{2.15}$$

Pentru determinarea tensiunilor, se introduce cîmpul de temperatură dat de (2.15) în ecuaţia (1.7) şi apoi se aplică procedeul expus în § 1.

Universitatea „Al. I. Cuza“,
Iaşi

BIBLIOGRAFIE

1. Melan E., Parkus H., *Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder.* Wien, 1953.
2. Nowacki W., *Thermoelasticity.* Oxford-London-New York-Paris, 1962.
3. Котляр С. М., *До питания про теплопровидність суцильного цилиндра*, ПМ, 1964 **X**, 5.

TENSIONS THERMIQUES DANS DES CORPS CYLINDRIQUES ISOTROPES SITUÉS DANS UN CHAMPS DE TEMPÉRATURE DISCONTINU

(Résumé)

On obtient pour le champs de température qui vérifie l'équation (2.1) avec les conditions aux limites (2.2) et (2.3) l'expression (2.15), où I_0, I_1 sont les fonctions de Bessel du premier et du second ordre et $f(z)$ est une fonction auxiliaire, représentable sous forme d'intégrale Fourier (2.12) et qui est solution de l'équation de Fredholm (2.13). À l'aide de (2.15) on peut calculer les tensions thermiques dans le corps cylindrique considéré.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3—4, 1966

D. C. 539.313

NOTE ON THE TORSION OF A COMPOSITE CIRCULAR CYLINDER

BY

KARUNA KANTA RAY

1. In this note exact solutions giving the elastic displacements and stresses in Fourier series form, are obtained throughout a composite circular cylinder of different modulus of rigidity acted upon by a couple at one end while the other end held fixed end the lateral surface fixed. A sample numerical calculation is also included here.

2. We take a circular cylinder composed of two cylinders of different modulus of rigidity of length h and radius a each, kept in contact end to end. The lower end of the lower cylinder is fixed while the upper terminal section of the upper cylinder is subjected to a shearing force distributed over a small circular area and the lateral surface of both the cylinders is fixed. Linear distribution of shearing force has been considered in this paper.

The fixed end is taken as the plane $z = 0$, and the axis of the cylinder is considered as the z-axis. We use cylindrical coordinates r, θ, z and assume that the components of displacement u_r, u_z to be zero and $u_\theta = v$ to be independent of θ.

Then the stresses are given by,

$$(1) \qquad \begin{cases} \widehat{rr} = \widehat{\theta\theta} = \widehat{zz} = \widehat{rz} = 0, \\ \widehat{r\theta} = \mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial r} - \dfrac{v}{r}\right), \\ \widehat{\theta z} = \mu \dfrac{\partial v}{\partial z}, \end{cases}$$

μ being the modulus of rigidity. In this problem of composite cylinder, let

$$(2)\qquad \begin{cases} \mu = \mu_1, & \text{when } h < z \leqslant 2h, \\ \mu = \mu_2, & \text{when } 0 \leqslant z < h. \end{cases}$$

Two of the equations of equilibrium are identically satisfied and the remaining one $\partial(\widehat{r\theta})/\partial r + \partial(\widehat{\theta z})/\partial z + 2(\widehat{r\theta})/r = 0$ reduces to

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0.$$

If v_1 be the displacement in $h \leqslant z \leqslant 2h$ and v_2 be the displacement in $0 \leqslant z \leqslant h$, then the solution of (3) may be written as

$$(4)\qquad \begin{cases} v_1 = [A \operatorname{Sinh}(kz) + B \operatorname{Cosh}(kz)]\, J_1(kr), \\ v_2 = C \operatorname{Sinh}(kz)\, J_1(kr), \end{cases}$$

satisfying the end condition

$$(5_1)\qquad v_2 = 0 \quad \text{when} \quad z = 0,$$

where $J_1(kr)$ is the Bessel function of the first kind and first order, A, B and C are arbitrary constants to be determined from the other boundary and end conditions [1]).

The lateral surfaces being fixed it is assumed that at the ends in contact

$$(5_2)\qquad v_1 = v_2 \quad \text{on} \quad z = h,$$

$$(5_3)\qquad \widehat{\theta z}_1 = \widehat{\theta z}_2 \quad \text{on} \quad z = h.$$

The other end condition besides (5.1) is

$$(5_4)\qquad (\widehat{\theta z}_1)_{(z=2h)} \begin{cases} = Qr, & 0 \leqslant r \leqslant b < a, \\ = 0, & b < r \leqslant a, \end{cases}$$

where Q is a constant.

$$(6)\qquad \begin{cases} \widehat{r\theta}_1 = -\mu_1 [A \operatorname{Sinh}(kz) + B \operatorname{Cosh}(kz)]\, k\, J_2(kr), \\ \widehat{r\theta}_2 = -\mu_2 C \operatorname{Sinh}(kz)\, k\, J_2(kr), \end{cases}$$

where $J_2(kr)$ is the Bessel function of the first kind and second order.

Since the whole lateral surface is fixed

$$(7)\qquad (v_1)_{r=a} = 0 \quad \text{and} \quad (v_2)_{r=a} = 0.$$

Therefore from (4) and (7), we have

---

[1]) Subscripts 1 and 2 referred to the ciylnders $\mu = \mu_1$ and $\mu = \mu_2$ respectively.

(8) $$J_1(ka) = 0.$$

Let $k_1, k_2, k_3, \ldots$ be the roots of the equation (8), then

(9) $$\begin{cases} v_1 = \sum_{s=1}^{\infty} [A_s \operatorname{Sinh}(k_s z) + B_s \operatorname{Cosh}(k_s z)] J_1(k_s r), \\ v_2 = \sum_{s=1}^{\infty} C_s \operatorname{Sinh}(k_s z) J_1(k_s r), \end{cases}$$

(10) $$\begin{cases} \widehat{\theta z}_1 = \mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} = \mu_1 \sum_{s=1}^{\infty} [A_s \operatorname{Cosh}(k_s z) + B_s \operatorname{Sinh}(k_s z)] k_s J_1(k_s r), \\ \widehat{\theta z}_2 = \mu_2 \frac{\partial v_2}{\partial z} = \mu_2 \sum_{s=1}^{\infty} C_s \operatorname{Cosh}(k_s z) k_s J_1(k_s r). \end{cases}$$

By (5_2) and (9) we have

(11_1) $$A_s \operatorname{Sinh}(k_s h) + B_s \operatorname{Cosh}(k_s h) = C_s \operatorname{Sinh}(k_s h)$$

and from (10) with (5_3), we get

(11_2) $$\mu_1 [A_s \operatorname{Cosh}(k_s h) + B_s \operatorname{Sinh}(k_s h] = \mu_2 C_s \operatorname{Cosh}(k_s h).$$

From (11_1) and (11_2) we have

(12_1) $$A_s = C_s M_s \quad \text{and} \quad B_s = C_s N_s,$$

where

(12_2) $$\begin{cases} M_s = \dfrac{\mu_2 \operatorname{Cosh}^2(k_s h) - \mu_1 \operatorname{Sinh}^2(k_s h)}{\mu_1}, \\ N_s = \dfrac{(\mu_1 - \mu_2) \operatorname{Sinh}(k_s h) \operatorname{Cosh}(k_s h)}{\mu_1}. \end{cases}$$

From (10_1) with (12_1) we have

$$\widehat{\theta z}_1 = \mu_1 \sum_{s=1}^{\infty} C_s [M_s \operatorname{Cosh}(k_s z) + N_s \operatorname{Sinh}(k_s z)] k_s J_1(k_s r).$$

From the end condition (5_4) we have

$$(\widehat{\theta z}_1)_{z=2h} = \mu_1 \sum_{s=1}^{\infty} C_s [M_s \operatorname{Cosh}(2 k_s h) + N_s \operatorname{Sinh}(2 k_s h)] k_s J_1(k_s r) =$$

$$= Qr, \quad \text{for} \quad 0 \leqslant r \leqslant b,$$

so that by Fourier-Bessel Theorem,

$$C_s = \frac{2Q}{\mu_1 k_s a^2 \{J_1'(k_s a)\}^2 [M_s \operatorname{Cosh}(2k_s h) + N_s \operatorname{Sinh}(2k_s h)]} \times$$

$$\times \int_0^b r^2 J_1(k_s r)\, dr = \frac{2b^2 Q J_2(k_s b)}{\mu_1 k_s^2 a^2 \{J_1'(k_s a)\}^2 [M_s \operatorname{Cosh}(2k_s h) + N_s \operatorname{Sinh}(2k_s h)]}.$$

Using (13) from (10_2) we get

$$\widehat{\theta z_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2b^2 Q J_2(k_s b) \operatorname{Cosh}(k_s z) J_1(k_s r)}{k_s a^2 \{J_1'(k_s a)\}^2 [M_s \operatorname{Cosh}(2k_s h) + N_s \operatorname{Sinh}(2k_s h)]},$$

where the values of M_s and N_s are given in (12_2).

3. Numerical calculations: if we take $\mu_2/\mu_1 = 2$, then

$$\widehat{\theta z_2} = \frac{4b^2 Q}{a^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{J_2(k_s b) \operatorname{Cosh}(k_s z) J_1(k_s r)}{k_s \{J_0(k_s a)\}^2 \{3 \operatorname{Cosh}^2(k_s h) - 1\}}.$$

Taking $\mu_2/\mu_1 = 2$, we obtain the numerical values of $\widehat{\theta z_2}$ at the end $z = h$, for different values of r, assuming $a = 1$, $b = 0.5$, $h = 1$. The result is given in table 1.

Table 1

r	1.0	0.75	0.5	0.25
$(\widehat{\theta z_2})_{z=1} \times \frac{10^2}{Q}$	−0.642	0.042	0.937	1.105

In concluzion, I offer my best thanks to prof. B. Sen, D. Sc., F. N. I. for his kind guidance during the preparation of this paper.

Received the 6 II 1964

City College, Calcutta, West Bengal, India

REFERENCES

1. Love A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover Publication, p. 90.
2. Watson G. N., *Theory of Bessell Functions*.
3. Sneddon I. N., *Fourier Transforms*, New York.

NOTĂ ASUPRA TORSIUNII UNUI CILINDRU CIRCULAR COMPUS

(Rezumat)

Se stabilesc soluţiile exacte care dau deformaţiile şi tensiunile elastice sub formă de serii Fourier, pentru un cilindru conţinînd materiale cu moduli de rigiditate diferiţi. Cilindrul este acţionat la unul de capete de către un cuplu, în timp ce celălalt capăt, precum şi suprafaţa laterală, rămîn fixe.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3—4, 1966

C. D. 531.31

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE DYNAMIQUE ANALYTIQUE DES SYSTÈMES CONSTANTS ET FONCTION $\mathcal{R}$ (I)

PAR
SOULEYMANE NIANG

1. Généralités

Rappelons tout d'abord quelques résultats [1], [2] importants.

Considérons, par rapport à un référentiel inertial $(\mathcal{X})$ le système constant

$$\mathcal{E}(t) = \left\{\left[m_i,\ M_i(t),\ \vec{V}_i(t)\right];\ i \in \mathcal{L}(t)\right\} \tag{1.1}$$

d'indexant $\mathcal{L}(t)$, composé de particules de masse m_i, de positions $M_i(t)$ et de vitesses $\vec{V}_i(t)$. Supposons alors avec Appel [3] que $\mathcal{E}(t)$ soit uniquement défini — à l'instant t et par rapport à $(\mathcal{X})$ — par l'état des vitesses de ses particules à l'aide de n paramètres q^ν sous la forme:

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{V}_i = \vec{\eta}_{i\nu}\,\dot{q}^\nu + \vec{\xi}_i \ \text{(sommation sur } \nu) \ \text{avec} \\ \vec{\eta}_{i\nu} = \vec{\eta}_{i\nu}(q^\mu;\, t),\ \ \vec{\xi}_i = \vec{\xi}_i(q^\mu;\, t)\ , \\ \qquad (\mu, \nu \in 1,2,\ldots,n), \end{array}\right. \tag{1.2}$$

les q^ν étant indépendants ou non.

Lorsque les q^ν ne sont pas indépendants, nous les supposerons liés par $n-p$ relations non intégrables de la forme

$$\begin{gathered} \dot{q}^\alpha = a^\alpha_\beta\,\dot{q}^\beta + b^\alpha\,, \\ (\beta = 1,2,\ldots,p;\ \alpha = p+1,\ldots,n), \end{gathered} \tag{1.3}$$

les quantités a^α_β et b^α ne dépendant que des q^ν et de t éventuellement.

Posons alors :

$$(1.4)\qquad \begin{cases} 2T = \sum_{i\in\mathcal{L}(t)} m_i \vec{V}_i^{\,2}, \quad 2\mathcal{R} = \sum_{i\in\mathcal{L}(t)} m_i \vec{V}_i \vec{\gamma}_i, \\ \delta W = Q_\nu \delta q^\nu, \quad (\nu = 1,2,\ldots,n), \text{ avec} \\ \vec{\gamma}_i = \dfrac{\mathrm{d}\vec{V}_i}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{V}}_i, \quad \dot{\vec{\gamma}}_i = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{V}_i}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\gamma}_i}{\mathrm{d}t}, \end{cases}$$

où $T(\dot{q}^\nu, q^\nu; t)$ désigne l'énergie cinétique du système $\mathcal{E}(t)$, δW étant — dans une évolution virtuelle quelconque de $\mathcal{E}(t)$ respectant t — le travail virtuel du système de toutes les forces appliquées à $\mathcal{E}(t)$.

Lorsqu'on tient compte de (1.3), les expressions (1.4) s'écrivent :

$$(1.5)\qquad \begin{cases} 2\overline{T} = \sum_{i\in\mathcal{L}(t)} m_i \vec{\overline{V}}_i^{\,2}, \quad 2\overline{\mathcal{R}} = \sum_{i\in\mathcal{L}(t)} m_i \vec{\overline{V}}_i \vec{\overline{\gamma}}_i, \\ \delta \overline{W} = \overline{Q}_\beta \delta q^\beta, \quad \text{avec} \quad \overline{Q}_\beta = \overline{Q_\beta + Q_\alpha a^\alpha_\beta}, \\ (\beta = 1,2,\ldots,p\,;\ \alpha = p+1,\ldots,n), \end{cases}$$

où *toute quantité surlignée est supposée exprimée* — à l'aide des relations (1.3) et de leurs dérivées — *en fonction de t, des paramètres q^ν et des seules dérivées des paramètres indépendants q^β*.

Dans le cas le plus général les équations du mouvement de $\mathcal{E}(t)$ sont définies par (1.3) et par [1] :

$$(1.6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}^\beta}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial T}{\partial q^\beta} + \dfrac{\partial \overline{T}}{\partial q^\alpha} a^\alpha_\beta\right) - \dfrac{\partial \overline{\mathcal{R}}}{\partial \ddot{q}^\beta} = Q_\beta, \quad \text{ou} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \ddot{\overline{T}}}{\partial \ddot{q}^\beta} - \dfrac{\partial \overline{\mathcal{R}}}{\delta \ddot{q}^\beta} = \overline{Q}_\beta, \\ (\beta = 1,2,\ldots,p;\ \alpha = p+1,\ldots,n), \end{cases}$$

équations qui s'écrivent, lorsque les q^ν sont indépendants :

$$(1.7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}^\nu}\right) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial T}{\partial q^\nu} - \dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial \ddot{q}^\nu} = Q_\nu, \quad \text{ou} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}^\nu} - \dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial \ddot{q}^\nu} = Q_\nu, \quad (\nu = 1,2,\ldots,n). \end{cases}$$

Remarque 1. En observant que

$$\ddot{T} = 2\mathcal{R} + 2S, \quad \text{avec} \quad 2S = \sum_{i \in \mathcal{E}(t)} m_i \vec{\gamma}_i^2, \tag{1.8}$$

où S désigne l'énergie d'Appell de $\mathcal{E}(t)$, les équations (1.6_2) et (1.7_2) sont les équations d'Appell, soit:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{S}}{\partial \ddot{q}^\beta} = \bar{Q}_\beta, \quad (\beta = 1,2,\ldots,p) \text{ et} \\ \dfrac{\partial S}{\partial \ddot{q}^\nu} = Q_\nu, \quad (\nu = 1,2,\ldots,n). \end{cases} \tag{1.9}$$

Remarque 2. Lorsque les positions M_i des particules composant $\mathcal{E}(t)$ s'expriment explicitement — et avant toute considération dynamique — en fonction de t et des paramètres q^ν sous la forme:

$$M_i = M_i(q^\nu ; t), \quad (\nu = 1,2,\ldots,n), \tag{1.10}$$

on a, d'une manière générale [4], suivant que les q^ν sont indépendants ou non:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{\mathcal{R}}}{\partial \ddot{q}^\beta} = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{\partial \bar{T}}{\partial q^\beta} + \dfrac{\partial \bar{T}}{\partial q^\alpha} a_\beta^\alpha\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\left(\dfrac{\partial \ddot{\bar{q}}^\alpha}{\partial \dot{q}^\beta} - 2\dot{a}_\beta^\alpha\right) \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial \ddot{q}^\nu} = \dfrac{3}{2}\dfrac{\partial T}{\partial q^\nu}, \\ (\beta = 1,2,\ldots,p\,; \quad \alpha = p+1,\ldots,n\,; \quad \nu = 1,2,\ldots,n), \end{cases} \tag{1.11}$$

relations qui conduisent, suivant les cas, aux équations tzénoffiennes [4], [5] ou lagrangiennes du mouvement de $\mathcal{E}(t)$.

Remarque 3. L'introduction de la fonction $\mathcal{R}$ conduit ainsi, non seulement aux équations les plus générales de dynamique analytique des systèmes constants [1] et même des systèmes variables de particules [2], mais aussi à toutes les équations de dynamique analytique [5] (équations tzénoffiennes, lagrangiennes,..., équations canoniques d'Hamilton, de Routh...) et aux diverses classes d'équations de dynamique analytique des systèmes constants [5], notamment aux classes d'équations de Tzénoff-Mangeron [6].

Remarque 4. La fonction $\mathcal{R}$ permet, non seulement d'établir les équations (sans multiplicateurs) du mouvement de $\mathcal{E}(t)$ lorsque les q^ν définissant l'état du système sont liés par des contraintes, mais aussi d'indiquer dans quel cas les équations (1.6_1) dégénèrent en les équations de Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}^\beta}\right) - \frac{\partial \bar{T}}{\partial q^\beta} = \bar{Q}_\beta, \quad (\beta = 1,2,\ldots,p), \tag{1.12}$$

sans que, pour autant, la position de toute particule de $\mathcal{E}(t)$ puisse s'exprimer explicitement en fonction des q^β et de t sous la forme (1.10).

Pour que l'on ait (1.12), il faut et il suffit que

$$\frac{\overline{\partial \mathcal{R}}}{\partial \ddot{q}^\beta} = \frac{3}{2}\frac{\partial \overline{T}}{\partial q^\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial q^\alpha} a^\alpha_\beta, \tag{1.13}$$

ce qui a lieu notamment lorsque $\overline{T}$ est indépendant des q^α et lorsque

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\left(\frac{\partial \overline{\ddot{q}}^\alpha}{\partial q^\beta} - 2\,\overline{\dot{a}^\alpha_\beta}\right) = 0, \quad (\beta = 1,2,\ldots,p\,;\ \alpha = p+1,\ldots,n). \tag{1.14}$$

Ces conditions sont évidemment vérifiées si les q^ν sont indépendants et si l'on a (1.10).

Dès lors il faut bien se garder d'affirmer à priori — comme le font en général les Traités de Mécanique Classique — *que l'on ne peut utiliser les équations de Lagrange* (relatives à $\overline{T}$) *pour définir le mouvement de* $\mathcal{E}(t)$ *lorsque les paramètres* q^ν *sont liés par des relations non intégrables de la forme* (1.3).

Nous donnons d'ailleurs à la fin de cet exposé, un exemple simple d'application des équations (1.12). Indiquons auparavant une méthode de détermination de $\mathcal{R}$ pour les systèmes constants rigides ou solides.

2. Détermination de $\mathcal{R}$ pour un système rigide ou solide $\mathcal{E}(t)$

$(\mathcal{K})$ étant un référentiel orthonormal direct quelconque par rapport auquel on définit $\mathcal{E}(t)$, désignons par $\vec{\Omega}(t)$, la vitesse de rotation instantannée — par rapport à $(\mathcal{K})$ — d'un trièdre $(\mathcal{T})$ orthonormal direct lié au système rigide constant $\mathcal{E}(t)$.

La vitesse $\vec{V}_i$ (par rapport à $(\mathcal{K})$) d'une particule de position M_i est dans ces conditions :

$$\begin{cases} \vec{V}_i = \vec{V}_G + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM_i}, \quad \text{avec} \\ \vec{\Omega} = p\,\vec{\varepsilon}_x + q\,\vec{\varepsilon}_y + r\,\vec{\varepsilon}_z, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\vec{V}_G$ est la vitesse du centre d'inertie $G(t)$ de $\mathcal{E}(t)$; $\vec{\varepsilon}_x$, $\vec{\varepsilon}_y$ et $\vec{\varepsilon}_z$ étant respectivement les vecteurs unitaires des axes $\overrightarrow{Gx}$, $\overrightarrow{Gy}$, $\overrightarrow{Gz}$ du trièdre de centre G parallèle à $(\mathcal{T})$.

$\mathcal{E}(t)$ étant constant et rigide, (1.5_2) s'écrit :

$$(2.2)\qquad \begin{cases} 2\mathcal{R} = m\,\vec{V}_G\,\dot{\vec{\gamma}}_G + 2\vec{\mathcal{R}}_G, \text{ avec} \\ \vec{\gamma}_G = \left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{V}_G}{\mathrm{d}t}\right)_K, \quad m = \sum_{i\in\mathcal{L}(t)} m_i, \\ 2\mathcal{R}_G = \left[\sum_{i\in\mathcal{L}(t)} m_i \left(\overrightarrow{GM_i} \wedge \dfrac{\mathrm{d}^3\overrightarrow{GM_i}}{\mathrm{d}t^3}\right)\right]\vec{\Omega}. \end{cases}$$

Si $\vec{\sigma}_G$ désigne le moment angulaire de $\mathcal{E}(t)$ par rapport à G, on a :

$$(2.3)\qquad \begin{cases} \vec{\sigma}_G = \sum_{i\in\mathcal{L}(t)} m_i \left[\overrightarrow{GM_i} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM_i})\right], \text{ ou} \\ \vec{\sigma}_G = \vec{\nabla}_{\vec{\Omega}}\, T_G, \text{ avec} \\ 2T_G = \varphi_G(\vec{\Omega}) = \sum_{i\in\mathcal{L}(t)} m_i (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM_i})^2 \\ \vec{\nabla}_{\vec{\Omega}} = \vec{\varepsilon}_x \dfrac{\partial}{\partial p} + \vec{\varepsilon}_y \dfrac{\partial}{\partial q} + \vec{\varepsilon}_z \dfrac{\partial}{\partial r}, \end{cases}$$

où $\varphi_G(\vec{\Omega})$ est déterminé, en fonction de $\vec{\Omega}$, dès que l'on connaît le tenseur d'inertie de $\mathcal{E}(t)$ en $G(t)$.

De (2.3_1) on déduit

$$(2.4)\qquad \ddot{\vec{\sigma}}_G = \sum_{i\in\mathcal{L}(t)} m_i \left(\overrightarrow{GM_i} \wedge \frac{\mathrm{d}^3\overrightarrow{GM_i}}{\mathrm{d}t^3}\right) + \sum_{i\in\mathcal{L}(t)} \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{GM_i}}{\mathrm{d}t} \wedge \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{GM_i}}{\mathrm{d}t^2}\right),$$

et la relation (2.2_3) s'écrit :

$$(2.5)\qquad \begin{cases} 2\mathcal{R}_G = \dot{\vec{\Omega}}\,\ddot{\vec{\sigma}}_G - \vec{\Omega}\left[\sum_{i\in\mathcal{L}(t)} m_i \left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{GM_i}}{\mathrm{d}t} \wedge \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{GM_i}}{\mathrm{d}t^2}\right)\right], \text{ avec} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{GM_i}}{\mathrm{d}t^2} = \dot{\vec{\Omega}} \wedge \overrightarrow{GM_i} + \vec{\Omega}(\vec{\Omega}\cdot\overrightarrow{GM_i}) - \vec{\Omega}^2\overrightarrow{GM_i}. \end{cases}$$

En posant

$$\vec{s} = \sum_{i \in \mathcal{L}(t)} m_i \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{GM_i}}{\mathrm{d}t} \wedge \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{GM_i}}{\mathrm{d}t^2} \right) \tag{2.6}$$

on a, après quelques calculs simples:

$$\begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{s} = \sum_{i \in \mathcal{L}(t)} m_i \left[(\dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{\Omega}) \overrightarrow{GM_i} \right] (\vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{GM_i}) + \\ \qquad + \vec{\Omega}^2 \left[\sum_{i \in \mathcal{L}(t)} m_i \left((\vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{GM_i})^2 - \vec{\Omega}^2 \overrightarrow{GM_i}^2 \right) \right]. \end{cases} \tag{2.7}$$

Compte tenu de (2.3_1) et de (2.3_3) il vient:

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{s} = -(\vec{\Omega} \wedge \dot{\vec{\Omega}}) \vec{\sigma}_G - \vec{\Omega}^2 \varphi_G(\vec{\Omega}), \tag{2.8}$$

où $\vec{\sigma}_G$ est déterminé par (2.3_2), $\varphi_G(\vec{\Omega})$ étant donné par (2.3_3).

La fonction $2\mathcal{R}_G$ est alors, d'après (2.5) et (2.8):

$$\begin{cases} 2\mathcal{R}_G = \vec{\Omega} \ddot{\vec{\sigma}}_G + (\vec{\Omega} \wedge \dot{\vec{\Omega}}) \vec{\sigma}_G - \vec{\Omega}^2 \varphi_G(\vec{\Omega}), \quad \text{avec} \\ \vec{\sigma}_G = \vec{\nabla}_{\vec{\Omega}} T_G, \quad 2T_G = \varphi_G(\vec{\Omega}), \end{cases} \tag{2.9}$$

ce qui détermine complètement $2\mathcal{R}$.

Remarque 1. En désignant par $(\dot{\vec{\sigma}}_G)_{\mathcal{C}}$ et $(\ddot{\vec{\sigma}}_G)_{\mathcal{C}}$ les dérivées première et seconde de $\vec{\sigma}_G$ par rapport au référentiel $(\mathcal{E})$, il vient:

$$\ddot{\vec{\sigma}}_G = (\ddot{\vec{\sigma}}_G)_{\mathcal{C}} + 2\left[\vec{\Omega} \wedge (\dot{\vec{\sigma}}_G)_{\mathcal{C}} \right] + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{\sigma}_G), \tag{2.10}$$

d'où

$$\vec{\Omega} \cdot \ddot{\vec{\sigma}} = \vec{\Omega} \cdot (\ddot{\vec{\sigma}}_G)_{\mathcal{C}} + (\vec{\Omega} \wedge \dot{\vec{\Omega}}) \vec{\sigma}_G \tag{2.11}$$

et (2.9) s'écrit:

$$2\mathcal{R}_G = \vec{\Omega} (\ddot{\vec{\sigma}}_G)_{\mathcal{C}} + 2(\vec{\Omega} \wedge \dot{\vec{\Omega}}) \vec{\sigma}_G - \vec{\Omega}^2 \varphi_G(\vec{\Omega}). \tag{2.12}$$

Remarque 2. En observant que

$$\ddot{T}_G = \varphi_G(\dot{\vec{\Omega}}) + \vec{\Omega}\left(\ddot{\vec{\sigma}}_G\right)_{\mathcal{C}}, \tag{2,13}$$

on a, d'après (2.8_1) et compte tenu de (2.12) et de (2.13):

$$\begin{cases} 2S_G = \varphi_G(\dot{\vec{\Omega}}) + 2(\dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{\Omega})\,\vec{\sigma}_G + \vec{\Omega}^2 \varphi_G(\vec{\Omega}), \quad \text{où} \\ 2S_G = \sum_{i \in \mathcal{L}(t)} m_i \left(\frac{d^2 \overrightarrow{GM_i}}{dt^2}\right)^2 . \end{cases} \tag{2.14}$$

On notera que le calcul direct de l'une des fonctions $\mathcal{R}$ et S est inutile lorsqu'on connaît l'autre fonction et l'énergie cinétique T de $\mathcal{L}(t)$.

Reçue le 26 mai 1965

Faculté des Sciences, Dakar, Sénégal

BIBLIOGRAPHIE

1. Niang S., Ann. de la Fac. des Sc. de Dakar, 1964; Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X (XIV)**, *1—2*, pp. 53–56.
2. — *Théorie des systèmes variables de particules. Applications.* Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Dakar, Juin, 1964.
3. Appell P., *Traité de Mécanique Rationnelle.* Tome **II**, 2–e éd., Gauthier-Villars, Paris, 1953.
4. Tzenoff I., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1959, **V (IX)**, *1—2*, pp. 119–124.
5. Niang S., *Cours de Mécanique Analytique.* Univ. de Dakar, 1965.
6. Mangeron D., Deleanu Sp., C. r. Acad. Bulgare des Sc., 1962, **15**, *1*, pp. 9—12.

ECUAŢII GENERALE ALE DINAMICII ANALITICE A SISTEMELOR CONSTANTE ŞI FUNCŢIA $\mathcal{R}$ (I)

(Rezumat)

Cu ajutorul funcţiei $\mathcal{R}$ (1.4) pe care a introdus-o, autorul a stabilit noi ecuaţii generale ale dinamicii analitice a sistemelor constante [1] şi a sistemelor variabile [2] de particule. Aceste ecuaţii conduc în mod simplu la diversele clase de ecuaţii ale mecanicii analitice [3], [4], [6].

În această primă parte a lucrării se determină funcţia $\mathcal{R}$ ataşată unui sistem constant rigid şi se arată că ecuaţiile de mişcare scrise cu ajutorul său conduc la ecuaţiile clasice ale lui Lagrange fără multiplicatori, urmînd ca în partea a doua a lucrării să se trateze un exemplu adecvat.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 531.01

SUR LES ÉQUATIONS DE MANGERON POUR LES SYSTÈMES MATÉRIELS DE MASSE DISCONTINUMENT VARIABLE

PAR
EMIL TOKACI, PETRE SIMA et VIRGIL OLARU

1. Nombre d'auteurs ont utilisé fructueusement les equations polyvibrantes, dites „équations de Mangeron" [1]... [5], et les équations de Mangeron concernant la Mécanique analytique [6]... [8]. Dans ce que suit on expose la possibilité d'utiliser les équations de Mangeron dans l'étude des systèmes matériels de masse discontinument variable, en considérant la variation discontinue comme un cas limite de la variation continue.

2. Soit S un système formé de n points matériaux M_s, dont les masses m_s varient par rapport au temps (t), par la captation (l'émission) de particules. Les fonctions $m_s = m_s(t)$, $(s = 1,2,...,n)$, sont supposées, pour le moment, continues et dérivables.

Dans le cas où le système est soumis à des liaisons exclusivement holonomes, et à h degrés de liberté, les équations de Mangeron sont:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{m}\dfrac{\partial T^{(m)}}{\partial q_i^{(m)}} - \dfrac{m+1}{m}\dfrac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + P_i, \quad (i=1,2,...,h), \text{ où} \\ T^{(m)} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, T^{(m-1)}, \quad q_i = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, q_i^{(m-1)}, \quad Q_i = \sum_{s=1}^{n} \mathbf{F}_s \dfrac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial q_i}, \\ P_i = \sum_{s=1}^{n} \dfrac{\mathrm{d}m_s}{\mathrm{d}t}\, \mathbf{U}_s \dfrac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial q_i}, \quad (m = 1,2,...), \end{cases}$$

T étant l'énergie cinétique du système, et q_i — les coordonnées généralisées.

Dans l'expression de la force généralisée Q_i, $\mathbf{F}_s$ sont les forces non réactives qui actionnent les points M_s et $\mathbf{r}_s$ —les vécteurs de position de ces points.

Le terme complémentaire P_i, dont l'existence est déterminée par les forces réactives, dépend aussi des vitesses absolues $\mathbf{U}_s = \mathbf{U}_s(t)$ des particules captées (émises) par les masses m_s, au moment de la captation (de l'émission). Si la variation des masses m_s est donnée par une fonction

continue et dérivable, les particules captées (émises) ont des masses élémentaires, formant des jets continus.

Dans ce qui suit on considère le cas particulier dans lequel la masse m_s varie selon la loi:

$$m_s = m_{0s} + \sum_{j=1}^{K_s} \mu_{sj} \left[1 + e^{-\frac{t-\tau_{sj}}{(\lambda-a)^2}} \right]^{-1}, \tag{2}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n),$$

où μ_{sj}, m_{0s}, K_s, τ_{sj} et a sont constantes et λ un paramètre.

Comme on le verra ci-dessous en partant de cette fonction des masses, on pourra obtenir des conclusions d'un important degré de généralisation.

Tenant compte de (2), les équations (1) s'écrivent

$$\frac{1}{m}\frac{\partial T^{(m)}}{\partial q_i^{(m)}} - \frac{m+1}{m}\frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{K_s} \mathbf{U}_s \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial q_i} \frac{\mu_{sj}}{(\lambda - a)^2} \left[e^{\frac{t-\tau_{sj}}{(\lambda-a)^2}} + e^{-\frac{t-\tau_{sj}}{(\lambda-a)^2}} + 2 \right]^{-1}, \tag{3}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, h).$$

Les constantes μ_{sj} contiennent leur signe (positif pour la captation, négatif pour l'émission).

Les solutions du système (3) sont de la forme $q_i = q_i(\lambda, t)$. En notant $\lim_{\lambda \to a} q_i(\lambda, t) = \omega_i$, et $\lim_{\lambda \to a} q_i^{(m)} = \omega_i^{(m)} = \mathrm{d}^m \omega_i / \mathrm{d}t^m$, $\lim T(t, q_i, \dot{q}_i) = T(t, \omega_i, \dot{\omega}_i) = T_p$, à condition que T_p, avec toutes ses dérivées de premier et de deuxième ordre, soient des fonctions uniformément continues par rapport aux variables ω_i, $\dot{\omega}_i$ et $\ddot{\omega}_i$, on obtient l'égalité:

$$\lim_{\lambda \to a} \left[\frac{1}{m}\frac{\partial T^{(m)}}{\partial q_i^{(m)}} - \frac{m+1}{m}\frac{\partial T}{\partial q_i} \right] = \frac{1}{m}\frac{\partial T_p^{(m)}}{\partial \omega_i^{(m)}} - \frac{m+1}{m}\frac{\partial T_p}{\partial \omega_i}, \tag{4}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, h).$$

Les conditions énoncées pour l'existence des équations (4) sont suffisantes, grâce aux identités:

$$\frac{1}{m}\frac{\partial T^{(m)}}{\partial q_i^{(m)}} - \frac{1}{m}\frac{\partial T}{\partial q_i} \equiv \frac{\partial T^{(1)}}{\partial q_i^{(1)}} - \frac{\partial T}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial T^{(1)}}{\partial q_i^{(1)}} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i^{(1)}}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_i},$$

où pour l'homogénéité des notations on a écrit $T^{(1)} = \dot{T}$ et $q_i^{(1)} = \dot{q}_i$.

D'autre part

$$\lim_{\lambda\to a}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\left[e^{\frac{t-\tau_{sj}}{(\lambda-a)^2}}+e^{-\frac{t-\tau_{sj}}{(\lambda-a)^2}}+2\right]^{-1}dt}{(\lambda-a)^2}= \tag{5}$$

$$=\lim_{\lambda\to a}\left[1+e^{-\frac{\beta-\tau_{sj}}{(\lambda-a)^2}}\right]^{-1}-\lim_{\lambda\to a}\left[1+e^{-\frac{\alpha-\tau_{sj}}{(\lambda-a)^2}}\right]^{-1}=\begin{cases}1, & \text{pour } \tau_{sj}\in(\alpha,\beta),\\ 0, & \text{pour } \tau_{sj}\notin(\alpha,\beta)\end{cases}$$

et

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\left[e^{\frac{t-\tau_{sj}}{(\lambda-a)^2}}+e^{-\frac{t-\tau_{sj}}{(\lambda-a)^2}}+2\right]^{-1}dt}{(\lambda-a)^2}\right|=\left|\left[1+e^{-\frac{\beta-\tau_{si}}{(\lambda-a)^2}}\right]^{-1}-\left[1+e^{-\frac{\alpha-\tau_{sj}}{(\lambda-a)^2}}\right]^{-1}\right|<1. \tag{5'}$$

Ce qui démontre que

$$\lim_{\lambda\to a}\frac{\left[e^{\frac{t-\tau_{sj}}{(\lambda-a)^2}}+e^{-\frac{t-\tau_{sj}}{(\lambda-a)^2}}+2\right]^{-1}}{(\lambda-a)^2}=\delta(t-\tau_{sj}), \tag{6}$$

$\delta(t-\tau_{sj})$ étant la distribution de Dirac.

Et parce que

$$\frac{d}{dt}\left[1+e^{-\frac{t-\tau_{sj}}{(\lambda-a)^2}}\right]^{-1}=\frac{\left[e^{\frac{t-\tau_{sj}}{(\lambda-a)^2}}+e^{-\frac{t-\tau_{sj}}{(\lambda-a)^2}}+2\right]^{-1}}{(\lambda-a)^2}, \tag{7}$$

il en résulte immédiatement la relation:

$$\lim_{\lambda\to a}\left[1+e^{-\frac{t-\tau_{sj}}{(\lambda-a)^2}}\right]^{-1}=H(t-\tau_{sj}), \tag{8}$$

où

$$H(t-\tau_{sj})=\begin{cases}1, & \text{pour } t>\tau_{sj},\\ 0, & \text{pour } t<\tau_{sj},\end{cases} \tag{9}$$

est la fonction de Heaviside.

Etant donné que $\mathbf{F}_s$, $\mathbf{U}_s$ et μ_{sj} ne dépendent pas de λ, et avec

$$\lim_{\lambda\to a}\mathbf{r}_s(t,q_i)=\mathbf{r}_s(t,\omega_i)=\mathbf{r}_{ps}, \tag{10}$$

on obtient les valeurs des limites:

$$\lim_{\lambda\to a}Q_i=\sum_{s=1}^{n}\mathbf{F}_s\frac{\partial\mathbf{r}_{ps}}{\partial\omega_i}=Q_{pi}, \tag{11}$$

$$(11') \qquad \lim_{\lambda \to a} P_i = \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{Ks} \mu_{sj} \mathbf{U}_{sj} \frac{\partial \mathbf{r}_{ps}}{\partial \omega_i} \delta (t - \tau_{sj}) = P_{pi},$$

où $\mathbf{U}_{sj} = \mathbf{U}_s(\tau_{sj})$.

Les relations (4), (6), (11) et (11') démontrent que pour le cas limite $(\lambda \to a)$, les équations (3) deviennent

$$(12) \qquad \frac{1}{m} \frac{\partial T_p^{(m)}}{\partial \omega_i^{(m)}} - \frac{m+1}{m} \frac{\partial T_p}{\partial \omega_i} = Q_{pi} + P_{pi}, \quad (i = 1, 2, ..., h).$$

Ce sont les équations de Mangeron pour les systèmes matériels de masse discontinument variable et soumis à des liaisons holonomes.

En effet, dans le cas limite $(\lambda \to a)$ la variation des masses m_s est donnée conformément à (2), (8) et (9) par les fonctions

$$(13) \qquad m_s = m_{0s} + \sum_{j=1}^{Ks} \mu_{sj} H(t - \tau_{sj}), \quad (s = 1, 2, ..., n),$$

ce qui revient à l'existence de masses initiales m_{0s} (des points M_s) qui captent (émettent) des particules de masses μ_{sj}, aux moments τ_{sj}. Le nombre des particules captées (émises) par le point M_s est K_s. Le phénomène de captation (émission) est supposé instantanné pour une particule, quelle qu'elle soit. Les particules captées $(\mu_{sj} > 0)$, aussi bien que les particules émises $(\mu_{sj} < 0)$, ont les masses (μ_{sj}) du même ordre de grandeur que m_s. Leurs vitesses absolues sont, au moment de la captation (émission), $\mathbf{U}_{sj} = \mathbf{U}_s(\tau_{sj})$, ce qui est évident. De même, on voit que leur ensemble est tout au plus dénombrable.

3. Si un système matériel a la masse variable tant à cause de l'existence de jets continus de captation (émission), qu'à cause de la captation (émission) instantannée de certaines particules de masses de même ordre de grandeur que les masses des points qui constituent le système, son mouvement peut être déterminé par la superposition des effets, en associant les équations (1) et (12).

En même temps il faut remarquer qu'à la place des fonctions (2) on peut choisir n'importe quelles autres fonctions, à condition que ces dernières respectent (5) et (5'), c'est-à-dire que pour le passage à limite du paramètre qu'elles contiennent (où a est une constante quelconque) on obtienne la fonction de Heaviside, leurs dérivées conduisant, naturellement, pour la même limite, à la distribution de Dirac.

Il est ainsi possible, en utilisant les équations de Mangeron, d'obtenir le mouvement d'un système de masse variable, quelle que soit la variation de la masse.

L'intégration des équations (12) doit être faite dans le sens de la théorie des distributions. L'évolution mécanique du système matériel sera ainsi connue à n'importe quel moment, à l'exception d'un ensemble de mesure nulle de moments $t = \tau_{sj}$.

4. Dans ce qui suit on donne un exemple simple de calcul.

Soit un point matériel M de masse initiale m_0, qui part de l'origine, sans vitesse initiale, sous l'action de la force constante $\mathbf{R} = \mathbf{i}R_1 + \mathbf{j}R_2 + \mathbf{k}R_3$ ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sont les verseurs des axes du système cartésien).

Au moment $t = \tau$ le point capte (émet) une particule de masse μ dont la vitesse au moment de la captation est $\mathbf{U} = \mathbf{i}a_1 + \mathbf{j}a_2 + \mathbf{k}a_3$.

Les équations (12), pour ce cas particulier, prennent la forme:

$$\frac{d}{dt}\{[m_0 + \mu H(t-\tau)]\dot{x}\} = R_1 + \mu a_1 \delta(t-\tau),$$

$$\frac{d}{dt}\{[m_0 + \mu H(t-\tau)]\dot{y}\} = R_2 + \mu a_2 \delta(t-\tau),$$

$$\frac{d}{dt}\{[m_0 + \mu H(t-\tau)]\dot{z}\} = R_3 + \mu a_3 \delta(t-\tau).$$

En les intégrant, dans le sens de la théorie des distributions, et en tenant compte des conditions initiales, on obtient la loi de mouvement du point:

$$[m_0 + \mu H(t-\tau)]x = \frac{R_1 t^2}{2} + \mu\left[a_1(t-\tau) + \frac{R_1\tau^2}{2m_0}\right]H(t-\tau),$$

$$[m_0 + \mu H(t-\tau)]y = \frac{R_2 t^2}{2} + \mu\left[a_2(t-\tau) + \frac{R_2\tau^2}{2m_0}\right]H(t-\tau),$$

$$[m_0 + \mu H(t-\tau)]z = \frac{R_3 t^2}{2} + \mu\left[a_3(t-\tau) + \frac{R_3\tau^2}{2m_0}\right]H(t-\tau).$$

5. On peut traiter à l'aide des équations de Mangeron, de manière similaire, n'importe quel autre cas de mouvement mécanique d'un système de masse discontinument variable.

Une autre de nos Notes destinée à paraître dans un autre Recueil est consacrée à l'application des équations de Mangeron concernant la Dynamique analytique non holonome aux systèmes matériaux de masses discontinument variables.

Reçue le 26 X 1965

Institut de Mines, Petroşani
et
Institut Polytechnique, Braşov

BIBLIOGRAPHIE

1. Mangeron D., St. şi Cerc. Mat., Acad. R.P.R., 1964, **15**, *7*, pp. 811 — 823; Bull. Acad. Royale de Belgique, Cl. Sci., 5-e sér., 1964, **L**, *5*, pp. 515 — 522.
2. Favard J., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI** (**XV**), *1-2*, pp. 17 — 20.
3. Kamytov T., Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat., s. *8*, 1964, **XXXVII**, *5*, pp. 242 — 245.
4. Rossi F., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, **IX** (**XIII**), *3-4*, pp. 39 — 42.
5. Krivoşein L. E., Acta Math. Sinica, 1964, **14**, *1*, pp. 1 — 6.
6. Mangeron D., Rev. Roum. Sci. Techn., Sér. Méc. appl., Acad. R.P.R., 1964, **9**, *5*, pp. 1063 — 1069; Изв. АН СССР, Механика и Машиностроение, ОТН, 1962, *2*, p. 128.
7. Niang S., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X** (**XIV**), *1-2*, pp. 53 — 58.
8. Tokaci E., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI** (**XV**), *3-4*, pp. 323 — 328.

ASUPRA ECUAŢIILOR LUI MANGERON RELATIVE LA SISTEME MATERIALE DE MASĂ DISCONTINUU VARIABILĂ

(Rezumat)

Numeroşi autori au utilizat fructuos ecuaţiile polivibrante, numite „ecuaţiile lui Mangeron" [1]... [5] şi ecuaţiile lui Mangeron de Mecanică analitică [6]... [8]. În lucrarea de faţă ecuaţiile lui Mangeron sînt folosite în studiul sistemelor materiale de masă discontinuu variabilă. La sfîrşitul lucrării se dă şi un exemplu de calcul, în care integrările se fac în sensul teoriei distribuţiilor.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

D. C 532.51 ; 538.11

CONCERNING THE ROTATION OF AN ELECTRICALLY CONDUCTING LIQUID

BY

I. STAN and I. POP

1. Introduction

Recently Ramanaiah [1] has discussed the rotation of an electrically conducting liquid in the presence of an axial and radial magnetic field, considering also the gravitational force. The liquid is in a cylindrical container rotating about its vertical axis.

The object of the present paper is to discuss the velocity and pressure distribution and the free shape of an electrically conducting liquid in a circular cylinder rotating about its vertical axis in the presence of a radial magnetic field and axial electric field.

2. Basic Ecuations

On the assumption that the fluid is incompressible, the displacement current and free charge density are negligible, the permeability and conductivity are constant scalar quantities, we have the Eqs. [2], [3] of

continuity

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{2.1}$$

momentum

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \operatorname{grad}) \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta^2 \mathbf{v} + \frac{1}{\varrho} \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \tag{2.2}$$

and the Ohm's law

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \tag{2.3}$$

where $\mathbf{v}$ is the fluid velocity, $\mathbf{B}$ — the magnetic field strength, $\mathbf{E}$ — the electric field, $\mathbf{j}$ — the current density, $\mathbf{t}$ — the time, ν — the kinematic viscosity and σ — the electrical conductivity.

The following assumptions are made:

a) the electrically conducting liquid of constant density and viscosity is contained in a cylinder of radius a;

b) the container is caused to rotate about its vertical axis at a constant angular velocity Ω;

c) the imposed magnetic field in radial direction is $\mathbf{B}(B_r, 0, 0)$, where $B_r = B_0 a/r$ and the axial electric field $\mathbf{E}(0,0, E_z)$, where $E_z = E_0$, B_0 and E_0 are constants cantity;

d) the induced field is neglected.

Using cylindrical polar coordinates the velocity components in the steady state are $\mathbf{v}(0, v_\theta, 0)$, where $v_\theta = v_\theta(r)$. The pressure will depend on r because of the centrifugal force and on z because of the gravitational force.

3. The Solution

In this assumption the Equations of motion take the form

$$\varrho \frac{v_\theta^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r}, \tag{3.1}$$

$$\mu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r v_\theta)\right] + \sigma [E_0 B_r - B_r^2 v_\theta] = 0, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \varrho g = 0, \tag{3.3}$$

where μ is the dynamic viscosity.

Equation (3.2) reduces to

$$r^2 \frac{\mathrm{d}^2 v_\theta}{\mathrm{d}r^2} + r \frac{\mathrm{d}v_\theta}{\mathrm{d}r} - (1 + M^2) v_\theta + Nr = 0, \tag{3.4}$$

where $M = (\sigma B_0^2 a^2/\mu)^{1/2}$ is the Hartmann number and $N = B_0 E_0 a\sigma/\mu$.

The solution of the Eq. (3.4) is

$$v_\theta = C_1 r^{\sqrt{1+M^2}} + C_2 r^{-\sqrt{1+M^2}} + C_3 r + C_4. \tag{3.5}$$

On using that v_θ is finite at $r = 0$ and $v_\theta = \Omega a$ at $r = a$, Eq. (3.5) results in

$$v_\theta = \Omega a \left(\frac{r}{a}\right)^{\sqrt{1+M^2}} + \frac{E_0}{B_0}\left[\frac{r}{a} - \left(\frac{r}{a}\right)^{\sqrt{1+M^2}}\right]. \tag{3.6}$$

Substitution of this expression in (3.1) and ussing (3.3) give the pressure distribution

$$p = p_0 - \varrho g (z - z_0) + \varrho \left[\frac{(\Omega a - E_0/B_0)^2}{2\sqrt{1+M^2}}\left(\frac{r}{a}\right)^{2\sqrt{1+M^2}} + \right.$$

$$\left. + 2\frac{(E_0/B_0)(\Omega a - E_0/B_0)}{1+\sqrt{1+M^2}}\left(\frac{r}{a}\right)^{1+\sqrt{1+M^2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{E_0}{B_0}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]. \tag{3.7}$$

The free surface $p = p_0$ is obtained as

$$z - z_0 = \frac{1}{\varrho}\left[\frac{(\Omega a - E_0/B_0)^2}{2\sqrt{1+M^2}}\left(\frac{r}{a}\right)^{2\sqrt{1+M^2}} + \right.$$

$$\left. + 2\frac{(E_0/B_0)(\Omega a - E_0/B_0)}{1+\sqrt{1+M^2}}\left(\frac{r}{a}\right)^{1+\sqrt{1+M^2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{E_0}{B_0}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]. \tag{3.8}$$

4. Discussions

In the absence of the electric field $E_0 = 0$, the Eqs. (3.6), (3.7) and (3.8) are similar with those obtained by Ramanaiah [1].

In the presence of the electric and magnetic field ($E_0 \neq 0$, $B_0 \neq 0$), we have different situations after the values of the ratio E_0/B_0.

1) If $E_0/B_0 = \Omega a$, the Eqs. (3.6), (3.7) and (3.8) have an identic form with those of in absence of the electric and magnetic field. This means that for this value of the ratio E_0/B_0, there are no modification in the velocity and pressure distribution and of the free surface (Fig. 1, 2).

2) If $E_0/B_0 < \Omega a$, the effect of the presence of the electric and magnetic field is to stop the core of the liquid but not so much as for the magnetic field only (Fig. 1). The surface tends to became flat (Fig. 2).

3) The effect of a large value $E_0/B_0 > \Omega a$ is to accelerate the core of the liquid surrounded by a boundary layer adjacent to the walls of the

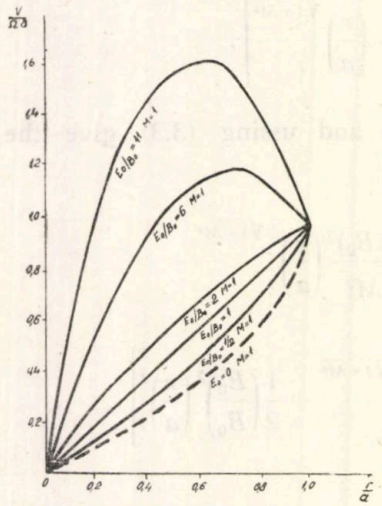


Fig. 1. — Velocity profiles in the presence of the electric and magnetic field (E_0/B_0 expre sed in Ωa units).

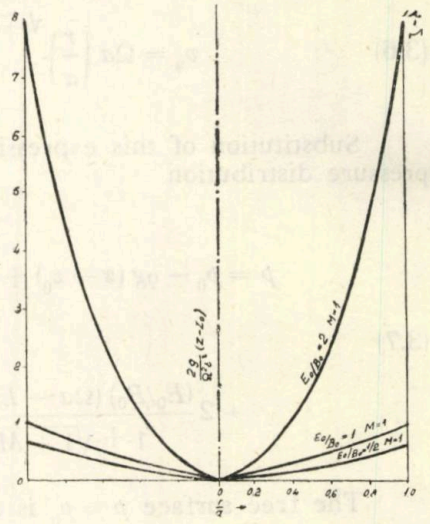


Fig. 2. — Shape of free surface.

container (Fig. 2). The free surface has a upper position comparatively with this in the presence only of the magnetic field as the ratio E_0/B_0 increases (Fig. 2).

Received the 8 IV 1966

University „Babeş-Bolyai", Cluj

REFERENCES

1. Ramanaiah G., ZAMP, 1965, **16**, *6*, pp. 830—834.
2. Cowling T. G., *Magnetohydrodynamics*. London, 1957.
3. Куликовский А. Г., Любимов Г. А., *Магнитная гидродинамика*. М., 1962.

ASUPRA MIŞCĂRII DE ROTAŢIE A UNUI LICHID CONDUCTOR

(Rezumat)

Se studiază mişcarea unui lichid conductor într-un cilindru care se roteşte în jurul axei sale de simetrie în prezenţa unui cîmp magnetic radial şi electric axial.

Se calculează distribuţia vitezei (3.6) şi a presiunii (3.7) precum şi ecuaţia suprafeţei libere (3.8), iar în continuare se discută diferite cazuri în funcţie de valoarea raportului intensităţilor cîmpului electric şi magnetic.

Explicaţia figurilor

Fig. 1.—Distribuţia vitezei în prezenţa cîmpului electric şi magnetic (E_0/B_0 este exprimat în raport cu Ωa).

Fig. 2.—Forma suprafeţei libere.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. D. 530 145,63

SEMI-SPINEURS ET REPRÉSENTATIONS 4-FORMES DU GROUPE DES ROTATIONS

PAR

S. S. SANNIKOV

Le but de cette Note est de considérer les représentations D_λ du groupe des rotations O_3, correspondants à toutes les valeurs réeles ou complexes du spin λ [1], [2]. Ce problème est en connexion avec celui des moments complexes [3] introduits récemment dans la théorie quantique.

À bien des égards ces représentations diffèrent esentiellement par rapport aux celles à nombre fini de dimensions [4]. Par exemple les représentations irréductibles avec un spin complexe sont infini-dimensionnelles. Les représentations de telle sorte ont lieu dans les espaces linéaires à nombre infini de dimensions avec une métrique indéfinie en régime de topologie faible (le rang d'infinité du produit scalaire en ce cas est donc infini). La topologie faible est générée par la métrique indéfinie elle-même et est determinée par un système infini de seminormes ou par la distance de M. Fréchet [5].

D'ailleurs les représentations à spin complexe sont en général non-unitaires, mais dans le cas d'une métrique indéfinie (en régime de topologie faible) elles possèdent une symétrie „unitaire".

Une autre particularité de ces représentations est leur irrégularité. Cela signifie que les fonctions intervenant dans de telles représentations ne sont pas mesurables en sens usuel dans leur domaine de définition. On peut démontrer qu'en ce cas le produit scalaire dans D_λ est donné par une forme bilinéaire régularisée. Par opposition aux représentations finies du groupe O_3 ($\lambda = m/2$, où m est un nombre positif), qui peuvent être seulement uniformes ou 2-formes, les représentations infinies sont multiformes. Par exemple si $\lambda = l/s$, la représentation est s-formes, et si λ est un nombre irrationnel ou complexe, alors le nombre des formes de la représentation est infini.

Nous considérons ici une réalisation particulière des représentations 4-formes du groupe O_3, correspondant aux valeurs $-1/4$ et $-3/4$ du

spin. Cette réalisation est intéressante au point de vue de la construction et mérite donc une considération détaillée.

Tout d'abord nous allons résumer la construction conduisant aux semi-spineurs et les représentations ci-dessus. Dans ce but nous considérons un espace symplectique $Sp_1(G)$ sur l'algèbre de Grassmann avec les éléments de base φ^i, $(i = 1, 2)$, satisfaisant à la condition $\varphi^i \varphi^j = -\varphi^j \varphi^i$. Dans cet espace on défini une corrélation involutive $\varphi_i = \varepsilon_{ij} \varphi^j$, où ε_{ij} est une matrice antisymétrique du deuxième rang, et les collinéations $\varphi^{i'} = \varphi^j v^i_j$, où v^i_j sont des matrices unimodulaires [1]).

La forme bilinéaire $(\varphi, \chi) = \varphi^i \varepsilon_{ij} \chi_j = \varphi^i \chi_i$ est invariante par rapport aux collinéations. Il est important à signaler que la forme quadratique correspondante est non nulle sur l'algèbre de Grassmann.

Nous allons essayer de présenter cette forme quadratique comme carré d'une forme linéaire

$$(1) \qquad (\varphi, \varphi) = \overset{1}{\varphi}\,\overset{1}{\varphi} = \overset{1}{\varphi^2}, \quad \overset{1}{\varphi} = \varphi^i a_i = \varphi^1 a_1 + \varphi^2 a_2 .$$

En ce cas a_i doivent satisfaire aus conditions [2])

$$(2) \qquad a_i a_j - a_j a_i = 2\varepsilon_{ij},$$

où $a_1 a_2 - a_2 a_1 = 2$. On sait que les conditions (2) peuvent être satisfaites par les matrices de rang infini ou par les opérateurs qui opèrent dans un espace linéaire F. Nous appellons *semi-spineurs* les éléments de cet espace.

Nous considérons ci-dessous une réalisation de l'espace F par les fonctions entières d'une variable complexe $z = x + iy$ où

$$(3) \qquad a_1 = (2)^{1/2} z, \quad a_2 = -(2)^{1/2} \frac{d}{dz} .$$

Les collinéations SU_2 induisent dans F des transformations linéaires $f \to f' = T_u f \,(f \in F)$, définies par

$$(4) \qquad \begin{cases} T_u f(z) = f(z')\, \varkappa(z; u), \quad z' = az + b\dfrac{d}{dz}, \\ \varkappa(z; u) = \left(\cos\dfrac{\beta}{2}\right)^{-1/2} \exp\left(i\dfrac{\alpha+\gamma}{4} + \dfrac{i}{2} z^2 e^{i\gamma} \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\right), \end{cases}$$

[1]) Comme l'on sait, les transformations de cet espace forment le groupe symplectique $SL_2(c)$, qui est localement isomorphe au groupe de Lorentz $\mathfrak{L}_4$. Nous nous bornerons ici à considérer le sous-groupe unitaire SU_2 du groupe $SL_2(c)$, qui est localement isomorphe au groupe des rotations O_3. Les matrices $U = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU_2$ sont écrites à l'aide des paramètres d'Euler, où

$$a = \cos\frac{\beta}{2} \exp\left(i\frac{\alpha+\gamma}{2}\right), \quad b = -i \sin\frac{\beta}{2} \exp\left(i\frac{\alpha-\gamma}{2}\right).$$

[2]) Cette construction ressemble à bien des égards à celle des spineurs développée par Dirac [6].

où $a = \cos\frac{\beta}{2}\exp\left(i\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$, $b = -i\sin\frac{\beta}{2}\exp\left(i\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)$ et $f(z)$ est une fonction entière.

On a démontré [2], que les transformations (4) forment un groupe, qui est localement isomorphe au groupe des rotations O_3. Par exemple les opérateurs infinitesimaux (c'est-à-dire les opérateurs du moment de l'impulsion orbital)

$$(5)\quad L_3 = \frac{1}{4}\left(2z\frac{d}{dz}+1\right),\quad L_+ = L_1 + iL_2 = \frac{1}{2}z^2,\quad L_- = L_1 - iL_2 = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2},$$

correspondants aux transformations (4), satisfont aux relations de permutation $[L_i, L_k] = i\varepsilon_{ikl}L_l$, $(i,k,l = 1,2,3)$. De plus on a $T_{u_1}T_{u_2}f = T_{u_1u_2}f$, $(f \in F)$.

Pour les opérateurs (5) on a $L^2 = -3/16 = \lambda(\lambda+1)$, donc la formule (4) définit les représentations qui correspondent aux valeurs $-1/4$ et $-3/4$ du spin [3]). Les formules (4) définissent les représentations 4-formes du groupe des rotations O_3.

Considérons en détail l'espace de la représentation F. La formule (4) prouve que l'espace F est constitué par des fonctions entières d'un ordre qui ne dépase pas 2 et appartient au type $\leqslant \infty$.

Définissons une base dans F. Les fonctions de base $\{f_n\}$ forment une représentation irréductible du groupe infinitesimal (5), et satisfont aux équations

$$(6)\qquad L_3 f_n = \nu f_n,\quad L_+ f_n = \alpha_{n+1} f_{n+1},\quad L_- f_n = \alpha_n f_{n-1}.$$

Lors d'une représentation avec $\lambda = -1/4$ [4]) on doit admettre, selon [2], que

$$(7)\qquad \nu = n + \frac{1}{4},\quad \alpha_n = -i\sqrt{n\left(n-\frac{1}{2}\right)},\quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

Les fonctions

$$(8)\qquad f_n(z) = \frac{i^n}{\sqrt{(2n)!}}z^{2n}$$

satisfont aux équations (6). La base de la représentation avec $\lambda = -1/4$ est formée par les fonctions de puissances paires [5]).

---

[3]) Les collinéations SL_2 induisent dans F des représentations du groupe de Lorentz $\mathfrak{L}_4$, correspondantes aux paires des nombres suivants $(-1/4, 3/4)$ et $(-3/4, 1/4)$.

[4]) Nous ne considérons que la représentation correspondant au spin $-1/4$. Les remarques qui suivent sont en même temps valables et pour le spin $-3/4$.

[5]) Les fonctions entières, qui sont paires par rapport à la substitution $z \to -z$, interviennent dans la représentation correspondant au spin $-1/4$, tandis que les fonctions entières impaires interviennent dans la représentation correspondant au spin $-3/4$.

Pour les fonctions de base (8) les transformations (4) donnent

$$T_u f_n(z) = P_n(z^2; u)\,\varkappa(z; u), \tag{9}$$

où les polynômes P_n sont exprimés à l'aide des polynômes d'Hermite d'indice pair

$$P_n(z^2; u) = [(2n)!]^{-1/2}\left(-2^{-1}\,e^{i\alpha}\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}\right)^n H_{2n}\left(ze^{i/2\,(\gamma-\pi/2)}\,\sin^{-1/2}\beta\right).$$

Introduisons un produit scalaire dans l'espace F, déterminé par la valeur régularisée (à $|z| = \infty$) de l'intégrale (v. à ce propos [7])

$$[f, g] = \mathrm{reg}\int f(z)\,\bar{g}(z)\,d\mu(z), \quad (f, g \in F), \tag{10}$$

où l'intégration est effectué dans le plan complexe, la mesure $d\mu(z) = \pi^{-1}\sin|z|^2\,dz$, $(dz = dx\,dy)$ étant invariante par rapport aux transformations (4). La forme bilinéare (10) est une métrique hermitienne complètement indéfinie. Sur les fonctions (8) la forme (10) est égale à $[f_n, f_m] = (-1)^n\delta_{n,m}$.

Maintenant introduisons dans l'espace F une topologie. On ne peut introduire dans F qu'une topologie faible dans le cadre des topologies localement convexes. Cette topologie est induite par la métrique indéfinie (10) et déterminée par l'ensemble infini des semi-normes $P_n(f) = |[f, f_n]|$, $(f \in F)$. Le système des voisinages et la convergence dans cette topologie sont introduites de la même façon qu'en [5]. Une telle topologie dans F peut être définie par la distance de M. Fréchet

$$\varrho(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,\frac{P_n(f-g)}{1+P_n(f-g)}. \tag{11}$$

L'égalité $T_{u_1}T_{u_2}f = T_{u_1u_2}f$ n'a de sens que dans la topologie faible. Donc l'espace F des semi-spineurs est un espace linéaire métrique comme l'est l'espace de Fréchet.

Déterminons les éléments de la matrice de la représentation correspondant au spin $-1/4$. Ils ont la forme

$$\begin{cases} T_{mn}(u) = e^{-i\,(m+1/4)\gamma}\,t_{mn}(\beta)\,e^{-i\,(n+1/4)\alpha}, \\ t_{mn}(\beta) = (-1)^{m+n}\sqrt{\dfrac{k!\,\Gamma(\varrho-\varkappa)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\varrho-\varkappa-\frac{1}{2}\right)}}\,(1-x)^{\varrho/2}(1+x)^{\varkappa/2}\,P_k^{(\varrho,\varkappa)}(x), \end{cases} \tag{12}$$

où $P_k^{(\varrho,\varkappa)}(x)$ sont les polynômes de Jacobi, $x = \cos\beta$, $\varrho = |m-n|$, $\varkappa = -(m+n+1/2)$, $k = (m+n-|m-n|)/2$.

On peut constater l'existence d'une liaison entre les bases (8) et $f_n(u) = (2)^{-1/2} T_{0n}(u)$, déterminée par la formule

$$f_n(u) = \mathrm{reg} \int K(u; z) f_n(z) \, d\mu(z),$$

où le nuclé est $K(u; z) = \left(2 \cos \frac{\beta}{2}\right)^{-1/2} \exp\left(-i \frac{\alpha + \gamma}{4} - \frac{i}{2} \bar{z}^{-2} e^{-i\alpha} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}\right)$.

Reçue le 11 V 1965

Institut de Physique technique,
Académie des Sciences de l'Ucraine,
Kharkov, URSS

BIBLIOGRAPHIE

1. Санников С. С., УФЖ, 1964, **10**, стр. 1139.
2. — УФЖ (в печати).
3 Regge T., Nuovo Cim., 1959, *14*, p. 951.
4. Неймарк М. А., *Линейные представления групп Лоренца*. М., 1958.
5. Гинсбург И. П., Иоффвидов И. С., УМН, 1962, **17**, стр. 4.
6 Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., 1928, **A 117**, p. 610.
7. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., *Обобщенные функции*. Т. 1, М., 1959.

SEMI-SPINORI ŞI REPREZENTĂRI CUADRIFORME ALE GRUPULUI ROTAŢIILOR

(Rezumat)

Se consideră reprezentările D_λ ale grupului rotaţiilor O_3, corespunzătoare tuturor valorilor reale sau complexe ale spinului λ [1], [2], problemă legată de cea a momentelor complexe [3], introduse recent în mecanica cuantică.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3—4, 1966

Chimie

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XII (XVI), вып. 3—4, 1966

Химия

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XII (XVI), 3—4, 1966

Chemistry

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 661.8...712 ; 546.723

STUDIUL TERMOGRAVIMETRIC ŞI AL SPECTRULUI DE ABSORBŢIE ÎN INFRAROŞU AL ACETAŢILOR COMPLECŞI DE FIER TRIVALENT

DE

TIBERIU GOLGOŢIU şi I. ROŞCA

Comunicare prezentată la a III-a Conferinţă republicană de chimie, Timişoara, 27—30 iunie 1966

1. Introducere

Prin numeroase cercetări [1]...[7] s-a stabilit că între $Fe(OH)_3$ şi HAc (s-a notat prescurtat ionul $CH_3—COO^-$ cu Ac^-) sau între Fe^{3+} şi acetaţii metalelor alcaline se formează compuşi cu un număr variabil de molecule de apă de hidratare :

$[Fe_3Ac_6(OH)_2]Ac$, $[Fe_3Ac_6(OH)(H_2O)]Ac_2$ şi $[Fe_3Ac_6(H_2O)_2]Ac_3$.

Studiile întreprinse pînă în prezent [1]...[10] dovedesc existenţa cationilor complecşi în aceşti compuşi şi aduc precizări asupra structurii şi tăriei legăturilor dintre grupele acetat, hidroxilice şi atomii centrali de fier. Teoria lui Werner [11] asupra combinaţiilor complexe a dominat şi încercările de pînă acum de a reprezenta structura acetaţilor complecşi de fier [8].

Stabilitatea acetaţilor complecşi de fier în soluţii apoase [8] a confirmat diferenţierea tăriei legăturilor grupelor acetat din complex, permiţînd să se admită o structură de forma reprezentată în fig. 1, în acord cu teoria lui Werner [11], cu datele anterioare din literatură şi cu existenţa

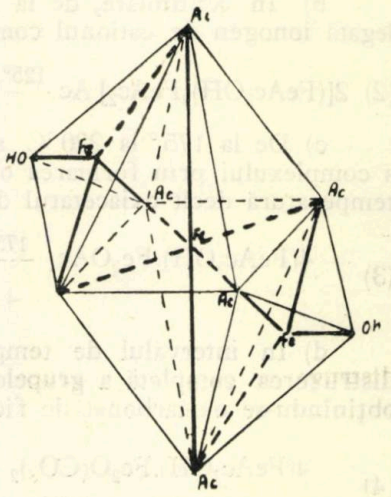


Fig. 1

a trei momente magnetice distincte provenite de la fiecare atom de fier care ar avea cîte un electron necuplat [12]...[14].

Constituția și proprietățile acetaților complecși de fier cu diferite compoziții prezintă un deosebit interes, justificat și prin aplicațiile lor în industria textilă [15]...[19].

În această lucrare continuăm studiul acetaților complecși de fier prin analize termogravimetrică și de absorbție în infraroșu, care aduc precizări esențiale în studiul acestor compuși privind stabilitatea termică și confirmarea legăturilor din interiorul moleculei complexe.

2. Analiza termogravimetrică

Stabilitatea acetaților complecși de fier a fost studiată pînă în prezent numai în mediu apos [8], [9] și de aceea am întreprins studiul acestor compuși cu ajutorul analizei termogravimetrice. În acest scop am folosit un derivatograf Paulik-Paulik-Erdey, luînd în lucru 77 mg $[Fe_3Ac_6(OH)_2]AcH_2O$ care s-au încălzit timp de 50 min de la 20° pînă la 600 °C. Acetații complecși de fier, preparați după [1], au fost analizați chimic în conformitate cu indicațiile din literatură [20]...[24]; rezultatele sînt prezentate în tabelul 1.

Din studiul curbelor înregistrate la analiza termogravimetrică a $[Fe_3Ac_6(OH)_2]Ac\,H_2O$ (fig. 2) rezultă următoarele reacții corespunzător cu intervalele de temperatură care au făcut posibilă determinarea lor:

a) În intervalul de temperatură 80°...125 °C are loc deshidratarea completă a monohidratului:

$$(1)\quad [(FeAc_2OH)_2FeAc_2]AcH_2O \xrightarrow{80°...125°\,C} [(FeAc_2OH)_2FeAc_2]Ac + H_2O.$$

b) În continuare, de la 125° la 175 °C se distruge gruparea acetat legată ionogen de cationul complex formîndu-se oxiacetatul de fier:

$$(2)\quad 2[(FeAc_2OH)_2FeAc_2]\,Ac \xrightarrow{125°...175°\,C} 4(FeAc_2OH).Fe_2OAc_4 + (CH_3CO)_2O.$$

c) De la 175° la 220 °C se distrug grupele acetat din sfera interioară a complexului prin formarea oxicarbonatului de fier mult mai rezistent la temperatură decît oxiacetatul din care a provenit:

$$(3)\quad 4(FeAc_2OH).Fe_2OAc_4 \xrightarrow{175°...220\,°C} 4(FeAc_2OH).Fe_2O(CO_3)_2 + 2CH_3COCH_3.$$

d) În intervalul de temperatură 220 °...315 °C are loc în continuare distrugerea completă a grupelor acetat din sfera interioară a complexului obținîndu-se oxicarbonat de fier și oxid de fier ca fază solidă:

$$(4)\quad 4(FeAc_2OH).Fe_2O(CO_3)_2 \xrightarrow{220°...315\,°C} 2Fe_2O_3 + Fe_2O(CO_3)_2 + 4CO_2 + 4HCH_3COCH_3 + 2H_2O.$$

Tabelul 1

Compusul	Compoziţia, %												Modul de preparare
	CO_2		Ac		F_2O_3		OH		H_2O		Fe : Ac		
	teore-tic	experi-mental	teore-tic	experi-mental	teore-tic	experi-mental	teore-tic	experi-mental	teore-tic	experi-mental	teore-tic	experi-mental	
$[Fe_3Ac_6(OH)_2]\ AcH_2O$	97,32	97,25	65,30	65,20	37,84	37,79	5,37	5,30	2,84	3,01	3 : 7	3 : 7,05	[1]
$[Fe_3Ac_6(OH)\ (H_2O)]\ Ac_2H_2O$	101,60	101,49	68,17	68,05	34,57	34,61	2,45	2,50	4,19	4,21	3 : 8	3 : 7,98	

Tabelul 2

Compusul	Compoziţie, %					
	CO_2		CH_3COCH_3		$(CH_3CO)_2O$	
	teoretic	experimental	teoretic	experimental	teoretic	experimental
$[FeAc_6(OH)_2\ AcH_2O$ $[FeAc_6(OH)\ (H_2O)]\ Ac_2\ H_2O$	20,85 19,05	21,40 19,52	27,49 25,12	27,05 24,65	9,48 17,32	9,15 17,12

e) Ultimul interval de temperatură este caracterizat prin distrugerea oxicarbonatului de fier la oxid de fier

$$(5) \qquad Fe_2O(CO_3)_2 \xrightarrow{315°...370°\,C} Fe_2O_3 + 2CO_2.$$

Față de calculele teoretice, datele obținute din derivatograma în conformitate cu reacțiile de mai sus diferă în limitele $\pm$ 0,1...0,65 %.

Din analiza gazelor obținute din descompunerea termică a $[(FeAc_2OH)_2 FeAc_2]AcH_2O$ rezultă că se formează H_2O, CO_2, CH_3COCH_3 și $(CH_3CO)_2O$ (v. tabelul 2).

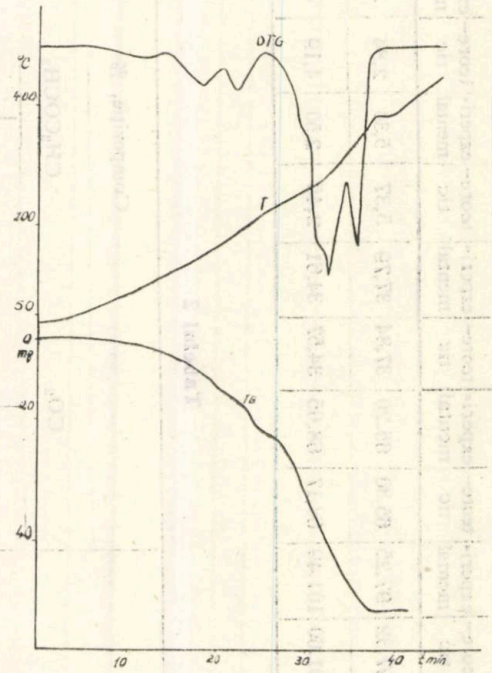


Fig. 2

Dozarea produselor gazate de reacție s-a efectuat după indicațiile existente în literatură [20]...[24]. Acetona și anhidrida acetică sînt identificate și în produsele gazoase obținute din descompunerea termică a altor acetați [25], [27]. În [28] se constată că acetatul bazic de fier care se obține ca produs de precipitare din acetatul complex de fier, pierde apa pînă la 155 °C iar radicalii acetat se distrug în intervalul de temperatură 155°...242 °C.

Descompunerea termică a acetaților complecși de fier este un exemplu tipic pentru cazul cînd variază simultan curbele DTG și DTA. Din analiza acestor curbe rezultă că distrugerea grupei acetat legată ionogen în com-

plex la oxiacetat este un proces endoterm ca şi formarea în continuare din acest oxiacetat a oxicarbonatului de fier ((2), (3)).

În intervalul de temperatură 220°...315 °C au loc reacţii de descompunere suprapuse cu formarea oxidului de fier din ($FeAc_2OH$), efectul caloric rezultat total fiind exoterm. De asemenea descompunerea oxicarbonatului de fier este caracterizată printr-un efect exoterm. Asemenea efecte calorice se întîlnesc şi la alte substanţe organice [29], [30].

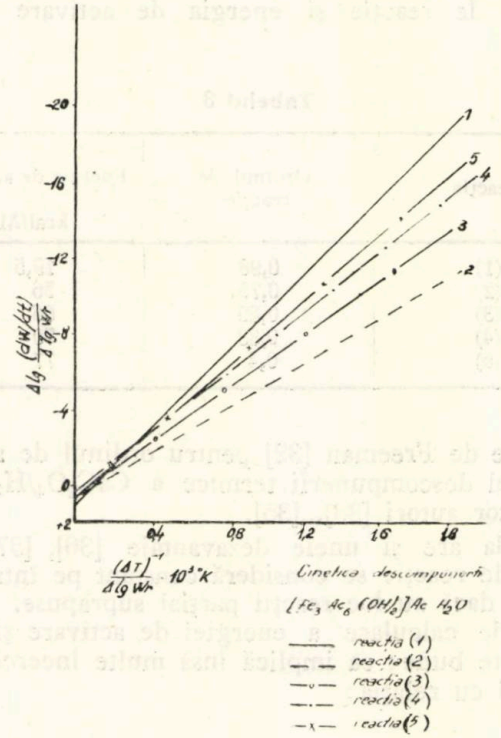


Fig. 3

Din experienţele unor autori [31] rezultă că se procedează bine cînd reacţiile endoterme se caracterizează prin temperatura de vîrf, iar reacţiile exoterme prin temperatura începerii reacţiei. Pentru toate intervalele de temperatură ce caracterizează reacţiile de descompunere a $[(FeAc_2OH)2FeAc_2].AcH_2O$ s-a calculat după Freeman [32] energia de activare şi ordinul de reacţie cu relaţia:

$$\frac{-E^x/(2{,}3\,RT)}{\log W_r} = -x + \frac{\log(\mathrm{d}W/\mathrm{d}t)}{\log W^r} \tag{6}$$

și s-a construit graficul avînd în ordonată $[\log(dW/dt)]/\log W_r$ și în abscisă $T^{-1}/\log W_r$ (fig. 3), în care E^x este energie de activare, R—constanta generală a gazelor iar $W_r = W_c - W$, unde W_c reprezintă pierdere în greutate la reacția completă, W — pierderea în greutate la un timp t, x fiind ordinul de reacție (numerotarea curbelor corespunde cu reacțiile (1)...(5)).

În acest scop s-au calculat dW și W_r direct din derivatogramă, în termeni exprimați în număr de diviziuni. Din calculele efectuate au rezultat pentru ordinul de reacție și energia de activare valorile date în tabelul 3.

Tabelul 3

Reacția	Ordinul de reacție	Energia de activare kcal/M
(1)	0,98	19,5
(2)	0,75	56
(3)	0,60	66
(4)	0,33	70
(5)	0,4	77

Valorile găsite de Freeman [32] pentru ordinul de reacție și energia de activare în cazul descompunerii termice a CaC_2O_4/H_2O sînt în concordanță cu ale altor autori [33]...[35].

Totuși metoda are și unele dezavantaje [36], [37] printre care și faptul că ordinul de reacție se consideră constant pe întregul interval de temperatură, chiar dacă au loc reacții parțial suprapuse. Metoda propusă de Coats [38] de calculare a energiei de activare și a ordinului de reacție dă rezultate bune; ea implică însă multe încercări pentru calcularea acestor valori cu relația:

$$(7) \qquad \log\left[-\log\frac{1-(1-\alpha)^{1-n}}{T^2(1-n)}\right] = \log\left|\frac{AR}{aE}\left(1-\frac{2RT}{E}\right)\right| - \frac{E}{2{,}3RT},$$

în care α reprezintă fracția de component care se descompune la timpul t, n — ordinul de reacție, E — energia de activare, A — factorul de frecvență, a — o constantă.

În cazul descompunerii termice a $[(FeAc_2OH)_2FeAc_2]\,AcH_2O$ utilizînd relația (7) pentru construirea graficului de coordonate $\log\{1-(1-\alpha)^{1-n}/[T^2(1-n)]\}$ și $1/T$ se obțin drepte pentru cele 5 etape de descompunere date de reacțiile (1)...(5) cînd n are respectiv valorile $n_1 = 1$, $n_2 = 0{,}75$, $n_3 = 0{,}66$, $n_4 = 0{,}35$ și $n_5 = 0{,}46$.

Pentru valoarea corectă a lui n panta dreptei de ecuație (7) trebuie să fie $-E/(2,3R)$, de unde se calculează deci și energia de activare pentru fiecare reacție: $E_1 = 18$, $E_2 = 58$, $E_3 = 65$, $E_4 = 69$ și $E_5 = 75$ kcal/M. Utilizarea datelor termogravimetrice pentru evaluarea parametrilor cinetici în reacțiile în stare solidă implicînd pierderi sau creșteri în greutate se întîlnește și la alți autori [39]...[41].

Referitor la legăturile care iau naștere între atomi, respectiv molecule, teoria acido-bazică care se referă la temperaturi înalte [42] dă un răspuns acceptabil și în cazul de față, prin formarea de acetați complecși de fier ai produselor intermediare: oxiacetați, oxicarbonați și apoi oxid feric ca produse mai stabile cu temperatura, a căror tărie acido-bazică relativă este diferită.

3. Analiza spectrografică de absorbție în infraroșu

Caracterul grupelor acetat și al atomilor centrali din complecșii acetați ai multor metale fiind insuficient studiat ne-am propus ca prin analiză spectrografică de absorbție în infraroșu să precizăm structura lor internă, întărind ipoteza emisă anterior asupra configurației spațiale a acetaților complecși de fier [8].

Pentru înregistrarea spectrelor s-a utilizat un spectrofotometru UR-10 Carl Zeiss Jena și prisme de KBr, NaCl, LiCl. Spectrele au fost înregistrate din soluții de cloroform și tetraclorură de carbon; de asemenea s-au înregistrat spectrele de absorbție în nuyol. Ca solvenți au fost folosite produse pentru analiza spectroscopică în infraroșu „Union Chimique Belge". Concentrațiile la care s-a lucrat au variat între 1 și 5 mmol/l și s-a ținut seamă de domeniile din spectru în care solvenții folosiți dau benzi de absorbție proprii [87], [88].

Vibrațiile de valență ale grupelor de hidroxil asociate și neasociate din compuși organici și anorganici au fost studiate în spectrul de absorbție infraroșu de mulți autori [43]...[48]. Prin formarea legăturii de hidrogen se mărește lungimea legăturii OH și banda de absorbție în infraroșu se deplasează spre frecvențele mici [76]...[83], [89].

În cazul acetatului complex de fier $[Fe_3Ac_6(OH)_2]AcH_2O$ se observă două benzi de absorbție ale vibrațiilor de valență a grupelor OH situate la 3700 cm^{-1} și 3110...3130 cm^{-1}, care corespund prima — grupelor OH neasociate, iar a doua — grupelor OH asociate provenite din apa de hidratare. Această afirmație este foarte prețioasă pentru noi căci ne permite să admitem că acetatul de fier cu absorbțiile grupelor OH de mai sus posedă grupe OH libere în concordanță cu structura admisă anterior [8], [11]. Apa conținută în complex, în acord cu datele termogravimetrice, corespunde monohidratului care are absorbția la 3110...3130 cm^{-1} și se elimină în intrevalul 80°...125 °C. Modurile de vibrație ale grupelor carboxilice în spectrele de absorbție în infraroșu ale sărurilor metalice, ai mono și biacizilor organici ciclici și aciclici au confirmat existența rezo-

nanţei între valenţele celor 2 atomi de oxigen fixaţi pe acelaşi atom de carbon [49]...[61]. Nu de mult au fost studiaţi în spectrul de absorbţie în infraroşu o serie de acetaţi ai elementelor mono, bi şi trivalente [62]...64], obţinîndu-se rezultate importante privind interacţiunile legăturilor din complecşi.

În cazul nostru, în spectrul de absorbţie în infraroşu al acetaţilor complecşi de fier se înregistrează două benzi de absorbţie pentru vibraţia de valenţă asimetrică CO, în acelaşi domeniu cu alte două vibraţii de deformaţie simetrică a grupelor OH. Aceste două perechi de benzi corespund una grupelor CO, din care o bandă corespunde lui CO din radicalul acetic legat ionogen de cationul complex, şi cealaltă — grupei CO din radicalii acetat cuprinşi în sfera interioară a complexului; cea de a doua pereche de benzi corespunde grupelor OH, o bandă pentru OH libere şi cealaltă pentru OH asociate. Prezenţa a două perechi de benzi de absorbţie ale grupelor CO şi OH în structura particulară a acestor acetaţi îngreunează cercetarea lor prin confundarea legăturilor şi interacţiunea grupelor acetat şi hidroxil din aceşti complecşi. În privinţa aceasta dă in-

Tabelul 4

Compusul	$\nu_{as\ OH}$ cm^{-1}	$\nu_{as\ CO}+\delta_{s\ OH}$ cm^{-1}	$\nu_{s\ CO}+\delta_{as\ CH_3}$ cm^{-1}	ν_{C-C} cm^{-1}
$[Fe_3Ac_6(OH)_2]\ Ac\ H_2O$	3 700 3 110 ··· 3 130	1 765 1 720 1 610 1 560	1 495 1 470 1 420	995 955
$[Fe_3Ac_6(OH)\ (H_2O)]\ Ac_2.H_2O$	3 690 3 100 3 200 2 870	1 768 1 722 1 615 1 555	1 493 1 465 1 418	992 957
HAc	3 700	1 785 1 735	1 381 1 484	985
NaAc	—	1 582	1 440 1 425	923
$BeAc_2$	—	1 624	1 480	982
Be_4OAc_6	—	1 639	1 483	980
$AlAc_3$	—	1 595	1 472 1 417	980
$Al(OH)Ac_2$	3 680	1 583	1 473 1 422 1 406	980
$Al(OH)Ac_2\ 2{,}5\ H_2O$	3 485 3 426 3 295	1 592	1 479 1 463 1 427	980

formaţii preţioase poziţia frecvenţei vibraţiilor legăturii de valenţă C—C [63]. Este foarte probabil ca poziţia frecvenţei vibraţiilor de valenţă a legăturii C—C să fie direct dependentă de gradul legăturii ionice a metalului cu oxigenul grupei carboxilice [62].

În spectrele de absorbţie ale acetaţilor de fier se găsesc două benzi de vibraţii ale legăturii de valenţă C—C, 955 şi 998 cm^{-1}, care diferă de cea din acetatul de potasiu (919 cm^{-1}) şi deci la noi ar fi prezente două feluri de legături ale grupei carboxilice indicate mai sus (tabelul 4).

Domeniile de absorbţie în infraroşu ale $[Fe_3Ac_6(OH)_2]\,Ac\,H_2O$ au fost comparate cu ale altor acetaţi şi diferiţi compuşi analogi studiaţi în [65]...[75], [84], [86].

Toate rezultatele sînt în acord cu structura, stabilitatea şi comportarea complecşilor cercetaţi atît în soluţii cît şi în stare solidă.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de chimie anorganică

BIBLIOGRAFIE

1. Weinland R., Gusmann E., Ber., 1909, **42**, S. 3881.
2. — Z. anorg. Chem.: 1910, **66**, S. 163; 1910, **67**, S. 250.
3. Weinland R., Kassler A., Bayere B., Z. anor chem., 1923, **132**, S. 217.
4. Weinland R., Höhn O., Z. anorg. Chem., 1926, **152**, S. 1.
5. Krause A., Z. anorg. Chem., 1928, **16**, S. 286.
6. Adams A., Davidson D., Trans. Kansas. Acad. Sci., 1935, **38**, p. 129.
7. Brintzintger A., John R., Z. anorg. Chem., 1936, **230**, S. 176.
8. Golgoţiu T., Roşca I., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI** (**XV**), *1—2*, p. 107.
9. Никольский Б. П., Пальчевский В. В., Якубов Х. М., *Химия и термодинамика растворов*. Изд. ЛГУ, 1964, стр. 203, 220, 231.
10. Захарьевский М. С., Голтлова Е. Г., *Химия и термодинамика растворов*. Изд. ЛГУ, 1964, стр, 244.
11. Вернер А., *Новые воззрения в области неорганической химии*. 1936.
12. Welo L. A., Phil. Mag., 1928, **6**, p. 841.
13. Foëx G., Tsai B., Wucher J., C. r. Ac. sci. Paris, 1951, **233**, p. 1432.
14. Tsai B., Wucher J., J. Phys. Radium, 1952, **13**, pp. 485, 489.
15. Рогоковский Б. С., Лаптев Н. Г. *Химия кристелей*. Гизлегпром, М., 1957.
16. Bird C. L., *The Theory and Practice of Wool Dyeing*. Bradford, 1951, pp. 74, 85, 82, 105.
17. Horsfall R. S., Lowrie L. G., *The Dyeing of Textile Fibres*. Chapman and Hall, London, 1949, pp. 273, 274.
18. Grindea M., *Tehnologie chimică textilă*. Ed. St. Did. şi Ped., Buc., 1961, p. 414.
19. * * * *Manualul inginerului textilist*. Ed. Tehn., Buc., 1959, pp. 831, 934.
20. Liteanu C., *Chimie analitică cantitativă. Volumetria*. Ed. Tehn., Buc., 1962.
21. Блаженова А. Н., Ильинская А. А., Рапопорт Ф. М., *Анализ газов в химической промышленности*. Госхимиздат, М., 1954.
22. Korenman I. M., *Microanaliza chimică cantitativă*. Ed. Tehn., Buc., 1951.
23. Macarovici C., *Manual de chimie analitică cantitativă. Gravimetrie*. Ed. Tehn., Buc., 1956.
24. Alekseevski E. B., Golţ R. K., Musakin A. P., *Analiza cantitativă*. Ed. Tehn., Buc., 1955 (trad. din l. rusă).
25. Максимов В. Н., Семененко К. Н., Наумова Т. Н., Новоселова А. В., ЖНХ, 1960, *3*, стр. 558.

26. Dimroth O., Liebys Ann., 1925, **97**, S. 446.
27. Neniţescu C., *Chimie organică*. Vol. **I**, Ed. Did. şi Ped., Buc., 1966, p. 693.
28. Duval C., Xuong, Anal. Chim. Acta, 1951, **5**, p. 160.
29. Paulik F., Weltner M., Acta Chim. Hung., 1958, **16**, p. 159.
30. Paulik F., Erdey L, Tocacs L., Z. anal. Chem., 1959, p. 169.
31. Erdey L., Paulik F., Acta. Chim. Hung., 1955, **7**, p. 27; M. Tud. Akad. Keim. Ceszt. Közi, 1955, **4**, p. 461.
32. Freeman E. S., Carrol B., J. phys Chem., 1958, **64**, *4*, p. 394.
33. Borchard H. J., Daniels F. D., J. Am. Chem. Soc., 1957, **79**, p. 41.
34. Britton H. T. S., Gregg S. J., Weinsor, Trans. Faraday Soc., 1952, **48**, p. 63.
35. Slonim G., Z. Electrochem., 1930, **36**, p. 439.
36. Taseel J. H., Wendlondt W. W., J. Amer. Chem. Soc., 1959, **81**, p. 813.
37. Lukaszewski G. M., Redferre J. P., J. Chem. Soc., 1962, **4**, p. 802.
38. Coats A. W., Redfern J. P., Nature, 1964, **201**, *4*, p. 914.
39. Krevelen D. W., Heerden C. v., Huntyens F. J., Fuel, 1951, p. 253.
40. Doyle C. D., J. Apl. Polymer Sci., 1951, **5**, p. 285.
41. Horowitz G., Anal. Chem., 1963, **35**, p. 1464.
42. Erdey L., Periodica Polytechnica Chem., Eng., 1957, **1**, p. 91.
43. Weniger, Phys. Rev., 1910, **31**, p. 388.
44. — J. Opt. Soc. Am., 1923, **7**, p. 517.
45. Liddel U., Wulf, J. Am. Chem. Soc., 1933, **55**, p. 3574.
46. — J. Am. Chem. Soc., 1935, **57**, p. 1464.
47. Nekamoto K., Margoshes M., Rundle R. E., J. Amer. Chem. Soc., 1955, **77**, p. 6480.
48. Rocchiccioli C., Chim. analyst., 1964, **46**, p. 452.
49. Lecomte J., Freymann R., C. r. Ac. Sc. Paris, 1939, **208**, p. 1401.
50. Douville F., Duval C., Secompte J., C. r. Ac. Sc. Paris, 1941, **212**, p. 697.
51. Jones R. N., Humphires P., Dobriner K., Merling F., J. Am. Chem. Soc., 1951, **73**, p. 3215.
52. Edsall J. T., J. Chem. Phys., 1936, **4**, p. 1.
53. — J. Chem. Phys., 1937, **5**, p. 225.
54. Edsall J. T., Scheinber R., J. Chem. Phys., 1940, **8**, p. 520.
55. Edsall J. T., J. Am. Chem. Soc., 1943, **65**, p. 1765.
56. Edsall J. T., Otvas J. M., Rich A., J. Chem. Soc., 1950, **72**, p. 474.
57. Duval C., Secompte J., Douville F., Anal. Phys., 1942, **17**, p. 5.
58. Drăgulescu C., Trebunescu P., Menessy I., St. şi cerc. chim., 1965, **7**, p. 639.
59. Frujtto J., Nakamoto K., Martell A., J. Chem. Phys., 1962, **36**, p. 324.
60. Frujito J., Nakamoto K., Koboyoschi M., J. Phys. Chem., 1957, **61**, p. 1014.
61. Nakamura K., J. Chem. Soc. Japan., 1959, **79**, p. 1411.
62. Григорьев А. И., ЖНХ, 1964, стр. 1060.
63. Григорьев А. И., Погодилова Е. Т., Новосилова А. В., ЖНХ, 1965, *10*, стр. 772.
64. Григорьев А. И., Максимов В. Н., ЖНХ, 1964.
65. Duval C., Freymann R., Lecomte J., C. r. Ac. Sc. Paris, 1950, **231**, p. 272.
66. Morgan H. W., U. S. Atomic. Energ. Commis., 1949, AECD *12656*, p. 16.
67. Edsall J. T., J. Chem. Phys., 1937, **5**, p. 508.
68. Thompson H. W., Torkington P., J. Chem. Soc., 1945, p. 1436.
69. Flett M. C., J. Chem. Soc., 1951, p. 962.
70. Sheva, Heether, Kuight, Srvern, Anal. Chem,, 1950, **22**, p. 1498.
71. Thompson H. W., Torkington P., J. Chem. Soc., 1945, p. 640.
72. Дункан А., Горди В., Джонс Н., Магисен Ф., Сандорфи К., Вест В., *Применение спектросколии в химии*. ИИЛ, М., 1959
73. Накониси К., *Инфракрасные спектры и строения органических соединений*. Изд. „Мир", М., 1965.
74. Беллами Л., *Инфракрасные спектры молекул*. ИЛЛ, М., 1957.
75. Kössler I., *Methoden der Infrarot – Spektroscopie in der chemischen Analyse*. Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1961.

76. Hilbert, Wulf, Hendricsk, Liddel U., Nature, 1935, **135**, p. 147.
77. — J. Am. Chem. Soc., 1936, **58**, pp. 548, 1911.
78. Fox J. J., Martin A. E., Trans. Faraday Soc., 1940, **36**, p. 897.
79. — Proc. Roy. Soc., **A**, 1937, **162**, p. 419.
80. Badger R. M., Bauer S. H., J. Chem., Phys., 1937, **5**, p. 839.
81. Thompson H. W., J. Chem. Soc., 1948, p. 328.
82. Barnes R. B., William V. Z., Gore R. C., Liddel U., *Infrared Spectroscopy*. Reinhold, New York, 1944.
83. Goltherp J., Opt. Soc. Am., 1950, **40**, p. 397.
84. Baner S. H., Hofstadter R., J. Chem., Phys., 1938, **6**, p. 531.
85. Herman R. C., Hofstadter R., J. Chem. Phys., 1938, **6**, p. 534.
86. Hortwell, Richerds R. E., Thompson H. W., J. Chem. Soc., 1948, p. 1436.
87. Torplei W., Vitiello C., Anal. Chem., 1952, **24**, p. 315.
88. Pristora F., Appl. Spectroscopy, 1952, **6**, *3*, p. 29.
89. Hortert E., Naturwissenschaften, 1956, **43**, S. 275.

L'ÉTUDE THERMOGRAVIMÉTRIQUE ET SPECTROGRAPHIQUE DE L'ABSORBTION DANS L'INFRAROUGE DES ACÉTATES COMPLEXES DE FER TRIVALENT

(Résumé)

En continuant l'étude des acétates complexes de fer à l'aide de l'analyse thermogravimétrique et spectrografique de l'absorbtion dans l'infrarouge, les auteurs obtiennent des renseignements précieux sur l'existence de la liaison du fer et de ces adents.

L'étude thermogravimetrique apporte des données sur la stabilité des acétates de fer, fonction de la température, et sur les énergies d'activitation.

Les spectres d'absorbation dans l'infrarouge confirment les données antérieures [8] sur la structure des acétates complexes de fer.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

Д. К; 669.15; 669.783

НЕКОТОРЫЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СПЛАВОВ НА ОСНОВЕ ГЕРМАНИЯ И ЖЕЛЕЗА

Б. П. БУРЫЛЕВ

Германий и железо — два элемента, которые нашли очень широкое применение в технике: первый при создании полупроводниковых приборов, второй является основой черной металлургии. Германий встречается в некоторых рудах [1], поэтому при выделении его образуются сплавы Ge-Fe, свойства которых к настоящему времени еще изучены недостаточно. Отсутствуют сведения о термодинамических свойствах, которые позволяют судить о характере межчастичного взаимодействия, а также являются основой для изучения многих других физико-химических свойств сплавов.

В данной работе сделана попытка определить некоторый свойства сложных сплавов, содержащих германий и железо. Термодинамические отклонения в системе Ge-Fe определяли из расчета равновесия химических соединений с жидкой фазой. В работе [2] показано, что для точки максимума

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}X_2^2}\right)_{\max} = -\frac{T(\mathrm{d}\mu_2/\mathrm{d}X_2)_{\max}}{\Delta H(1-X_2)}, \tag{1}$$

где X_2 — атомная доля второго элемента; T — температура ликвидуса; ΔH — теплота плавления; μ_2 — химический потенциал второго компонента.

Для регулярных растворов имеем

$$\mu_2 = \mu_2^0 + RT\ln X_2 + (1-X_2)^2 Q_{12}, \tag{2}$$

где Q_{12} — энергия взаимообмена в системе из компонентов 1 и 2.

После дифференцирования μ_2 по X_2 получим из уравнения (1)

$$\left(\frac{d^2T}{dX_2^2}\right)_{max} = -\frac{RT^2}{\Delta H X_2(1-X_2)} + \frac{2QT}{\Delta H}, \quad (3)$$

откуда

$$Q = \left(\frac{d^2T}{dX_2^2}\right)_{max}\frac{\Delta H}{2T} + \frac{RT}{2X_2(1-X_2)}. \quad (4)$$

Теплота плавления соединений рассчитывалась по правилу аддитивности энтропий плавления [3]. Для соединений близких по составу $FeGe_2$ и Fe_2Ge [4] (более точнее для $X_{Ge} = 0{,}70$ и $0{,}358$) получено $\Delta H = 25{,}3$ и $22{,}4$ кдж/(г-атом) соответственно. Линия ликвидус вблизи максимума передается уравнениями

$$t = 1\,180 - 9200(X_{Ge} - 0{,}358)^2 - 22\,500(X_{Ge} - 0{,}358)^3, \quad (5)$$

$$t = 866 - 3\,900(X_{Ge} - 0{,}700)^2 - 27\,100(X_{Ge} - 0{,}700)^3. \quad (6)$$

В расчетах использовались значения теплот плавления железа $\Delta H^{Fe} = 15{,}25$ [5], германия $\Delta H^{Ge} = 33{,}9$ кдж/(г-атом) [6], а температуры плавления соответственно $T = 1\,812$ °К и $T = 1\,209$ °К.

Значение Q в первом случае равно —58 кдж/(г-атом), во втором $Q = -116$ кдж/(г-атом). Так как точность расчета и определения линии ликвидус невелика, то трудно сделать выбор между этими двумя значениями энергии взаимообмена.

Величина Q для системы Fe-Si с учетом данных для теплоты плавления FeSi из работы [3] составляет около —143 кдж/(г-атом), что согласуется с определениями [7] из различных опытных данных. Эти значения показывают, что оба полупроводниковых элемента—германий и кремний образуют с железом растворы, в которых наблюдаются очень большие отрицательные отклонения от законов совершенных растворов. На рис. 1 сопоставлены значения энергии взаимообмена железа с элементами второй подгруппы IV группы элементов периодической системы Д. И. Менделеева.

Значение $Q_{Fe\text{-}C} = -98$ кдж/(г-атом) взято из работы [8], а $Q_{Fe\text{-}Sn} = 23{,}4$ кдж/(г-атом) из работы [9]. Железо и свинец взаимно не смешиваются друг с другом при высоких температурах. Если основываться на усредненных данных [10] по растворимости свинца в железе, то величину $Q_{Fe\text{-}Pb}$ находим из уравнения

$$RT\ln\frac{X_{Pb}}{X_{Fe}} = (2X_{Fe} - 1)Q_{Fe\text{-}Pb}, \quad (7)$$

откуда для жидкого состояния получим $Q_{Fe\text{-}Pb} = 111$ кдж/(г-атом). Для дальнейших расчетов можно принять $Q_{Fe\text{-}Ge} = -90$ кдж/(г-атом).

Абсолютное значение энергии взаимообмена германия с железом установлено с малой точностью, но знак величины Q указывает на то, что при смешении этих двух жидких элементов будет выделяться тепло. Интегральную теплоту смешения можно определить из уравнения

$$\Delta H_{\text{см}} = X_{\text{Ge}} X_{\text{Fe}} Q_{\text{Fe—Ge}}. \tag{8}$$

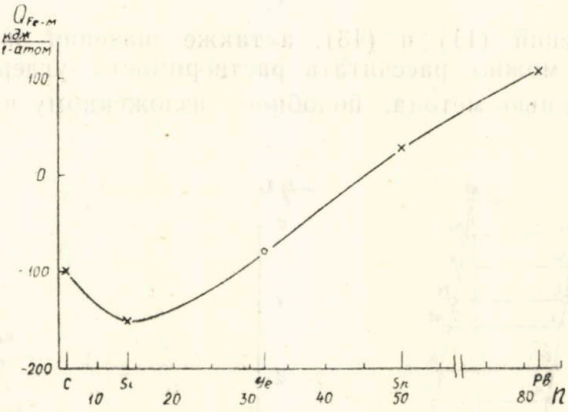


Рис. 1. — Величина энергии взаимообмена для элементов подгруппы IV B с железом.

Значения коэффициентов активности компонентов определяются из выражений

$$RT\ln f_{\text{Ge}} = (1 - X_{\text{Ge}})^2 Q_{\text{Fe-Ge}}, \tag{9}$$

$$RT\ln f_{\text{Fe}} = (1 - X_{\text{Fe}})^2 Q_{\text{Fe-Ge}}. \tag{10}$$

Проверка полученной величины $Q_{\text{Fe—Ge}}$ может быть выполнена при сопоставлении с опытными данными по растворимости углерода.

На основании зависимости энергии взаимообмена элементов с углеродом от порядкового номера элементов (рис. 2) можно установить, что $Q_{\text{Ge-C}} = +160$ кдж/(г-атом). С учетом данных работы [9] получим для растворимости углерода в жидком германии

$$\lg X_{\text{C}} = -\frac{13\,400}{T} + 0{,}315. \tag{11}$$

Растворимость углерода в германии очень мала и составляет при 1 600 °C $1{,}5\,10^{-7}$ % вес.

Для жидкого железа ($Q_{\text{Fe-C}} = -97{,}9$ кдж/(г-атом) из фиг. 2) получим [11]

(12) $$\lg X_C = -\frac{5050}{T} + 0{,}315 + \frac{5120}{T}(1 - X_C)^2,$$

а после упрощений будем иметь

(13) $$\lg X_C = -\frac{550}{T} - 0{,}385.$$

Из уравнений (11) и (13), а также значения энергии взаимообмена $Q_{Fe\text{-}Ge}$ можно рассчитать растворимость углерода в сплаве Fe-Ge. С помощью метода, подобного изложенному в работе [12], получим

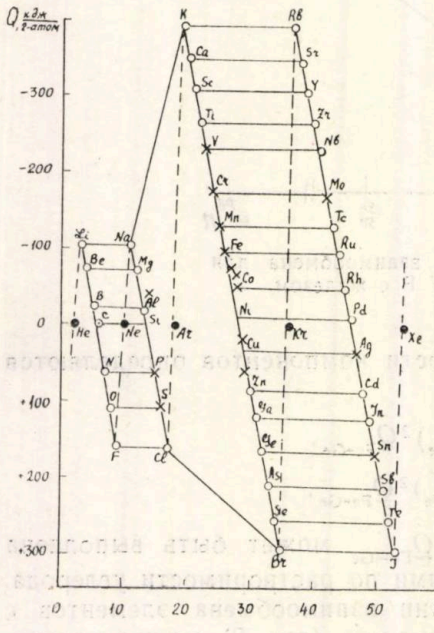


Рис. 2. — Зависимость энергии взаимообмена элементов с углеродом от порядкового номера элементов.

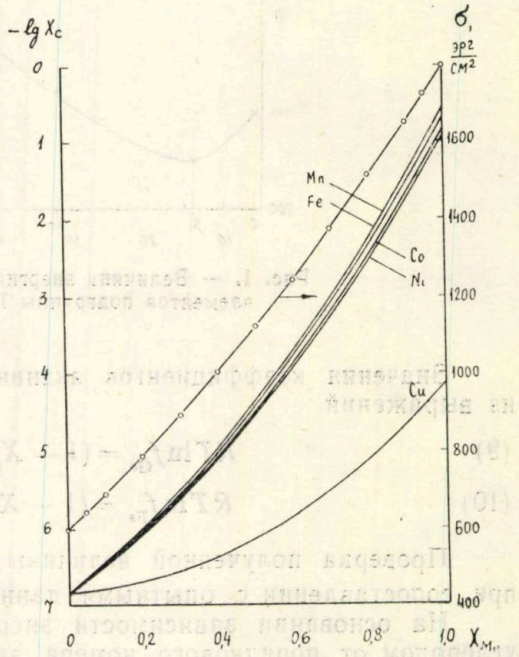


Рис. 3. — Растворимость углерода в сплавах германия с железом, марганцем, кобальтом, никелем и медью, а также поверхностное натяжение сплавов Fe–Ge при 1600 °C.

(14) $$RT\ln X_C = X_{Fe}\,RT\ln X_C^{Fe} + X_{Ge}\,RT\ln X_C^{Ge} + \Delta G^{изб},$$

где X_C, X_C^{Fe} и X_C^{Ge} — растворимость углерода в сплаве Fe-Ge и чистых железе и германии; $\Delta G^{изб}$ — избыточная энергия Гиббса. В приближении регулярных растворов имеем

(15) $$\Delta G^{\text{изб}} = X_{\text{Ge}} X_{\text{Fe}} Q_{\text{Fe-Ge}}.$$

Расчетное уравнение примет вид

(16) $$\lg X_{\text{C}} = -\frac{550}{T} - 0{,}385 + X_{\text{Ge}}\left(-\frac{17\,550}{T} + 0{,}70\right) + \frac{4\,700}{T} X_{\text{Ge}}^2.$$

Подобные выражения можно получить для других элементов четвертого периода (Mn, Co, Ni и Cu). Так как значения энергии взаимообмена этих элементов с германием неизвестны, то в первом приближении будем считать $Q_{\text{Me-Ge}} \approx Q_{\text{Fe-Ge}}$.

Также как и для системы Fe-Ge получим для сплавов Mn-Ge

(17) $$\lg X_{\text{C}} = -\frac{376}{T} - 0{,}347 + X_{\text{Ge}}\left(-\frac{17\,720}{T} + 0{,}662\right) + \frac{4\,700}{T} X_{\text{Ge}}^2.$$

Для сплавов Co-Ge

(18) $$\lg X_{\text{C}} = -\frac{1\,094}{T} - 0{,}245 + X_{\text{Ge}}\left(-\frac{17\,010}{T} + 0{,}560\right) + \frac{4\,700}{T} X_{\text{Ge}}^2.$$

Для сплавов Ni-Ge

(19) $$\lg X_{\text{C}} = -\frac{896}{T} - 0{,}462 + X_{\text{Ge}}\left(-\frac{17\,200}{T} + 0{,}777\right) + \frac{4\,700}{T} X_{\text{Ge}}^2.$$

Для сплавов Cu-Ge

(20) $$\lg X_{\text{C}} = -\frac{11\,500}{T} + 2{,}014 + X_{\text{Ge}}\left(-\frac{6\,600}{T} - 1{,}699\right) + \frac{4\,700}{T} X_{\text{Ge}}^2.$$

Результаты расчета по уравнениям (16)...(20) для 1 600 °С (рис. 3) качественно согласуются с опытными данными [13] для сплавов Fe-Ge и [14] для сплавов Mn-Ge, Co-Ge и Ni-Ge.

Изменение объема при смешении компонентов $\Delta V^{\text{см}}$ находим из выражения

(21) $$V = V_1 X_1 + V_2 X_2 + \Delta V^{\text{см}},$$

где V_1 и V_2 — молярные объемы чистых компонентов; V — молярный объем сплава; $V = M/d$, где M — средний молекулярный вес сплава, d — плотность сплава.

Зависимость изменения объема от состава раствора в первом приближении может описываться формулой

(22) $$\Delta V^{\text{см}} = a X_1 X_2.$$

В работе [15] показано, что

(23) $$\Delta V^{\text{см}} = \frac{\beta}{1 + \alpha T} \Delta H^{\text{см}},$$

где α — термический коэффициент расширения, β — изотермическая сжимаемость.

Сравнивая уравнения (22), (23) и (8), получаем

$$a = \frac{\beta Q_{12}}{1 + \alpha T}, \tag{24}$$

т. е. константа a в уравнении (22) пропорциональна энергии взаимообмена. Значение a для сплавов Me-Ge получили по графику подобному рис. 1 после расчета величин a для систем Me-C, Me-Si и Me-Sn, используя опытные данные [16]...[21]. Для сплавов Pb-Ni значение a определяли из данных работы [22].

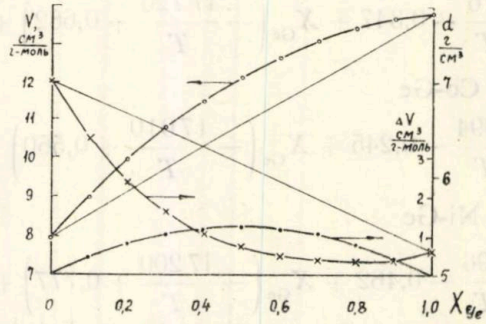


Рис. 4. — Плотность, атомный объем и изменение объема при смешении германия и железа при 1 550 °С.

Плотности жидкого германия приводятся в работах [23], [24], а для плотности жидкого железа приняли данные работы [25]. Расчетное уравнение для молярного объема сплава Ge-Fe принимает вид

$$V = 4{,}84 + 1{,}71\,10^{-3}\,T + X_{Ge}(11{,}52 - 0{,}37\,10^{-3}\,T) - 5X_{Ge}^2. \tag{25}$$

Для температуры 1 550 °С наибольшая компрессия достигает 10 %, что несколько меньше, чем сжатие в системе Fe-Si [17] (до 36 %).

Атомный объем, изменение объема при смешении и плотность сплавов Ge-Fe приведены на рис. 4. Подобные зависимости легко получить и для других систем Me-Ge.

Для определения концентрационной зависимости поверхностного натяжения в сплавах Me-Ge разложим величину σ в ряд по степеням X_2 и ограничимся членом с второй степенью X_2. Тогда получим

$$\sigma = \sigma_1 X_1 + \sigma_2 X_2 + b X_1 X_2, \tag{26}$$

где σ, σ_1 и σ_2 — поверхностное натяжение сплава и чистых компонентов 1 и 2; b — константа для данного сплава. При $b = 0$ получим

уравнение, приведенное в работе [26]. Уравнение близкое по виду выражению (26) было получено Б. Я. Пинесом [27].

Из зависимости поверхностного натяжения от порядкового номера находим значения σ_1 и σ_2, а величину b на основании расчетов для систем Me-Si и Me-Sn. Полученная приближённая зависимость для сплавов Ge-Fe приведена на рис. 3.

Для растворимости водорода в сплавах Fe-Ge с учетом уравнения типа (14) и значений $\lg V_H^{Fe} = 1{,}438$, $\lg V_H^{Ge} = 2{,}478$ и $\Delta G^{изб} = -90\, X_{Fe} X_{Ge}$ кдж/(г-атом) получим

$$\lg V_H = 1{,}438 - 1{,}47\, X_{Ge} + 2{,}51 X_{Ge}^2 . \tag{27}$$

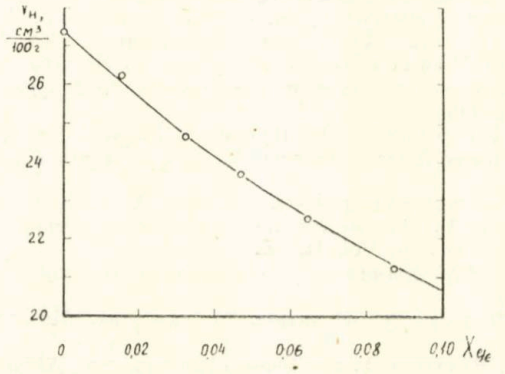


Рис. 5. — Растворимость водорода в сплавах германия с железом при 1600 °С.

Результаты расчетов для сплава хорошо согласуются (фиг. 5) с опытными данными [28], но значение растворимости водорода в чистом германии значительно выше, чем сообщается в работе [29]. Из уравнения (27) следует, что в сплавах Fe-Ge наблюдается минимум растворимости водорода, как это установлено для сплавов Fe-Si [30].

Поступила 10 V 1966 г.

Сибирский металлургический институт, Новокузнецк, СССР.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев В. М., Зеленов К. К., Геохимия, 1965, *5*, стр. 582.
2. Есин О. А., Гельд П. В., *Физическая химия пирометаллургических процессов*. Ч. **II**, Металлургиздат, Свердловск, 1954, стр. 52.
3. Гельд П. В., Кренцис Р. П., Сидоренко Ф. А., *Физико-химические основы металлургических процессов*, Металлургиздат, М., 1964, стр. 115.
4. Хансен М., Андерко К., *Структуры двойных сплавов*. Т. **II**, Металлургиздат, 1962, стр. 702.
5. Кубашевский О., Эванс Е., *Термохимия в металлургии*. ИЛ, 1954.
6. Грейнер., В сб. *Германий*. ИЛ, 1955, стр. 144.

7. Бурылев Б. П., Изв. выс. уч. зав. СССР, Черная металлургия, 1963, *8*, стр. 35.
8. Burilov B. P., An. Rom.-Sov., Metalurgie şi constr. maş., 1963, **17**, *4*, p. 13.
9. Бурылев Б. П., Изв. выс. уч. зав. СССР, Черная металлургия, 1963, *3*, стр. 5.
10. Lord A. E., Parlee N. A., Trans. Metallurg. Soc. AIME, 1962, **218**, *4*, p. 644.
11. Бурылев Б. П., Ж. физ. хим., 1932, **36**, *10*, стр. 2230.
12. — Теор. и эксп. хим., 1965, *4*, стр. 548.
13. Neumann F., Schenck H., Giesserei. Techn.-Wiss. Beihefte, 1962, **14**, *1*, S. 21.
14. Schenck H., Frohberg M. T., Steinmetz E., Archiv für das Eisenhüttenw., 1963, **34**, *1*, S. 37.
15. Шахпаронов М. И., *Введение в молекулярную теорию растворов*. Гостехтеорет., М., 1956, стр. 299.
16. Lucas L. D., C. r. Ac. Sc. Paris, 1959, **248**, *16*, p. 2336.
17. Гельд П. В., Гертман Ю. М., Физика металлов и металловедение, 1960, **10**, *5*, стр. 793.
18. — Изв. АН СССР, ОТН, Металлургия и топливо, 1960, *6*, стр. 134.
19. — Физика металлов и металловедение, 1961, **12**, *1*, стр. 47.
20. Гельд П. В., Петрушевский М. С., Коршунов В. А., Гертман Ю. М., Изв. выс. уч. зав. СССР, Черная металлургия, 1963, *7*, стр. 160.
21. Еременко В. Н., Найдич Ю. В., Василиу М. И., сб. *Поверхностные явления в расплавах и процессах порошковой металлургий*. Киев, АН УССР, 1963, стр. 119.
22. Strauss S. W., Richards L. E., Brown B. E., Nucl. Sci. a. Eng. 1960, **7**, *5*, p. 442.
23. Клемм, Шпитцер, Лингенберг, Юнкер., В. сб. *Германий*. ИЛ, М., 1955, стр. 154.
24. Иоффе А. Ф., *Физика полупроводников*. Изд. АН СССР, 1957, стр. 475.
25. Urbain G., Lucas L. D., *The Physical Chemistry of Metallic Solutions and Intermetallic Compounds*. Vol. **II**, *4E*.
26. Русанов А. И., *Термодинамика поверхностных явлений*. Изд. Ленингр. ун-та, 1960, стр. 63.
27. Кунин Л. Л., *Поверхностные явления в металлах*. Металлургиздат., М., 1955 стр. 181.
28. Weinstein M., Elliott T. F., Trans. Metallurg. Soc. AIME, 1963, **227**, *2*, p. 382
29. Галактионова Н. А., *Водород в металлах*. Металлургиздат, М., 1959, стр. 114
30. Liang H., Bever M. B., Floe C. F., Metals Technology, February 1946, p. 1975

UNELE PROPRIETĂŢI TERMODINAMICE ALE ALIAJELOR PE BAZĂ DE GERMANIU ŞI FIER

(Rezumat)

Se dau ecuaţiile care permit calculul activităţii componentelor, temperaturile de dislocare, solubilităţile carbonului şi hidrogenului precum şi densităţile, volumele molare şi tensiunile superficiale în aliajele cu fier.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Valorile energiei de interschimb între Fe şi elementele subgrupului IV B.
Fig. 2. — Dependenţa energiei de interschimb cu carbonul de numărul de ordine. al elementelor.
Fig. 3. — Solubilitatea carbonului în aliajele Ge-Fe, Ge-Mn, Ge-Co, Ge-Ni şi Ge-Cu, precum şi tensiunea superficială a aliajelor Fe-Ge la temperatura de 1600 °C.
Fig. 4. — Densitatea, volumul atomic şi variaţia volumului la combinarea germaniului cu fierul la 1550 °C.
Fig. 5. — Solubilitatea hidrogenului în aliajele Ge-Fe la 1600° C.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 541.124

MODELE MACROCINETICE ALE PROCESULUI DE DIZOLVARE - REACŢIE CHIMICĂ - FORMARE DE GERMENI, ÎN CONDIŢIILE CORESPUNZĂTOARE FABRICĂRII ACIDULUI FOSFORIC PRIN PROCEDEUL UMED

DE

CORNELIA LEONTE, C. CALISTRU şi MARIA GĂBURICI

Comunicare prezentată la cea de a III-a Conferinţă republicană de chimie, Timişoara, 27 - 30 iunie 1966

1. Introducere

Procesele de dizolvare, mai ales cele însoţite de reacţii chimice, deşi prezintă extrem de mare interes pentru industrie şi deşi au început a fi studiate de mult, se găsesc şi în prezent într-un stadiu nesatisfăcător de cunoaştere.

În vederea găsirii posibilităţilor de descriere cantitativă a acestor procese s-au luat în studiu sistemele reprezentate în tabelul 1. Aşa cum rezultă din tabel, aceste sisteme au ca elemente comune atît prezenţa procesului de dizolvare şi a reacţiei chimice, cît şi faptul că se desfăşoară în sistemul solid-lichid. În literatură nu există date satisfăcătoare referitoare la descrierea cantitativă a proceselor enunţate [1]...[6]. Această situaţie impune ca, pentru majoritatea proceselor din clasa menţionată, să se utilizeze metode empirice pentru stabilirea parametrilor şi proiectarea instalaţiilor, creîndu-se astfel dificultăţi în conducerea procesului, în aplicarea automatizării.

Pe de altă parte, în procesele în care participă o materie primă solidă condiţiile desfăşurării procesului depind esenţial de sortul de materie primă, respectiv de compoziţie, natura mineralogică, grad de dispersie, structură macroscopică etc. [6]...[8].

În instalaţiile actuale de mare capacitate, în cazul utilizării diferitelor sorturi de materie primă apare necesitatea cunoaşterii comportării fiecărui sort în decursul procesului tehnologic. Pentru a elimina încercările directe la scară industrială, este necesară elaborarea unei metode de

Tabelul 1

Nr. crt.	Procesul industrial	Sistemul caracteristic	Procese de transformare caracteristice
1	Obţinerea hidroxidului de sodiu	$[CaO]_s - [Na_2CO_3 - H_2O]_l$	Dizolvare
		$[CaO]_s - [Na_2CO_3 - NaAlO_2 - H_2O]_l$	Reacţie chimică
		$[CaO]_s - [Na_2CO_3 - Na_2S - Na_2SO_4 - H_2O]_l$	Apariţia de germeni pe suprafaţa granulei de reactant
2	Obţinerea acidului fosforic	$[Ca_3(PO_4)_2]_s - [H_2SO_4 - H_2O]_l$	Dizolvare
		$[Ca_3(PO_4)_2]_s - [H_3PO_4 - H_2O]_l$	Reacţie chimică
		$[Ca_3(PO_4)_2]_s - [H_3PO_4 - H_2SO_4 - H_2O]_l$	Apariţia de germeni { pe suprafaţă / în volum
3	Obţinerea soluţiei de aluminat de sodiu	$[Al_2O_3]_s - [NaOH + H_2O]_l$	Dizolvare Reacţie chimică Dizolvare

cercetare care să permită stabilirea, în laborator, a parametrilor de prelucrare.

În grupa de lucrări pe care o efectuăm ne propunem să studiem aceste clase de probleme în scopul stabilirii posibilităţilor de descriere cantitativă a proceselor menţionate în tabelul 1.

În vederea găsirii căilor de unificare a metodelor inginereşti de cercetare a proceselor chimice, în [18] s-au prezentat modelele macrocinetice ale proceselor din industria anorganică. Pe baza modelului *5* de acolo, în această lucrare se prezintă modelele macrocinetice ale procesului de dizolvare - reacţie chimică - formare de germeni, în condiţiile corespunzătoare fabricării acidului fosforic.

2. Modelele macrocinetice ale procesului

În literatură se afirmă fără experienţe precise că în procesul obţinerii acidului fosforic are loc trecerea fosfatului în soluţie cu formarea PO_4^{-3} şi Ca^{+2} [6]; de asemenea se afirmă, de data aceasta pe baza verificărilor destul de sigure, că germenii de sulfat de calciu se formează din soluţie [9]. Nu există însă date asupra ecuaţiei cinetice.

În vederea cercetării posibilităţilor de descriere cantitativă a procesului s-au admis ca juste aceste date şi luîndu-se în consideraţie procesele macroscopice elementare prezente precum şi raportul vitezelor acestora s-au stabilit modelele *1* şi *2* prezentate în tabelele 2 şi 3 [15] ... [17]. Procesele macroscopice elementare care alcătuiesc procesul sînt: dizolvarea, reacţia chimică şi formarea germenilor. Din grupa proceselor de transfer, pentru întocmirea modelelor s-au luat în consideraţie numai procesele de transfer de masă; acestea se referă atît la transferul reactanţilor cît şi la transferul produselor de reacţie.

După cum rezultă din datele din literatură [10] ... [12], viteza formării şi creşterii germenilor nu este o componentă directă a procesului şi, ca urmare, nu poate exista o etapă şi o ecuaţie cinetică a acestui proces alături de celelalte. Modelul macrocinetic nu va include deci o astfel de ecuaţie.

Notaţii: n°, n — număr de moli, iniţial şi la un moment dat; r_d, r_r, r_t — viteze de dizolvare, reacţie şi transfer; C^s, C^v — concentraţia la suprafaţă şi în volum; S — suprafaţa de reacţie; τ — durata; η — gradul de transformare; R — raza iniţială a granulei; V°, V_l — volumul fazei lichide iniţial şi la un moment dat; a, b — constante din ecuaţia stoichiometrică; K — constanta vitezei; m, n — ordin de reacţie; t — temperatura, °C; T — temperatura, °K.

În modelul *1* s-a admis drept condiţie generală faptul că viteza de reacţie este mai mare decît viteza de dizolvare a fosfatului de calciu. În acest cadru s-a comparat într-o primă etapă viteza de reacţie cu viteza de transfer a reactantului (acid sulfuric) şi apoi viteza de reacţie cu viteza

de transfer a produsului de reacţie (sulfat de calciu); au rezultat patru modele.

Modelul 1. 1. 1. este caracterizat prin condiţiile:

$$r_d \ll r_r, \quad r_r \ll r_{t\,H_2SO_4}, \quad r_r \ll r_{t\,CaSO_4}.$$

În aceste condiţii, după trecerea în soluţie a fosfatului de calciu, are loc reacţia chimică în vecinătatea suprafeţei granulei, iar sulfatul de calciu format se transferă în soluţie. În volumul fazei lichide are loc formarea soluţiei suprasaturate şi apariţia germenilor fazei noi. Deci, $C^v_{H_2SO_4} \simeq C^s_{H_2SO_4}$, $C^s_{CaSO_4} = C^v_{CaSO_4}$.

Modelul macrocinetic cuprinde procesele: dizolvarea fosfatului de calciu, reacţia chimică pe suprafaţa granulei, transferul acidului sulfuric din volum la suprafaţă, transferul sulfatului de calciu de la suprafaţă în volum şi formarea germenilor în volumul fazei lichide. Raportul vitezelor acestor procese macroscopice elementare arată că stadiul limitativ al procesului este reacţia chimică pe suprafaţă. În acest caz, vitezele de consum ale reactanţilor pot fi exprimate prin relaţia:

$$(1) \qquad -\frac{dn_{Ca_3(PO_4)_2}}{S\,d\tau} = -\frac{1}{3}\frac{dn_{H_2SO_4}}{S\,d\tau} = K(C^v_{H_2SO_4})^m.$$

Considerînd granula sferică şi exprimînd numărul de moli de reactanţi consumaţi şi suprafaţa la un moment dat prin mărimile iniţiale corespunzătoare şi gradul de transformare al acidului sulfuric, obţinem $n_{H_2SO_4} = n^0_{H_2SO_4}(1-\eta)$ şi $S = 4\pi R^2(1-\eta)^{2/3}$ şi deci viteza de consum a reactantului este dată de relaţia:

$$(2) \qquad \frac{1}{3}\frac{dn^0_{H_2SO_4}}{4\pi R^2(1-\eta)^{2/3}}\frac{d\eta}{d\tau} = K(C^v_{H_2SO_4})^m.$$

Ştiind că $C^v_{H_2SO_4} = n_{H_2SO_4}/v_l$, iar $v_l = n^0_{H_2SO_4}(a - b\eta)$, rezultă că viteza procesului global pentru modelul *1. 1. 1.* poate fi exprimată prin ecuaţia

$$(3) \qquad \frac{d\eta}{d\tau} = \frac{12\,K\pi R^2}{n^0_{H_2SO_4}}\frac{(1-\eta)^{(2+3m)/3}}{(a-b\eta)^m}.$$

Modelul 1. 1. 2. este caracterizat prin condiţiile:

$$r_d \ll r_r, \quad r_r \ll r_{t\,H_2SO_4}, \quad r_r \ll r_{t\,CaSO_4}.$$

De această dată, după trecerea în soluţie a fosfatului de calciu şi desfăşurarea reacţiei chimice, datorită vitezei mici de transfer a produsului de

Tabelul 3

Modelul macrocinetic 2

Raportul vitezelor			Locul reacţiei	Stadiul limitativ	Ecuaţia caracteristică
$r_r \ll r_d$	*2. 1.* $r_r \ll r_{t\ \text{reactant}\ Ca_3(PO_4)_2}$	*2. 1. 1.* $r_r \ll r_{t\ \text{reactant}\ H_2SO_4}$	$C^s_{Ca_3(SO_4)_2} \simeq C^v_a$ $C^s_{H_2SO_4} \simeq C^v_{H_2SO_4}$ reacţia are loc în întregul volum al fazei lichide	reacţia chimică în volumul fazei lichide	$\frac{-dn_{H_2SO_4}}{v\,d\tau} = KC^n_{H_2SO_4}$
		2. 1. 2. $r_r \gg r_{t\ \text{reactant}\ H_2SO_4}$	$C^v_{H_2SO_4} \neq C^s_{H_2SO_4}$ $C^v_{Ca_3(PO_4)_2} = \text{const}$ reacţia are loc în întreaga fază lichidă	transferul reactantului H_2SO_4	model difuzional
	2. 2. $r_r \gg r_{t\ \text{reactant}\ Ca_3(PO_4)_2}$	*2. 2. 1.* $r_r \ll r_{t\ H_2SO_4}$	$C^v_{H_2SO_4} = \text{const}$ $C^s_{Ca_3(PO_4)_2} \neq C^v_{Ca_3(PO_4)_2}$ reacţia are loc într-o zonă a fazei lichide	reacţia chimică pe suprafaţă	$\frac{-dn_{Ca_3(PO_4)_2}}{s\,d\tau} = K\left(C^v_{H_2SO_4}\right)^n$

Tabelul 2

Modelul macrocinetic 1

Raportul vitezelor			Locul apariţiei germenilor	Modelul macrocinetic	Stadiul limitativ	Ecuaţia caracteristică
$r_d \ll r_r$	*1. 1.*	*1. 1. 1.* $r_r \ll r_{t\ \text{produs reacţie}\ (CaSO_4)}$	$C^v_{H_2SO_4} \simeq C^s_{H_2SO_4}$ $C^s_{CaSO_4} \simeq C^v_{CaSO_4}$ formarea soluţiei suprasaturate şi apariţia germenilor în volumul fazei lichide	dizolvare reacţia chimică transferul reactantului (H_2SO_4) din volum la suprafaţă transferul produsului de reacţie la suprafaţă în volum apariţia germenilor în volum	reacţia chimică la suprafaţă	$\frac{dn_{H_2SO_4}}{s d\tau} = K\left(C^v_{H_2SO_4}\right)^m$
		1. 1. 2. $r_r \gg r_{t\ \text{produs reacţie}\ (CaSO_4)}$	$C^v_{H_2SO_4} \simeq C^s_{H_2SO_4}$ $\begin{cases} C^s_{CaSO_4} \gg C^v_{CaSO_4} \\ C^v_{CaSO_4} \simeq C_{CaSO_4\ \text{saturat}} \end{cases}$ formarea soluţiei suprasaturate şi apariţia germenilor pe suprafaţă în zonă	dizolvare reacţia chimică transferul reactantului (H_2SO_4) prin volum şi prin crustă apariţia germenilor pe suprafaţa granulei reactant	reacţia chimică la suprafaţă	$\frac{dn_{H_2SO_4}}{s d\tau} = K\left(C^v_{H_2SO_4}\right)^m$
	1. 2.	*1. 2. 1.* $r_r \gg r_{t\ \text{produs reacţie}\ (CaSO_4)}$	$\begin{cases} C^v_{H_2SO_4} \gg C^s_{H_2SO_4} \\ C^s_{H_2SO_4} \simeq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} C^s_{CaSO_4} \gg C^v_{CaSO_4} \\ C^v_{CaSO_4} \simeq C_{CaSO_4\ \text{saturat}} \end{cases}$ formarea soluţiei suprasaturate şi apariţia germenilor pe suprafaţă sau în zonă	reacţia chimică transferul reactantului (H_2SO_4) prin volum şi crustă apariţia germenilor pe suprafaţa granulei reactant	transferul reactantului (H_2SO_4)	$r = K_2\left(C^v_{H_2SO_4} - C^s_{H_2SO_4}\right)$
		1. 2. 2. $r_r \ll r_{t\ \text{produs reacţie}\ (CaSO_4)}$	$\begin{cases} C^v_{H_2SO_4} \gg C^s_{H_2SO_4} \\ C^s_{H_2SO_4} \simeq 0 \end{cases}$ $C^s_{CaSO_4} \simeq C^v_{CaSO_4}$ formarea soluţiei suprasaturate şi apariţia germenilor în volumul fazei lichide	reacţia chimică transferul reactantului (H_2SO_4) prin volum transferul produsului de reacţie ($CaSO_4$) de la suprafaţa granulei în volum	transferul reactantului (H_2SO_4)	$r = K_t\left(C^v_{H_2SO_4} - C^s_{H_2SO_4}\right)$
	1. 2.	$r_r \gg r_{t\ \text{reactant}\ (H_2SO_4)}$				

reacţie, formarea soluţiei suprasaturate şi apariţia germenilor fazei noi are loc pe suprafaţa granulei sau într-o zonă din vecinătatea acesteia. Deci $C^v_{H_2SO_4} \simeq C^s_{H_2SO_4}$, $C^s_{CaSO_4} \gg C^v_{CaSO_4}$, $C^s_{CaSO_4} \simeq C_{CaSO_4\ saturat}$.

Modelul macrocinetic cuprinde procesele: dizolvarea fosfatului de calciu, reacţia chimică, transferul reactantului H_2SO_4 prin volum şi prin crustă, apariţia germenilor fazei noi pe suprafaţa de reacţie. Stadiul limitativ este de asemenea reacţia chimică pe suprafaţă. Ecuaţia vitezei procesului global este aceeaşi (3) ca şi în cazul modelului *1. 1. 1.*

Modelul 1. 2. 1. este caracterizat prin condiţiile:

$$r_d \ll r_r, \quad r_r \gg r_{t\,H_2SO_4}, \quad r_r \gg r_{t\,CaSO_4}.$$

Ca şi în cazul precedent, după trecerea în soluţie a fosfatului şi desfăşurarea reacţiei, are loc formarea germenilor fazei noi pe suprafaţa granulei sau într-o zonă vecină acestei suprafeţe şi ca urmare $C^v_{H_2SO_4} \gg C^s_{H_2SO_4}$, $C^s_{CaSO_4} \gg C^v_{CaSO_4}$, $C^s_{CaSO_4} \simeq C_{CaSO_4\ saturat}$.

Modelul macrocinetic cuprinde procesele: dizolvarea, reacţia chimică, transferul reactantului (acid sulfuric) prin volum şi prin crustă, apariţia germenilor pe suprafaţa granulei. În această situaţie însă, stadiul limitativ al procesului va fi transferul prin volum al reactantului (acid sulfuric). Viteza globală a procesului va putea fi reprezentată prin ecuaţia

$$r = K_t (C^v_{H_2SO_4} - C^s_{H_2SO_4}). \tag{4}$$

Modelul 1. 2. 2. este caracterizat prin condiţiile:

$$r_d \ll r_r, \quad r_r \gg r_{t\,H_2SO_4}, \quad r_r \ll r_{t\,CaSO_4}.$$

După trecerea în soluţie a fosfatului şi desfăşurarea reacţiei chimice, are loc, ca şi în cazul modelului *1. 1. 1.*, formarea germenilor fazei noi în întreg volumul fazei lichide.

Modelul macrocinetic cuprinde procesele: dizolvarea, reacţia chimică, transferul reactantului (acid sulfuric) prin volum, transferul produsului de reacţie (sulfat de calciu) de la suprafaţă în volum şi apariţia germenilor în întreg volumul fazei lichide şi deci $C^v_{H_2SO_4} \gg C^s_{H_2SO_4}$, iar $C^s_{CaSO_4} \simeq C^v_{CaSO_4}$. Stadiul limitativ al procesului este transferul reactantului (acid sulfuric) prin volum. Viteza globală a procesului este descrisă de aceeaşi ecuaţie ca şi în cazul modelului *1. 2. 1.*

Se vede că modelul *1* evidenţiază, în condiţiile în care viteza de dizolvare este mai mică decît viteza de reacţie, mecanismul cinetic, stadiul limitativ al procesului şi locul apariţiei germenilor. Pe baza mecanismului şi a stadiului limitativ se pot stabili relaţiile pentru viteza globală a procesului.

În modelul *2* s-a admis drept condiţie generală faptul că viteza de reacţie este mai mică decît viteza de dizolvare. În această situaţie s-a comparat ulterior numai viteza de reacţie cu vitezele de transfer ale reactanţilor.

Modelul 2. 1. 1. este caracterizat prin condiţiile:

$$r_r \ll r_d, \quad r_r \ll r_{t\,Ca_3(PO_4)_2}, \quad r_r \ll r_{t\,H_2SO_4}.$$

În acest caz, după dizolvarea fosfatului are loc transferul acestuia în volumul fazei lichide. Reacţia are loc în întreg volumul fazei lichide. Formarea soluţiei suprasaturate şi apariţia germenilor are loc în acelaşi volum.

Modelul macrocinetic cuprinde procesele: dizolvarea fosfatului, transferul celor doi reactanţi prin volumul fazei lichide, reacţia chimică şi apariţia germenilor în volum. Deci $C^v_{H_2SO_4} \simeq C^s_{H_2SO_4}$ şi $C^s_{Ca_3(PO_4)_2} \simeq C^v_{Ca_3(PO_4)_2}$. Stadiul limitativ al procesului este reacţia chimică care are loc în volumul fazei lichide. Viteza de consum a reactantului poate fi exprimată prin relaţia

$$-\frac{1}{3}\frac{dn_{H_2SO_4}}{v_e\,d\tau} = K(C^v_{H_2SO_4})^n. \tag{5}$$

Folosind aceeaşi metodă ca şi în cazul precedent, obţinem

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \frac{K}{3}\frac{(1-\eta)^n}{(a-b\eta)^{n-1}}. \tag{6}$$

Modelul 2. 1. 2. este caracterizat prin condiţiile:

$$r_r \ll r_d, \quad r_r \ll r_{t\,Ca_3(PO_4)_2}, \quad r_r \gg r_{t\,H_2SO_4}.$$

Are loc dizolvarea fosfatului, transferul acestuia prin volum şi reacţia chimică în întreg volumul fazei lichide. Viteza redusă de transfer duce la apariţia unui gradient de concentraţie a acidului sulfuric.

Modelul macrocinetic cuprinde aceleaşi procese ca şi în cazul modelului *2. 1. 1.* Deci $C^v_{H_2SO_4} \neq C^s_{H_2SO_4}$ şi $C^v_{Ca_3(PO_4)_2} = \text{const.}$ Stadiul limitativ al procesului este transferul reactantului (acid sulfuric); pentru obţinerea ecuaţiei vitezei procesului global este necesară stabilirea unui model difuzional.

Modelul 2. 2. 1. este caracterizat prin condiţiile:

$$r_r \ll r_d, \quad r_r \gg r_{t\,Ca_3(PO_4)_2}, \quad r_r \ll r_{t\,H_2SO_4}.$$

După dizolvarea fosfatului, datorită raportului vitezelor de transfer ale reactanţilor, reacţia are loc într-o zonă a fazei lichide care mărgineşte granula; formarea germenilor poate avea loc în această zonă cît şi în volum.

Modelul macrocinetic cuprinde procesele: dizolvarea, transferul fosfatului de calciu prin crustă şi prin volum, transferul acidului sulfuric, reacţia chimică şi apariţia germenilor.

Raportul vitezelor arată că stadiul limitativ ar urma să fie determinat de transferul fosfatului de calciu, dar prin condiţia $r_r \gg r_{t\,Ca_3(PO_4)_2}$, cantitatea de fosfat transferată este egală cu cantitatea consumată în reacţie

şi ca urmare, drept stadiu limitativ poate fi considerată reacţia chimică pe suprafaţă.

Viteza procesului global poate fi descrisă de aceeaşi ecuaţie ca şi în cazul modelului *1. 1. 1.*

Din prezentarea modelelor macrocinetice rezultă că procesul de obţinere a acidului fosforic este extrem de complex; pentru determinarea cantitativă a procesului trebuie rezolvate problemele: a) verificarea modelului macrocinetic pentru anumite condiţii de desfăşurare a procesului; b) concretizarea ecuaţiei cinetice; c) stabilirea condiţiilor în care germenii apar în volum sau la suprafaţă.

Rezolvarea ultimei probleme este impusă de faptul că formarea cristalilor în zona vecină suprafeţei granulei complică mecanismul procesului, micşorîndu-i viteza, deoarece la un moment dat transferul reactantului prin crustă poate deveni limitativ şi conduce la obţinerea unor cristale fine de $CaSO_4 . 2H_2O$ care se filtrează şi se spală greu.

Procesul cercetat fiind extrem de complex, problemele grele care apar constă în însăşi organizarea experienţelor pentru verificarea modelelor. De aceea am efectuat în primul rînd cercetări experimentale care să indice grupele de modele care pot fi luate în consideraţie, în condiţiile actuale de obţinere a acidului fosforic în industrie.

3. Partea experimentală

Pentru cercetări s-a utilizat o fosforită de Israel căreia i s-a determinat compoziţia chimică şi spectrul granulometric. Rezultatele sînt indicate în tabelul 4.

Tabelul 4

Analiza chimică şi spectrul granulometric al fosforitei

Compoziţia chimică %		Analiza granulometrică %	
P_2O_5	30,8	$\varnothing > 0{,}25$,	53,7
CaO	45,1	$0{,}10 < \varnothing < 0{,}25$,	26,4
F	3,3	$0{,}071 < \varnothing < 0{,}10$,	8,5
SiO_2	0,6	$0{,}063 < \varnothing < 0{,}071$,	5,3
CO_2	7,37	$\varnothing < 0{,}063$,	6,1
Pierderi la calcinare	8,07		

Metoda folosită pentru determinarea influenţei unor factori asupra vitezei procesului constă în trasarea curbelor care exprimă gradul de transformare a reactanţilor în timp. S-au trasat trei categorii de astfel de curbe:

1. Curbe cinetice la care s-a urmărit evidenţierea influenţei temperaturii. Aceasta a avut valorile de 40°, 50°, 60°, 70°, 80° şi 90°C. Cantităţile

de reactanţi au fost calculate conform compoziţiei chimice, iar raportul $L:S$ a avut valoarea 5 : 1.

2. Curbe cinetice la care s-a urmărit evidenţierea influenţei suprafeţei. În acest scop s-a experimentat la temperaturi de 70° şi 80°C cu o cantitate de material solid calculată conform compoziţiei chimice şi cu un exces de fază solidă de 10%.

3. Curbe cinetice la care s-a urmărit evidenţierea influenţei gradului de diluare a fazei lichide. În acest scop s-a experimentat la temperaturi de 70°C şi la raporturi $L:S$ de 2:1, 5:1, 7:1 şi 10:1.

În cercetările efectuate s-a utilizat instalaţia descrisă în fig. 1.

4. Interpretarea rezultatelor experimentale

Din experienţele efectuate rezultă că la creşterea temperaturii în intervalul 40° ... 90°C creşte viteza globală a procesului. Raportul $\Delta\eta/\Delta t°$, pentru diferite durate, are valorile indicate în fig. 5. Aşa cum rezultă din figură, acest raport are valori mici, ceea ce arată că în intervalul de temperatură considerat viteza globală a procesului creşte relativ puţin la creşterea temperaturii. Reprezentarea grafică în coordonatele $\Delta\eta/\Delta t°$, τ dă o dreaptă. Ori, după cum se ştie, la creşterea temperaturii, viteza de reacţie şi viteza de dizolvare se măresc mult mai mult decît vitezele de transfer.

Pentru verificare s-a reprezentat grafic şi dependenţa lui $\lg(1/\tau)$ de $1/T$ pentru gradele de transformare 0,6 şi 0,8. După cum rezultă din fig. 6, dependenţa menţionată este reprezentată grafic printr-o dreaptă. Utilizînd panta dreptei s-a calculat energia de activare, obţinîndu-se 6090 cal/mol.

Din datele prezentate rezultă că temperatura nu influenţează viteza globală a procesului în ritmul în care influenţează în mod obişnuit o viteză de reacţie.

În literatură [9] se arată că pentru procesele de dizolvare, valori de 6000 ... 9000 cal/mol ale energiei de activare denotă că stadiul limitativ al procesului este difuzia.

Din cealaltă grupă de experienţe efectuate privind variaţia raportului $L:S$, reprezentată în fig. 4, rezultă că viteza globală a procesului creşte mult la creşterea raportului $L:S$. Or, se ştie că la creşterea diluării se măreşte viteza de dizolvare şi ca urmare în soluţie poate trece o cantitate mai mare de fosfat. De asemenea la creşterea diluării se modifică proprietăţile fizice ale fazei lichide şi ca urmare cresc coeficienţii de transfer.

Creşterea vitezei globale a procesului cu creşterea excesului de fază solidă denotă că suprafaţa de separaţie are un rol important în desfăşurarea procesului. Aceasta dovedeşte că stadiul limitativ al procesului nu poate fi reacţia chimică în volum.

Procesul desfăşurîndu-se cu formarea de germeni se poate presupune că va fi descris de ecuaţia cinetică generală pentru aceste procese

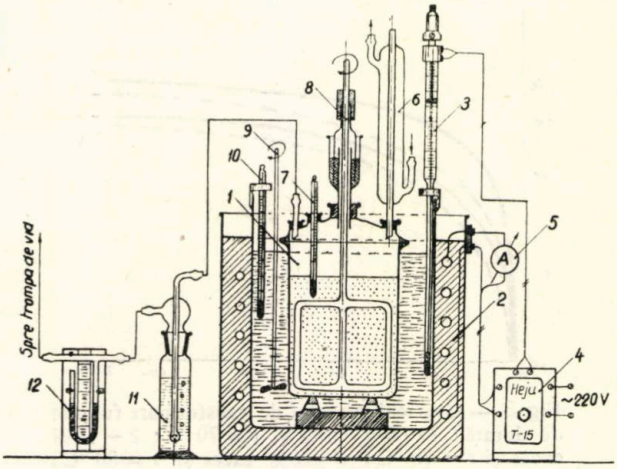


Fig. 1. — Instalaţia pentru determinarea curbelor cinetice : *1* — vas de reacţie ; *2* — termostat ; *3* — termometru de contact ; *4* — releu ; *5* — ampermetru ; *6* — refrigerent ; *7* — termometru ; *8* — agitator cu ramă ; *9* — agitator ; *10* — termometru de control ; *11* — vas de absorbţie a H_2SiF_6 ; *12* — manometru.

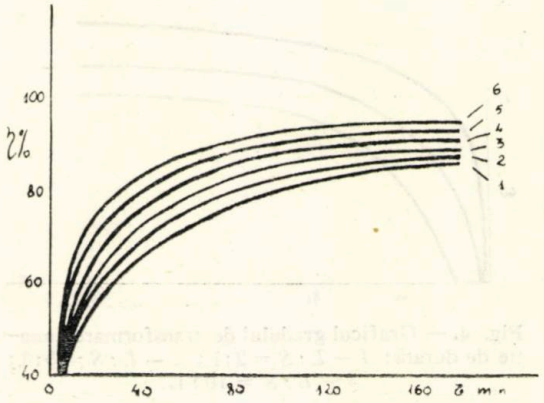


Fig. 2. — Graficul gradului de transformare funcţie de durată: *1* — 40 °C ; *2* — 50 °C ; *3* — 60 °C ; *4* — 70 °C ; *5* — 80°C ; *6* — 90 °C.

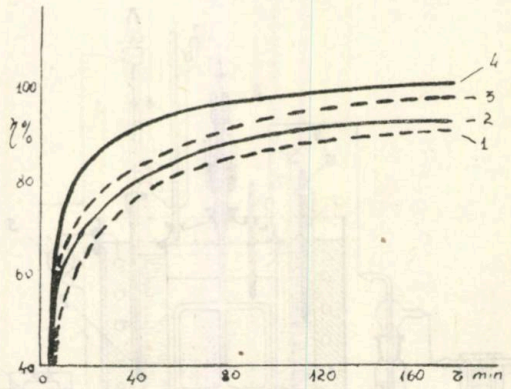


Fig. 3. — Graficul gradului de transformare funcţie de durată: *1* — 0% exces şi $t = 70\,°C$; *2* — 10% exces şi $t = 70\,°C$; *3* — 0% exces şi $t = 80\,°C$; *4* — 10% exces şi $t = 80°C$.

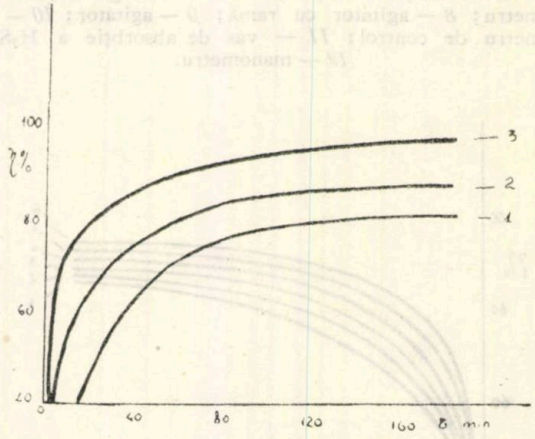


Fig. 4. — Graficul gradului de transformare funcţie de durată: *1* — $L:S = 2:1$; *2* — $L:S = 5:1$; *3* — $L:S = 10:1$.

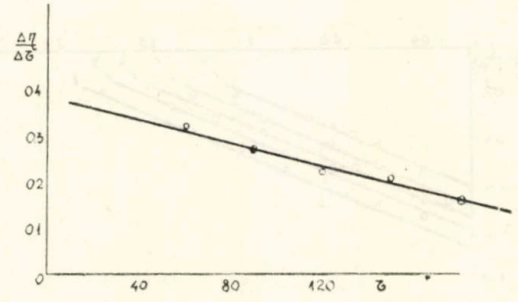


Fig. 5. — Graficul lui $\Delta\eta/\Delta t^{\circ}$ funcţie de durată.

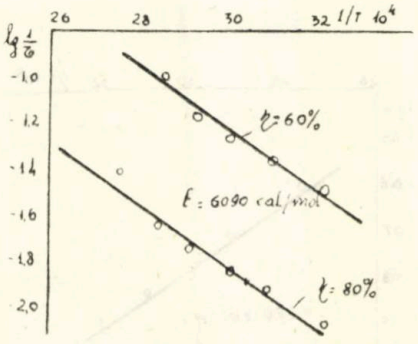


Fig. 6. — Graficul lui $\lg(1/\tau)$ funcţie de $1/T$.

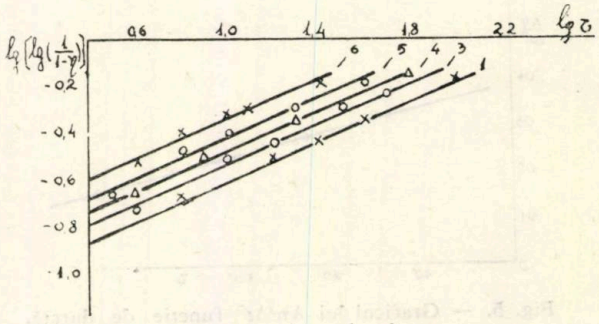


Fig. 7. — Graficul lui $\lg\left(\lg\frac{1}{1-\eta}\right)$ funcţie de $\lg\tau$.

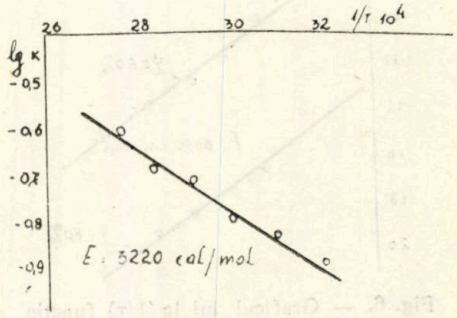


Fig. 8. — Graficul lui $\lg K$ funcţie de $1/T$.

şi anume $\eta = 1 - e^{-K\tau^n}$. Pentru a urmări verificarea acestei ecuaţii s-a trasat graficul lui $\lg\{\lg[1/(1-\eta)]\}$ funcţie de $\lg\tau$, reprezentat în fig. 7. Din fig. 7 se constată că pentru fiecare temperatură cercetată, dependenţa menţionată este reprezentată grafic de o dreaptă. Utilizînd graficul s-a calculat panta dreptelor n şi ordonata la origine $\lg K$. Valorile obţinute sînt înscrise în tabelul 5.

Tabelul 5

Valorile obţinute pentru n şi $\lg K$

$T°K$	313	323	333	343	353	363
n	0,440	0,436	0,445	0,441	0,435	0,45
$\lg K$	−0,870	−0,820	−0,790	−0,740	−0,682	−0,595

Calculul energiei de activare pe graficul lui $\lg K$ funcţie de $1/T$, prezentat în fig. 13, indică valoarea de 3300 cal/mol.

Verificarea ecuaţiei arată că pentru întreg intervalul de temperaturi, în condiţiile de lucru adoptate, procesul are o singură legitate. Valoarea n şi mărimea energiei de activare indică drept stadiu limitativ procesul de transfer.

Datele obţinute în cercetarea experimentală arată că modelele macrocinetice pentru procesul de dizolvare-reacţie chimică-formare de germeni în sistemul fabricării acidului fosforic sînt cele corespunzătoare procesului de transfer şi anume reprezentate prin modelele *2.1.2*, *1.2.1* şi *1.2.2*.

În continuarea cercetării se vor elabora metode experimentale pentru studiul acestor modele şi descrierea matematică a procesului.

5. Concluzii

1. Cercetarea de faţă a fost concepută pe baza teoriei modelelor macrocinetice şi urmăreşte concretizarea acesteia pe modelul procesului chimic de dizolvare-reacţie chimică-formare de germeni.

2. S-au concretizat tipurile de modele macrocinetice ale procesului de obţinere a acidului fosforic.

3. S-au efectuat cercetări experimentale care au dus la concluzia că modelele macrocinetice ale procesului de dizolvare-reacţie chimică şi formare de germeni în sistemul fabricării acidului fosforic sînt cele corespunzătoare procesului de transfer şi anume reprezentate prin modelele *2.1.2*, *1.2.1* şi *1.2.2*.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de tehnologia substanţelor anorganice

BIBLIOGRAFIE

1. Дин Вэй, Гзовский С. Я., Хим. пром., 1963, *4*, стр. 46.
2. Непенин И. Н., Бумаж. пром., 1947, *6*, стр. 28.
3. Calistru C., Leonte C., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1960, **VII (XI)**, *1 — 2*, p. 117.
4. Смирнов М. Н.. Цветные металлы, 1962, *6*, стр. 325.
5. Craword H. O., Chemical and Process Engineering, 1963, **44**, *8*, p. 413.
6. Позин М. Е., *Технология минеральных солеи*. Л., 1961, стр. 604.
7. Бернштейн В. А., Тр. ВАМИ, 1957, **40**, стр. 13.
8. Calistru C., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1960, **VI (X)**, *3 — 4*, p. 107.
9. Чепелевецкий М. Л., Брущкус Е. Б., *Суперфосфат — физико-химические реакции*. М., 1965.
10. Павлюченко М. М., *Гетерогенные химические реакции*. Минск, 1965.
11. Хауффе К., *Реакции в твердых телах*. **II**, 1963.
12. Levenspiel O., *Chemical Reaction Engineering*. New York, 1965.
13. Kermode I. R., Stevens F. W., The Canadian J. of Chem. Eng., 1965, *2*, p. 68.
14. Wen C. Y., Chung E. S., The Canadian J. of Chem. Eng., 1965, *3*, p. 101.
15. Voncken M. R., British Chem. Eng., 1965, *1*, p. 12.
16. Van de Vusse J. G., Chem. Eng. Sci., 1962, **17**, p. 507.
17. — Chemie Ing. Tech., 1963, **35**, S. 215.
18. Calistru C., Leonte C., *La systématisation et l'établisement des modèles macrocinétiques des processus chimiques industrielles*. Comunicare prezentată la cel de al XXXVI Congres de chimie industrială, Bruxelles, 10—16 septembrie 1966.

MACROKINETIC MODELS FOR THE PROCESS OF DISSOLUTION-CHEMICAL REACTION-FORMING OF GERMS IN THE SYSTEM OF PRODUCING OF PHOSPHORIC ACID BY HUMID PROCESS

(Abstract)

The work has been conceived on the basis of the theory of macrokinetic models previously elaborated and aims the concretization of the same on the model of the chemical process of dissolution - chemical reaction - forming of germs.

The types of macrokinetic models has been elaborated for the process of obtaining phosphoric acid by humid process.

The experimental researches have carried out the conclusion that macrokinetic models of the process of dissolution - chemical reaction - forming of germs in the system of producing of phosphoric acid by the humid process are those corresponding to the mass transfer process represented by models *1.2.1*, *1.2.2* and *2.1.2*.

The Explanation of the Figures

Fig. 1. — The instalation for determining the kinetical curves.

Fig. 2. — Dependence of the degree of conversion from time : *1* — 40°C; *2* — 50°C; *3* — 60°C; 4 — 70°C; *5* — 80°C; *6* — 90°C.

Fig. 3. — Dependence of the degree of conversion from time: *1* — 0% plus and $t = 70°C$; *2* — 10% plus and $t = 70°C$; *3* — 0% plus and $t = 80°C$; *4* — 10% plus and $t = 80°C$

Fig 4. — Dependence of the degree of conversion from time : *1* — $L:S = 2:1$; *2* — $L:S = 5:1$; *3* — $L:S = 10:1$.

Fig. 5. — Dependence of $\Delta\eta/\Delta t$ from t.

Fig. 6. — Dependence of lg $(1/\tau)$ fom $1/T$.

Fig. 7. — Dependence of $\lg\{\lg[1/(1-\eta)]\}$ from lg τ.

Fig. 8. — Dependence of lg K from $1/T$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 66.026

DOZAREA AMPEROMETRICĂ A IONULUI SeO_3^{2-} CU ACETAT DE PLUMB

DE

SIMION SAVENCU, AURORA BORDEA, GH. MOROI, MARIA ROSMARIN şi FLORICICA MATEI

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

Titrările amperometrice au căpătat în ultimul timp o aplicare din ce în ce mai largă în practica electroanalizelor cantitative.

Pentru selen sînt cunoscute cîteva metode amperometrice utilizînd ca reactivi: *azotatul mercuros* [1], cu formarea azotatului selenios la potenţialul electrodului indicator de platină + 0,05 V pînă la 0,2 V faţă de electrodul saturat de calomel; *acidul ascorbic* [2] în mediu acid, care reduce ionul selenios la selen elementar, la pontenţialul electrodului picător de mercur de — 0,5 V faţă de electrodul saturat de calomel; *thiourea* [3], care reduce ionul selenios la selen elementar, excesul de thiouree titrîndu-se cu bicromat la potenţialul electrodului indicator de platină de 1 V faţă de electrodul de comparaţie cu iodură de mercur; *iodura de potasiu* [4] în mediu acid, care reduce ionul selenios la selen elementar pe electrodul indicator de platină; *hipobromitul* [5] care oxidează Se_{IV} la Se_{VI} titrîndu-se excesul; *thiosulfatul de sodiu* [6], care reduce ionul selenios la selen elementar, excesul de thiosulfat titrîndu-se cu iod (microdozare).

În literatura de specialitate nu sînt indicaţii referitoare la determinarea amperometrică a ionului selenios prin precipitare cu săruri de plumb. Se cunoaşte reacţia de precipitare dintre ionii SeO_3^{2-} şi Pb^{2+} cu formarea unui precipitat alb cristalin de selenit de plumb

$$SeO_3^{2-} + Pb^{2+} = PbSeO_3,$$

insolubil în acid acetic şi solubil în acizi minerali cu concentraţia peste 1 *n*.

Ionul SeO_3^{2-} se reduce pe electrodul picurător de mercur începînd de la potenţialul — 0,10 V, iar ionul Pb^{2+} se reduce începînd de la potenţialul — 0,4 V. În consecinţă determinările se pot efectua începînd de la potenţialul — 0,6 V, reacţia petrecîndu-se între o substanţă polarografic activă şi un reactiv polarografic activ. Curba de titrare va avea forma în V din fig. 1, deoarece ambii ioni se reduc pe electrodul picurător de mercur.

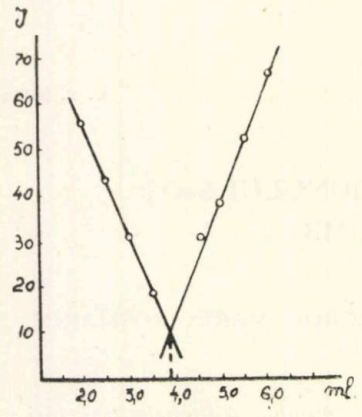


Fig. 1

Pe baza acestor consideraţiuni am întreprins o serie de cercetări pentru stabilirea unei metode de determinare a seleniului din acidul selenios şi seleniţi prin titrarea amperometrică cu acetat de plumb, cercetări care fac obiectul acestei lucrări.

2. Partea experimentală

S-a folosit polarograful LP-55 cu un galvanometru cu oglindă, avînd sensibilitatea de 10^{-9} A/mm/m. Electrodul indicator este un electrod picurător de mercur cu capilara cu perioadă de picurare 2...3 sec. Titrările s-au efectuat la petenţialul de — 1 V faţă de electrodul saturat de calomel, ca electrod de comparaţie. În calitate de electrolit indiferent s-a folosit o soluţie 1 *n* de KNO_3.

Pentru a împiedica apariţia curentului de difuzie a oxigenului pe electrodul picurător, este utilă barbotarea soluţiei, înainte de titrare şi după fiecare adaos de reactiv, cu un curent de hidrogen sau CO_2, care are acelaşi efect. Această constatare a rezultat din studiul comparativ pentru stabilirea influenţei pH-ului, după cum se va vedea în cele ce urmează.

Ca reactiv s-a folosit o soluţie de $Pb(CH_3COO)_2$ cu un conţinut de 0,01900 g/ml, volumul soluţiei de reactiv măsurîndu-se cu o microbiuretă divizată în 0,01 ml.

Determinările s-au făcut utilizînd o soluţie de acid selenios chimic pur p.a. din care s-a preparat o soluţie cu un conţinut de 6,4300 g/l. Pentru suprimarea maximelor s-a folosit o soluţie de gelatină 0,2%.

Determinările s-au efectuat în felul următor: într-o celulă de titrare s-a introdus o cantitate determinată de acid selenios, 2 ml KNO_3 1*n* (electrolit indiferent) 1 ml gelatină şi s-a diluat pînă la volumul de 25 ml cu apă distilată. Prin soluţie s-a barbotat timp de 10 min un curent de CO_2.

Soluţia s-a titrat prin adăugiri succesive cu $Pb(CH_3COO)_2$, barbotîndu-se după fiecare adăugare din reactiv timp de 5 min cu un curent de CO_2.

3. Rezultatele cercetării

Cîteva din rezultatele obţinute sînt prezentate în tabelul 1.

Influenţa diluării are un rol deosebit deoarece din datele tabelului 1 rezultă că eroarea relativă este cu atît mai mică cu cît cantitatea de ioni de SeO_3^{2-} depăşeşte 1 mg/ml.

Tabelul 1

Nr. probei	H_2SeO_3 luat în lucru mg	H_2SeO_3 găsit mg	Diferenţa mg	Eroarea %
1	12,86	13,57	+ 0,71	+ 5,5
2	12,86	13,57	+ 0,71	+ 5,5
3	12,86	13,44	+ 0,58	+ 4,5
4	12,86	13,57	+ 0,71	+ 5,5
5	19,29	19,60	+ 0,31	+ 1,6
6	19,29	19,73	+ 0,44	+ 2,3
7	25,72	25,84	+ 0,12	+ 0,46
8	25,72	25,58	— 0,14	— 0,54
9	25,72	25,71	— 0,01	— 0,04
10	25,72	25,82	+ 0,10	+ 0,41
11	32,15	32,04	— 0,11	— 0,34
12	32,15	32,04	— 0,11	— 0,34

S-a studiat influenţa pH-ului asupra precipitatului de selenit de plumb, practic luînd volume echivalente din acidul selenios şi acetatul de plumb şi titrînd amperometric cu diferite soluţii de acid azotic cu normalitatea între 1 *n* şi 0,01 *n*. Rezultatele obţinute sînt reprezentate în fig 2 din care rezultă că solubilitatea seleniului de plumb nu se schimbă între pH = 6 şi pH = 3. La valori mai mici ale pH-lui solubilitatea creşte foarte mult.

Prin urmare se poate face barbotarea soluţiei cu CO_2 avînd în vedere că pH-ul unei soluţii de CO_2 nu este mai mic de 3,0.

Ionii jenanţi sînt F^-, I^-, SO_4^{2-}, OH^-, CO_4^{2-}, PO_4^{3-}, CrO_4^{2-}, S^{2-}, deoarece precipită cu ionul Pb^{2+}, precum şi ionii care reduc la un potenţial mai mare de — 1 V, cum sînt Fe^{3+}, Cu^{2+}, Sn^{2+}, TeO_3^{2-}, TeO_4^{2-}, Sb^{3+} In^{3+}, Cd^{2+}, Cr^{3+}.

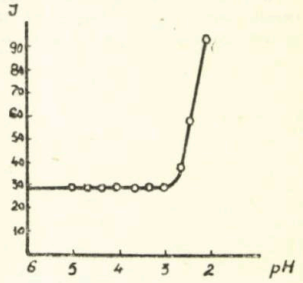


Fig. 2

4. Concluzii

1. Se poate efectua titrarea ampermetrică a ionilor SeO_3^{2-} cu acetat de plumb la potenţialul de — 1 V faţă de electrodul saturat de calomel, utilizînd un electrod picurător de mercur.

2. Curba de titrare are forma în V.

3. Eroarea relativă este mai mică decît $\pm$ 0,5% la un conţinut de acid selenios mai mare de 1 mg/ml în soluţia care se titrează.

4. Titrarea se poate efectua la pH = 3...6.

5. Ionii jenanţi sînt cei care precipită cu ionul Pb^{2+} şi cei care au un potenţial de reducere pe electrodul picurător de mercur mai mare decît — 1 V.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de chimie analitică

BIBLIOGRAFIE

1. Hubicki W., Dabrovska M., Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska, Lublin, Polonia, 1953, **8**, *6*, pp. 161—168.
2. Simon V., Grimm V., Chem. Listy, 1954, *48*, p. 1774.
3. Кузмина Н. Н., Сонгина О. А., ЖАХ, 1962, **XVII**, *4*, стр, 499.
4. Сонгина О. А., Войлошникова А. П., Зав. лаб., 1958, *24*, стр. 1331.
5. Deshmukh E., Naturwissenschaften, 1958, **45**, *6*, S. 129.
6. Jensen R., Chimie Analytique, 1959, **41**, *10*, pp. 394—396.

АМПЕРМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИОНА SeO_3^{2-} АЦЕТАТОМ СВИНЦА

(Резюме)

Устанавливается возможность титрования ионов SeO_3^{2-} ацетатом свинца амперометрически, при потенциале — 1 V относительно насыщенного каломельного электрода, используя для этого капельный ртутный электрод. Кривая титрования имеет форму буквы V.

Погрешность меньше $\pm$ 0,5% при концентрации селенистой кислоты выше 1 mg/ml в титруемом растворе. Титрирование можно производить при pH = 3...6. Мешают титрированию ионы имеющие потенциал восстановления на ртутном капельном электроде более положительный чем — 1 V.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3—4, 1966

C Z. 541.13

STUDIUL POROZITĂŢII DEPOZITELOR DE NICHEL PE FIER

DE

RADU VASILIU, ŞT. IVĂŞCANU şi NICOLETA CIUREANU

1. Introducere

Într-o lucrare anterioară [1] s-a cercetat schimbul ionic între un electrod de fier acoperit electrolitic cu straturi de cupru, nichel sau crom şi o soluţie ce conţine ioni de fier. Cercetarea efectuată a permis să se aprecieze porozitatea straturilor depuse pe baza variaţiei potenţialului în timp [2]. Porozitatea unui depozit galvanic furnizează unele indicaţii asupra rezistenţei la coroziune, în anumite condiţii.

Schimbul ionic de la suprafaţa electrodului s-a cercetat prin măsurarea variaţiei în timp a potenţialului electrodului acoperit, în raport cu un electrod de comparaţie (calomel), folosind pentru măsurare un voltmetru electronic, căruia i s-a adaptat un instrument înregistrator.

În prezenta lucrare se continuă studiul porozităţii depozitelor galvanice de nichel folosind acelaşi mijloc de cercetare ca în şi în [1]. Astfel s-a cercetat influenţa compoziţiei băii de nichelare, a densităţii de curent şi a temperaturii asupra porozităţii, respectiv rezistenţei la coroziune a fierului nichelat.

2. Partea experimentală

S-au trasat curbele potenţial-timp pentru diferite densităţi de curent, diverse băi de nichelare şi diferite temperaturi.

S-au utilizat electrozi de fier sub formă cilindrică cu raza de 0,5 cm şi înălţimea de 5 cm. Electrozii de fier au fost pregătiţi în modul cunoscut: şlefuire mecanică, degresare şi apoi decapare. Grosimea stratului de nichel depus a fost determinată din suprafaţa acoperirii şi masa depozitului obţinută prin cîntărire înainte şi după nichelare.

Influenţa compoziţiei băii de nichelare asupra porozităţii depozitului s-a cercetat cu ajutorul următoarelor băi: *I* — sulfat de nichel şi amoniu 75 g/l; *II*—sulfat de nichel 50 g/l, clorură de amoniu 25 g/l; *III*—sulfat

de nichel şi amoniu 55 g/l, acid boric 20 g/l; *IV*—sulfat de nichel şi amoniu 40 g/l, acid boric 20 g/l şi clorură de amoniu 15 g/l.

Influenţa densităţii de curent a fost cercetată cu ajutorul băii *I*, între limitele 0,2...1,5 A/dm². Pentru celelalte băi, *II*... *IV*, densitatea de curent a fost menţinută la valoarea constantă de 0,3 A/dm².

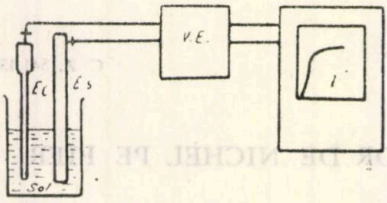


Fig. 1. — Instalaţia utilizată pentru măsurarea şi înregistrarea potenţialului electrodului nichelat.

Influenţa temperaturii s-a cercetat cu ajutorul băii *II*, pentru 10, 20, 30, 40 şi 50 °C.

Electrozii de fier nichelaţi au fost introduşi apoi într-o soluţie de $FeSO_4$ 0,01 M. Instalaţia folosită pentru măsurarea şi înregistrarea potenţialului electrodului nichelat este reprezentată în fig. 1.

3. Rezultatele cercetării

Curbele obţinute cu ajutorul dispozitivului de măsură sînt reproduse în fig. 2. Pe ordonată s-a înscris potenţialul electrodului acoperit cu nichel (mV), iar pe abscisă timpul de la implîntarea lui în soluţia de sulfat feros (s). Prin măsurarea potenţialului unui electrod de fier sau nichel în aceeaşi soluţie de $FeSO_4$ 0,01 M s-au obţinut curbele *2* şi *3* din fig. 2. După cum se vede, în aceste două cazuri potenţialul de electrod se stabileşte repede. Alura curbei este însă alta în cazul unui electrod de fier acoperit cu un strat de nichel (fig. 2, curba *1*). Timpul necesar pentru ca potenţialul acestui electrod să primească o valoare constantă este mult mai îndelungat. Acest timp reprezintă timpul „de trecere", necesar ca electrolitul să ajungă la suprafaţa metalului de bază, adică a fierului, şi ionii de fier să treacă în soluţie prin porii stratului de acoperire. După depăşirea acestui timp, potenţialul electrodului capătă o valoare staţionară. Timpul mai scurt sau mai îndelungat pentru stabilirea potenţialului depinde de calitatea stratului de nichel, adică de porozitatea lui; el este invers proporţional cu porozitatea stratului.

Curbele potenţial-timp sînt exponenţiale pînă la stabilirea unui potenţial staţionar (fig. 3); transpuse în coordonate semilogaritmice se prezintă ca linii drepte. Viteza de variaţie a potenţialului în timp, dată de panta acestor drepte, este funcţie de porozitatea stratului de nichel. Din fig. 4 se observă că pentru grosimi ale stratului de nichel cuprinse între 2 şi 9 μ, panta dreptei scade cu creşterea grosimii.

Deci cu cît panta este mai mică, cu atît calitatea depozitului de nichel este mai bună, respectiv porozitatea stratului este mică şi implicit, puterea de protecţie a depunerii de nichel este mai mare.

În funcţie de densitatea de curent, pentru aceeaşi grosime a stratului de nichel, se obţin curbe exponenţiale similare care în coordonate semilogaritmice apar sub forma de drepte (fig. 5).

O dreaptă cu pantă mai mică corespunde unui depozit catodic cu o stuctură fină, cu porozitate redusă. La creşterea densităţii de curent, creşte şi panta dreptei obţinută pe baza determinărilor experimentale.

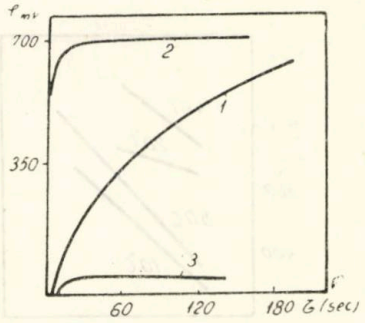


Fig. 2 — Variaţia în timp a potenţialului pentru electrozii de fier nichelat (*1*), fier (*2*) şi nichel (*3*), în soluţie de sulfat feros 0,01 moli la litru.

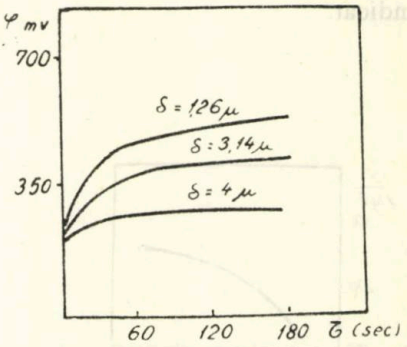


Fig. 3 — Variaţia în timp a potenţialului, pentru diferite grosimi ale stratului de nichel.

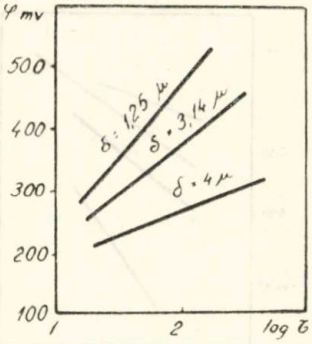


Fig. 4 — Variaţia potenţialului cu logaritmul timpului, pentru diferite grosimi ale stratului de nichel.

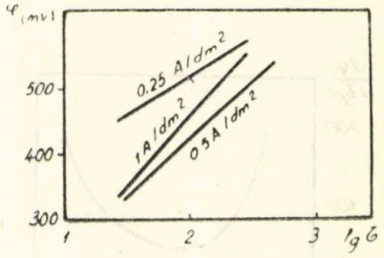


Fig. 5. — Variaţia potenţialului cu logaritmul timpului, pentru diferite densităţi de curent.

Din fig. 6, care reprezintă variaţia pantei dreptelor cu densitatea de curent, rezultă că densitatea de curent cea mai indicată pentru obţinerea unui depozit de nichel puţin poros este 0,5 A/dm².

În comparaţie cu ceilalţi factori cercetaţi influenţa temperaturii are un caracter mai complex. Astfel, pentru diferite temperaturi ale băii de nichelare, în condiţiile unei densităţi de curent constante, se obţin dreptele din fig. 7. Variaţia pantei dreptelor cu temperatura

are aspectul din fig. 8, prezentînd un minim pentru temperatura de 20 °C. Din datele experimentale se observă că temperaturi sub 10 °C şi peste 30 °C nu sînt indicate pentru obţinerea depozitelor de nichel cu proprietăţi anticorozive. Intervalul de temperatură cuprins între 10° şi 30 °C este cel mai indicat.

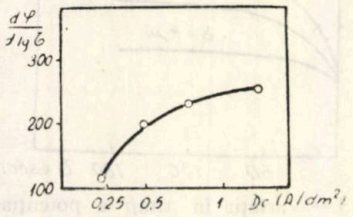


Fig. 6 — Viteza de variaţie a potenţialului cu logaritmul timpului, pentru diferite densităţi de curent.

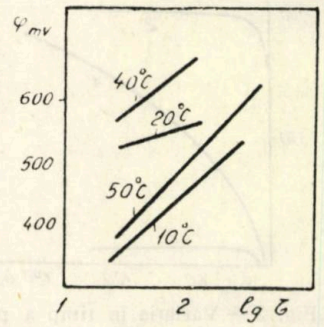


Fig. 7. — Variaţia în timp a potenţialului, pentru diferite temperaturi.

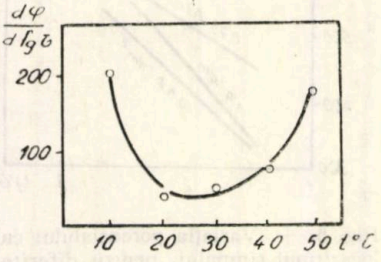


Fig. 8 — Viteza de variaţie a potenţialului cu logaritmul timpului, pentru diferite temperaturi.

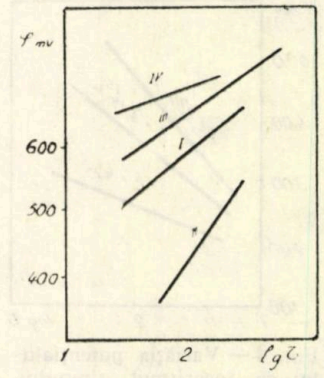


Fig. 9 — Variaţia potenţialului cu logaritmul timpului, pentru diferite băi de nichelare.

Metoda de cercetare folosită permite aprecierea calităţilor băii de nichelare de o anumită compoziţie. Experimentînd cele patru tipuri de băi prezentate mai sus, pentru o densitate de curent egală cu 0,3 A/dm², temperatură de 20 °C şi grosime de 4 μ, se obţin rezultatele din fig. 9.

Se observă că baia de nichelare *IV* asigură obţinerea unui depozit cu o porozitate mică (panta dreptei obţinută cu această baie este mică).

4. Concluzii

1. S-a verificat metoda de apreciere a porozităţii depozitului de nichel prin variaţia în timp a potenţialului pentru diferite condiţii de temperatură, densitate de curent şi compoziţie a băii.

2. S-au obţinut valori optime ale densităţii de curent şi temperaturii pentru baia de nichelare cu compoziţia *IV*, din care rezultă depozitul cu porozitatea cea mai redusă, implicit cu o rezistenţă mai bună la coroziune.

3. Metoda poate permite obţinerea unui indice de porozitate exprimat prin panta dreptelor în planul (φ, $\lg \tau$), dacă se vor adopta condiţii stardard.

Primită la 16 IV 1966

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de chimie fizică

BIBLIOGRAFIE

1. Vasiliu R., Gospodaru P., Ciureanu N., St. şi cerc. de chimie, 1965, **13**, 7.
2. Maurice M. M., Bonnemay, Macram H., Royon J., C. r. Ac. Sci. Paris, 1952, **235**, p. 955.

THE POROSITY STUDY OF THE NICHEL COATINGS ON IRON

(Summary)

In this paper was studied the porosity of a nichel deposit by using the potential variation of a nickelled iron surface per time.

This method was employed in studying the influence of the following factors on the qualities of the deposited nickel coating: current density, temperature and bath composition.

The method allows to obtain a porosity index given by lines in the plane (φ, $\log \tau$), under the application of standard depositing conditions.

The Explanation of the Figures

Fig. 1. — Self-recorder installation of the potential.
Fig. 2. — The potential variation with time of the nickelled iron surfaces (*1*), iron surfaces (*2*) and of nickel surfaces (*3*) in the $FeSO_4$ solution.
Fig. 3. — The potential variation with time, at various thickness of the nickel coating.
Fig. 4. — The potential variation with time logarithm, at various thichness of the nickel coating.
Fig. 5. — The potential variation with time logarithm, at various current densities.
Fig. 6. — The variation velocity of the potential with time logarithm, at various current densities.
Fig. 7. — The potential variation with time, for various temperatures.
Fig. 8. — The variation velocity of the potential with time logarithm, at various temperatures.
Fig. 9. — The potential variation with time logarithm, at various nickel-plating baths.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 532.5 ; 5422

PROCESE DE TRANSFER ÎNTRE LICHIDE NEMISCIBILE

NOTA I

HIDRODINAMICA CURGERII PELICULARE

DE

RADU Z. TUDOSE, TEODOR SĂVEANU şi GH. CRISTIAN

1. Introducere

În industria chimică se întîlnesc nenumărate aplicaţii ale curgerii peliculare, datorită avantajelor pe care le prezintă faţă de alte curgeri. Pot fi amintite numeroase tipuri de aparate de absorbţie, rectificare, distilare moleculară, evaporare, condensare, extractoare lichid–lichid etc., în care una dintre faze curge sub formă de peliculă, iar cea de a doua fază, care poate fi un gaz, vapori sau un lichid nemiscibil, vine în contact cu suprafaţa liberă a peliculei.

Curgerea peliculară este un caz special de curgere caracterizat prin prezenţa unei suprafeţe libere cu o configuraţie geometrică specială. Ea este convenabilă unor studii de profunzime, mai mult decît alte curgeri cu două faze. În capul curgerii peliculare pot fi lămurite mai uşor unele fenomene legate de procesul propriu–zis de curgere, precum şi mecanismele transferului de masă şi de căldură. Astfel se explică numeroasele studii ale procesului de transfer cu ajutorul curgerii peliculare.

Curgerea peliculară a unui lichid în prezenţa altui lichid nemiscibil se întîlneşte în unele aparate de extracţie lichid–lichid şi în unele operaţii speciale din industria chimică. Un studiu al acestei curgeri prezintă interes din mai multe puncte de vedere. Faţă de curgerea peliculară în prezenţa unei fazei gazoase, în acest caz se modifică atît forţa rezistentă de la interfaţă cît şi forţa activă. Este de aşteptat ca aceste modificări să conducă la comportări noi ale peliculei în curgere. Pe de altă parte, compararea rezultatelor obţinute cu sistemul lichid–lichid, cu rezultatele obţinute cu sistemul lichid–gaz, permite lămurirea unor noi aspecte ale curgerii precum şi unele generalizări.

În prezenta lucrare se studiază curgerea peliculară cu două faze lichide, analizîndu-se variaţia frecvenţei valurilor şi a grosimii peliculei funcţie de debit, de distanţa de la perete şi de distanţa de la capătul de formare a peliculei.

2. Aparatura şi metoda de lucru

Aparatul de bază este format dintr-un tub de sticlă *1* cu lungimea de 850 mm şi diametrul 47,4 mm (fig. 1). În interior s-a introdus o baghetă lustruită de lemn *2*, cu lungimea de 620 mm şi diametrul de 11 mm. Pentru confecţionarea baghetei s-a folosit lemnul întru-cît poate fi umectat foarte

bine de către apă, ceea ce înlătură pericolul ruperii peliculei. Tubul de sticlă *1* a fost prevăzută cu cinci tubuluri laterale *3* prin care s-au efectuat măsurătorile.

Pentru experimentare s-a folosit sistemul apă-benzen.

Înainte de începerea experienţelor s-a făcut udarea baghetei de lemn cu apă. Pentru aceasta bagheta era suspendată în axul aparatului de un tub prin care se făcea alimentarea cu apă. După umectare s-a umplut complet tubul *1* cu benzen. În mediul de benzen, apa curge pe baghetă sub forma unei pelicule cu valuri de amplitudine mare şi viteză relativ mică.

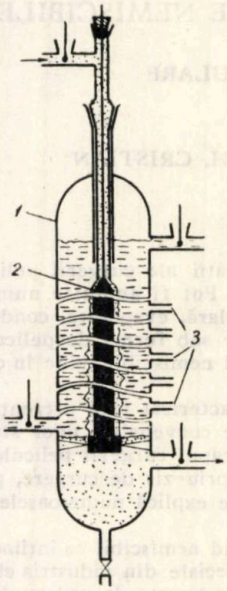


Fig. 1.—Schema aparatului.

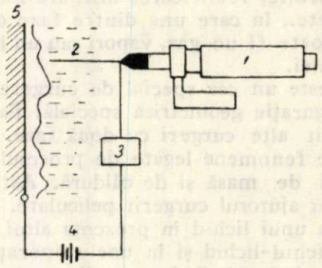


Fig. 2. — Schema instalaţiei pentru determinarea frecvenţei valurilor.

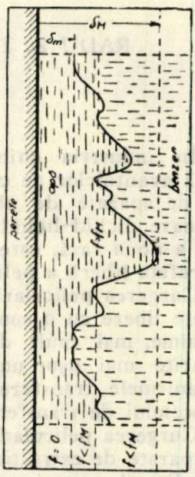


Fig. 3 — Secţiune schematică în filmul de lichid.

Frecvenţa valurilor şi dependenţa frecvenţei de distanţa de la perete s-a determinat printr-o metodă micrometrică. În fig. 2 este reprezentată schema instalaţiei. Un micrometru *1*, fixat rigid, era prevăzut la capăt cu un vîrf metalic inoxidabil *2*. Vîrful s-a fixat prin intermediul unei piese din masă plastică, izolatoare. În momentul cînd vîrful *2* este atins de un val de pe suprafaţa peliculei de apă, se închide un circuit electric alimentat de o sursă *4* de curent continuu de 300 V. Circuitul mai este prevăzut cu un numărător de frecvenţă *3*. De-a lungul baghetei de lemn, pe partea opusă locului de efectuare a măsurătorilor, a fost întins, lipit de perete, un fir metalic, inoxidabil, cu diametrul de 0,1 mm, legat la sursa de curent *4*. Pentru ca lichidul peliculei să conducă curentul i s-a introdus un procent de 2% acid acetic.

Cînd vîrful metalic *2* atinge peretele *5*, micrometrul indică valoarea zero şi circuitul electric este închis. Prin îndepărtarea foarte lentă a vîrfului *2* de peretele *5*, la un moment dat apar întreruperi ale circuitului, care indică distanţa minimă de la perete la care apar valurile, respectiv micrometrul indică grosimea minimă a peliculei (fig. 3). Cu creşterea distanţei de la perete, întreruperile circuitului sînt din ce în ce mai frecvente, după care închiderea circuitului este din ce în ce mai rară. Prin cronometrarea numărului de întreruperi ale circuitului, s-a determinat dependenţa frecvenţei valurilor de distanţa de la perete. Determinările s-au efectuat cu patru debite diferite, cuprinse între 400 şi 1150 kg/mh. Aceleaşi măsurători s-au făcut la trei distanţe diferite de punctul de formare a peliculei, şi anume la 110, 310 şi 510 mm.

Temperatura de lucru a fost $24 \pm 1°C$.

3. Rezultatele cercetării

Suprafaţa peliculei de lichid, pe o distanţă scurtă de la capătul superior, este netedă, apoi, în sensul curgerii, apar treptat valuri de amplitudine din ce în ce mai mare şi frecvenţă din ce în ce mai mică. Frecvenţa valurilor depinde în primul rînd de distanţa de la perete şi în al doilea rînd de distanţa în sensul de curgere a peliculei (fig. 4 ... 6).

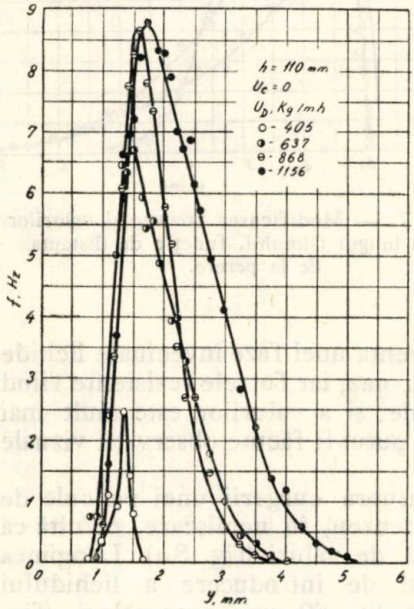


Fig. 4 — Variaţia frecvenţei valurilor cu distanţa de la perete ; $h = 110$ mm.

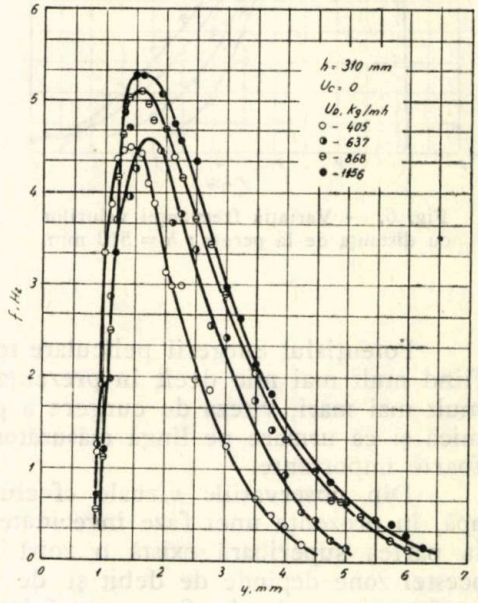


Fig. 5 — Variaţia frecvenţei valurilor cu distanţa de la perete ; $h = 310$ mm.

Frecvenţa maximă a valurilor, pentru condiţiile în care s-au efectuat experienţele, se găseşte la o distanţă de perete de 1 pînă la 2 mm. Pe măsură ce creşte grosimea peliculei, ca urmare a creşterii debitului de apă, maximul frecvenţei se îndepărtează de perete şi frecvenţa valurilor creşte.

Frecvenţa şi amplitudinea valurilor se modifică în sensul de curgere a peliculei. Cu cît creşte distanţa de la capătul de formare a peliculei, amplitudinea valurilor creşte şi frecvenţa scade (fig. 7).

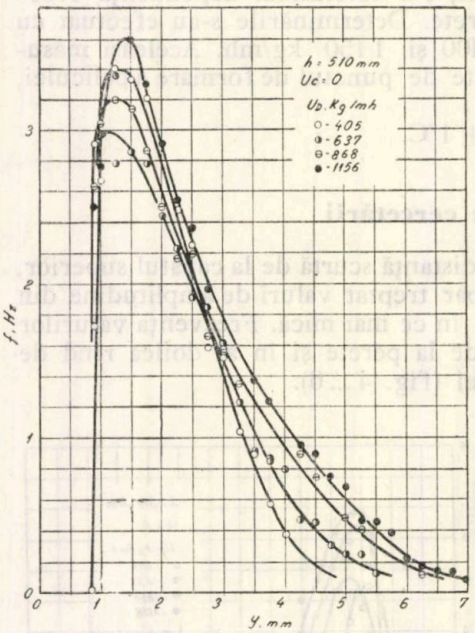


Fig. 6. — Variaţia frecvenţei valurilor cu distanţa de la perete ; $h = 510$ mm.

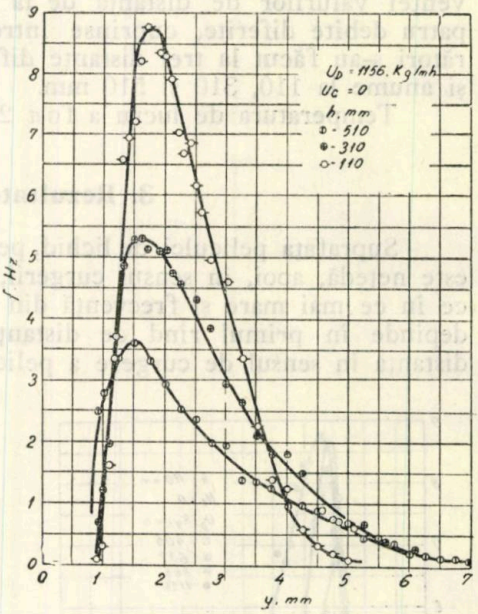


Fig. 7. — Modificarea frecvenţei valurilor în lungul filmului, funcţie de distanţa de la perete.

Potenţialul curgerii peliculare în prezenţa unei faze învecinate lichide fiind mult mai mic decît în prezenţa unui gaz, iar forţele rezistente fiind mult mai mari, viteza de curgere a peliculei şi a valurilor este mult mai mică şi ca urmare pe lîngă măsurători au putut fi făcute observaţii vizuale foarte importante.

Din observaţiile vizuale efectuate asupra curgerii unei pelicule de apă, în prezenţa unei faze învecinate de benzen, în nemişcare, rezultă că la partea superioară există o zonă lipsită de valuri (fig. 8 *a*). Lungimea acestei zone depinde de debit şi de modul de introducere a lichidului ce formează pelicula. Sub această zonă, de 30 ... 60 mm, apar valuri (fig. 8 *b*). Grosimea peliculei, frecvenţa, amplitudinea şi lungimea valurilor

variază considerabil în sensul de curgere a peliculei şi o dată cu debitul de lichid. Stabilirea unei dependenţe între aceste mărimi este o problemă foarte dificilă.

4. Analiza rezultatelor

Notaţii : C — viteza valurilor ; f — frecvenţa valurilor ; g — acceleraţia gravitaţiei ; h — distanţa de la capătul de formare a peliculei ; $\overline{U}$ — viteza medie ; U — debitul masic raportat la unitatea de perimetru ; y — distanţa de la perete ; $\mathcal{R}e$ — numărul lui Reynolds ; Δp — căderea de presiune pe unitatea de lungime ; δ — grosimea peliculei, $\overline{\delta}$ — grosimea medie a peliculei ; θ — unghiul peretelui cu orizontala ; μ — vîscozitatea dinamică ; ν — vîscozitatea cinematică ; ϱ — densitatea ; σ — tensiunea superficială ; τ_i — tensiunea interfacială.

Indici : C — faza continuă (benzen) ; D — faza dispersă (apa) ; g — faza gazoasă ; l—faza lichidă.

În cazul curgerii laminare, fără valuri, a unei pelicule, în prezenţa unei faze lichide nemiscibile, neglijînd frecarea interfacială, termenul ϱ_g din ecuaţiile lui Nusselt [1] trebuie înlocuit cu $g(\varrho_D - \varrho_C)$. Pentru grosimea filmului se obţine

$$(1) \qquad \delta = \left(\frac{3U}{g(\varrho_D - \varrho_C)\sin\theta}\right)^{1/3} = (3\mathcal{R}e)^{1/3}\left(\frac{\varrho_D}{\varrho_D - \varrho_C}\right)^{1/3}\left(\frac{\nu^2}{g\sin\theta}\right)^{1/3}.$$

Chiar dacă faza lichidă învecinată este staţionară, forţele interfaciale sînt mari, datorită vîscozităţii. Tratarea matematică în acest caz este foarte complicată.

Semenov [2] a stabilit o ecuaţie pentru sistemul lichid-gaz, luînd în considerare tensiunea interfacială τ_i şi căderea de presiune pe unitatea de lungime Δp, ecuaţie care leagă debitul de grosimea peliculei :

$$(2) \qquad U = \frac{\varrho g \sin\theta - \Delta p}{3\mu}\,\frac{\delta^2}{} - \frac{\tau_i\,\delta^2}{2\mu}.$$

La începutul înecului rezultă pentru grosimea peliculei

$$(3) \qquad \delta = \frac{3\tau_i}{2(\varrho g \sin\theta - \Delta p)}.$$

Feind [3] a arătat că efectul forfecării interfaciale τ_i la curgerea unui curent de gaz în contracurent conduce la creşterea grosimii peliculei exprimată prin raportul

$$(4) \qquad \frac{\delta}{\delta_0} = \left(1 - \frac{2\tau_i}{2\delta\varrho g}\right)^{-1/3},$$

unde δ_0 este grosimea peliculei în absenţa gazului.

Kapiţa [4] a extins tratarea matematică la curgerea laminară cu valuri şi pentru: anumite cazuri mai simple a găsit o ecuaţie care conţine grosimea peliculei şi debitul de lichid

$$(5) \qquad \overline{\delta}^3 \pm 0{,}27\,\frac{\varrho g}{\sigma_g \sin\theta}\,(U_g - C)^2\,U^2\,\overline{\delta}^2 - \frac{2{,}4\,\nu\,U}{g\sin\theta} = 0,$$

unde semnul $\pm$ se referă la curgerea în contracurent, respectiv în echicurent.

Studii teoretice privitoare la curgerea peliculară cu valuri în prezenţa unei faze lichide nu au fost făcute din cauza compexităţii fenomenului.

Din măsurătorile efectuate rezultă că grosimea minimă a peliculei nu variază în direcţia de curgere. În domeniul de numere Reynolds, cuprinse între 60 şi 180, calculate cu expresia

$$\mathcal{R}e = \frac{4U_D}{\mu g}\,\frac{\varrho_D - \varrho_C}{\varrho_D}, \tag{6}$$

s-a constatat că grosimea minimă rămîne de asemenea constantă şi egală cu 0,8 mm. Aceste rezultate concordă cu datele lui Brauer [5] obţinute cu sistemul apă-aer, cu singura deosebire că el a găsit pentru sistemul cu care a lucrat grosimea minimă în jurul lui 0,2 mm. Pelicula de lichid ce curge în prezenţa unei faze lichide învecinate are grosimea minimă mai mare de aproximativ 4 ori faţă de curgerea în aceleaşi condiţii în vecinătatea unei faze gazoase. Îngroşarea se datoreşte atît micşorării potenţialului curgerii cît şi creşterii forţelor rezistente.

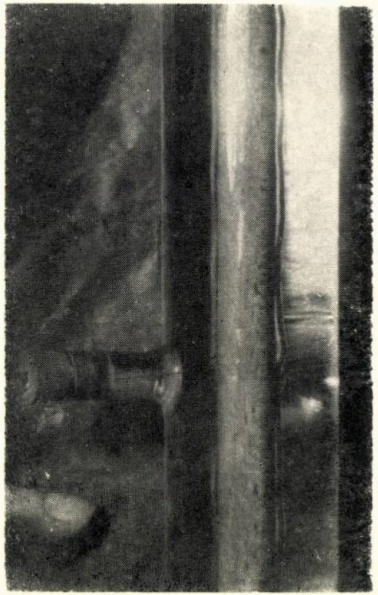
Grosimea minimă şi maximă a peliculei depinde puternic de debitul de lichid ce formează pelicula şi de distanţa de la capătul de formare a acesteia. În apropierea nivelului de formare a peliculei grosimea maximă variază considerabil cu debitul şi distanţa de la acest nivel, dar la distanţe mari dependenţa scade. Rezultă că în lungul direcţiei de curgere există o tendinţă de stabilizare a grosimii peliculei, ce se poate explica printr-o echilibrare a forţelor active şi rezistente.

Vizual s-a constatat că forma şi amplitudinea valurilor depinde de debitul de lichid şi de distanţa de la nivelul de formare a peliculei de lichid. Chiar pentru aceleaşi condiţii de curgere a peliculei există o instabilitate în ceea ce priveşte forma valurilor, în special la debite mari.

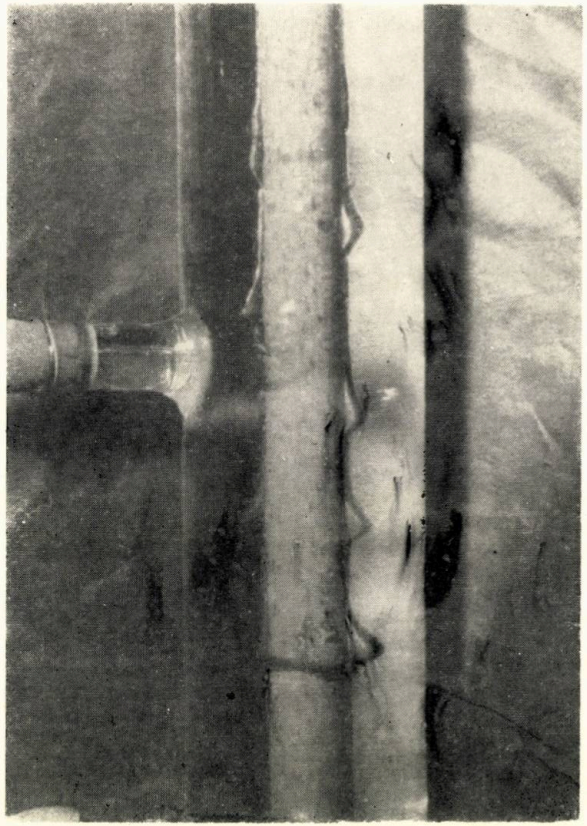
După cum s-a mai menţionat valurile apar la o distanţă mică de capătul superior. Amplitudinea creşte treptat în sensul curgerii iar frecvenţa scade tinzînd către o valoare constantă. La debite mici cele mai multe valuri îmbracă numai o parte din perimetrul tubului (fig. 8 *b*). Cu creşterea debitului apar din ce în ce mai multe valuri inelare (fig. 9 *a*), care predomină la debite mari.

Pentru aceleaşi condiţii de curgere, la debite mari se constată o instabilitate a formei valurilor. La început acestea apar sub forma unor creste care apoi se turtesc formînd un ansamblu de valuri neregulate (fig. 9 b). Instabilitatea formei valurilor se poate explica printr-o fluctuaţie a raportului dintre forţele active şi forţele rezistente. Fluctuaţiile raportului s-ar putea datora fluctuaţiilor ce apar în amplitudinea şi viteza de curgere a valurilor precum şi apariţiei unor curenţi în faza lichidă învecinată, ca urmare a valurilor. Deci este vorba de o interacţiune între cele două faze.

Amplitudinea valurilor creşte în direcţia curgerii, funcţie de debitul de lichid. Aceste rezultate sînt în concordanţă cu datele teoretice ale lui Kasimov şi Zigmund [6].



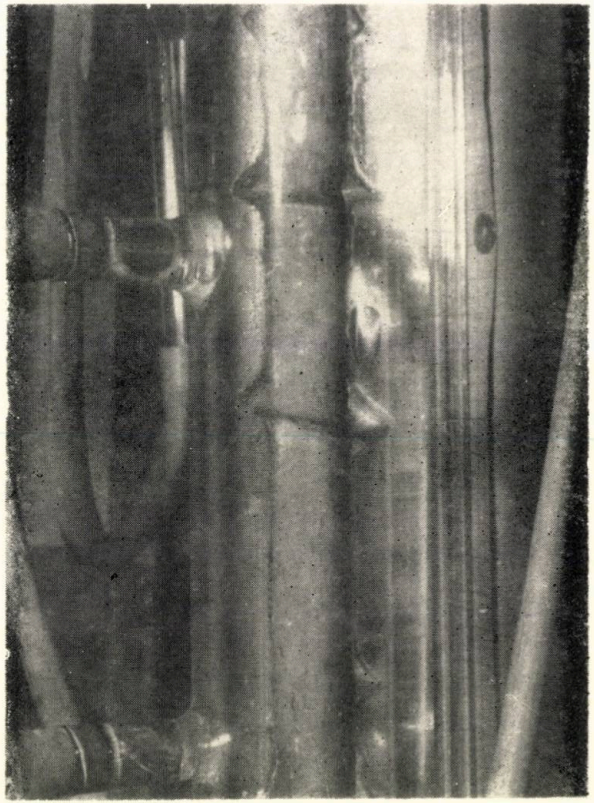
a)

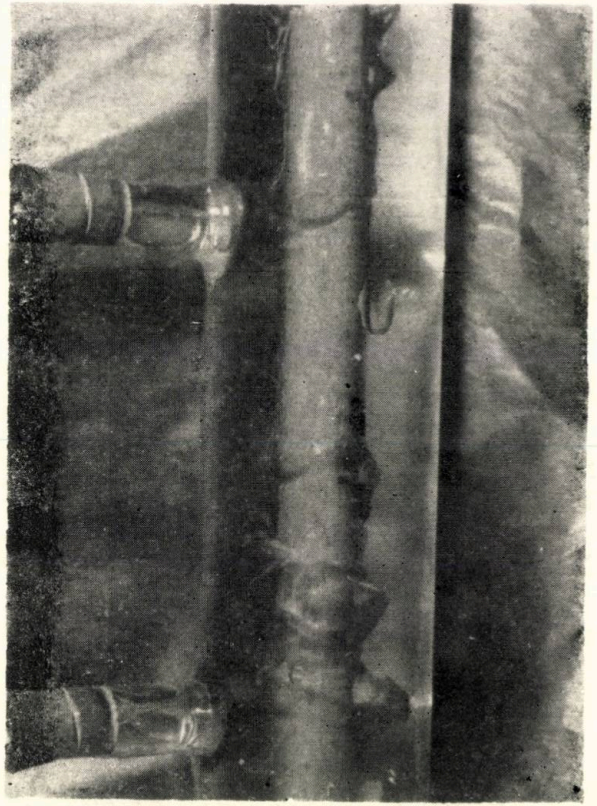


b)

Fig. 8 — Curgerea peliculară cu valuri, $U_D = 637$ kg/mh : *a* — capătul superior, *b* — capătul inferior.

a)





b)

Fig. 9 — Curgerea peliculară cu valuri inelare : *a* — valuri inelare regulate, $U_D = 868$ kg/mh ; *b* — valuri inelare neregulate, $U_D = 1156$ kg/mh.

În ceea ce priveşte lungimea valurilor, din observaţiile noastre considerăm că se poate vorbi numai despre o lungime medie. Lungimea valurilor se modifică în direcţia curgerii, iar la debite mari valurile apar foarte neregulate, sub formă de ansambluri. După Kasimov şi Zigmund lungimea valurilor este proporţională cu $(\mathcal{R}e)^{1/9}\,\tau^{1/3}\,\nu^{2/9}$, mărime care nu conţine distanţa de la nivelul de formare a peliculei.

Frecvenţa valurilor variază în direcţia de curgere, cu distanţa de la perete şi cu debitul de lichid. În apropierea peretelui, funcţie de distanţă, frecvenţa creşte brusc, atinge o valoare maximă şi apoi scade (fig. 4...6). Profilul frecvenţei, în lungul peliculei, este acelaşi, dar valoarea este diferită.

În limitele debitelor cu care s-a experimentat se constată că la distanţa de 110 mm de capătul de formare a peliculei, frecvenţa maximă a valurilor variază între 2,5 şi 8,7 Hz, iar la distanţa de 510 mm, între 3 şi 3,6 Hz. Rezultă că şi în cazul frecvenţei există o tendinţă de stabilizare şi uniformizare. În direcţia de curgere frecvenţa tinde să devină independentă de debit.

Rezultatele experimentale privitoare la dependenţa frecvenţei valurilor de distanţa de la perete concordă cu rezultatele experimentale ale lui Brauer [5], obţinute cu sistemul lichid-gaz. Frecvenţa valurilor, la curgerea peliculară în vecinătatea unei faze lichide, scade de cîteva ori.

5. Concluzii

Din cercetarea experimentală a curgerii peliculare cu valuri în vecinătatea unei faze lichide, rezultă următoarele:

1. Frecvenţa valurilor variază în lungul peliculei, cu distanţa de la perete şi cu debitul de lichid; funcţie de distanţă frecvenţa prezintă un maxim.

2. Grosimea minimă a filmului rămîne constantă în direcţia de curgere şi este aproximativ independentă de debitul de lichid; în comparaţie cu sistemul lichid-gaz, la sistemul lichid-lichid grosimea minimă creşte de cca. 4 ori.

3. Amplitudinea valurilor creşte în direcţia curgerii.

4. Grosimea medie a peliculei şi frecvenţa valurilor tinde spre stabilizare în direcţia de curgere.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de tehnologie chimică,
Laboratorul de operaţii şi utilaje
în industria chimică

BIBLIOGRAFIE

1. Nusselt W., VDI, 1916, Z. **60**, S. 549.
2. Семенов П. А., ЖТФ., 1944, **14**, стр. 427.
3. Feind K., VDI - Forschungsheft, 1960, S. 481

4. Капица П. Л., ЖЕТФ, 1948, **18**, стр. 19.
5. Brauer H., VDI - Forschungsheft, 1956, S. 457.
6. Касимов В. С., Зигмунд Ф. Ф., Инж. Физ. Ж., АН БССР, 1963, *6* (*11*), стр. 70.

ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ПРОЦЕССЫ МЕЖДУ НЕСМЕШИВАЮЩИМИСЯ ЖИДКОСТЯМИ

(I) Гидродинамика пленочного течения

(Резюме)

Из экспериментально произведенных исследований волнового пленочного течения по близости жидкой фазы, выводятся следующие заключения.

1. Частота волны изменяется вдоль пленки в зависимости от расстояния до стенки и от дебита жидкости; в связи с расстоянием частота допускает максимум.

2. Минимальная толщина пленки остается постоянной по направлению течения и является почти независима от дебита жидкости; сравнительно с системой жидкость-газ, минимальная толщина системы жидкость-жидкость возрастает, приблизитетьно, в 4 раза.

3. Амплитуда волн возратает по направлению течения.

Обяснение рисунков

Рис. 1. — Схема аппарата.
Рис. 2. — Схема установки для определения частоты волн.
Рис. 3. — Схематическое сечение пленки жидкости.
Рис. 4. — Изменения частоты волн в зависимости от расстояния до стенки; $h=360$ mm.
Рис. 5. — Изменения частоты волн в зависимости от расстояния до стенки; $h=310$ mm.
Рис. 6. — Изменения частоты волн в зависимости от расстояния до стенки; $h=510$ mm.
Рис. 7. — Изменения частоты волн вдоль пленки в зависимости от расстояния до стенки.
Рис. 8. — Пленочное волновое течение, $U_D = 637$ kg/mh: *а* — верхний конец; *б* — нижний конец.
Рис. 9. — Пленочное течение с кольцеобразными волнами: *а* — кольцеобразные регулярные волны, $U_D=868$ kg/mh; *б* — кольцеобразные нерегулярные волны, $U_D=1156$ kg/mh.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 547.794

OBŢINEREA UNOR DERIVAŢI AI 5-MERCAPTO-1, 2, 4-TRIAZOLULUI (II)

DE

ILIE MATEI
membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
şi
EUGENIA COMANIŢĂ

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

Într-o lucrare anterioară [1] s-a obţinut prin reacţia dintre hidrazidele unor acizi şi izosulfocianaţi o serie de 1-acil-tiosemicarbazide-4-substituite.

Continuînd cercetările în această direcţie, ne-am propus să efectuăm ciclizarea acil-tiosemicarbazidelor, pentru a le transforma în mercapto-triazoli-3,4-disubstituiţi. În acest scop am folosit metoda dată de Fromm şi Trnka [2], precum şi o metodă diferită elaborată de noi. Autorii amintiţi au reuşit să facă ciclizarea 1-benzoil-4-fenil-tiosemicarbazidei în prezenţă de NaOH diluat, obţinînd 3,4-difenil-5-mercapto-1,2,4-triazolul. M. Girard [3] aplică aceeaşi reacţie acetil-tiosemicarbazidei, fiind citat frecvent ca iniţiatorul ciclizărilor de acest tip.

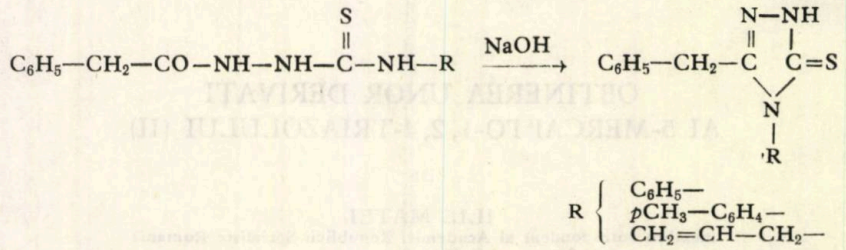
Metoda a fost utilizată şi de alţi cercetători, care constată că hidroxidul de sodiu poate fi înlocuit prin alţi agenţi de ciclizare alcalini ca metilatul şi etilatul de sodiu, unele baze organice, amoniacul şi chiar Na_2CO_3 [4]...[11]. Ciclizarea la mercapto-triazoli poate avea loc şi în prezenţă de HCl [12], în timp ce deshidratarea acidă cauzată de H_3PO_4 sau H_2SO_4 dirijează reacţia spre formarea tiadiazolilor.

Metoda de lucru pe care am aplicat-o la ciclizările noastre constă în următoarele: se tratează acil-tiosemicarbazida cu o cantitate de NaOH diluat (6 ml pentru 0,5 g produs neciclizat) şi se încălzeşte pe baie de apă, sub refrigerent cu reflux, circa 30 min. Se lasă să se răcească şi se acidulează cu HCl diluat, cînd precipită mercapto-triazolul; se filtrează spălînd produsul pe filtru cu apă.

2. Rezultatele cercetării

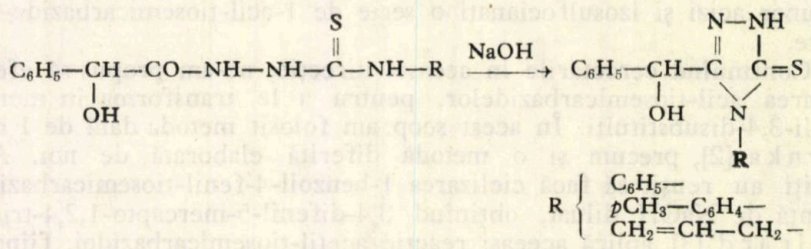
a) *Produşii obţinuţi*

Din *1-fenilacetil-tiosemicarbazidele-4-substituite* cu radicali fenil, *p*-tolil şi alil, am obţinut pe această cale următorii mercapto-triazoli:



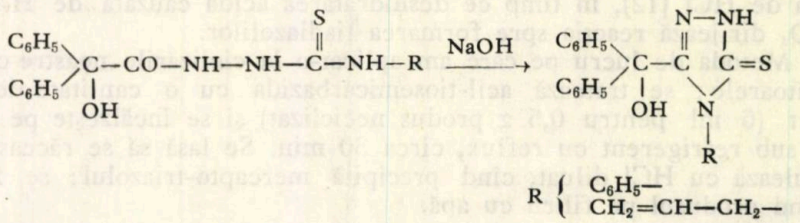
3-Benzil-4-fenil-5-mercapto-triazolul a mai fost preparat în urmă cu cîţiva ani, însă prin condensarea 4-fenil-tiosemicarbazidei cu fenilacetatul de etil în prezenţa alcoolatului de sodiu [13]. Acelaşi produs apare într-un patent alături de alţi compuşi cu structură asemănătoare, utilizaţi ca agenţi fotografici, fungicide, ierbicide şi bactericide [14].

Tiosemicarbazidele preparate cu ajutorul *hidrazidei acidului amigdalic*, ne-au condus la alţi trei derivaţi ai 5-mercapto-triazolului, cu radicalul benzil din poziţia 3 substituit cu o grupare OH:



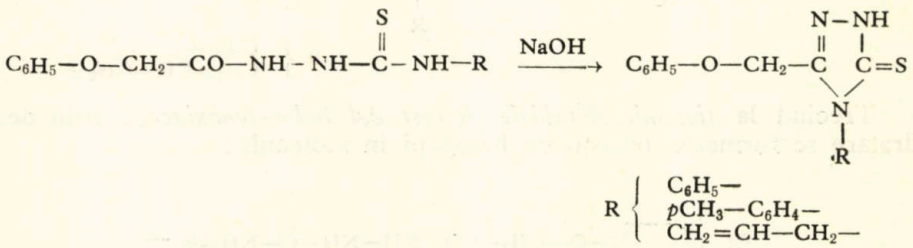
Produşii se obţin prin aceeaşi metodă, dar se purifică ceva mai greu din cauza unei inerţii la cristalizare.

Compuşi asemănători cu hidroxidul legat de un C terţiar se obţin din *tiosemicarbazidele-4-substituite*, derivate din *acidul benzilic* conform reacţiei:



Mercapto-triazoli cu structură asemănătoare nu se găsesc citați în literatură.

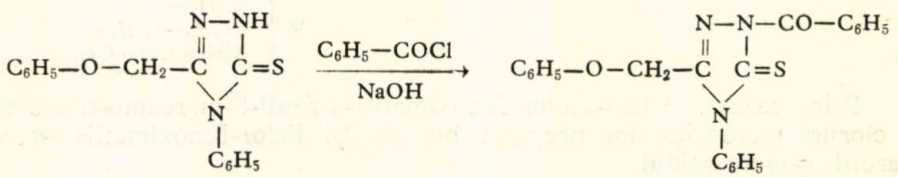
Trecînd la *ariloxi-acetil-tiosemicarbazide*, prin ciclizare în mediu alcalin, am obținut *mercapto-triazoli substituiți* în poziția 3 *cu un radical ariloxi-metil*. Astfel *1-fenoxiacetil-tiosemicarbazidele-4-substituite* prin tratare cu *NaOH diluat*, formează *3-fenoximetil-5-mercapto-1, 2, 4-triazoli-4-substituiți*:



Derivatul nesubstituit în poziția 4 a fost preparat din 1-fenoxiacetil-tiosemicarbazidă prin ciclizare în prezența metilatului de sodiu [6].

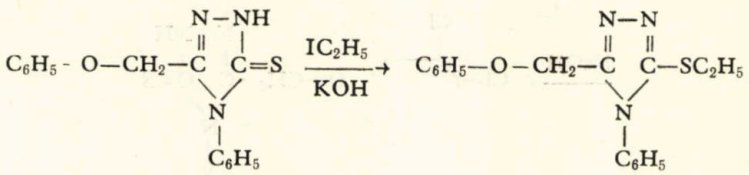
Bazîndu-ne pe unele reacții generale ale mercapto-triazolilor, am preparat și unii *derivați substituiți la N iminic sau la grupa SH.*

Prin tratarea 3-fenoximetil-4-fenil-5-mercapto-triazolului cu un exces de clorură de benzoil în mediu alcalin, am obținut 1-benzoil-3-fenoximetil-4-fenil-1, 2, 4-triazol-tiona-5 :



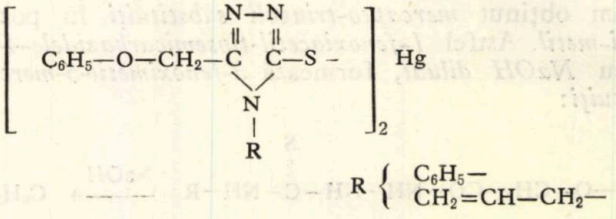
În mod analog din 3-fenoximetil-4-alil-5-mercapto-1, 2, 4,-triazol prin încălzire cu anhidridă acetică pe baie de apă, am sintetizat derivatul 1-acetilat.

Prin reacția cu iodură de etil în mediu de KOH alcoolic am preparat 3-fenoximetil-4-fenil-5-etilmercapto-1, 2, 4-triazolul :

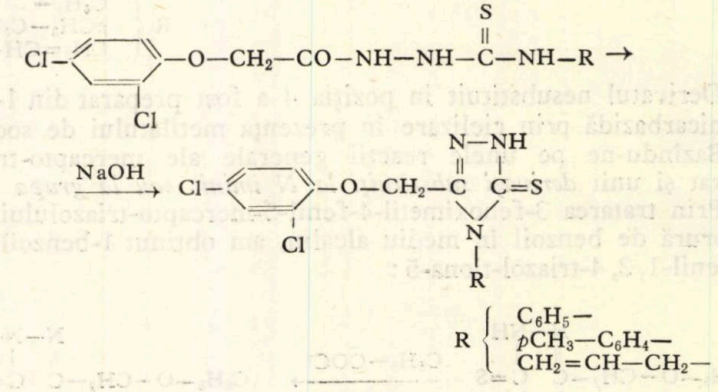


Formarea tioeterului determină molecula să reacționeze ca compus mercapto.

Tratarea 3-fenoximetil-5-mercapto-1, 2, 4-triazolilor-4-substituiţi cu clorură de mercur, ne-a condus la mercaptide cu următoarea structură:

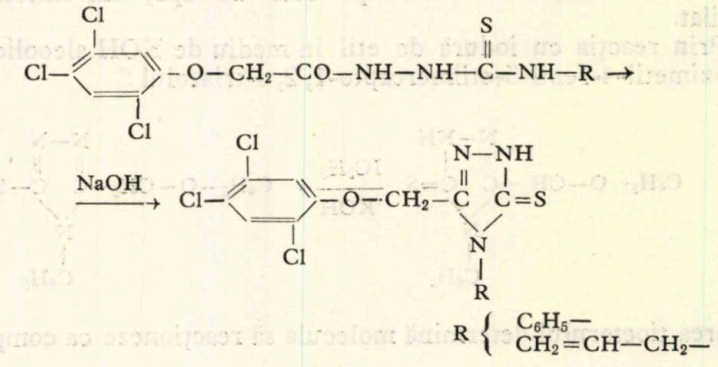


Trecînd la *tiosemicarbazidele cu rest 2,4-diclor-fenoxiacetic* prin deshidratare se formează triazoli cu halogeni în moleculă:

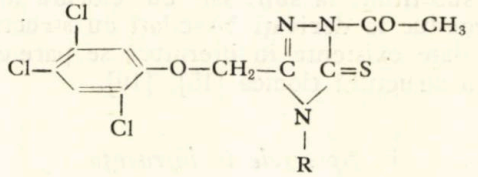


Prin reacţia 3-(2,4-diclor-fenoximetil)-4-fenil-5-mercapto-triazolului cu clorură mercurică am preparat bis [3-(2,4-diclor-fenoximetil)-4-fenil-triazolil-5]-mercaptidul.

Derivaţii ce conţin trei atomi de clor în moleculă au fost obţinuţi prin ciclizarea *1-(2, 4, 5-triclor-fenoxiacetil)-tiosemicarbazidelor-4-substituite:*

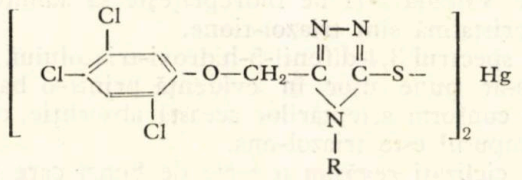


Din 3-(2, 4, 5-triclor-fenoximetil)-4-fenil(alil)-5-mercapto-1, 2, 4-triazol, prin încălzire cu anhidridă acetică pe baie de apă, am obținut derivați acetilați,

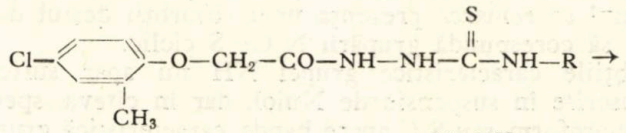


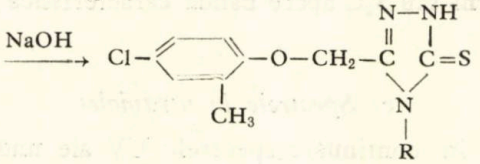
R { C_6H_5—
  CH_2=CH—HC_2—

iar prin tratare cu $HgCl_2$ s-au preparat mercaptide de forma:



Ultimii derivați din această serie i-am preparat prin intermediul *1-(2-metil-4-clor-fenoxiacetil)-tiosemicarbazidelor*, după reacția:





R { C_6H_5—
  pCH_3—C_6—H_4—
  CH_2=CH—CH_2—

Mercapto-triazolii preparați sînt substanțe albe, frumos cristalizate, greu solubile în apă și în majoritatea solvenților nepolari. Sînt solubili în CH_3OH și C_2H_5OH, din care aproape toți se pot purifica. Punctele de topire ale derivaților substituiți în poziția 4 cu radicali aril sînt superioare celor care conțin radicalul alil. De asemenea solubilitatea în alcool a compușilor aril-substituiți este mai mică decît a celor alilici.

Mercapto-triazolii conţinînd în moleculă gruparea $-\overset{\overset{S}{\|}}{C}-NH-$ prezintă o dublă reactivitate: cu sărurile metalelor grele sau cu iodura de etil formează compuşi substituiţi la sulf, iar cu clorura de benzoil sau cu anhidrida acetică conduc la derivaţi N-acilaţi cu structură tionică.

Din puţinele date existente în literatură se pare că mercapto-triazolii au în stare solidă o structură tionică [15], [16].

b) *Spectrele în infraroşu*

Analizînd spectrele înscrise la *mercapto-triazolii preparaţi de noi*, se constată că banda corespunzătoare carbonilului amidic din tiosemicarbazidele de plecare [1] a dispărut, ca dovadă că ciclizarea a avut loc. Vibraţia caracteristică grupei C=S este greu de stabilit şi în acest caz, dar prezenţa vibraţiei de valenţă NH ne îndreptăţeşte să admitem că mercapto-triazolii în stare cristalină sînt triazol-tione.

De altfel în spectrul 3,4-difenil-5-hidroxi-triazolului, în care existenţa formei amidice s-ar pune uşor în evidenţă printr-o bandă în jurul lui 1 700 cm^{-1}, apare conform aşteptărilor această absorbţie, ceea ce dovedeşte că în realitate compusul este triazol-onă.

În compuşii ciclizaţi regăsim o serie de benzi care erau prezente şi în spectrele tiosemicarbazidelor. Astfel banda din intervalul 1 280...1 300 cm^{-1} poate fi considerată ca bandă amid III, care după unii autori s-ar datora vibraţiei C—N. Banda amid II reapare în domeniul 1 555...1 590 cm^{-1}, fiind de intensitate medie sau chiar puternică. În jurul frecvenţei de 1 460 cm^{-1} se remarcă prezenţa unei absorbţii destul de intense, care este posibil să corespundă grupării $N_2C=S$ ciclic.

Absorbţiile caracteristice grupei NH nu apar suficient de clar la spectrele înscrise în suspensie de Nujol, dar în cîteva spectre făcute în soluţie de cloroform sau S_2C apare banda caracteristică grupării NH liberă la 3 445 cm^{-1}.

c) *Spectrele în utraviolet*

Am cercetat în continuare spectrele UV ale unor *mercapto-triazoli*, precum şi spectrul unei *triazolone*.

Se cunoaşte că 1, 2, 4-triazolul ca atare manifestă o slabă absorbţie la 205 mμ ($\varepsilon=200$). Derivaţii săi alchilaţi prezintă de asemenea benzi sub 215 mμ [17]. Introducerea unui radical fenil provoacă însă deplasări batocrome, care se deosebesc după poziţia în care se află substituentul.

În spectrele 3-benzil-4-alil-, 3-(oxi-fenilmetil)-4-fenil- şi 3-(oxi-difenilmetil)-4-fenil- sau 4-alil-5-mercapto-triazolilor, substanţe sintetizate de noi, se constată prezenţa unei benzi intense de absorbţie în intervalul 256...260 mμ. Deplasarea batocromă care are loc în comparaţie cu nucleul triazolic nesubstituit, poate fi pusă în legătură cu grupa C=S, care prin

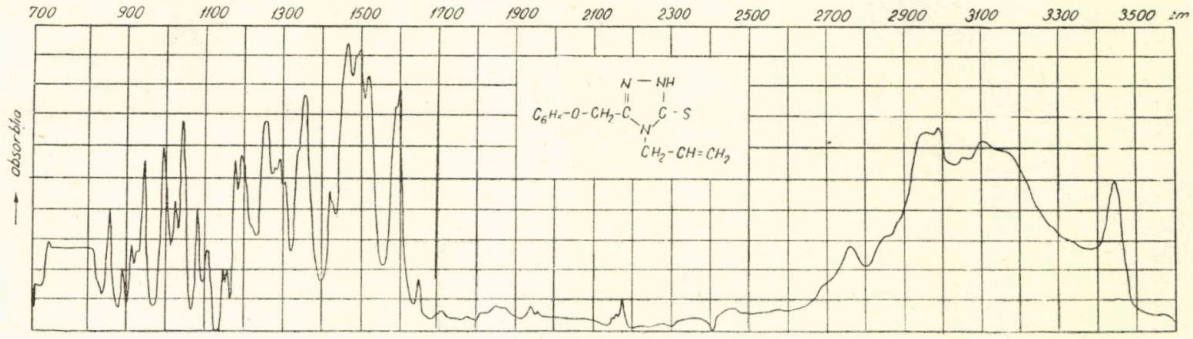


Fig. 1. — Spectrul IR al 3-fenoximetil-4-alil-5-mercapto-1, 2, 4-triazolului ($CHCl_3$).

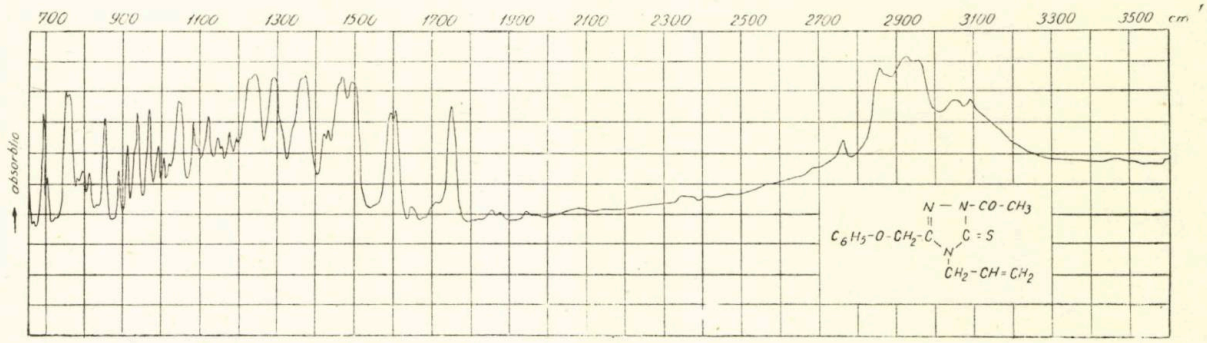


Fig. 2. — Spectrul IR al 1-acetil-3-fenoximetil-4-alil-1, 2, 4-triazol-tionei-5.

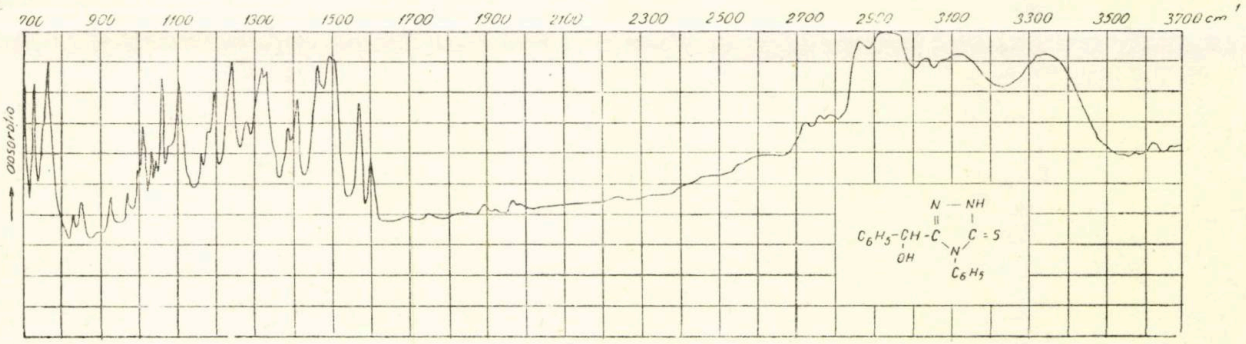


Fig. 3. — Spectrul IR al 3-(oxi-benzil)-4-fenil-5-mercapto-1, 2, 4-triazolului.

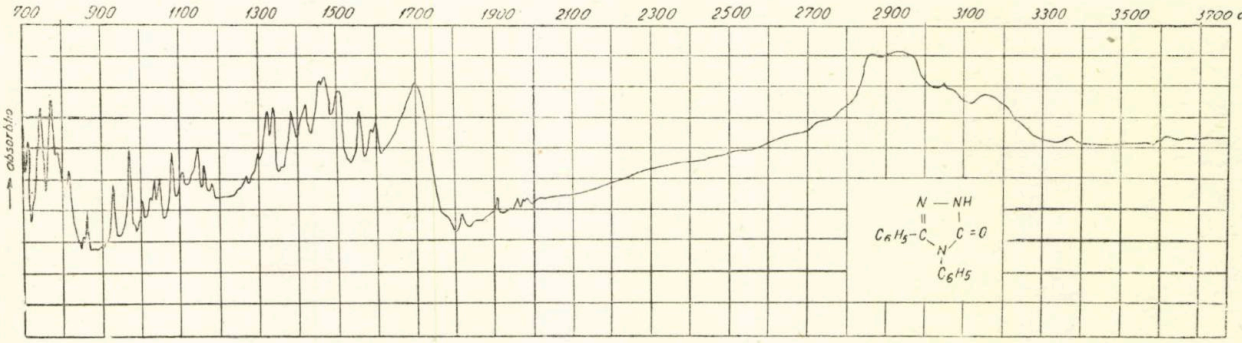


Fig. 4. — Spectrul IR al 3,4-difenil-1, 2, 4 - triazol-onei-5.

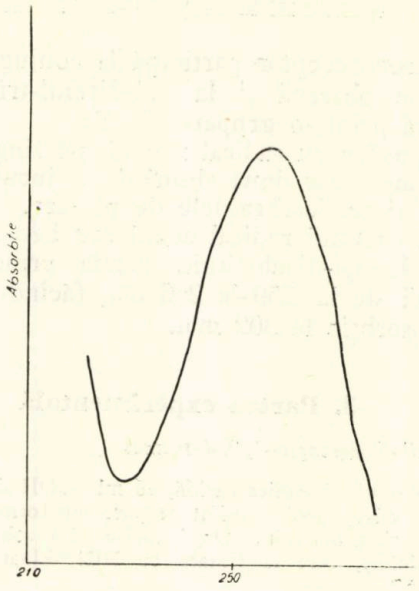


Fig. 5. — Spectrul UV al 3-fenoximetil-4-alil-5-mercapto-1, 2, 4-triazolului.

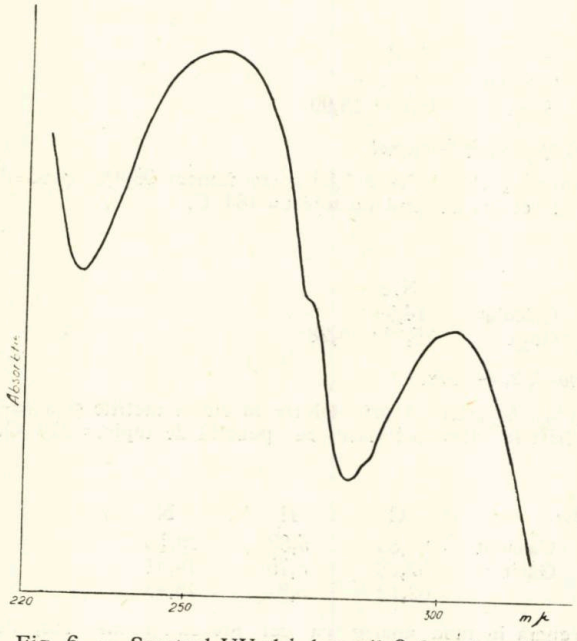


Fig. 6. — Spectrul UV al 1-benzoil-3-fenoximetil-4-fenil-1, 2, 4-triazol-tionei-5.

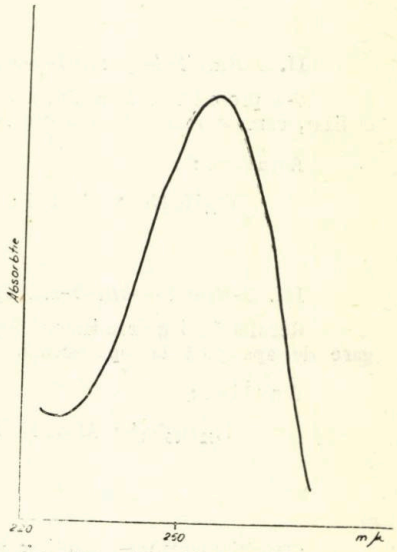


Fig. 7. — Spectrul UV al 3-benzil-4-alil-5-mercapto-1, 2, 4-triazolului.

caracterul său electronoacceptor participă la conjugare cu ciclul triazolic. Aceeaşi absorbţie se observă şi la 3,4-difenil-triazolonă, în care grupa tionică este înlocuită printr-o grupare C=O.

În cazul compuşilor cu radical fenoxi, pe lîngă banda principală de la aproximativ 260 mμ, apar două absorbţii în jurul lui 268 şi 275 mμ, care se găsesc şi în tiosemicarbazidele de plecare.

Prin introducerea unui radical acetil sau benzoil în poziţia 1 a nucleului mercapto-triazolic-3,4-disubstituit, banda principală suferă o uşoară deplasare hipsocromă de la 259 la 256 mμ, făcîndu-şi apariţia simultan o bandă intensă de absorbţie la 302 mμ.

3. Partea experimentală

I. *3-Benzil-4-fenil-5-mercapto-1, 2, 4-triazol*

2 g 1-fenilacetil-4-fenil-tiosemicarbazidă, 25 ml NaOH diluat; la adăugarea hidroxidului tiosemicarbazida se solvă, apoi imediat reapare sub formă de mercaptid de sodiu. Se încălzeşte pe baie de apă circa 30 min. După răcire, din soluţie se separă cristale aciculare (mercaptidul triazolului), care la tratare cu HCl diluat pun în libertate mercaptotriazolul.

S-au obţinut 1,9 g (randament 95%). Se recristalizează din alcool etilic. Produsu are punctul de topire = 199...200 °C ca şi substanţa obţinută prin condensarea 4-fenil-tiosemicarbazidei cu fenilacetatul de etil [13].

Analize:

$C_{15}H_{13}N_3S$; M=267;

	N%
Calculat	15,73
Găsit	16,05; 15,99

II. *3-Benzil-4-(p-tolil)-5-mercapto-1, 2, 4-triazol*

S-a procedat ca la compusul anterior, obţinîndu-se 1,85 g (randament 98,9%) produsl ciclizat, care se recristalizează din alcool etilic. Punctul de topire=184 °C.

Analize:

$C_{16}H_{15}N_3S$; M=281;

	N%
Calculat	14,94
Găsit	15,17; 15,28

III. *3-Benzil-4-alil-5-mercapto-1, 2, 4-triazol*

Rezultă 1,75 g (randament 95,1%). Se purifică prin solvire în alcool metilic şi adăugare de apă pînă la opalescenţă. Cristale albe, aciculare cu punctul de topire=128 °C.

Analize:

$C_{12}H_{13}N_3S$; M=231 (2);

	C	H	N
Calculat	62,33	5,62	18,18
Găsit	62,08	5,75	18,31
	62,12	5,81	18,45

Ceilalţi mercapto-triazoli se prepară în mod analog cu cei prezentaţi mai sus, de aceea pentru caracterizarea produşilor dăm în tabelul 1 punctele de topire şi rezultatul analizelor.

Tabelul 1

	Produsul	Solvent recristalizare	Punct de topire °C	Analize		
				C	H	N
IV	3-Fenoximetil-4-fenil-5-mercapto-1, 2, 4-triazol	CH_3OH + apă	164	63,60 63,34	4,59 4,85	14,81 14,84
V	3-Fenoximetil-4(p-tolil)-5-mercapto-1, 2, 4-triazol	C_2H_5OH	166	—	—	14,14 14,29
VI	3-Fenoximezil-4-alil-5-mercapto-1, 2, 4-triazol	CH_3OH + apă	122	58,29 58,16	5,26 5,39	17 17,16
VII	3-(2, 4-Diclor-fenoximetil)-4-fenil-5-mercapto-1, 2, 4-triazol	CH_3OH	187	51,10 50,99	3,12 3,31	11,93 12,11
VIII	3-(2,4-Diclor-fenoximetil)-4-p-tolil-5-mercapto-1, 2, 4-triazol	C_2H_5OH	191			11,47 11,24
IX	3-(2, 4-Diclor-fenoximetil)-4-alil-5-mercapto-1, 2, 4-triazol	CH_3OH	132	45,57 45,66	3,48 3,54	13,29 13,46
X	3-(2, 4, 5-Triclor-fenoximetil)-4-fenil-5-mercapto-1, 2, 4-triazol	C_2H_5OH	211	46,57 46,76	2,58 2,83	10,86 10,98
XI	3-(2, 4, 5-Triclor-fenoximetil)-4-alil-5-mercapto-1, 2, 4-triazol	CH_3OH + apă	133	41,08 40,88	2,85 2,99	11,98 12,25
XII	3-(2-Metil-4-clor-fenoximetil)-4-fenil-5-mercapto-1, 2, 4-triazol	C_2H_5OH	163	57,91 57,79	4,22 4,38	12,66 12,84
XIII	3-(2-Metil-4-clor-fenoximetil)-4-p-tolil-5-mercapto-1, 2, 4,-triazol	C_2H_5OH	179			12,15 12,25
XIV	3-(2-Metil-4-clor-fenoximetil)-4-alil-5-mercapto-1, 2, 4-triazol	C_2H_5OH + apă	112	52,79 52,81	4,73 4,98	14,21 14,43
XV	3-(Oxi-benzil)-4-fenil-5-mercapto-1, 2, 4-triazol	CH_3OH + apă	199	63,60 63,43	4,59 4,28	14,84 15,12
XVI	3-(Oxi-benzil)-4-p-tolil-5-mercapto-1, 2, 4-triazol	C_2H_5OH + apă	146			14,14 14,40
XVII	3-(Oxi-benzil)-4-alil-5-mercapto-1, 2, 4-triazol	CH_3OH + apă	109	58,29 58,04	5,26 5,09	17,00 17,23
XVIII	3-(Oxi-difenilmetil)-4-fenil-5-mercapto-1, 2, 4-triazol	CH_3OH + apă	197	70,19 70,11	4,73 4,97	11,69 11,82
XIX	3-(Oxi-difenilmetil)-4-alil-5-mercapto-1, 2, 4-triazol	CH_3OH + apă	188	66,87 66,59	5,26 5,43	13,00 13,28

Derivați de 5-mercapto-triazol-N- sau S-substituiți

XX. *1-Benzoil-3-fenoximetil-4-fenil-1, 2, 4-triazol-tion-5*

1 g 3-fenoximetil-4-fenil-5-mercapto-1, 2, 4-triazol se tratează cu circa 50 ml NaOH. Se separă imediat mercaptidul, peste care se adaugă 0,75 g clorură de benzoil (1,5 moli). Se agită energic, apoi se lasă cîtva timp în repaus. Se recristalizează din alcool etilic. Punct de topire = 127 °C.

Analize:

$C_{22}H_{17}N_3O_2S$; $M = 387$; N%

Calculat 10,85

Găsit 10,95; 11,12

XXI. *1-Acetil-3-fenoximetil-4-alil-1, 2, 4-triazol-tion-5*

1 g 3-fenoximetil-4-alil-5-mercapto-1, 2, 4-triazol se tratează cu 5 ml anhidridă acetică și se încălzește pe baie de apă. La soluția obținută se adaugă puțină apă, cînd se se-

pară un produs uleios, care la frecare cu bagheta cristalizează. Se purifică din alcool diluat. Punct de topire=95 °C.

Analize:

$C_{14}H_{15}N_3O_2S$; M=289;

	C	H	N
Calculat	58,13	5,19	14,53
Găsit	58,19	5,36	14,66
	58,26	5,48	14,29.

XXII. *Bis-(3-fenoximetil-4-alil-1, 2, 4-triazolil-5)-mercaptid*

0,5 g 3-fenoximetil-4-alil-5-mercapto-1, 2, 4-triazol, solvit în alcool, se amestecă cu o soluţie alcoolică de $HgCl_2$ (0,27 g). Se încălzeşte uşor pe baie de apă iar precipitatul format se filtrează şi se spală în repetate rînduri cu alcool etilic cald. Produs cristalin cu punct de topire=146 °C.

Analize:

$(C_{12}H_{12}N_3OS)_2Hg$; M=692,6;

	N%
Calculat	12,12
Găsit	12,41; 12,27

XXIII. *3-Fenoximetil-4-fenil-5-etilmercapto-1, 2, 4-triazol*

Se tratează 3-fenoximetil-4-fenil-5-mercapto-triazolul cu cantitatea echivalentă de iodură de etil în prezenţă de KOH alcoolic. După o încălzire de 1/2 oră se lasă să se răcească şi prin adăugare de puţină apă precipită un produs cristalin lucios. Se recristalizează din alcool diluat. Punct de topire=90 °C.

Analize:

$C_{17}H_{17}N_3OS$; M=311;

	N%
Calculat	13,50
Găsit	13,81; 13,93

Restul produşilor sînt prezentaţi în tabelul 2.

Tabelul 2

	Produsul	Solvent recristalizat	Punct de topire °C	N %
XXIV	Bis 3-(2, 4-diclor-fenoximetil)-4-fenil-1, 2, 4-triazolil-5-mercaptid	C_2H_5OH	197	9,30 9,61
XXV	1-Acetil-3-(2, 4, 5-triclor-fenoximetil)-4-fenil-1, 2, 4-triazol-tion-5	C_2H_5OH	144	9,80 10,04
XXVI	1-Acetil-3-(2, 4, 5-triclor-fenoximetil)-4-alil-1, 2, 4-triazol-tion-5	C_2H_5OH	162	10 70 10,92
XXVII	Bis-(2, 4, 5-triclor-fenoximetil)-4-fenil-1, 2, 4-triazolil-5-mercaptid	C_2H_5OH	20	8,64 8,93
XXVIII	Bis-3-(2, 4, 5-triclor-fenoximetil)-4-alil-1, 2, 4-triazolil-5-mercaptid	C_2H_5OH	170	9,33 9,55
XXIX	Bis 3-(2, 4, 5-triclor-fenoximetil)-4-fenil-1, 2, 4-triazolil-5-Pb mercaptid	C_2H_5OH	238	8,58 8,91
XXX	Bis (3-fenoximetil-4-fenil-1, 2, 4-triazolil-5-mercaptid	C_2H_5OH	190	10,98 11,25

4. Concluzii

S-a cercetat ciclizarea unor acil-tiosemicarbazide-4-substituite a căror preparare a fost descrisă în [1].

1) Aplicînd metoda de ciclizare cu alcali, acil-tiosemicarbazidele au fost transformate în mercapto-triazoli-3, 4-disubstituiţi.

2) Mercapto-triazolii conţinînd în moleculă gruparea $-\overset{\overset{S}{\|}}{C}-NH-$ prezintă o dublă reactivitate. S-au preparat derivaţi substituiţi la N_1 şi la S.

3) Structura compuşilor a fost studiată cu ajutorul spectrelor în IR şi UV[1]).

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de chimie organică

BIBLIOGRAFIE

1. Matei I., Comaniţă E., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *1—2*, pp. 189-198.
2. Fromm E., Trnka A., Liebigs Ann. Chem., 1924, *442*, S. 150.
3. Girard M., C. r. Ac. Sc. de Paris, 1947, **225**, p. 458.
4. Hoggarth E., J. Chem. Soc., 1949, p. 1 163.
5. Ainsworth C., Jones R. G., J. Amer. chem. Soc., 1953, **75**, p. 4 915.
6. — J. Amer. Chem. Soc., 1955, **77**, p. 621.
7. Jones R. G., Ainsworth C., J. Amer. Chem. Soc., 1955, **77**, p. 1 538.
8. Ainsworth C., Jones R. G., U. S. Pat., 2,710,296, 7 june 1955.
9. Schneider F., Schalg W., Z. Physiol. Chem., 1962, **74**, S. 327; Chem. Abstr., 1962, **57**, p. 5903.
10. Hoggarth E., J. Chem. Soc., 1949, p. 1 160.
11. Saikachi H, Kanaoka M., Yakugaku Zasshi, 1962, *82*, p. 683; Chem. Abstr., 1963, *58*, p. 4543.
12. Silberg A., Cosma N., St. şi Cerc. Chimie, Cluj, 1959, *1*, p. 155.
13. Pesson M., Polmanns G., Dupin S., C. r. Ac. Sc. Paris, 1959, **248**, p. 1 677.
14. Pesson M., Fr. 1,273,881, 2 fevrier 1962; Chem. Abstr., 1962, **57**, p. 9 860.
15. Постовский И., Верещагина Н., ЖОХ, 1956, *26*, стр. 2 583.
16. Мнджоян А. Африкиян В., Дохикян К., ИАН Арм. ССР, 1957, стр. 363.
17. Atkinson M. R., Parkes E. A., Polya J. B., J. Chem. Soc., 1954, p. 3 319.

SUR LA PRÉPARATION DE CERTAINS DÉRIVÉS DE 5-MERCAPTO-TRIAZOLE

(Résumé)

Le but principal de la recherche a été de cycliser certains acyl-thiosemicarbazides-4-substituées obtenus dan; [1].

1. En employant la méthode de cyclisation avec des alcalis, on a transformé les acyl-thiosemicarbazides en mercapto-triazoles-3, 4-disubstitués.

[1]) Spectrele IR şi UV au fost executate de M. Mocanu Paraschiv, cercetător la IFA-Bucureşti, I. Gabe, cercetător la Institutul de Chimie „P. Poni" al filialei din Iaşi a Academiei Republicii Socialiste România şi E. Harnagea, chimist la Combinatul chimic Borzeşti, cărora le exprimăm mulţumirile noastre.

2. Les mercapto-triazoles contenant dans leurs molécules le groupe $-\overset{\overset{S}{\|}}{C}-NH-$ sont susceptibles d'une double réactivité. On a préparé des dérivés substitués à l'atome d'azote et de soufre.

3. On a étudié la structure des composés obtenus à l'aide des spectres en IR et UV.

Explication des figures

Fig. 1. — Spèctre IR de 3-phénoxyméthyl-4-allyl-5-mercapto-1, 2, 4-triazole ($CHCl_3$).
Fig. 2. — Spèctre IR de 1-acetyl-3-phénoxyméthyl-4-allyl-1, 2, 4-triazole-thione-5.
Fig. 3. — Spèctre IR de 3-(oxy-benzyle)-4-phényl-5-mercapto-1, 2, 4-triazole.
Fig. 4. — Spèctre IR de 3, 4-diphényl-1, 2, 4-triazole-one-5.
Fig. 5. — Spèctre UV de 3-phénoxyméthyl-4-allyl-5-mercapto-1, 2, 4-triazole.
Fig. 6. — Spèctre UV de 1-benzoyl-3-phénoxyméthyl-4-phényl-1, 2,4-triazole-thione-5.
Fig. 7. — Spèctre UV de 3-benzyl-4-allil-5-mercapto-1, 2, 4-triazole.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 547.678.2

CONDENSAREA 4,5-DINITROACENAFTENCHINONEI CU DIMETIL ŞI DIETILANILINĂ, PRODUŞI DE REDUCERE ŞI COLORANŢI

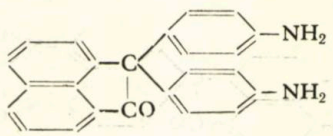
DE

ILIE MATEI,
membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
SILVIA VASILIU şi MARIANA PĂSTRĂVANU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

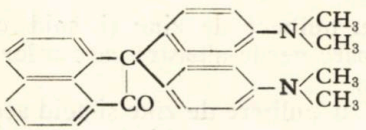
1. Introducere

În literatură se indică reacţia de condensare a acenaftenchinonei cu anilina [1] cu formare de acenaftenonă de tipul bis-(amino-4'-fenil)-acenaftenonă:

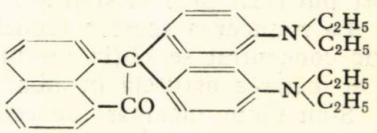


I

Într-o comunicare anterioară I. Matei [2] a studiat reacţia de condensare a acenaftenchinonei cu dimetil şi dietilanilină obţinînd bis-(dimetilamino-4'-fenil)-acenaftenonă (II) şi bis-(dietilamino-4'-fenil)-acenaftenonă (III).



II

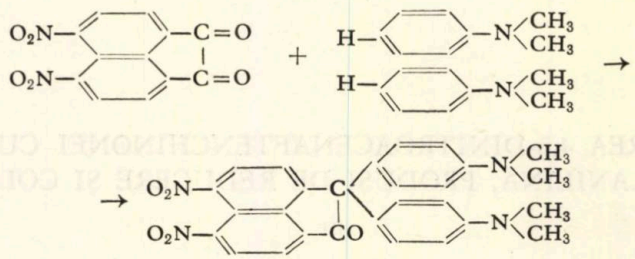


III

În lucrarea de faţă se studiază reacţiile de condensare a derivaţilor nitrici ai acenaftenchinonei cu dimetil şi dietilanilină.

2. Rezultatele cercetării

4,5-dinitroacenaftenchinona a fost preparată prin nitrarea acenaftenchinonei conform datelor din literatură [3]; 4,5-dinitroacenaftenchinona se condensează cu dimetilanilina în acid acetic glacial la cald, conform reacţiei

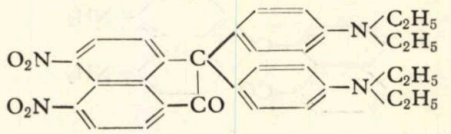


IV

Prin precipitare cu alcool s-a obţinut un produs de culoare roş închis, care se purifică din cloroform cu alcool etilic, rezultînd un produs cristalin colorat în bordeaux. Produsul este solubil în acetonă, cloroform, benzen şi acid acetic. Este insolubil în alcool metilic, alcool etilic şi eter etilic.

Conform datelor analizei produsul este *bis-(dimetilamino-4'-fenil)-4,5-dinitroacenaftenonă* (IV).

În condiţii similare 4,5 dinitroacenaftenchinona se condensează cu dietilanilina, conducînd la un produs de forma (V) care după purificare şi analiză corespunde la *bis-(dietil-amino-4'-fenil)-4,5-dinitroacenaftenonă*



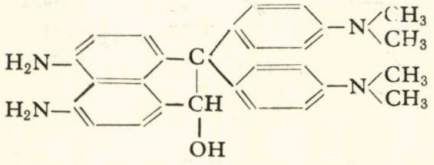
V

Produsul este solubil în benzen, toluen, acid acetic, cloroform, acetonă şi insolubil în eter etilic, alcool etilic, alcool metilic. Pentru analiză a fost purificat prin cristalizare din benzen.

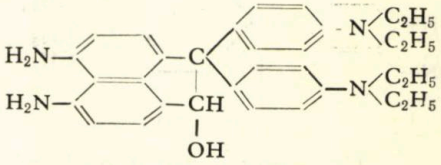
La reducerea acestor acenaftenone cu pulbere de zinc şi acid clorhidric concentrat se obţin produşi de culoare verde-albastră care colorează lîna şi mătasea naturală în albastru verzui.

S-au făcut încercări de reducere şi cu pulbere de zinc şi acid acetic. În acest caz s-a observat după încetarea reducerii o schimbare a culorii mediului de reacţie în prezenţa aerului de la brun roşcat la verde, ca şi în alte cazuri analoge [2] (reducerea produselor de condensare a acenaftenchinonei cu dimetil şi dietilanilină).

Presupunem că produsele de reducere în contact cu aerul suferă un proces de autooxidare. Iată şi interpretarea procesului: la reducerea dinitroacenaftenonelor se obţin acenaftenoli aminaţi *bis-(dimetilamino-4'-fenil)-4,5-diaminoacenaftenol* (VI) şi *bis-(dietilamino-4'-fenil)-4,5-diaminoacenaftenol* (VII)

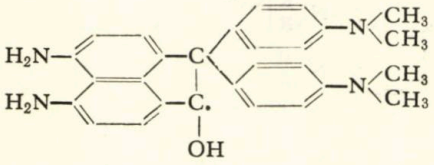


VI

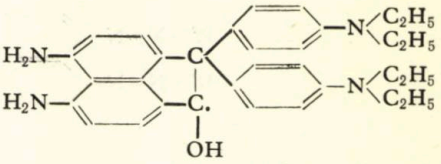


VII

Prin autooxidare acenaftenolii respectivi trec în radicalii liberi (VIII) şi (IX):

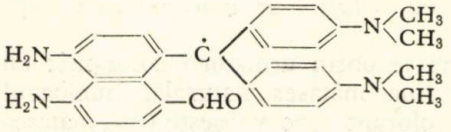


VIII

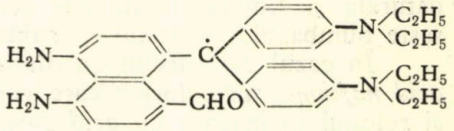


IX

Prin transfer de electroni la atomul de carbon vecin se obţin radicalii mai stabili (X) şi (XI) derivaţi de triaril metil şi anume: *bis-(dialchilamino-4'-fenil)-8-formil-4,5-diaminonaftil-1-metil:*

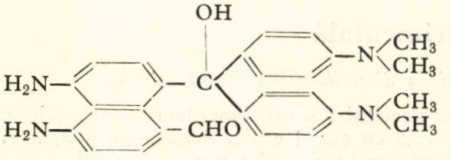


X

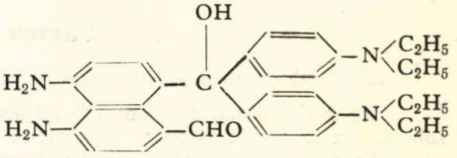


XI

Aceşti radicali pot apoi să se autooxideze trecînd în baze carbinolice de triaril metan: *bis-(dialchilamino-4'-fenil)-8-formil-4,5-diaminonaftil carbinol* (XII), (XIII):

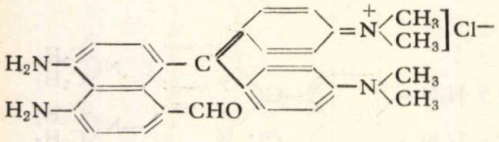


XII

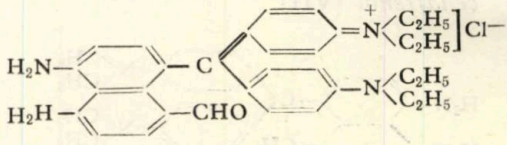


XIII

Cu acidul clorhidric din mediul de reacţie, bazele carbinolice trec apoi în coloranţi de tipul coloranţilor de triaril metan din clasa fuxinei. În baza analizelor aceşti coloranţi corespund formulelor (XIV) şi (XV):



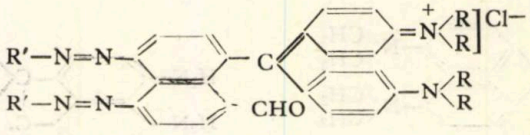
XIV



XV

Cu produşii astfel obţinuţi s-au făcut vopsiri pentru a pune în evidenţă caracterul de coloranţi de triaril metan.

Produşii XIV şi XV avînd două grupe aminice conduc prin diazotare şi cuplare la coloranţi bisazoici substantivi de tipul



XVI

$R = CH_3$, C_2H_5; R' = componenta de cuplare (acid naftionic, acid gama, acid H, β-naftol).

Produsul cu dietilanilină dă: cu *acid naftionic* un colorant care vopseşte lîna şi mătasea naturală în bordeaux, iar relonul şi bumbacul în roş; cu *acid gama* un colorant care vopseşte în mov lîna, mătasea naturală, bumbacul şi relonul; cu *acid H* un colorant care vopseşte lîna, mătasea naturală şi bumbacul în mov deschis; cu *β-naftol* un colorant care vopseşte bumbacul şi relonul în kaki.

În cazul derivatului cu dietilanilină se obţin următorii coloranţi: cu *acid naftionic* un colorant care vopseşte lîna, mătasea naturală, bumbacul şi relonul în maron; cu *acid gama* un colorant care vopseşte lîna, mătasea naturală, bumbacul şi relonul în mov; cu *acid H* un colorant care vopseşte în mov deschis lîna, mătasea naturală, relonul şi bumbacul.

Coloranţii obţinuţi sînt substanţe amorfe; au fost purificaţi prin solviri repetate în apă şi precipitări prin schimbarea pH-ului cu acid clorhidric.

3. Partea experimentală

a) *Condensarea 4,5-dinitroacenaftenchinonei cu dimetilanilină* (produsul IV)

2 g dinitroacenaftenchinonă, 10 ml acid acetic glacial şi 2,4 ml dimetilanilină se încălzesc sub reflux timp de 3 ore; după răcire se precipită cu alcool etilic. Randament = 2,42 g.

Se purifică prin solvire în cloroform şi cristalizează prin adăugare de alcool etilic. Randament în produsul pur = 1,8 g; punct de topire 267 °C.

Produsul este de culoare bordeaux şi frumos cristalizat. Este solubil la rece în acetonă şi cloroform; la cald se solvă în benzen şi acid acetic. În eter etilic şi alcool este foarte puţin solubil.

Analize:

$C_{28}H_{24}O_5N_4$; $M = 496$	C	H	N
Calculat	67,74	4,83	11,29
Găsit	67,07	5,13	11,46
	67,44	4,98	11,57

b) *Condensarea 4,5-dinitroacenaftenchinonei cu dietil anilină* (produsul V)

2 g dinitroacenaftenchinonă, 10 ml acid acetic glacial şi 2,5 ml dietilanilină se încălzesc sub reflux timp de 2 ore; după răcire se precipită cu alcool etilic. Randament = 3,25 g.

S-a purificat prin cristalizare din benzen. Randamentul în produsul pur = 2 g; punct de topire = 240,5 °C.

Produsul este de culoare bordeaux şi frumos cristalizat. Este solubil la rece în cloroform, acetonă iar la cald în benzen, toluen, tetraclorură de carbon; e puţin solubil în eter etilic, alcool etilic, alcool metilic.

Analize:

$C_{32}H_{32}O_5N_4$; $M = 552$	C	H	N
Calculat	69,56	5,79	10,14
Găsit	69,67	6,17	10,35
	69,39	6,11	10,51

c) *Reducerea bis-(dimetilamino-4'-fenil)-4,5-dinitroacenaftenonei* (produsul XIV)

3 g bis-(dimetilamino-4'-fenil)-4,5-dinitroacenaftenonă se solvă la cald în 60 ml acid clorhidric concentrat şi se adaugă cîte puţin 6 g zinc pulbere, timp de $1^1/_2$ oră. Se lasă să se răcească, se filtrează, se precipită cu apă şi se filtrează din nou. Din soluţia obţinută se precipită amina cu hidroxid de sodiu diluat.

S-a purificat prin solviri repetate la început în acid clorhidric concentrat şi apoi în acid clorhidric diluat şi precipitări cu hidroxid de sodiu diluat. S-a efectuat apoi purificarea prin solviri repetate în cloroform şi precipitare cu eter etilic.

Produsul este amorf, de culoare albastru închis. Este solubil în cloroform, acetonă, clorură de metilen şi insolubil în eter etilic, alcool etilic, sulfură de carbon, tetraclorură de carbon. Punct de topire = 273 °C.

Analize:

$C_{28}H_{29}O_1N_4Cl_1$; $M = 472,5$	C	H	N
Calculat	71,11	6,13	11,85
Găsit	70,97	5,84	11,34
	71,57	6,47	11,01

d) *Reducerea bis-(dietilamino-4'-fenil)-4,5-dinitroacenaftenonei* (produsul XV)

Reducerea şi purificarea s-au făcut în aceleaşi condiţii cu reducerea şi purificarea bis-(dimetilamino-4'-fenil)-4,5-dinitroacenaftenonei. Randament în produsul pur = 1,7 g.

Produsul este amorf, de culoare albastru închis. Este solubil în cloroform, acetonă, clorură de metilen şi insolubil în alcool metilic, alcool etilic, eter etilic, tetraclorură de carbon, sulfură de carbon. Punct de topire = 210 °C.

Analize:

$C_{32}H_{37}O_1N_4Cl_1$; $M = 528,5$	C	H	N
Calculat	72,67	7,00	10,59
Găsit	72,55	7,08	10,82
	72,28	6,77	11,29

4. Concluzii

a) S-au preparat acenaftenone prin condensarea 4,5-dinitroacenaftenchinonei cu dimetil şi dietil anilină.

b) La reducerea acestor produse se obţin derivaţi diaminaţi de acenaftenoli, care prin autooxidare trec succesiv printr-o serie de radicali liberi la baze carbinolice şi apoi în coloranţi de triaril metan.

c) Coloranţii diaminaţi rezultaţi se pot diazota şi prin cuplare cu diverse componente conduc la coloranţi bisazoici.

d) Atît derivaţii de triaril metan, cît şi derivaţii azoici vopsesc lîna, mătasea naturală, relonul şi bumbacul în diverse nuanţe.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de chimie organică

BIBLIOGRAFIE

1. * * * C., 1936, **II**, S. 1620 (D. R. P., *631099*, 9/12 1934); C., 1937, **I**, S. 1550 (Schwz. P., *184879*, 28/12 1935).
2. Matei I., Ber. dtsch. chem. Ges., 1932, *65*, S. 1623.
3. Mayer F., Kaufmann W., Ber. dtsch. chem. Ges., 1920, *53*, S. 297.

LA CONDENSATION DE 4,5-DINITROACÉNAPHTENQUINONE AVEC DIMÉTHYL ET DIÉTHYLANILINE, PRODUITS DE RÉDUCTION ET COLORANTS

(Résumé)

On présenté les produits de la condensation de 4,5-dinitroacénaphtenquinone avec du diméthyl et diéthylaniline.

La réduction des produits synthétisés conduit à des dérivés diaminés d'acénaphtenols qui par une réaction intermédiaire d'autooxydation passent successivement par une série de radicaux libres à des bases carbinoliques et aboutissent finalement à des colorants dérivés du triphénilméthane.

On décrit ensuite le moyen d'obtenir les colorants bisazoiques par la diazotation des colorants diaminés et copulation avec divers produits.

Les composés de triphénilméthane autant que ceux azoiques teintent la laîne, la soie naturelle, le coton et la fibre de relon dans une large gamme de teintures.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3—4, 1966

C. Z. 66. 093. 6 ; 675. 03

CERCETĂRI PRIVIND CINETICA USCĂRII PIEILOR

NOTA II

USCAREA PRIN CONVECŢIE

DE

M. MARINESCU şi EMIL MATEI

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

B. PARTEA EXPERIMENTALĂ [1])

1. Instalaţia experimentală şi metoda de lucru

Instalaţia construită pentru cercetarea uscării pieilor (fig. 1) constă din două conducte pentru aer construite din tablă zincată, un ventilator şi un calorifer.

Conducta superioară are secţiunea dreptunghiulară cu dimensiunile de 250 × 250 mm şi lungimea de 3118 mm. Conducta inferioară are secţiunea circulară cu diametrul de 170 mm. Pentru ca vibraţiile ventilatorului să nu se transmită la conducte, recordurile la

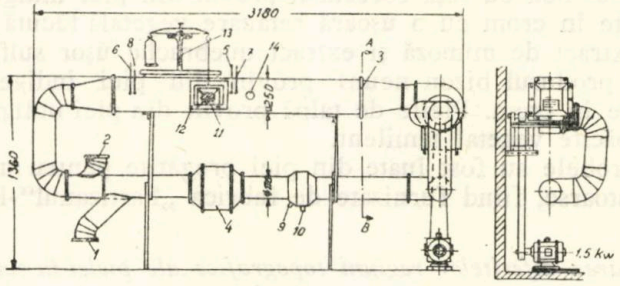


Fig. 1. — Instalaţia experimentală de uscare

orificiile sale de aspiraţie şi refulare sînt din piele flexibilă. Ventilatorul centrifugal este acţionat de un electromotor de 1,5 kW, avînd 1 430 rot/min. Pentru reglarea debitului de aer este prevăzut cu două registre, din care *1* pentru reglarea admisiei aerului din exterior şi *2* pentru refularea aerului în exterior. Pentru uniformizarea curentului de aer, înaintea intrării acestuia în conducta superioară s-a prevăzut un grătar *3*.

[1]) Partea teoretică a fost expusă în [1].

Aerul este încălzit în caloriferul electric *4* prevăzut cu reostat. Temperatura şi umiditatea aerului se măsoară cu termometrele uscate *5* şi *6* şi termometre'e umede *7* şi *8*. Variaţia umidităţii relative a aerului se produce prin introducerea aburului saturat, produs de un generator cu capacitate variabilă, în tubul inferior prin ştuţul *9*. Aburii condensaţi se elimină prin ştuţul *10*. Probele de piele *11* se prind în interiorul unui cadru metalic *12* cu ajutorul unor resoarte. Cadrul este suspendat în centrul conductei superioare printr-o tijă metalică prinsă articulat la braţul balanţei tehnice *13*, situată deasupra conductei superioare şi susţinută de o consolă încastrată în zid. Pe conducta superioară, în dreptul cadrului metalic, este prevăzută o uşă de sticlă cu ramă metalică prin care se introduc şi se scot probele. Viteza aerului se măsoară cu anemometrul *14* situat în apropierea probei. Se pune în funcţiune instalaţia, reglîndu-se parametrii agentului de uscare pentru regimul dorit.

Din pielea de cercetat se taie eşantioane pentru determinarea umidităţii iniţiale, după care se taie proba, i se ia conturul pe hîrtie impermeabilă pentru determinarea suprafeţei cu planimetrul şi apoi i se izolează marginile cu o peliculă rezultată dintr-un amestec de colodiu, ulei de ricin şi glicerină pentru ca evaporarea să aibă loc numai pe cele două feţe ale probei. Se fixează apoi proba în cadrul metalic, aşezîndu-se în interiorul conductei superioare în poziţie verticală, paralelă cu curentul de aer. Se echilibrează balanţa, luîndu-se greutatea probei şi se notează timpul. Determinarea umidităţii eliminate, funcţie de timpul de uscare, se face prin cîntărirea probei, reechilibrîndu-se balanţa prin scoatere de greutăţi şi notîndu-se timpul.

La diferite intervale de timp, după determinarea greutăţii, se scoate proba şi i se ia conturul în vederea determinării contracţiei. Uscarea probei se continuă pînă cînd diferenţa între două cîntăriri nu depăşeşte 0,3%. Cînd se ajunge la această situaţie se scoate proba şi i se ia din nou conturul.

Din proba uscată se taie epruvete, pentru determinarea caracteristicilor fizico-mecanice, şi eşantioane de la margine şi din centru, pentru determinarea umidităţii finale.

2. Rezultatele cercetării

S-au făcut cercetări pentru piei de box, bizon şi talpă. Pieile de box pentru produsul box cu faţă corectată, provin din piei indigene categoria 20 kg, tăbăcite în crom cu o uşoară retanare vegetală făcută cu un buchet format din extract de mimoză şi extract quebracho uşor sulfitat. Pieile de bizon pentru produsul bizon neuns provin din piei indigene categoria 20 kg tăbăcite în crom. Pieile de talpă provin din piei indigene categoria 31...35 kg tăbăcite vegetal semilent.

Toate probele au fost luate din piei pregătite pentru uscare şi deci în prealabil stoarse, fiind furnizate de fabrica „Partizanul"-Bacău.

a) *Comportarea diferitelor regiuni topografice ale pielei în timpul uscării*

În fig. 2 şi 3 se prezintă curbele uscării şi curbele vitezei de uscare pentru probe de crupron, gît şi poală din piele de box, cînd parametrii agentului de uscare au fost: temperatura termometrului uscat $t = 40\,°C$, umiditatea relativă $\varphi = 16{,}7\,\%$ şi viteza $v = 1$ m/s.

Curbele uscării arată că deşi probele provin din aceeaşi piele, structura lor determinată de regiunea topografică influenţează alura lor. Toate curbele de uscare se compun dintr-o porţiune dreaptă şi una curbă al căror punct de racordare defineşte umiditatea critică a probelor şi delimi-

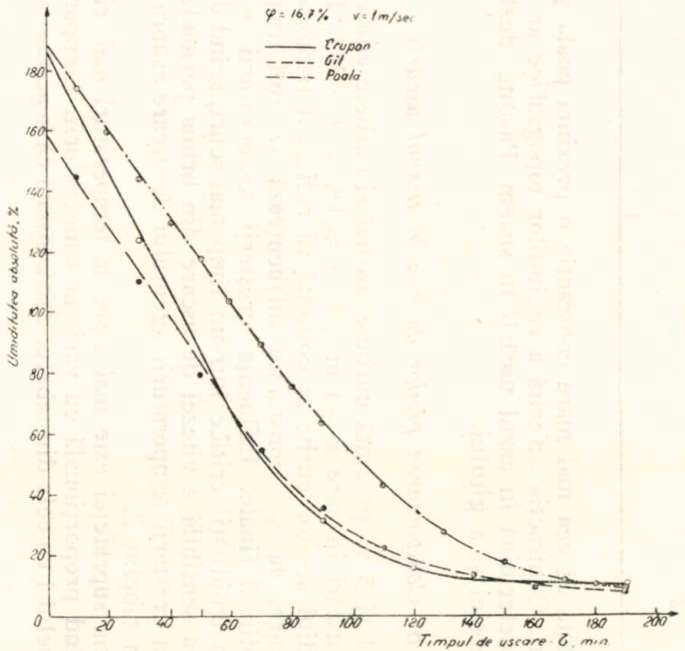


Fig. 2. — Curbele de uscare pentru probe de crupon, gît şi poală din piele box.

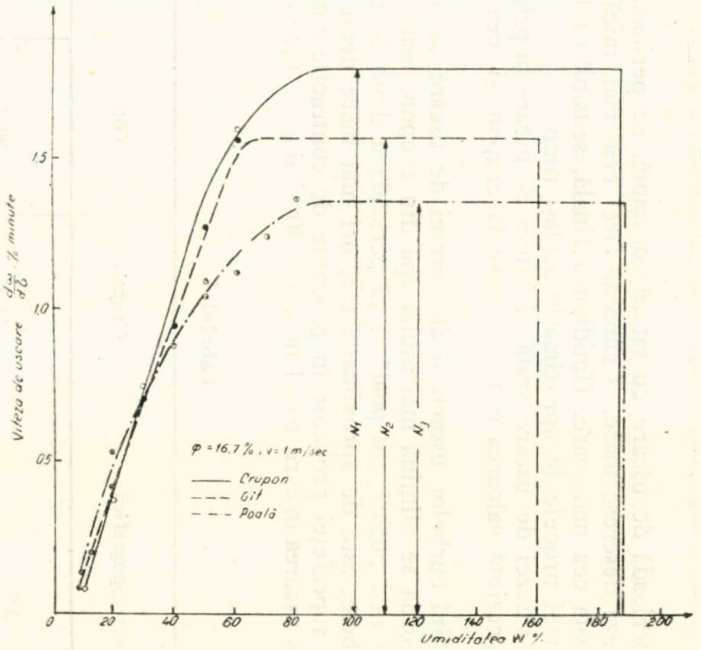


Fig. 3. — Curbele vitezei de uscare pentru probe de crupon, gît şi poală din piele box.

tează prima perioadă de uscare cu viteză constantă, de perioada a doua de uscare cu viteză descrescătoare. Cruponul are cea mai mică umiditate critică, iar poala cea mai mare. Umiditatea finală, sensibil egală, se atinge pentru toate trei probele în aproximativ acelaşi timp.

Curbele vitezei de uscare arată că viteza de uscare în prima perioadă (în %/min), prezintă valoarea cea mai mare la crupon şi cea mai mică la poală.

Din studiul curbelor uscării şi ale vitezei de uscare se constată că în prima perioadă se elimină mai multă apă din crupon, mai puţină din gît şi sensibil mai puţină din poală şi că perioada a doua de uscare, pentru toate probele, este de aproximativ trei ori mai mare decît prima.

Variaţia suprafeţei probelor în procente de contracţie faţă de suprafaţa iniţială, la uscarea în care $v = 1$ m/s, $t = 40\,°C$ şi $\varphi = 16{,}7\,\%$, se prezintă în tabelul 1.

Tabelul 1

Regiunea topografică	Crupon	Gît	Poală
ΔS %	18,4	20,2	22,3

Se constată că cea mai mare contracţie o prezintă poala şi cea mai mică cruponul. Contracţia diferită a regiunilor topografice ar fi una din cauzele care determină în cazul uscării în sistem Pasting dezlipirea mai frecventă a poalei şi a gîtului.

b) *Comportarea pieilor de box în timpul uscării*

În fig. 4 şi 5 se prezintă curbele uscării şi curbele vitezei de uscare pentru box la uscări in care $v = 1$ m/s, $\varphi = 36{,}3\,\%$ şi $t = 30°$, $40°$ şi $60\,°C$.

Din studiul acestor curbe se constată că ridicarea temperaturii agentului de uscare, la $\varphi =$ const., nu influenţează sensibil timpul necesar atingerii umidităţii finale. Influenţa creşterii temperaturii se manifestă prin atingerea umidităţii critice într-un timp mai scurt, avînd drept consecinţă creşterea sensibilă a vitezei de uscare din prima perioadă.

Influenţa creşterii temperaturii agentului de uscare asupra contracţiei se prezintă în tabelul 2.

Contracţia suprafeţei este mai mare la temperaturi mai ridicate, variaţia ei nefiind proporţională cu variaţia temperaturii. Comparînd rezultatele din tabelul 1 cu cele din tabelul 2 se constată că la aceeaşi temperatură

Tabelul 2

Temperatura agentului de uscare °C	30°	40°	60°
ΔS %	14,5	18,8	20

a agentului de uscare, contracţia suprafeţei are valori mai mari atunci cînd umiditatea relativă a agentului de uscare are valori mai mici.

Fiind cunoscută influenţa defavorabilă a temperaturii ridicate a agentului de uscare asupra calităţii pieilor, în cercetările următoare temperatura a fost menţinută constantă la 40 °C, urmărindu-se influenţa variaţiei umidităţii relative a acestuia.

În fig. 6...8 se prezintă curbele de uscare, curbele vitezei de uscare şi curbele contracţiei suprafeţei pentru box la uscări în care v = m/s, $t = 40$ °C şi φ variază între 10 % şi 70 %.

Influenţa creşterii umidităţii relative a agentului de uscare se manifestă pregnant asupra timpului de atingere a umidităţii finale a probelor. La valori ale lui φ pînă la 40 % umiditatea finală a probelor se păstrează sensibil la aceeaşi valoare. Pentru $\varphi > 40$ %, nu se mai poate atinge aceeaşi valoare a umidităţii finale, ea crescînd o dată cu creşterea lui φ. Pe măsură ce umiditatea relativă a agentului de uscare creşte, viteza de uscare se micşorează, mai sensibil în prima perioadă şi mai puţin sensibil în perioada a doua. Curba vitezei de uscare în perioada a doua are convexitatea îndreptată spre axa ordonatelor, formă caracteristică corpurilor coloidal-capilaro-poroase de tipul pieilor subţiri.

Contracţia suprafeţei probelor este mult influenţată de variaţia lui φ, în sensul că ea scade considerabil cu creşterea lui φ. Alura curbelor contracţiei pentru $\varphi = 10$ %, 20 % şi 30 % arată că la începutul uscării contracţia creşte mai încet, ca apoi într-un interval de timp relativ scurt să crească rapid, după care să scadă pînă către sfîrşitul uscării, cînd devine nulă.

Alura curbelor contracţiei pentru $\varphi = 40$ %, 50 %, 60 % şi 70 % arată că valoarea contracţiei scade şi că variaţia ei în timpul uscării se atenuează foarte mult pe măsura creşterii lui φ.

Pentru a urmări influenţa simultană a temperaturii şi a umidităţii relative a agentului de uscare asupra contracţiei suprafeţei pielei, în fig. 9 se prezintă curbele contracţiei probelor de box la $v = 1$ m/s şi la t şi φ variabili. Curba *1* se obţine cînd $t = 50°$ şi $\varphi = 63{,}6$ % şi indică o contracţie mică. Pentru aceeaşi temperatură dar la $\varphi = 12{,}1$ % se obţine curba *7* la care contracţia este mare.

La $\varphi = 35\%$ şi $t = 60\,^{\circ}C$ se obţine curba *5* care indică o contracţie mare. Pentru un acelaşi φ dar la $t = 30\,^{\circ}C$ se obţine curba *3* care indică o contracţie sensibil mai mică.

La uscarea la valori mari ale temperaturii sau la valori mici ale lui φ se evaporă o dată cu apa din macrocapilare şi cea din microcapilare şi datorită faptului că structura pielei nu este fixată, este posibilă apropierea în măsură mare a radicalilor acizilor aminici cu catenă scurtă, în timp ce lanţurile lungi se îndoaie, ducînd la o contracţie mare a pielei, ceea ce influenţează negativ calitatea ei.

În uscarea la valori mici ale lui t sau la valori mari ale lui φ se elimină apa legată osmotic şi cea capilară din macrocapilare, menţinîndu-se însă în microcapilare. Se apropie doar catenele lungi care se fixează, obţinîndu-se un schelet rezistent al sistemului fibros. Pe măsură ce uscarea evoluează, se evaporă şi apa din microcapilare, dar catenele nu se mai pot apropia datorită fixării anterioare a lanţurilor lungi şi de aceea contracţia este mai mică.

Din cele constatate privind influenţa temperaturii şi umidităţii relative a agentului de uscare asupra contracţiei suprafeţei şi ţinînd seama şi de necesitatea economică a scurtării timpului de uscare rezultă că uscarea ar putea începe cu un agent de uscare cu temperatura şi umiditatea relativă scăzute, dar care să crească împreună către sfîrşitul uscării.

Influenţa variaţiei umidităţii relative a agentului de uscare asupra caracteristicilor fizico-macanice ale probelor de box uscate la $v = 1$ m/s, $t = 40\,^{\circ}C$ şi $\varphi = 20\% \ldots 60\%$ se prezintă în tabelul 3.

Tabelul 3

φ %	Rezistenţa la crăpare kgf/mm²	Alungirea la crăpare %	Rezistenţa la rupere kgf/mm²	Alungirea la rupere %
20	1,16	30,80	2,64	65,40
30	1,44	32,30	2,69	59,80
40	2,14	43,80	2,75	53,80
50	2,61	49,20	3,24	73,10
60	3,26	54,60	3,63	62,20

Rezultatele prezentate în tabelul 3 reprezintă valoarea medie a mai multor probe. Valorile găsite sînt afectate de faptul că probele provin din aceeaşi partidă dar nu şi din aceeaşi piele. Cu toate acestea se poate constata că uscarea la un φ mai ridicat influenţează favorabil rezistenţele şi alungirile la crăpare şi la rupere.

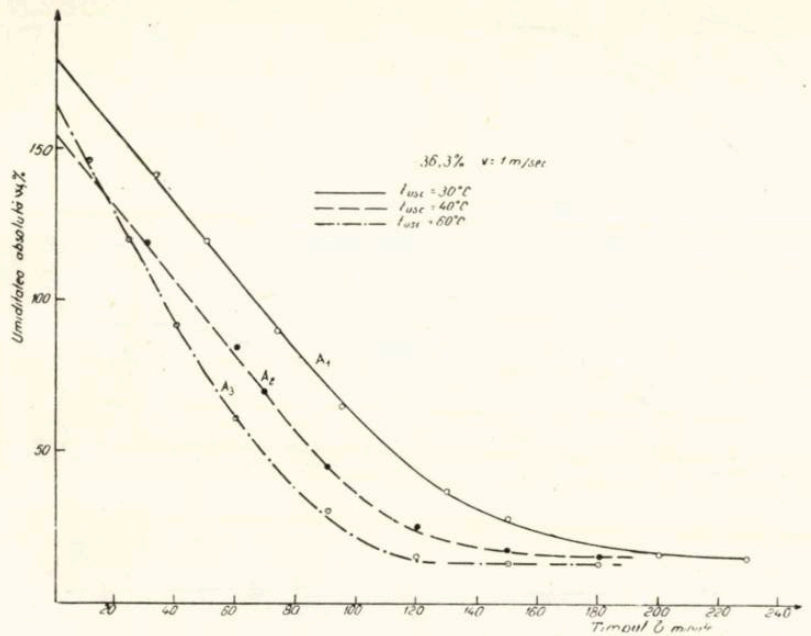


Fig. 4. — Curbele de uscare pentru box la φ = const şi t_{usc} variabil.

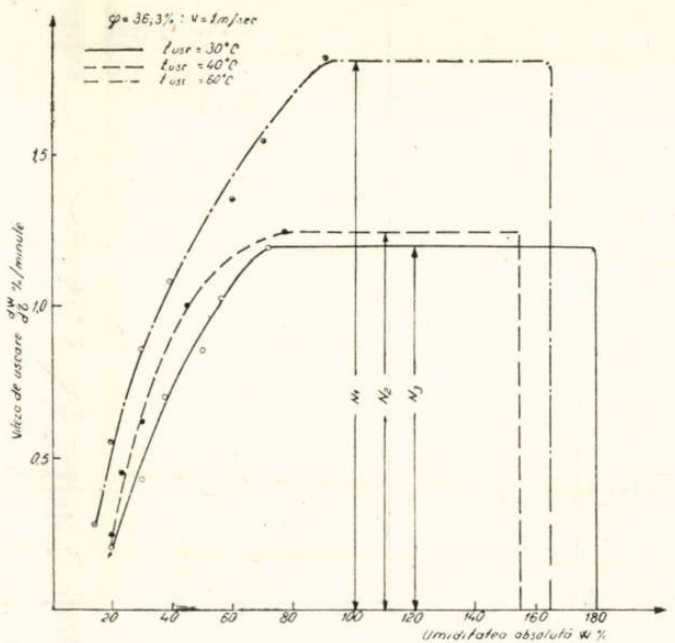


Fig. 5. — Curbele vitezei de uscare pentru box la φ = const şi t_{usc} variabil.

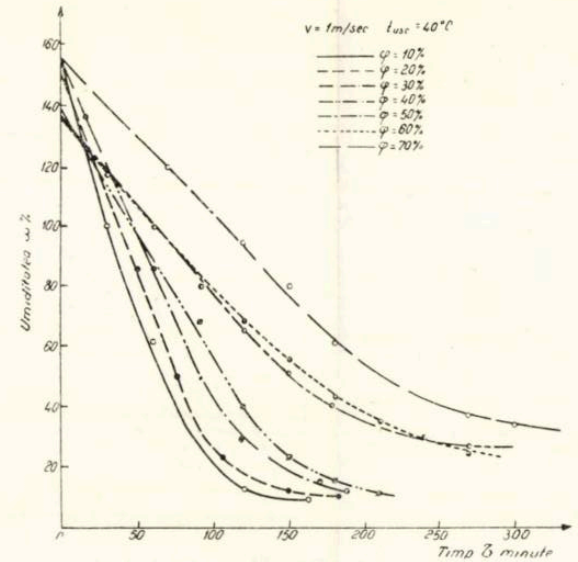


Fig. 6. — Curbele de uscare pentru box.

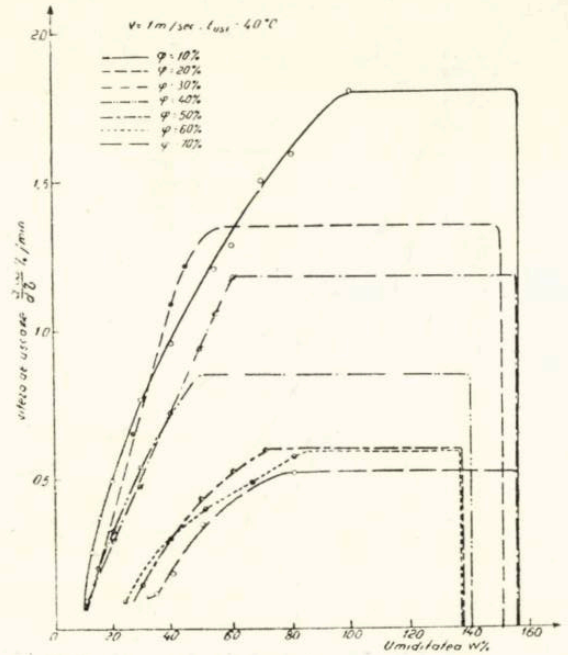


Fig. 7. — Curbele vitezei de uscare pentru box.

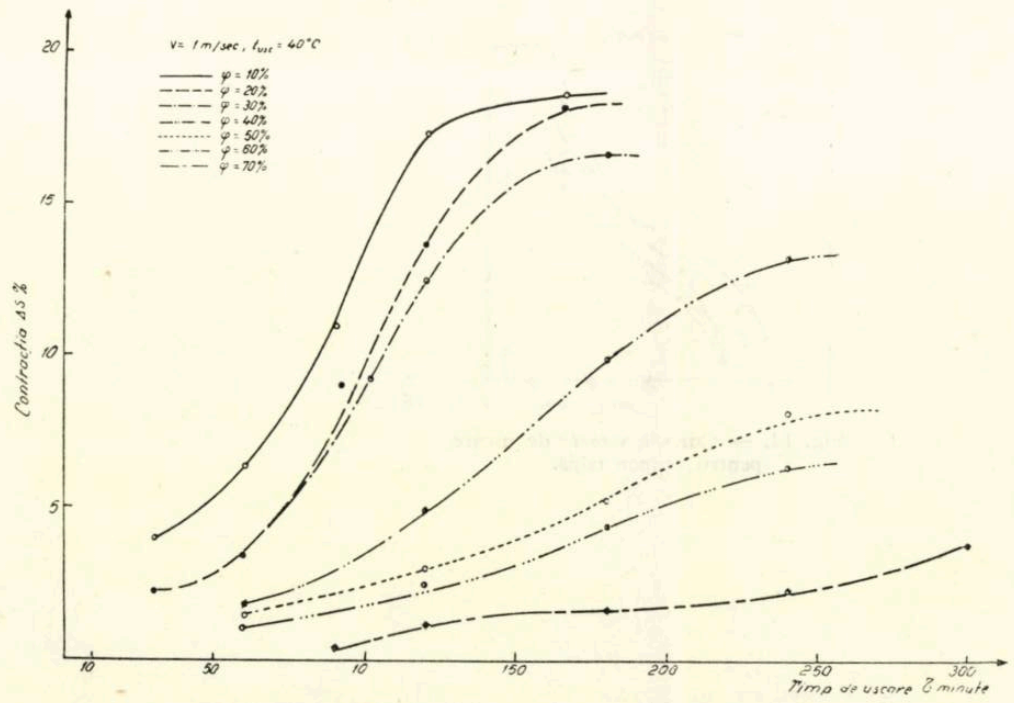


Fig. 8. — Curbele de contracţie a suprafeţei pentru box.

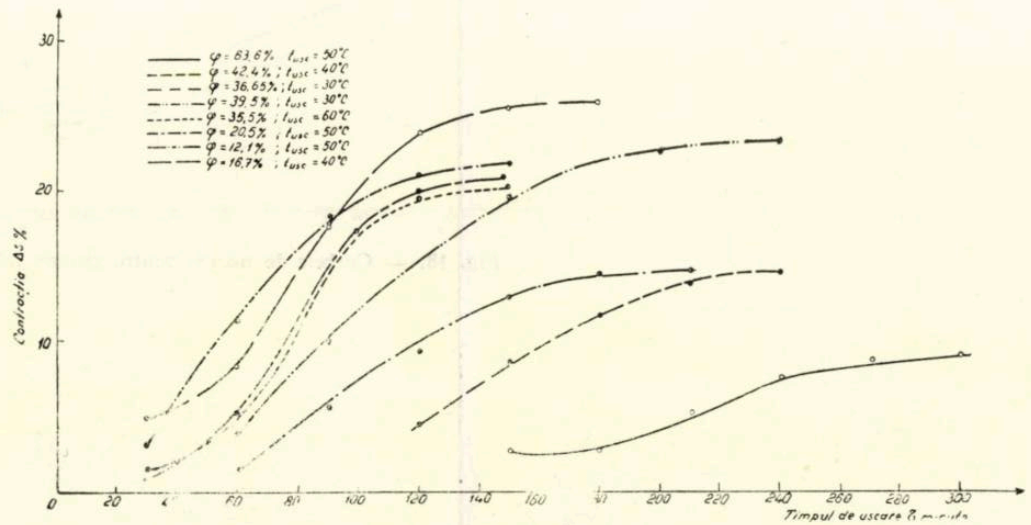


Fig. 9. — Curbele contracţiei suprafeţei pentru box la $v = 1$ m/sec şi t_{usc} şi φ variabili.

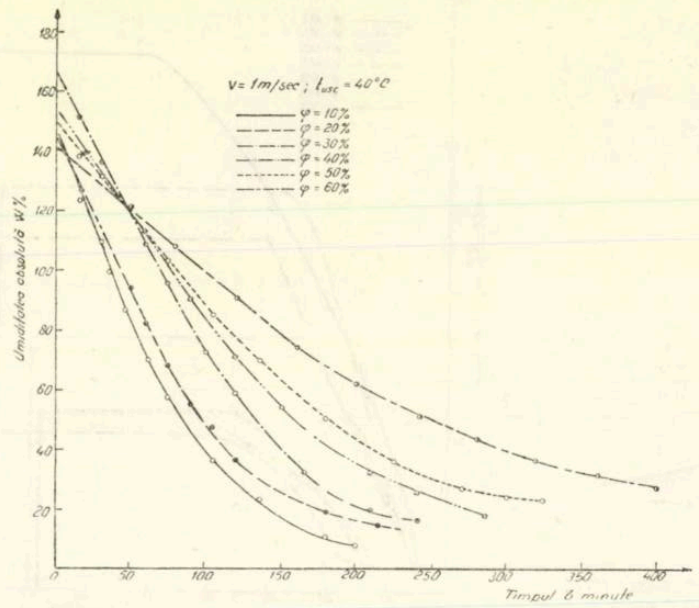


Fig. 10. — Curbele de uscare pentru bizon neuns.

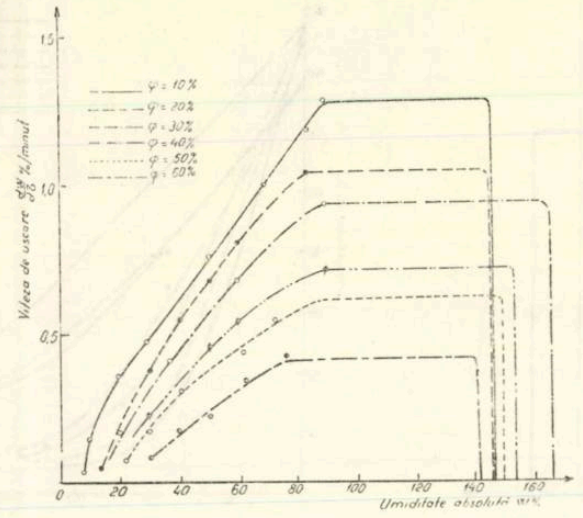


Fig. 11. — Curbele vitezei de uscare pentru bizon neuns.

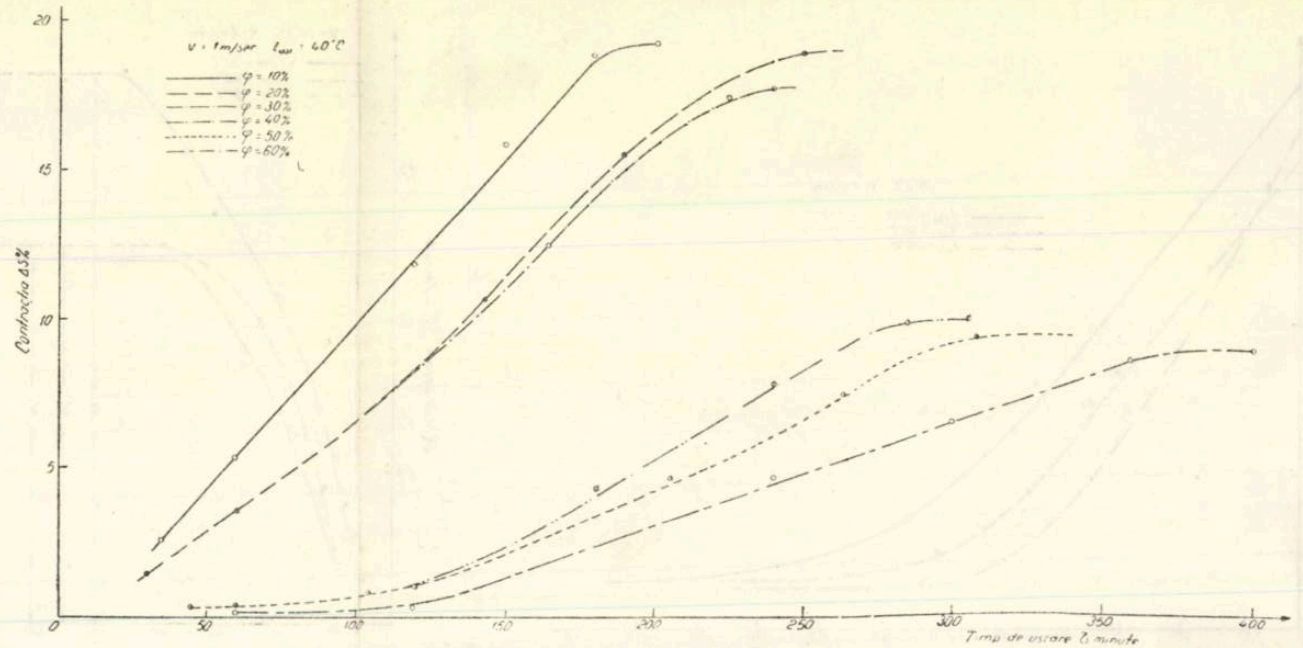


Fig. 12. — Curbele de contracție a suprafeței pentru bizon.

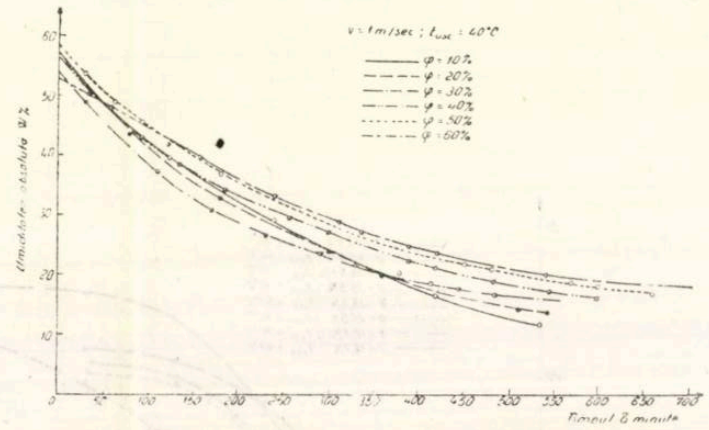


Fig. 13. — Curbele de uscare pentru crupon talpă.

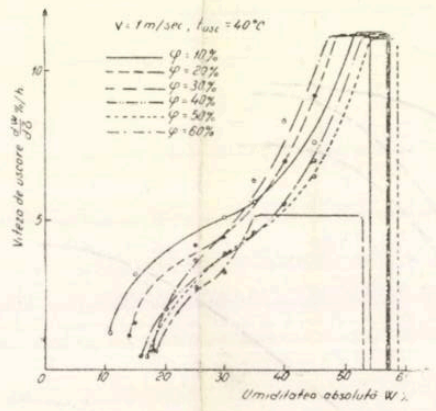


Fig. 14. — Curbele vitezei de uscare pentru crupon talpă.

c) *Comportarea pieilor de bizon la uscare*

În fig. 10, 11 şi 12 se prezintă curbele uscării, curbele vitezei de uscare şi curbele contracţiei suprafeţei la bizon la uscări în care $v = 1$ m/s, $t = 40$ °C şi φ variază de la 10% la 60%. La uscarea probelor de bizon, pe măsura creşterii valorii lui φ, viteza de uscare se micşorează atît în prima perioadă, cît şi în a doua, timpul de atingere a umidităţii finale a probelor fiind dublu la $\varphi = 60\%$ faţă de $\varphi = 10\%$.

Cu creşterea lui φ se observă şi o creştere aproape liniară a umidităţii finale a probelor. Contracţia suprafeţei probelor este de asemenea mult influenţată de variaţia lui φ, în sensul că ea scade considerabil cu creşterea lui φ. Alura curbelor contracţiei (fig. 12) obţinute la $\varphi = 10\%$, 20% şi 30% arată o valoare mare a acesteia şi o creştere a ei aproape uniformă pînă către sfîrşitul uscării, cînd variaţia scade repede pînă încetează.

Curbele contracţiei la $\varphi = 40\%$, 50% şi 60% indică o contracţie mai mică; la începutul uscării variaţia ei este mică, urmînd apoi o creştere lină care spre sfîrşitul uscării se micşorează pînă încetează.

Comportarea diferită a bizonului faţă de box la regimuri de uscare identice o atribuim procesului tehnologic de fabricaţie diferit. Influenţa variaţiei umidităţii relative a agentului de uscare asupra caracteristicilor fizico-mecanice ale probelor de bizon uscate s-a determinat la fel ca şi pentru box. Pentru φ crescînd de la 10% la 60% valoarea rezistenţei la crăpare a variat de la 2,89 kgf/mm^2 la 3,59 kgf/mm^2, iar alungirea la crăpare de la 53% la 82%. Valoarea rezistenţei la rupere a variat de la 3,05 kgf/mm^2 la 3,59 kgf/mm^2 iar alungirea la rupere de la 64% la 86%. Rezultatele nu pot fi concludente deoarece pentru fabricarea bizonului s-au folosit piei cu defecte.

d) *Comportarea la uscare a pieilor de talpă tăbăcite vegetal*

În fig. 13 şi 14 se prezintă curbele uscării şi curbele vitezei de uscare pentru talpă crupon la uscări în care $v = 1$ m/s, $t = 40$ °C şi φ variază de la 10% la 60%.

Atît curbele uscării cît şi cele ale vitezei de uscare la valori diferite ale lui φ indică în general o durată scurtă a primei perioade de uscare, care însă la $\varphi = 60\%$ se măreşte sensibil. Cu creşterea lui φ creşte puţin şi umiditatea finală a meterialului, iar timpul de atingere a acesteia creşte cu aproximativ două ore.

Viteza de uscare în prima perioadă nu a fost influenţată sensibil de variaţia lui φ de la 10% la 50%, dar s-a micşorat cu circa 50% la $\varphi = 60\%$.

Curbele vitezei de uscare pun în evidenţă existenţa a trei perioade de uscare delimitate prin două valori deosebite ale umidităţii critice a materialului.

Prima umiditate critică w_{c1} se situează între 45% şi 55% iar cea de a doua w_{c2} între 30% şi 35%, cu excepţia uscării la $\varphi = 60\%$ cînd prima umiditate critică este aproximativ 35% iar cea de a doua, aproximativ 25%.

După primul punct de umiditate critică viteza de uscare scade după o curbă cu convexitatea îndreptată spre axa absciselor iar după al doilea punct de umiditate critică, viteza de uscare scade după o curbă cu convexitatea îndreptată spre axa ordonatelor. Această formă a curbei vitezei de uscare după primul punct de umiditate critică este caracteristică corpurilor coloidal-capilaro-poroase de tipul pieilor groase. La box şi bizon viteza de uscare după punctul de umiditate critică scade după o curbă cu convexitatea spre axa ordonatelor, forma ei fiind caracteristică corpurilor colodal-capilaro-poroase de tipul pieilor subţiri. Forma curbelor vitezei de ucscare după primul punct de umiditate critică s-ar putea explica prin modul cum este legată umiditatea cu pielea şi prin mecanismul diferit al deplasării ei.

La contactul cu agentul de uscare, umiditatea de pe suprafaţa pielei se evaporă şi are loc un schimb de umiditate cu agentul de uscare. Această eliminare a umidităţii de pe suprafaţa pielei dă naştere unui gradient de umiditate între stratul superficial şi straturile inferioare ale pielei ceea ce provoacă în interiorul ei o deplasare a umidităţii spre suprafaţă, condiţionată de coeficientul de conductibilitate a umidităţii K.

În cazul uscării pielei prin convecţie gradientul de temperatură în interiorul pielei este mic, de aceea termoconductibilitatea umidităţii este neînsemnată, deplasarea umidităţii fiind determinată în special de conductibilitatea umidităţii sub formă lichidă sau de vapori.

Dată fiind influenţa hotărîtoare a conductibilităţii umidităţii, atît la pieile subţiri cît şi la cele groase, în perioada de uscare cu viteză constantă se elimină resturile de apă de îmbibare rămase după stoarcere, apa capilară din macrocapilare şi apa legată osmotic, umidităţi caracterizate printr-o slabă energie de legare. În tot acest timp temperatura pielei la suprafaţă este egală cu temperatura termometrului umed. După atingerea umidităţii critice, temperatura pielei la suprafaţă se ridică şi începe perioada de uscare cu viteză descrescătoare. La pieile subţiri în această perioadă se elimină apa capilară din microcapilare şi cea de hidratare, coeficientul de conductibilitate a umidităţii K se micşorează, coeficientul de schimb de umiditate β se măreşte iar pielea se contractă determinînd scăderea dimensiunii sale caracteristice R. Mărirea coeficientului β şi micşorarea lui R, pe măsură ce umiditatea scade, fac ca relaţia dintre viteza de uscare, în această perioadă, şi umiditatea pielei să prezinte forma unei curbe cu convexitatea îndreptată spre axa ordonatelor.

Pieile groase, mai pline, conţin mai puţină apă capilară în macrocapilare şi resturi de apă de îmbibare, ceea ce determină o durată mai scurtă a perioadei de uscare la viteză constantă şi o ridicare comparativ mai rapidă a temperaturii suprafeţei pielei, care se apropie de temperatura mediului ambiant.

La aceste piei, după prima umiditate critică se elimină umiditatea capilară din microcapilare, coeficientul de conductibilitate a umidităţii scade, în timp ce coeficientul de schimb de umiditate are valoare mare ;

în schimb pielea nu se mai contractă şi dimensiunea sa caracteristică rămîne constantă ceea ce determină ca scăderea vitezei de uscare în această perioadă să prezinte forma unei curbe cu convexitatea uşor îndreptată spre axa absciselor. În toată această perioadă coeficientul de conductibilitate se micşorează pe măsură ce scade umiditatea capilară, iar temperatura pielei începe să crească de la suprafaţă spre interior.

Cea de a doua umiditate critică de pe curba vitezei de uscare indică adîncirea suprafeţei de evaporare a umidităţii în interiorul pielei. După atingerea acestei umidităţi critice începe eliminarea apei de hidratare care are cea mai mare energie de legătură. Deplasarea umidităţii în piele sub formă de vapori provoacă o pronunţată micşorate a coeficientului de conductibilitate a umidităţii. O dată cu eliminarea apei de hidratare se observă şi o foarte mică contracţie a pielei. Adîncirea suprafeţei de evaporare şi eliminarea apei de hidratare sub formă de vapori determină ca viteza de uscare în această perioadă să scadă după o curbă cu convexitatea îndreptată spre axa ordonatelor.

Pentru probele de talpă nu s-au putut trasa curbele contracţiei suprafeţei deoarece valoarea ei procentuală a fost foarte mică; chiar după 600 min de uscare la diferite valori ale lui φ între 10% şi 60%, ea nu a depăşit 0,4%.

Influenţa creşterii umidităţii relative a agentului de uscare asupra caracteristicilor fizico-mecanice ale probelor de talpă se prezintă în tabelul 4.

Tabelul 4

φ %	Rezistenţa la rupere kgf/mm²	Alungirea la rupere %
10	2,09	26
20	2,21	28
30	2,30	27
40	2,33	25
50	2,80	28
60	2,26	28

Rezultatele obţinute indică valori foarte apropiate pentru toate probele, crăparea feţei coincizînd cu ruperea. Se poate presupune că asupra acestor valori influenţează mai mult procedeul de tăbăcire şi nu umiditatea relativă a aerului cu care s-a făcut uscarea.

Caracteristicile fizico-mecanice sînt mult influenţate şi de operaţiile tehnologice la care sînt supuse pieile după uscare, astfel încît rezultatele date nu sînt valabile pentru produsele finite.

În încercările făcute nu s-a urmărit influenţa variaţiei vitezei agentului de uscare deoarece e cunoscut faptul că influenţa sa se manifestă

prin intensificarea uscării scurtînd durata perioadei de uscare la viteză constantă şi că în perioada cu viteză descrescătoare influenţa sa nu se manifestă aproape deloc. Din cercetările întreprinse rezultă că cea mai importantă perioadă pentru uscarea pieilor este tocmai perioada cu viteză descrescătoare.

e) *Observaţii*

Pentru pieile subţiri, durata uscării obţinută în cercetările efectuate este de aproximativ două ori mai mică decît cea care se obţine în uscătoarele Pasting. Eliminarea umidităţii s-a produs prin ambele feţe ale probelor, în timp ce în uscătoarele Pasting, pieile fiind lipite pe plăci de sticlă, eliminarea umidităţii se produce numai printr-o singură faţă. În uscătoarele Pasting contracţia este mult mai mică deoarece pieile se usucă în stare întinsă

3. Concluzii

a) Funcţie de grosimea, regiunea topografică şi metoda de tăbăcire, pieile se comportă diferit la uscare, necesitînd un studiu separat pentru determinarea regimului optim de uscare.

b) Pieile subţiri, tăbăcite în crom, au un singur punct de umiditate critică şi două perioade de uscare, prima perioadă cu viteză constantă de uscare şi a doua cu viteză descrescătoare. Pieile groase tăbăcite vegetal prezintă două puncte de umiditate critică şi trei perioade de uscare, din care prima perioadă e cea cu viteză constantă de uscare şi celelalte două cu viteză descrescătoare.

În aceleaşi condiţii de uscare, durata de uscare a pieilor subţiri e mai mică decît a pieilor groase. Atît la pieile subţiri cît şi la cele groase, prima perioadă de uscare este mai scurtă decît a doua, dar la pieile groase, prima perioadă de uscare este mai scurtă decît la pieile subţiri. Atribuim această diferenţă unui conţinut mai mic de apă nelegată în pieile groase.

c) Regiunile topografice ale pieilor subţiri se comportă diferit în timpul uscării. În prima perioadă, cruponul prezintă cea mai mare viteză de uscare şi poala cea mai mică, în cea de a doua perioadă, poala prezintă cea mai mare viteză de uscare şi cruponul cea mai mică.

Indiferent de regiunea topografică, perioada a doua de uscare este de aproximativ trei ori mai mare decît prima. Cea mai mare contracţie o prezintă poala şi cea mai mică, cruponul. Considerăm că structura diferită a regiunilor topografice determină această comportare diferită la uscare. De aceste diferenţe în comportare trebue să se ţină seama la stabilirea regimului optim de uscare.

d) La pieile subţiri, viteza şi umiditatea relativă rămînînd constante, ridicarea temperaturii agentului de uscare se manifestă prin scurtarea du-

ratei de uscare, mărirea vitezei de uscare (mai sensibil în prima perioadă de uscare) şi prin mărirea importantă a contracţiei.

La viteză şi temperatură constantă ale agentului de uscare creşterea umidităţii sale relative se manifestă prin mărirea duratei de uscare, prin micşorarea vitezei de uscare, mai sensibil în prima perioadă, şi prin micşorarea importantă a contracţiei. În toate cazurile contracţia apare în perioada a doua de uscare cînd începe eliminarea apei din microcapilare şi a celei de hidratare, care au o mai mare energie de legare.

La viteză constantă a agentului de uscare, dar la temperaturi şi umidităţi relative diferite, contracţia este mai mare cînd temperatura este mai ridicată şi umiditatea relativă mică. Ea este mai mică cînd temperatura este mai scăzută şi umiditatea relativă mică sau cînd temperatura este ridicată şi umiditatea relativă mare.

Ţinînd seama de necesitatea economică a reducerii duratei de uscare considerăm că uscarea pieilor subţiri se poate începe cu o temperatură şi umiditate relativă scăzute, dar care să crească împreună pe măsură ce evoluează uscarea.

e) Comparativ cu pieile subţiri tăbăcite în crom, pieile groase tăbăcite vegetal au o durată de uscare mai mare, prezintă două puncte de umiditate critică şi o contracţie aproape nesesizabilă. Prima perioadă de uscare este mult mai scurtă decît celelalte două. Aproape întreg procesul de uscare se petrece în cele două perioade de uscare cu viteze descrescătoare.

Existenţa a două puncte de umiditate critică o atribuim structurii diferite a pieilor groase faţă de cele subţiri, primele fiind mai pline. Considerăm că eliminarea umidităţii de hidratare puternic legată de piele începe după cel de al doilea punct de umiditate critică cînd se observă şi o foarte uşoară contracţie, care însă în nici un caz nu a depăşit 0,4 %

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de tehnologia pielei,
înlocuitorilor de piele şi a tananţilor

BIBLIOGRAFIE

1. Marinescu M., Matei E., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *3—4*, pp. 187—196
2. Lîcov A. V., *Teoria uscării.* Ed. de Stat pentru arh. şi constr., Buc., 1954 (trad. din l. rusă).

ÉTUDES SUR LA CINÉTIQUE DU SÉCHAGE DES CUIRS

Note II

Le séchage par convection (B. Partie expérimentale)

(Résumé)

Ce travail représente les résultats des recherches expérimentales se référant au séchage du cuir box, bison et cuir à semelles, en considérant le comportement au séchage des différentes régions topographiques des cuirs. On a déterminé les courbes de séchage, les courbes

des vitesses de séchage, la contraction et les caractéristique phisico-mécaniques des échantillons de cuir aux différentes températures et humidités relatives de l'agent de séchage.

Des essais effectués on a constaté que les cuirs minces, tannés au chrôme, présentent un seul point d'humidité critique et deux périodes de séchage tandis que les cuirs tannés au tanin végetal qui sont plus gros présentent deux point d'humidité critique et trois périodes de séchage, dont les deux dernières à une vitesse de séchage décroissante.

Pour tous les cuirs essayes la première période de séchage est plus courte que la deuxième, pour les gros cuirs la première période de séchage est plus courte que la période correspondante des cuirs minces.

Dans la première période de séchage, le croupon a une vitesse de séchage plus grande que celle du flanc et inversement dans la deuxième période.

La plus grande contraction pendant le séchage est remarqué pour le flanc. Dans tous les essais de séchage effectués, la contraction apparait dans la deuxième période de séchage. Pour les gros cuirs tannés au tanin, la contraction est presque insensible.

Pour réduire là durée de séchage mais sans nuire à la qualité du cuir, les auteurs considèrent que le séchage des cuirs minces peut être commencé à une température et humidité relatives basses de l'agent de séchage, qui doivent s'accroître au fur et à mesure que le séchage progresse.

Explication des figures

Fig. 1. — L'instalation expérimentale de séchage.
Fig. 2. — Courbes de séchage pour échantillon de croupon, collet et flancs de cuir box.
Fig. 3. — Courbes de la vitesse de séchage pour échantillon de croupon, collet et flanc de cuir box.
Fig. 4. — Courbes de séchage pour cuir box à $\varphi = \text{const.}$ et t_{sec} variable.
Fig. 5. — Courbes de la vitesse de séchage pour box à $\varphi = \text{const.}$ et t_{sech} variable.
Fig. 6. — Courbes de séchage pour cuir box.
Fig. 7. — Courbes de la vitesse de séchage pour cuir box.
Fig. 8. — Courbes de contraction de la surface pour cuir box.
Fig. 9. — Courbes de contraction de la surface pour cuir box à $v = 1$ m/s et t_{sech} et φ variables.
Fig. 10. — Courbes de séchage pour cuirs bison non graissé.
Fig. 11. — Courbes de la vitesse de séchage pour bison non graissé.
Fig. 12. — Courbes de contraction de la surface du cuir bison.
Fig. 13. — Courbes de séchage pour semelle-croupon.
Fig. 14. — Courbes de la vitesse de séchage pour semelle-croupon.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3—4, 1966

Electrotehnică. Electronică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XII (XVI), вып. 3—4, 1966

Электротехника. Электроника

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XII (XVI), 3—4, 1966

Electrical Engineering. Electronics

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 537.226.8

INFLUENŢA ULTRASUNETELOR ASUPRA PROPRIETĂŢILOR DIELECTRICE ALE UNOR FERITE (I)

DE

EMIL LUCA, OVIDIU SCUTARU, ANASTASIA VASILIU şi I. LUCA

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Proprietăţile dielectrice ale unor ferite româneşti de tipul Mn-Zn şi $Ba+Bi_2O_3$, şi anume determinarea zonelor de dispersie ale permitivităţii, funcţie de frecvenţă şi temperatură, fiind studiate [1]...[2], ne propunem să determinăm şi influenţa pe care o are un cîmp ultrasonor asupra permitivităţii (ε') şi a pierderilor dielectrice ($tg\ \delta$) ale acestor ferite.

Cîmpul ultrasonor utilizat a fost obţinut de la un generator piezoelectric construit de unul din autori [3], care a permis ca în această primă etapă să se lucreze cu ultrasunete de frecvenţă constantă 800 kHz şi cu intensităţi şi durate de expunere variabile.

Intensitatea (energia) cîmpului ultrasonor s-a exprimat prin intensitatea curentului anodic din circuitul oscilant al oscilatorului ce alimenta cuarţul piezoelectric. Pentru măsurarea permitivităţii conservative ε' şi a pierderilor dielectrice, exprimate prin $tg\ \delta$, în cazul probelor de ferite indicate s-a utilizat o punte „Tesla" pentru frecvenţele de 1 000 şi 10 000 Hz.

În vederea eliminării efectelor inductive, întregul dispozitiv, incluzînd atît proba de ferită introdusă în cîmpul ultrasonor cît şi cablurile de legătură ale probei de ferită cu puntea Tesla, a fost complet blindat şi pus la pămînt.

Primele măsuri s-au efectuat pentru o valoare constantă a intensităţii cîmpului ultrasonor, variindu-se durata sa de acţiune asupra probelor de ferite.

2. Rezultatele experimentale care dau variaţia permitivităţii (ε') şi a pierderilor dielectrice ($tg\ \delta$) la probele de ferite Mn-Zn şi $Ba+Bi_2O_3$, funcţie de durata acţiunii cîmpului ultrasonor, la frecvenţa constantă de 1 000 Hz, sînt reprezentate în fig. 1 şi 2.

Din analiza curbelor rezultă că:

a) atît permitivitatea conservativă (ε') cît şi pierderile dielectrice, exprimate prin ($\operatorname{tg}\delta$), cresc atunci cînd probele de ferite se găsesc sub acţiunea unui cîmp ultrasonor;

b) creşterea prezintă un salt brusc cînd se aplică cîmpul ultrasonor şi devine cu atît mai mică cu cît creşte durata de acţiune a cîmpului ultrasonor, de intensitate constantă;

c) procesul de creştere a lui ε' şi $\operatorname{tg}\delta$ este mai accentuat la proba de ferită dură ($Ba+Bi_2O_3$) decît la cea de ferită moale (Mn-Zn).

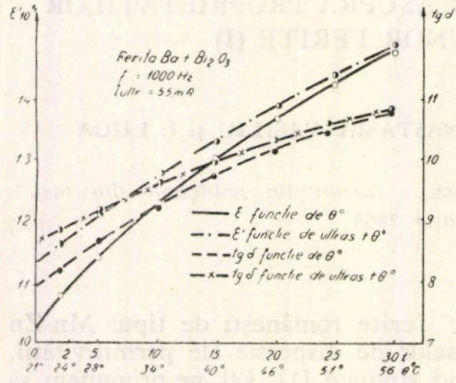


Fig. 1

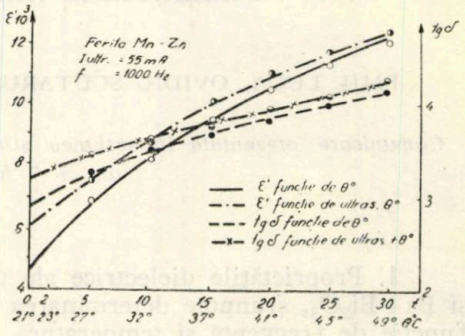


Fig. 2

Deoarece, în ciuda măsurilor luate de a menţine constantă temperatura băii de ulei de parafină, în care erau introduse cuarţul generator de ultrasunete şi proba de ferită, s-a constatat o ridicare a temperaturii uleiului de parafină din jurul probei de ferită, cu ocazia fiecărei măsurări efectuate s-a notat şi temperatura respectivă. Ţinînd seama că permitivitatea şi pierderile dielectrice variază sensibil cu temperatura, şi în scopul de a separa cele două efecte, cel determinat de cîmpul ultrasonor de cel datorit creşterii temperaturii, în fig. 1, 2 s-au trasat şi curbele de variaţie cu temperatura ale permitivităţii (ε'), respectiv pierderilor dielectrice ($\operatorname{tg}\delta$), pentru probele de ferite utilizate.

Se constată că cele două curbe (cea datorită numai temperaturii şi cea datorită ultrasunetelor) nu se suprapun, ele fiind mai îndepărtate în faza iniţială a măsurătorilor, adică în momentul aplicării cîmpului ultrasonor, şi mai apropiate cu cît durata de acţiune a cîmpului ultrasonor creşte.

Deoarece măsurarea temperaturii feritei, aflată în cîmpul ultrasonor, s-a efectuat prin plasarea unui termocuplu la suprafaţa probei de ferită şi deoarece este posibil ca datorită procesului de absorbţie a ultrasunetelor de către proba de ferită, în interiorul acesteia temperatura să fie mai ridicată decît la suprafaţa exterioară, există astfel posibilitatea ca întregul efect de variaţie al lui ε' şi $\operatorname{tg}\delta$ să nu se datoreze decît procesului termic.

Această ipoteză pare infirmată de faptul că în momentul aplicării cîmpului ultrasonor se observă o creştere bruscă a permitivităţii şi a pierderilor dielectrice, ce nu poate fi pusă decît pe seama acţiunii cîmpului ultrasonor, întrucît ferita nu se putea încălzi datorită procesului de absorbţie.

Într-o altă serie de măsurători s-a menţinut constantă durata de expunere a probelor de ferite în cîmpul ultrasonor, variindu-se intensitatea acestuia prin variaţia curentului anodic. Notînd şi de această dată temperatura corespunzătoare fiecărei măsurători, în fig. 3 şi fig. 4 s-au trasat curbele de variaţie ale lui ε' şi tg δ funcţie de intensitatea cîmpului ultrasonor, comparativ cu curbele de variaţie ale aceloraşi mărimi funcţie de temperatura corespunzătoare.

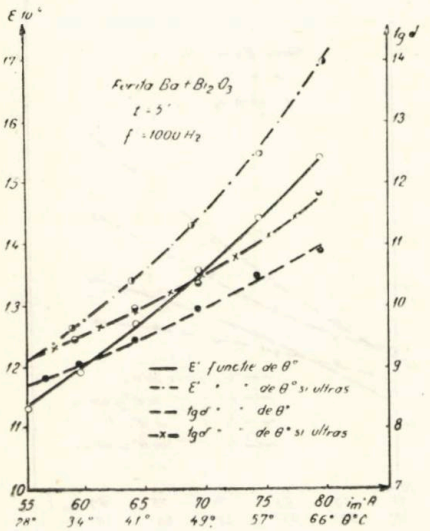


Fig. 3

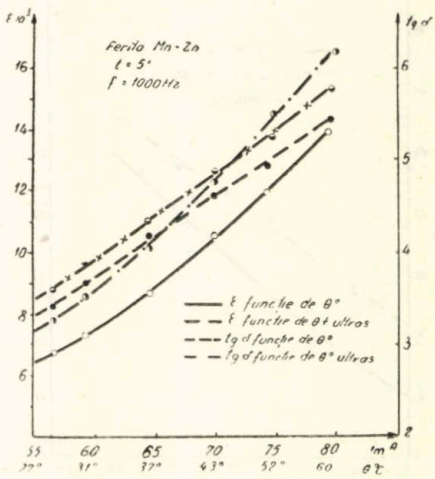


Fig. 4

De această dată se constată că:

a) creşterea lui ε' şi a lui tg δ cu intensitatea cîmpului ultrasonor este mult mai intensă decît în cazul variaţiei lor cu durata de acţiune a cîmpului ultrasonor;

b) tendinţa de apropiere a celor două curbe, în prezenţa şi în lipsa cîmpului ultrasonor, observată în fig. 1, 2, nu mai apare în această situaţie.

Pentru aceste determinări, măsurătorile experimentale ale valorilor lui ε', tg δ şi ale temperaturii corespunzătoare s-au făcut după 5 min de expunere a probei de ferită la intensitatea respectivă a cîmpului ultrasonor, trecîndu-se apoi la o intensitate mai mare a cîmpului, fără a se readuce proba de ferită la temperatura mediului ambiant.

Într-o altă serie de măsurători, după fiecare măsurare a lui ε', tg δ şi a temperaturii corespunzătoare pentru o anumită intensitate a cîmpului ultrasonor, s-a lăsat proba de ferită să revină la temperatura mediului ambiant şi abia apoi a fost supusă acţiunii unui cîmp ultrasonor mai intens. S-a măsurat atunci variaţia lui ε' şi tg δ pentru fiecare intensitate a cîmpului ultrasonor, atît în momentul aplicării sale, deci cînd nu exista nici o variaţie sensibilă a temperaturii datorită unui proces de absorbţie (fig. 5), cît şi după o acţiune de cîte 5 min pentru fiecare valoare a cîmpului ultrasonor, cînd s-a notat şi temperatura de la suprafaţa probei de ferită (fig. 6, 7).

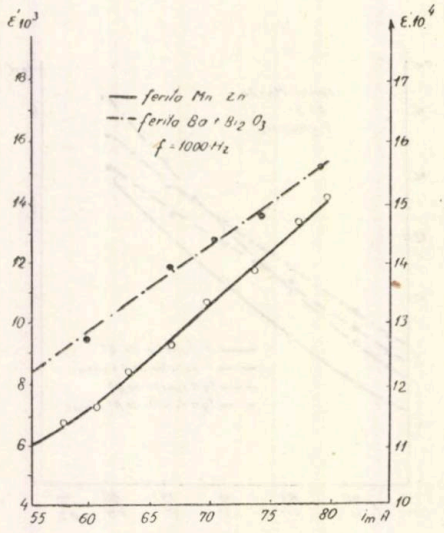


Fig. 5

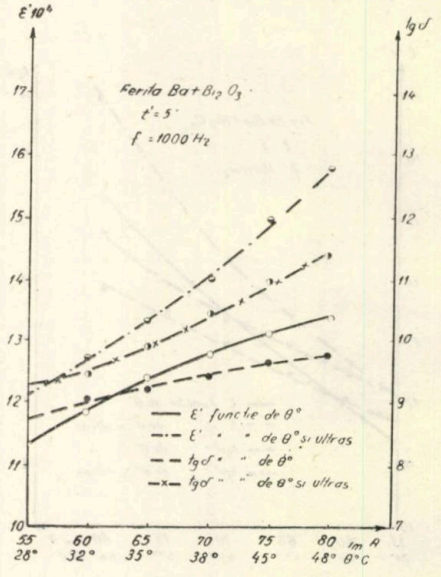


Fig. 6

Deşi şi în acest caz s-a lucrat cu aceleaşi valori ale intensităţii cîmpului ultrasonor şi cu aceeaşi durată de expunere a probelor de ferite la acţiunea cîmpului ultrasonor, ca şi în cazul cînd trecerea de la o valoare a intensităţii cîmpului la alta se făcea fără a readuce probele de ferite la temperatura ambiantă, totuşi curbele trasate sînt diferite.

Anume, temperaturile obţinute în acest caz sînt mai mici, lipsind efectul cumulativ al absorbţiei şi deci curbele de variaţie ale lui ε' şi tg δ, la aceeaşi temperatură, în prezenţa şi în lipsa cîmpului ultrasonor, diferă şi mai mult, ceea ce infirmă în bună măsură ipoteza că întregul proces de variaţie ale lui ε' şi tg δ ar fi numai de natură termică.

Acest lucru apare şi mai pregnant pe curbele de variaţie ale lui ε' şi tg δ cu intensitatea cîmpului ultrasonor în cazul măsurătorilor făcute în

momentul aplicării acestui cîmp (fig. 5), cînd proba de ferită nu dispune practic de timpul necesar de încălzire datorită absorbției.

3. Deși rezultatele experimentale de pînă acum indică o acțiune a cîmpului ultrasonor asupra proprietăților dielectrice ale feritelor analizate, totuși, înainte de a trece la interpretarea teoretică a rezultatelor obținute, se impune separarea completă a efectului termic de efectul ultrasonor, ca atare, lucru ce ne propunem să-l realizăm într-o lucrare ulterioară, prin utilizarea unor termocupluri care să permită determinarea temperaturii în interiorul probelor de ferite, în timpul măsurătorilor.

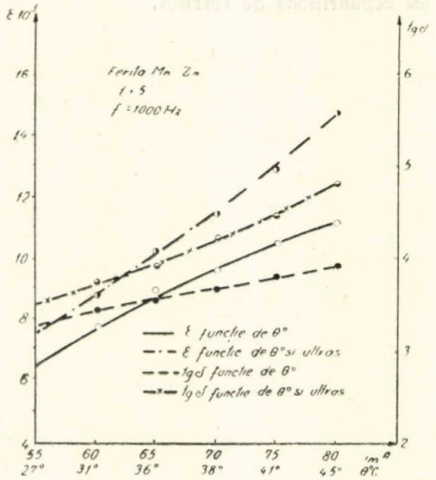


Fig. 7

De asemenea, într-o lucrare viitoare vom recurge și la cîmpuri ultrasonore de frecvență variabilă, pentru a determina și influența acestora asupra proprietăților dielectrice ale feritelor.

Institutul politehnic, Iași.
Catedra de fizică
și
Institutul agronomic, Iași

BIBLIOGRAFIE

1. Petrescu, V., Luca E., Savin Gh., Bărbulescu D., Luca I., Bul. Inst. polit Iași, 1960, **VI** (**X**), *1—2*, p. 211.
2. Luca E., Petrescu V., Bărbulescu D,. Savin Gh., Bul. Inst. polit. Iași, 1960, **VI** (**X**), *3-4*, p. 239
3. Luca I. și colab., St. și cerc. șt., Acad. R. P. R., Filiala Iași, 1957, *1*, p. 43.

L'INFLUENCE DES ULTRA-SONS SUR LES PROPRIÉTÉS DIÉLECTRIQUES DE CERTAINES FERRITES

(Résumé)

On détermine la variation de la permittivité (ε') et des pertes diélectriques ($tg\,\delta$) aux ferites dures du type Mn–Ba lorsqu'elles sont soumises à l'action d'un champ ultrasonique.

Les mesures expérimentales de ε' et $tg\delta$ ont été faites avec un pont de mesure „Tesla", à la fréquence de 1000 Hz, en traçant les courbes de variation de la permittivité (ε') et des pertes diélectriques ($tg\delta$) en fonction de l'intensité du champ ultra-sonique et de sa durée d'action sur les échantillons de ferrites.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 621.318.4

CARACTERISTICI ŞI POSIBILITĂŢI DE UTILIZARE ALE UNUI AMPLIFICATOR MAGNETIC TRIFAZAT CU MIEZ CENTRAL UNIC

DE

N. V. BOŢAN, LORIN CANTEMIR, BORIS PONOMAREV
şi EUGEN BALABAN

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9–11 noiembrie 1962

1. Introducere

Este cunoscut faptul că amplificatoarele magnetice trifazate, utilizate în mod curent, se construiesc pe trei miezuri distincte sub forma de amplificatoare magnetice monofazate. Aceasta conduce la consum important de material magnetic neferos, la gabarit şi greutate mare, la apariţia în înfăşurările de comandă a unor tensiuni alternative importante, precum şi la scheme de comandă complicate.

Înlăturarea dezavantajelor menţionate se poate obţine prin folosirea amplificatoarelor magnetice trifazate cu miez central unic, menţionate în literatura de specialitate [1], dar puţin studiate.

Pentru a studia comportarea acestor amplificatoare magnetice în acţionările electrice, am realizat în laborator un asemenea amplificator care a făcut obiectul unor studii cantitative, fără a se urmări, în prima etapă, obţinerea de performanţe. Cele trei circuite magnetice ale amplificatorului au fost executate de formă dreptunghiulară cu secţiunea rotundă, aşezate în stea (fig. 1). Înfăşurările de lucru au fost plasate pe cele trei ramuri exterioare, iar înfăşurarea de comandă unică pe miezul central.

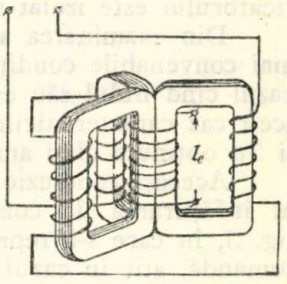


Fig. 1

În vederea clarificării unor particularităţi de funcţionare înfăşurările de lucru au fost prevăzute cu cîte 800 spire cu prize mediane, iar înfăşurarea de comandă cu 600 spire, dispuse în trei pachete separate de cîte 300, 200 şi 100 spire. Deoarece pe porţiunea liniară a curbei de magne-

tizare fluxurile în miezul central se anulează, nu sînt necesare cîte două înfășurări în opoziție pe miezurile laterale, ca la amplificatoarele magnetice obișnuite.

Prin construcția realizată s-au suprimat miezurile speciale pentru înfășurările de comandă, ceea ce a dus la micșorarea sensibilă a volumului de material magnetic. De asemenea prin folosirea unei singure înfășurări de comandă pe miezul central se reduce și volumul de material neferos utilizat.

2. Rezultatele cercetării

Încercările experimentale au fost efectuate în comparație cu un amplificator magnetic trifazat tip UJE-214, de construcție sovietică, pentru a pune în evidență particularitățile de funcționare ale amplificatorului magnetic cu miez central.

Încercările experimentale au urmărit: a) trasarea caracteristicilor intrare-ieșire la cele două amplificatoare, pentru diferite tensiuni de alimentare; b) variația tensiunii induse în înfășurările de comandă ale celor două amplificatoare în funcție de curentul de comandă, alegînd ca parametru tensiunea de alimentare; c) comportarea amplificatoarelor în regim de multiplicator de frecvență.

Toate încercările au fost făcute în următoarele condiții: circuitul de comandă alimentat de la acumulatoare, circuitul de comandă alimentat de la redresoare trifazate cu plăci de seleniu, circuitul de comandă alimentat de la redresoare trifazate cu plăci de seleniu și stabilizator de tensiune cu amplificatoare magnetice.

În toate cele trei cazuri înfășurările de lucru ale amplificatorului au fost conectate în stea cu nulul izolat și cu nulul legat la nulul rețelei de alimentare.

Pe baza încercărilor experimentale au fost trasate caracteristicile intrare-ieșire ale celor două amplificatoare. Astfel în fig. 2 sînt reprezentate cîteva din aceste caracteristici în cazul amplificatorul magnetic cu miez central, pentru diferite tensiuni de alimentare, diferite surse de alimentare a circuitului de comandă și pentru cazurile cînd nulul amplificatorului este izolat sau legat la nulul rețelei de alimentare.

Din examinarea acestor caracteristici rezultă în primul rînd că cele mai convenabile condiții de funcționare ale amplificatoruluia se obțin în cazul cînd nulul său este legat la nulul rețelei. După cum se observă în acest caz caracteristicile 1*b* și 3*b* sînt situate deasupra caracteristicilor 1*a* și 3*a* obținute cînd amplificatorul funcționează cu nulul izolat.

Aceeași concluzie rezultă și dacă se ține seamă de tensiunea indusă în înfășurarea de comandă a amplificatorului. După cum rezultă din fig. 3, în care s-a reprezentat tensiunea indusă în funcție de curentul de comandă, atît în cazul alimentării înfășurării de comandă de la o baterie de acumulatoare (curbele *1*), cît și în cazul alimentării de la redresoare

(curbele *3*), atunci cînd nulul amplificatorului este legat la nulul reţelei (curbele *b*), curbele de variaţie a tensiunii induse în funcţie de curentul de comandă sînt situate sub curbele de variaţie a tensiunii induse cînd nulul amplificatorului este izolat (curbele *a*).

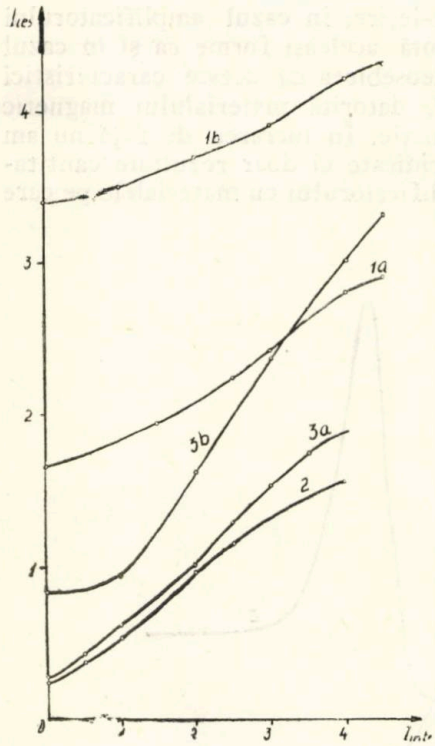


Fig. 2

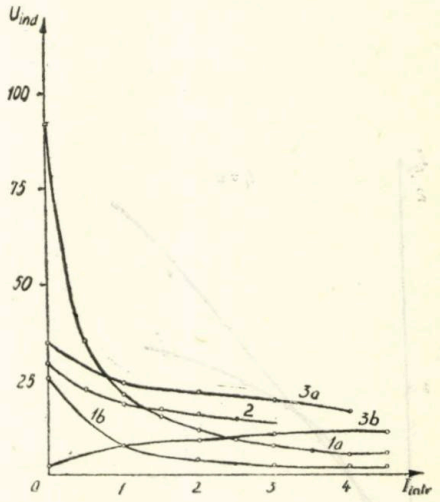


Fig. 3

Cît priveşte alimentarea înfăşurării de comandă a amplificatorului cu redresoare simple (curbele *2*) sau cu redresoare cu stabilizatoare de tensiune (curbele *3*), avantajele folosirii stabilizatoarelor nu sînt concludente nici din punctul de vedere al caracteristicilor intrare-ieşire şi nici din punctul de vedere al tensiunilor induse în înfăşurarea de comandă.

Pentru a pune în evidenţă influenţa tensiunii de alimentare a amplificatorului asupra curentului de ieşire, în fig. 4 s-au trasat curbele de variaţie a curentului de ieşire în funcţie de tensiunea de alimentare, pentru un acelaşi curent de comandă. După cum era şi firesc, se observă că cu cît tensiunea de alimentare se apropie mai mult de valoarea tensiunii nominale a amplificatorului, cu atît funcţionarea în regim de amplificator este mai convenabilă. Mai rezultă de asemenea avantajul ali-

mentării înfășurării de comandă de la baterii de acumulatoare (curba *1*), față de alimentarea cu curent continuu de la redresoare (curba *2*), în special pentru tensiuni de alimentare mai mari decît 50% din tensiunea nominală de alimentare. Această concluzie rezultă și din compararea curbelor din fig. 2.

În privința caracteristicilor intrare-ieșire, în cazul amplificatorului magnetic trifazat de tip UJE, ele prezintă aceleași forme ca și în cazul amplificatorului cu miez central, cu deosebirea că aceste caracteristici sînt superioare celor indicate în fig. 2, datorită materialului magnetic de calitate superioară folosit la construcție. În lucrarea de față nu am urmărit însă obținerea de performanțe ridicate ci doar rezultate cantitative, fapt care a dus la construcția amplificatorului cu materialele pe care le-am avut la dispoziție.

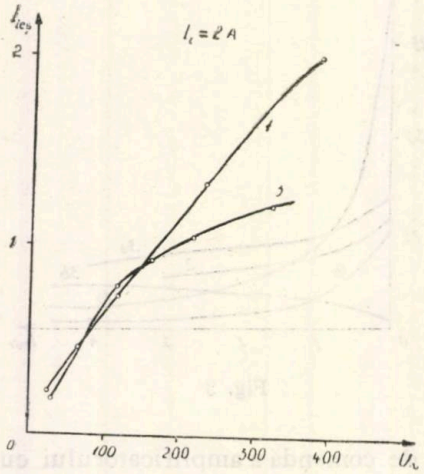


Fig. 4

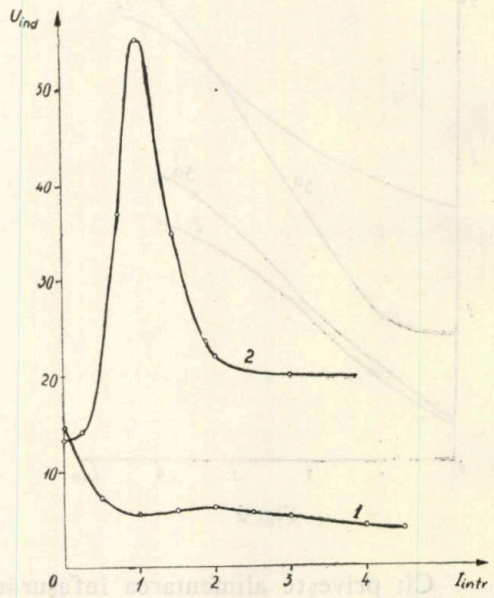
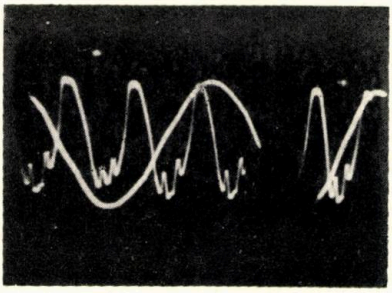
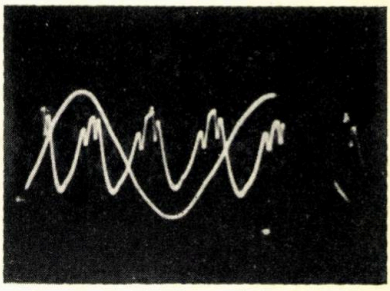


Fig. 5

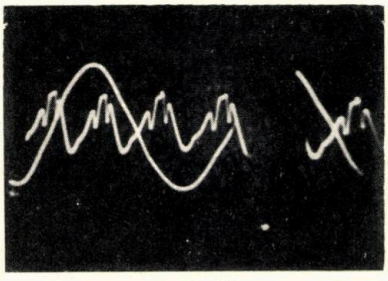
În legătură cu tensiunile induse în înfășurarea de comandă pentru cele două amplificatoare magnetice, se observă (fig. 5) că ele sînt mult mai mari în cazul amplificatorului magnetic de tip UJE (curba *2*) decît în cazul amplificatorului magnetic cu miez central (curba *1*), pentru aceeași tensiune de alimentare, lucru de altfel previzibil după cum s-a arătat mai sus. Se mai observă de asemenea că în cazul amplificatorului de tip UJE graficul de variație a tensiunii induse prezintă maxime destul de pronunțate pentru diferite valori ale curentului de comandă, funcție de



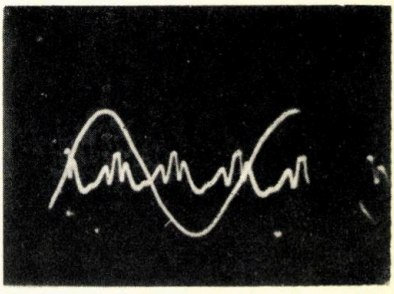
a) $I_{intr} = 0{,}5$ A.



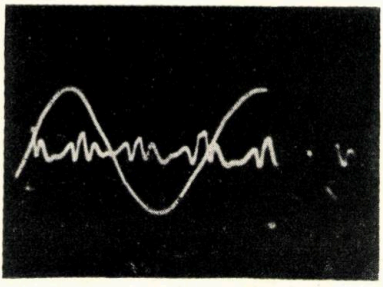
b) $I_{intr} = 1$A.



c) $I_{intr} = 2$A.



d) $I_{intr} = 3$A.



e) $I_{intr} = 4$A.

Fig. 6

tensiunea de alimentare, ceea ce constituie un dezavantaj al acestor amplificatoare față de cele cu miez central.

Pentru a studia comportarea amplificatorului cu miez central ca multiplicator de frecvență s-a montat în circuitul de comandă un frecvențmetru la bornele unor spire nealimentate cu curent continuu, la care s-a făcut și lectura tensiunilor induse. S-a constatat astfel o variație a frecvenței și amplitudinii tensiunilor induse. Frecvența variază de la 150 Hz, pentru curent de comandă nul sau de valori reduse, pînă la 300 Hz, pentru valori crescătoare ale curentului de comandă. În cazul alimentării circuitului de comandă de la baterii de acumulatoare apar numai frecvențe de 150 Hz.

Atunci cînd alimentarea circuitului de comandă are loc de la redresoare cu stabilizatoare de tensiune apar și frecvențe de 300 Hz, dar amplitudinea tensiunilor induse în acest caz este cca. 50% din amplitudinea tensiunii induse în cazul alimentării circuitului de comandă de la redresoare fără stabilizatoare de tensiune.

În fig. 6 sînt reproduse cîteva oscilograme obținute în cazul alimentării circuitului de comandă cu redresor fără stabilizator de tensiune, pentru diferite valori crescătoare ale curentului de comandă. Ele explică apariția tensiunilor de frecvență 150 Hz și 300 Hz pe seama apariției armonicilor de ordinul 3 și 6 pe măsura creșterii curentului de comandă al amplificatorului. Se observă că pe măsură ce crește curentul de comandă amplitudinea tensiunii induse scade și devin preponderente armonicile de ordin 6 în locul celor de ordin 3.

Remarcăm că în ceea ce privește folosirea amplificatorului magnetic de tip UJE ca multiplicator de frecvență nu s-au observat deosebiri esențiale față de cazul amplificatorului cu miez central.

3. Concluzii

În raport cu amplificatoarele magnetice trifazate obișnuite, amplificatorul magnetic trifazat cu miez central unic prezintă în afară de avantajele de ordin economic și unele avantaje din punct de vedere funcțional, fapt care recomandă utilizarea lui practică și mai ales aprofundarea studiilor și din punct de vedere calitativ.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de utilizări electrice și automatizări

BIBLIOGRAFIE

1. Розенблат М. А., *Магнитные усилители.* Сов. радио, М., 1960.
2. Сторм Г. Ф., *Магнитные усилитель.* ИИЛ, М., 1957.

ХАРАКТЕРИСТИКИ И ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТРЕХФАЗНОГО МАГНИТНОГО УСИЛИТЕЛЯ С ОДНИМ ЦЕНТРАЛЬНЫМ СЕРДЕЧНИКОМ

(Резюме)

Приводятся результаты иследований произведенных авторами над трехфазным магнитным усилителем с центральным сердечником, специально построенным с этой целью. Произведенные опыты доказали, что усилитель, кроме экономических, приводит к ряду технических преимуществ, из которых следует отметить пониженные индуктированные переменные электродвижущие силы в цепи постоянного тока, благоприятное поведение усилителя при работе как фактора повышения частоты и т. д. Опыты приводят к заключению, что преимущества такого рода усилителя рекомендуют его более обширное практическое применение.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 621.32

CU PRIVIRE LA AMPLASAMENTUL OPTIM DIN PUNCT DE VEDERE ENERGETIC AL APARATELOR DE ILUMINAT SIMETRICE ŞI PUNCTIFORME[1])

DE

V. PRISĂCARU şi C. HUŢANU

1. Iluminarea într-un punct P, din planul A, atunci cînd se cunoaşte valoarea intensităţii luminoase I_α în direcţia punctului P (fig. 1), se poate exprima prin relaţia:

$$E = \frac{I_\alpha \cos\alpha}{\overline{LP}^2} = \frac{I_\alpha \cos\alpha}{h^2 + d^2}. \tag{1}$$

Din relaţia (1) se vede că atunci cînd h variază, iluminarea punctului P se modifică şi anume pentru $h = 0$ rezultă $E = 0$ iar pe măsură ce h creşte, va creşte şi iluminarea, atingînd o valoare maximă pentru un anumit h, după care h continuînd să crească, iluminarea începe să scadă. Cu alte cuvinte, pentru o anumită valoare a lui $d \neq 0$, există numai o anume valoare a lui h, numită valoare optimă, pentru care iluminarea punctului P este maximă. Rezultă că pentru a obţine o anumită iluminare într-un punct dat, pe suprafaţa de iluminat, cînd nu este îndeplinită condiţia h optim, va fi necesară o putere luminoasă (flux luminos) mai mare şi respectiv o putere absorbită de la reţea mai mare, deci un consum sporit de energie electrică.

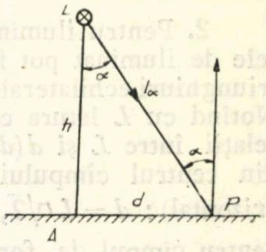


Fig. 1

Avînd în vedere că h optim depinde de valoarea lui d, se poate stabili cea mai avantajoasă relaţie între d şi h pentru care iluminarea în punctul P să fie maximă. Această relaţie depinde exclusiv de forma curbei fotometrice a aparatului de iluminat respectiv. Prin urmare pentru orice aparat

[1]) Extras şi prelucrat din lucrarea de disertaţie *Contribuţii teoretice şi experimentale cu privire la calculul iluminatului electric*, de V. Prisăcaru, Iaşi, 1963.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

de iluminat la care se cunoaşte curba fotometrică se poate stabili relaţia optimă între h şi d.

Pentru aparatele de iluminat simetrice şi punctiforme, a căror curbă fotometrică se poate exprima prin relaţia

$$I_\alpha = I_m \cos^n \alpha, \tag{2}$$

în care I_m este valoarea intensităţii luminoare după axa aparatului de iluminat, se poate trasa, pentru diferite valori ale lui n, curba fotometrică a respectivului aparat. I_m fiind o constantă pentru un anumit aparat de iluminat, (1) permite să se scrie

$$E = \frac{I_\alpha \cos \alpha}{LP^2} = \frac{I_\alpha \cos^3 \alpha}{h^2} = \frac{I_m \cos^{n+3} \alpha}{h^2} \equiv \operatorname{prop}\left(\frac{\cos^{n+3} \alpha}{h^2}\right), \tag{3}$$

adică iluminarea E este proporţională cu $\cos^{n+3} \alpha$, ceea ce nu schimbă cu nimic condiţiile de maxim ale funcţiei respective. Se deduce că iluminarea punctului P va fi maximă pentru o valoare optimă a raportului h/d, dată de relaţia [3]

$$\left(\frac{h}{d}\right)_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{n+1}{2}} = K. \tag{4}$$

Dacă curba fotometrică nu poate fi exprimată prin relaţia (2) valoarea optimă a raportului se poate determina prin calcule directe, folosind (1) pus sub forma

$$E = \operatorname{prop}\left(\frac{I_\alpha \cos^3 \alpha \, d^2}{h^2}\right) = \operatorname{prop}\left(I_\alpha \cos^3 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha\right), \quad \text{adică} \quad E = f\left(\frac{h}{d}\right), \tag{5}$$

valorile lui I_α obţinîndu-se din curba fotometrică a aparatului de iluminat respectiv, la un flux convenţional de 1000 lm al izvorului de lumină.

2. Pentru iluminarea unei suprafeţe dreptunghiulare $S = AB$, aparatele de iluminat pot fi aşezate pe vîrfurile unor dreptunghiuri, patrate sau triunghiuri echilaterale, iluminarea minimă fiind în centrul acestor cîmpuri. Notînd cu L latura cîmpului, se pot stabili, în cele trei cazuri considerate, relaţii între L şi d (d fiind distanţa de la punctul de iluminare minimă din centrul cîmpului pînă la proiecţia aparatelor de iluminat pe planul orizontal): $d = L/\sqrt{2}$, pentru cîmpul de formă unui patrat; $d = \sqrt{L_1^2 + L_2^2}/2$, pentru cîmpul de formă dreptunghiulară şi $d = L/\sqrt{3}$, pentru cîmpul de formă triunghiulară (triunghi echilateral). Cunoscînd valoarea optimă a raportului h/d se pot stabili relaţiile între distanţa L dintre aparatele de iluminat şi înălţimea de aşezare h;

$$L = \frac{\sqrt{2}}{K} h; \quad L_1^2 + L_2^2 = \frac{4}{K^2} h^2; \quad L = \frac{\sqrt{3}}{K} h. \tag{6}$$

Considerînd aparatele de iluminat plasate la înălţimi egale, pentru aceeaşi formă a curbei fotometrice, numărul total al corpurilor de iluminat necesar iluminării suprafeţei S va fi

(7) $$N_p = \frac{SK^2}{2h^2}, \quad (8) \quad N_d = \frac{SK^2}{4h^2 \cos\alpha \sin\alpha}$$

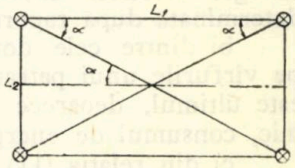


Fig. 2

şi

(9) $$N_t = \frac{2}{3}\frac{SK^2}{\sqrt{2}h^2},$$

unde N_p, N_d şi N_t reprezintă numărul total de aparate de iluminat în cazul aşezării în vîrfurile unui patrat, dreptunghi, respectiv triunghi echilateral. Din relaţia (8) rezultă că N_d va fi minim (fig. 2) cînd $\alpha = 45°$, deci cînd dreptunghiul se reduce la un patrat. Este evident că dintre cele două moduri de aşezare — în patrat sau dreptunghi — primul este cel mai avantajos. Împărţind relaţiile (7) şi (9) obţinem

(10) $$N_p = \frac{3\sqrt{3}}{4} N_t = 1{,}3\, N_t .$$

Din (10) rezultă că pentru aceeaşi valoare a lui K, aşezarea corpurilor de iluminat în vîrfurile unui triunghi echilateral conduce la un număr de 1,3 ori mai mic de aparate, decît aşezarea pe vîrfurile unui patrat.

3. Cunoscînd curbele fotometrice ale aparatelor de iluminat se poate determina valoarea iluminării în centrul cîmpului, oricare ar fi forma lor. Astfel, considerînd că la iluminarea punctului iau parte numai aparatele de iluminat care determină forma cîmpului, se poate scrie $\varepsilon_t = 3e$ — în cazul cîmpului de forma unui triunghi echilateral şi $\varepsilon_p = 4e$ — în cazul cîmpului de forma unui patrat, în care $e = (I_\alpha \cos^3\alpha)/h^2$ este iluminarea dată în centrul cîmpului de un singur aparat de iluminat, la un flux convenţional al lămpii de 1 000 lm.

Pentru a realiza aceeaşi iluminare E în centrul cîmpului în ambele cazuri vor trebui satisfăcute relaţiile $E = 4e\Phi_p/1\,000$ şi $E = 3e\Phi_t/1\,000$, de unde rezultă

(11) $$\Phi_t = \frac{4}{3}\Phi_p .$$

Ţinînd seama şi de relaţia (10), fluxul luminos total necesar pentru iluminarea suprafeţei S va fi în ambele cazuri $\varphi_p = \Phi_p N_p$ şi $\varphi_t = \Phi_t N_t$ sau

(12) $$\varphi_t = \frac{4}{3}\frac{1}{1{,}3}\Phi_p N_p \simeq \Phi_p N_p = \varphi_p .$$

4. Din cele de mai sus se desprind următoarele concluzii:

a) pentru realizarea unei iluminări E pe suprafaţa S, consumul de energie electrică absorbit de la reţea este minim cînd înălţimea h este determinată după raportul h/d optim;

b) dintre cele două moduri de amplasare a aparatelor de iluminat, pe vîrfurile unui patrat sau ale unui triunghi echilateral, cel mai avantajos este ultimul, deoarece conduce la un consum de material de 1,3 ori mai mic, consumul de energie electrică fiind acelaşi;

c) din relaţia (11) rezultă că în cazul amplasării aparatelor de iluminat pe vîrfurile unui triunghi echilateral, fluxul luminos necesar pe aparat de iluminat va fi cu 33% mai mare decît în cazul aşezării pe vîrfurile unui patrat. Ţinînd seama că la majoritatea lămpilor eficacitatea luminoasă creşte cu puterea lămpii, pentru a obţine aceeaşi iluminare E în centrul cîmpului, va fi necesară o putere instalată mai mică decît cea determinată cu (11) şi anume

$$P_t = \frac{4}{3}\frac{\eta_p}{\eta_t} P_p, \tag{13}$$

în care P_t şi η_t reprezintă puterea instalată şi eficacitatea luminoasă a lămpii la aşezarea pe vîrfurile unui triunghi echilateral, P_p şi η_p — aceleaşi mărimi în cazul aşezării pe vîrfurile unui patrat.

d) în final rezultă că amplasarea corpurilor de iluminat pe vîrfurile unui triunghi echilateral la o înălţime impusă de $(h/d)_{opt}$ constituie soluţia cea mai avantajoasă din punct de vedere energetic şi economic.

5. Reluînd relaţia (3) şi exprimînd pe $\cos\alpha$ prin K şi h, determinate de (4), obţinem

$$E_1 = \frac{I_m \cos^{n+3}\alpha}{h^2} = \frac{I_m}{h^2}\left(\frac{K}{\sqrt{K^2+1}}\right)^{n+3}, \tag{14}$$

E_1 fiind iluminarea dată de un aparat de iluminat în centrul cîmpului, la un flux Φ al lămpii.

Dar, fluxul emis de aparatul de iluminat se poate exprima prin $\Phi' = 2\pi\int_0^{\pi} I_\alpha \sin\alpha\, d\alpha$. Ţinînd seama de (2), mai putem scrie

$$\Phi' = 2\pi I_m \int_0^{\pi} \cos^n\alpha \sin\alpha\, d\alpha. \tag{15}$$

Notînd cu Φ fluxul lămpii şi cu η randamentul corpului de iluminat, (15) devine

$$\eta \Phi = 2\pi I_m \int_0^{\pi} \cos^n \alpha \sin \alpha \, d\alpha . \tag{16}$$

Introducînd valoarea lui I_m din (16) în (14), se obţine

$$E_1 = \frac{\eta \Phi}{h^2 2\pi \int_0^{\pi} \cos^n \alpha \sin \alpha \, d\alpha} \left(\frac{K}{\sqrt{K^2 + 1}} \right)^{n+3} = C \frac{\eta \Phi}{h^2}, \tag{17}$$

în care $C = \left[2\pi \int_0^{\pi} \cos^n \alpha \sin \alpha \, d\alpha \right]^{-1} (K/\sqrt{K^2 + 1})^{n+3}$ este o constantă pentru un anumit tip de aparat de iluminat şi o anumită formă a curbei fotometrice.

Mărimea E_1 se determină cu relaţiile

$$E_1 = \frac{EK_d}{4}, \quad \text{sau} \quad E_1 = \frac{EK_d}{3}, \tag{18}$$

dacă lămpile sînt aşezate pe vîrfurile unui patrat, respectiv ale unui triunghi echilateral, K_d fiind coeficientul de depreciere iar E — iluminarea minimă de realizat în centrul cîmpului.

Relaţia (17) permite trasarea unor nomograme $E_1 = f(h, \Phi)$, care uşurează calculele, permiţînd determinarea uneia din mărimile necunoscute cînd două sînt cunoscute.

Pentru o distribuţie cosinusoidală a intensităţii luminoase ($n = 1$, $K = 1$ şi $C = 1/(4\pi)$) relaţia (17) devine

$$E_1 = \frac{\eta \Phi}{4h^2}. \tag{19}$$

În fig. 3 s-au trasat în baza lui (19) curbele $E_1 = f(h)$ pentru diferite valori ale fluxului luminos Φ al lămpii, la un randament al aparatelor de iluminat $\eta = 0{,}8$.

În cazul cînd randamentul aparatului de iluminat η' diferă de 0,8, valoarea iluminării se recalculează înainte de a fi folosită diagrama, cu relaţia $E_1' = E_1 \eta/\eta'$. Ţinînd seama de (6), diagrama din fig. 3 permite a determina şi distanţele dintre aparatele de iluminat, L.

6. Exemplu. Fie o piaţă a cărei iluminare minimă $E = 20$ lx ne propunem să o realizăm cu aparate de iluminat cu distribuţie cosinusoidală a intensităţii luminoase, avînd $K_d = 1{,}3$ şi $\eta = 0{,}8$ şi aşezate la înălţimea $h = 11$ m.

a) la aşezarea pe vîrfurile unui patrat, E_1 va fi $E_{1p} = EK/4 = (20 \cdot 1,3)/4 = 6,5$ lx. Din fig. 3 rezultă (linia întreruptă) $\Phi_p = 12\,400$ lm şi $L_p = 15,5$ m.

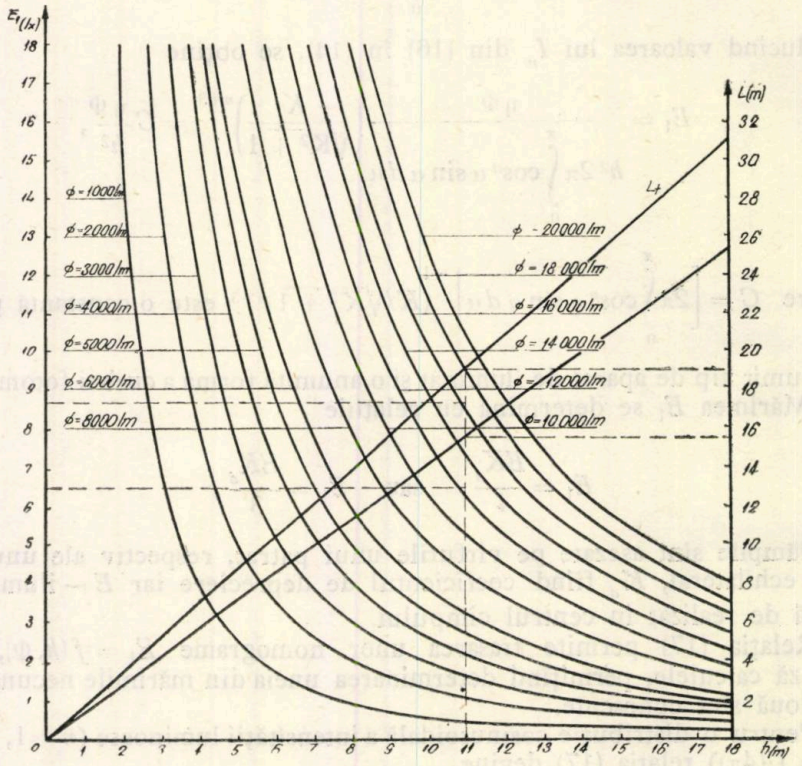


Fig. 3

b) la aşezarea pe vîrfurile unui triunghi echilateral, E_1 va fi $E_{1t} = EK/3 = (20 \cdot 1,3)/3 = 8,67$ lx iar $\Phi_t = 16\,700$ lm şi $L_t = 19$ m.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de utilizări electrice
şi automatizări

BIBLIOGRAFIE

1. Федоров Б. Ф., *Общий курс светотехники.* ГЕИ, М., 1944.
2. Cohu M. *Rayonnement, photométrie et éclairage.* Gauthier-Villars, Paris, 1949.
3. Knorring G. M., *Proiectarea iluminatului electric.* E.E.S., Buc., 1950 (trad. din l. rusă).
4. Gheorghiu N., Militaru P., *Iluminatul electric.* E.E.S., Buc., 1952.
5. *** *Manualul inginerului electrician.* Vol. V, Ed. Tehn., Buc., 1957.

PROBLÈMES TOUCHANT L'EMPLACEMENT OPTIME DU POINT DE VUE ENERGÉTIQUE DES APPAREILS D'ÉCLAIRAGE SYMÉTRIQUES ET POINTIFORMES

(Résumé)

On détermine le moyen le plus avantageux du point de vue énérgetique et économique, pour emplacer des corps d'éclairage en partant de la valeur optime du rapport entre la hauteur à laquelle on pose les appareils d'éclairage vis-à-vis du plan d'illumination horizontal et la distance du point d'éclairage vis-à-vis de la projection sur ce plan, de l'appareil d'éclairage [3].

On établit ensuite une relation générale à l'aide de laquelle on peut déterminer l'un des paramètres inconnus (l'éclairage, le flux, la hauteur d'emplacement) lorsqu'on connaît les deux autres paramètres. À la fin de l'ouvrage on donne un exemple de calcul pour le cas d'une distribution cosinusoïdale de l'intensité lumineuse en employant une nomogramme réalisée d'après la relation générale.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 621.317.78

ANALIZA INDICAŢIILOR UNUI WATTMETRU (CONTOR) MONOFAZAT MONTAT ÎNTR-O REŢEA TRIFAZATĂ CU TREI CONDUCTOARE, ÎN REGIM DEZECHILIBRAT (SIMPLU SIMETRIC), LA MODIFICAREA NESIMETRIEI REŢELEI [1])

DE

LAURIAN PREDA

1. Introducere

Într-un sistem trifazat cu trei conductoare, un wattmetru sau contor monofazat poate fi montat în maximum 9 moduri distincte. Pentru fiecare montaj se obţine o deviaţie a acului indicator, pe care o notăm cu $(a,b,...,i)$ conform tabelului 1.

Dacă reţeaua este simplu simetrică, cu tensiuni simetrice la borne dar curenţi nesimetrici, atunci construind diagramele vectoriale se pot determina expresiile analitice ale indicaţiilor instrumentului, funcţie de ordinea nesimetriei curenţilor.

Tabelul 1

	I_a	I_b	I_c
U_{ab}	a	b	c
U_{bc}	d	e	f
U_{ca}	g	h	i

Diagramele vectoriale au fost construite în ipoteza unui sistem de tensiuni simetrice. Curenţii nesimetrici au valori efective diferite, fiind permutaţi pe cele trei faze în toate cele şase moduri posibile. Diagramele rămîn aceleaşi pentru orice valori efective ale curenţilor, dacă se păstrează aceeaşi ordine a nesimetriei.

În prezenta lucrare s-au construit diagramele vectoriale pentru valori particulare ale curenţilor de 5 A, 4 A şi respectiv 3 A. Utilizarea aceloraşi curenţi pe cele trei faze şi permutarea lor constituie de fapt o metodă

[1]) Cercetare efectuată sub conducerea ştiinţifică a tov. prof. dr. doc. şt. V. Petrescu, conţinînd parte din rezultatele comunicate în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic „Gh. Gheorghiu-Dej" din Bucureşti, din 27–29 mai 1966.

pentru găsirea expresiilor analitice ale indicaţiilor unui wattmetru sau contor monofazat, montat într-o reţea trifazată cu trei conductoare, în regim dezechilibrat, simplu simetric. Rezultă că se poate determina expresia analitică a indicaţiei wattmetrului, funcţie de modul de montare şi de ordinea nesimetriei curenţilor.

În cele ce urmează se stabilesc expresiile analitice pentru orice ordine a nesimetriei curenţilor, în practică aceasta putînd fi oarecare. Pe baza lor se determină apoi montajele ce nu sînt influenţate de ordinea nesimetriei în raport cu fazele, deci montajele ce pot măsura întotdeauna corect.

2. Analiza indicaţiilor wattmetrului

A) $I_a > I_b > I_c$,

(în diagrama vectorială $I_a = 5\,\text{A}$, $I_b = 4\,\text{A}$, $I_c = 3\,\text{A}$).

Triunghiul curenţilor, al tensiunilor, descompunerea grafică a sistemului trifazat nesimetric de curenţi în sistemele simetrice direct şi invers sînt reprezentate în fig. 1...3, în timp ce diagrama vectorială este dată în fig. 4.

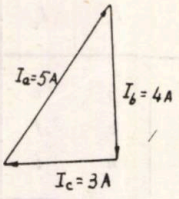


Fig. 1

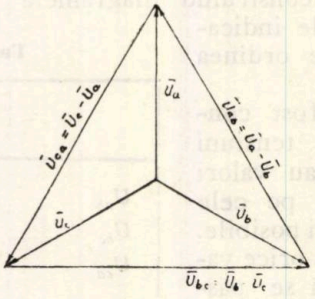


Fig. 2

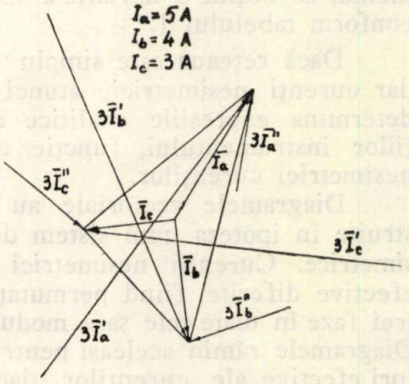


Fig. 3

Între tensiuni şi curenţi rezultă defazajele din tabelul 2 [7]. Deci defazajele menţionate în [7] corespund numai cazului $I_a > I_b > I_c$.

Dar $\cos(30°+\varphi) = (\sqrt{3}/2)\cos\varphi - (1/2)\sin\varphi$, $\cos(150°+\varphi) = -(\sqrt{3}/2)\cos\varphi - (1/2)\sin\varphi$, $\cos(270°+\varphi) = \cos(90°-\varphi) = \sin\varphi$. Notînd $P = 3\,U_1\,I'\cos\varphi'$ şi $Q = 3\,U_1\,I'\sin\varphi'$ puterile active şi reactive din circuit, $p_1 = 3U_1 I''\cos\varphi''_1$

Tabelul 2

$I_a > I_b > I_c$

	I_a		I_b		I_c	
	I_a'	I_a''	I_b'	I_b''	I_c'	I_c''
U_{ab}	$30° + \varphi'$	$30° + \varphi_1''$	$150° + \varphi'$	$90° - \varphi_1''$	$90° - \varphi'$	$150° + \varphi_1''$
U_{bc}	$90° - \varphi'$	$90° - \varphi_1''$	$30° + \varphi'$	$150° + \varphi_1''$	$150° + \varphi'$	$30° + \varphi_1''$
U_{ca}	$150° + \varphi'$	$150° + \varphi_1''$	$90° - \varphi'$	$30° + \varphi_1''$	$30° + \varphi'$	$90° - \varphi_1''$

și $q_1 = 3U_1 I'' \sin \varphi_1''$, puterile active și reactive de nesimetrie, $U_1 = U_a = U_b = U_c$ valorile efective ale tensiunii de fază, rezultă că cele nouă expresii analitice ale indicației instrumentului de măsură vor fi:

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} a = +\dfrac{P}{2} - \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} + \dfrac{p_1}{2} - \dfrac{q_1}{2\sqrt{3}}, & b = -\dfrac{P}{2} - \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} + \dfrac{q_1}{\sqrt{3}}, \\ c = +\dfrac{Q}{\sqrt{3}} - \dfrac{p_1}{2} - \dfrac{q_1}{2\sqrt{3}}, & d = +\dfrac{Q}{\sqrt{3}} + \dfrac{q_1}{\sqrt{3}}, \\ e = +\dfrac{P}{2} - \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} - \dfrac{p_1}{2} - \dfrac{q_1}{2\sqrt{3}}, & f = -\dfrac{P}{2} - \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} + \dfrac{p_1}{2} - \dfrac{q_1}{2\sqrt{3}}, \\ g = -\dfrac{P}{2} - \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} - \dfrac{p_1}{2} - \dfrac{q_1}{2\sqrt{3}}, & h = +\dfrac{Q}{\sqrt{3}} + \dfrac{p_1}{2} - \dfrac{q_1}{2\sqrt{3}}, \\ i = +\dfrac{P}{2} - \dfrac{Q}{2\sqrt{3}} + \dfrac{q_1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Se constată că între cele nouă indicații există relațiile

$$a + b + c = 0, \qquad a + d + g = 0,$$
$$d + e + f = 0, \qquad b + e + h = 0,$$
$$g + h + i = 0, \qquad c + f + i = 0.$$

B) $I_b > I_c > I_a$,

(în diagramă $I_a = 3\,\text{A}$, $I_b = 5\,\text{A}$, $I_c = 4\,\text{A}$).

Menţinînd aceleaşi valorile efective ale tensiunilor şi curenţilor, dar permutînd circular curenţii în raport cu fazele (deci păstrînd acelaşi P, Q şi respectiv φ') rezultă diagrama vectorială din fig. 5, apărînd deci noi defazaje.

Procedînd ca şi în cazul anterior rezultă următoarele expresii analitice pentru indicaţiile wattmetrului monofazat:

$$(B)\quad \begin{cases} a = +\frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} + \frac{q_1}{\sqrt{3}}, & b = -\frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} - \frac{p_1}{2} - \frac{q_1}{2\sqrt{3}}, \\ c = + \frac{Q}{\sqrt{3}} + \frac{p_1}{2} - \frac{q_1}{2\sqrt{3}}, & d = + \frac{Q}{\sqrt{3}} - \frac{p_1}{2} - \frac{q_1}{2\sqrt{3}}, \\ e = +\frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} + \frac{p_1}{2} - \frac{q_1}{2\sqrt{3}}, & f = -\frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} + \frac{q_1}{\sqrt{3}}, \\ g = -\frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} + \frac{p_1}{2} - \frac{q_1}{2\sqrt{3}}, & h = + \frac{Q}{\sqrt{3}} + \frac{q_1}{\sqrt{3}}, \\ i = +\frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} - \frac{p_1}{2} - \frac{q_1}{2\sqrt{3}}. \end{cases}$$

C) $I_c > I_a > I_b$,

(în diagramă $I_a = 4\,\text{A}$, $I_b = 3\,\text{A}$, $I_c = 5\,\text{A}$).

Ca şi în cazul precedent prin permutarea circulară a valorilor efective ale curenţilor în raport cu fazele rezultă diagrama vectorială din fig. 6.

Expresiile analitice ale indicaţiilor wattmetrului devin:

$$(C)\quad \begin{cases} a = +\frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} - \frac{p_1}{2} - \frac{q_1}{2\sqrt{3}}, & b = -\frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} + \frac{p_1}{2} - \frac{q_1}{2\sqrt{3}}, \\ c = + \frac{Q}{\sqrt{3}} + \frac{q_1}{\sqrt{3}}, & d = + \frac{Q}{\sqrt{3}} + \frac{p_1}{2} - \frac{q_1}{2\sqrt{3}}, \\ e = +\frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} + \frac{q_1}{\sqrt{3}}, & f = -\frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} - \frac{p_1}{2} - \frac{q_1}{2\sqrt{3}}, \\ g = -\frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} + \frac{q_1}{\sqrt{3}}, & h = + \frac{Q}{\sqrt{3}} - \frac{p_1}{2} - \frac{q_1}{2\sqrt{3}}, \\ i = +\frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} + \frac{p_1}{2} - \frac{q_1}{2\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Analizînd expresiile (A), (B), (C) se constată următoarele:

1. Primii doi termeni ai acestor expresii sînt aceiaşi în toate cele trei cazuri.

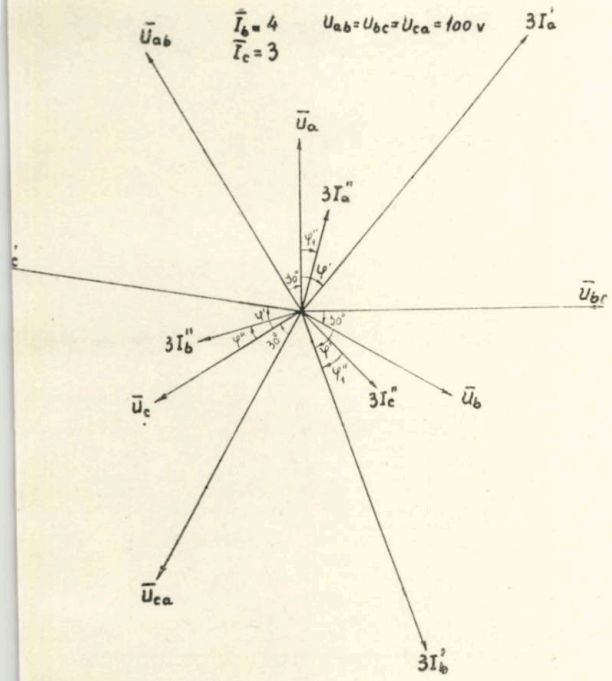


Fig. 4

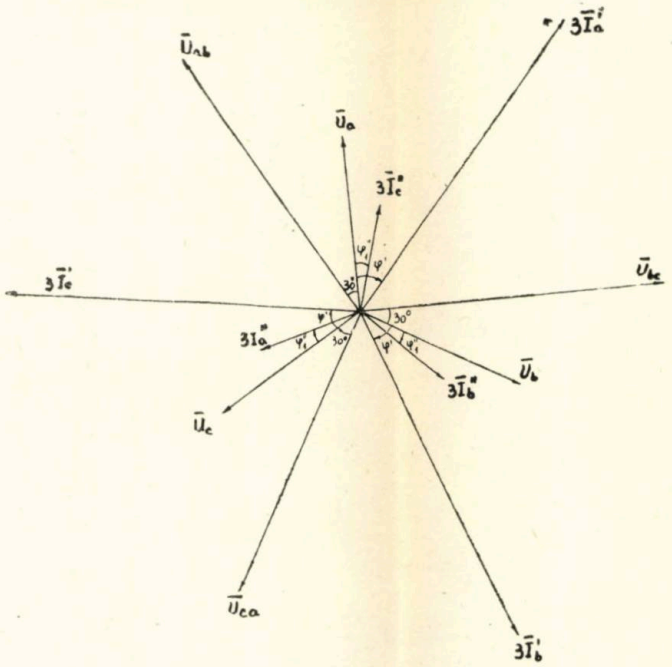


Fig. 5

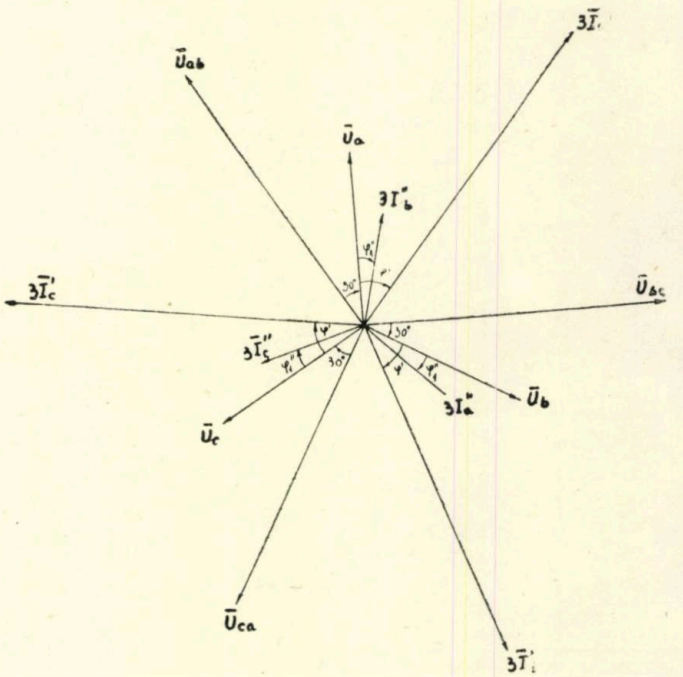
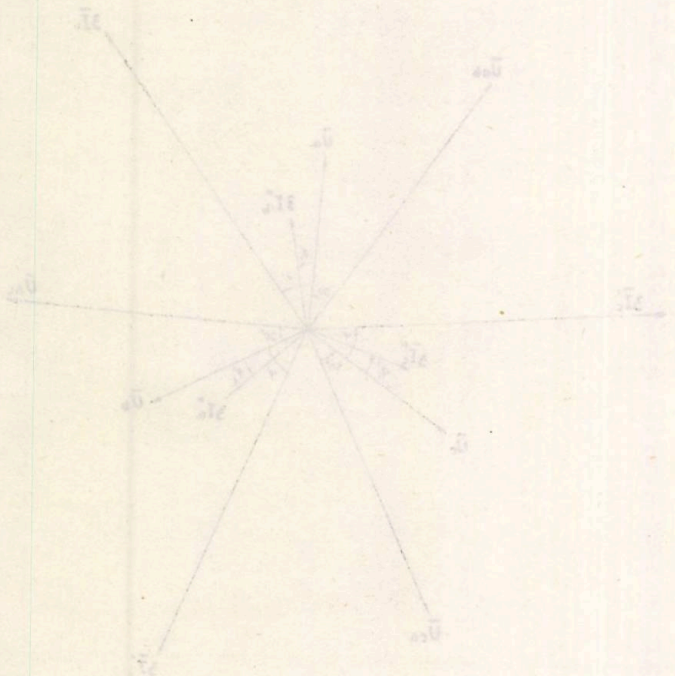
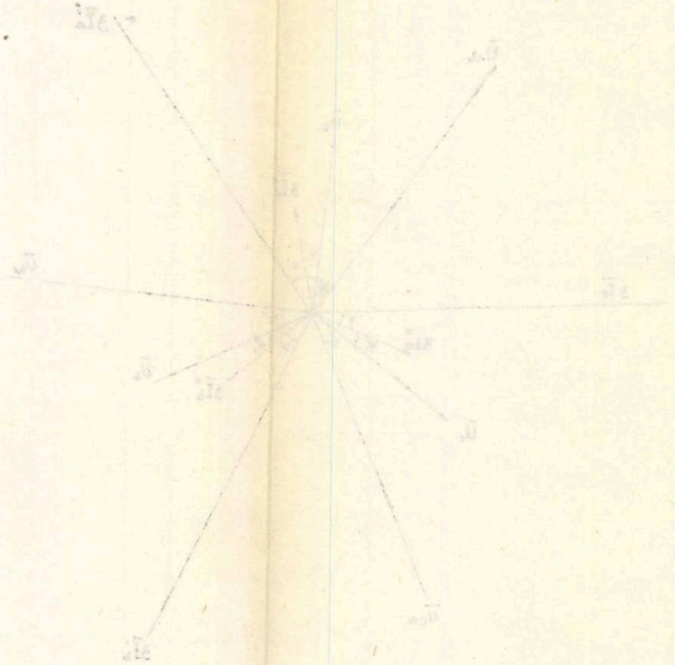


Fig. 6





2. Ultimii doi termeni diferă de la un caz la altul.

3. Expresiile corespunzătoare unuia din cele 3 cazuri se pot obține din celelalte printr-o simplă permutare convenabilă (de exemplu *a* din cazul A) coincide cu *e* din cazul B)).

$$\text{D)} \quad I_a > I_c > I_b,$$

(în diagramă $I_a = 5\,\text{A}$, $I_b = 3\,\text{A}$, $I_c = 4\,\text{A}$).

Deci în raport cu cazul A) am inversat valorile efective ale curenților pe fazele *b* și *c*.

Construind triunghiul curenților și descompunînd grafic sistemul de curenți în componentele sale directă și inversă (fig. 7 și 8) rezultă diagrama vectorială din fig. 9. Unghiul φ' rămîne același deoarece P și Q au rămas neschimbate.

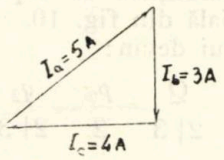


Fig. 7

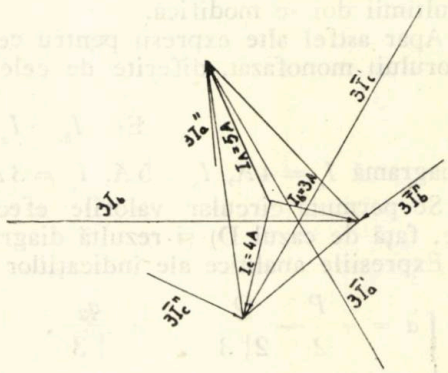


Fig. 8

Fig. 9 denotă apariția unui alt defazaj al componentei inverse.

Compararea diagramelor vectoriale din fig. 4 și 9 (care se deosebesc prin inversarea curenților pe două faze) arată că între defazajele componentelor directe și inverse există relația $\varphi' - \varphi_1'' = \varphi_2'' - \varphi'$, deci

$$(1) \qquad \varphi' = \frac{\varphi_1'' + \varphi_2''}{2}.$$

Notînd $p_2 = 3\,U_1\,I''\cos\varphi_2'' \neq p_1$ și $q_2 = 3\,U_1\,I''\sin\varphi_2'' \neq q_1$ puterile active și reactive de nesimetrie ce apar în acest caz rezultă următoarele expresii analitice pentru indicația instrumentului:

$$(D)\quad \begin{cases} a = +\frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} + \frac{p_2}{2} - \frac{q_2}{2\sqrt{3}}, & b = -\frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} + \frac{q_2}{\sqrt{3}}, \\ c = +\frac{Q}{\sqrt{3}} - \frac{p_2}{2} - \frac{q_2}{2\sqrt{3}}, & d = +\frac{Q}{\sqrt{3}} + \frac{q_2}{\sqrt{3}}, \\ e = +\frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} - \frac{p_2}{2} - \frac{q_2}{2\sqrt{3}}, & f = -\frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} + \frac{p_2}{2} - \frac{q_2}{2\sqrt{3}}, \\ g = -\frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} - \frac{p_2}{2} - \frac{q_2}{2\sqrt{3}}, & h = +\frac{Q}{\sqrt{3}} + \frac{p_2}{2} - \frac{q_2}{2\sqrt{3}}, \\ i = +\frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} + \frac{q_2}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Se constată că primii doi termeni ai fiecărei expresii au rămas aceiaşi însă ultimii doi se modifică.

Apar astfel alte expresii pentru cele nouă indicaţii ale wattmetrului (contorului) monofazat, diferite de cele din primele trei cazuri A), B), C).

$$E)\quad I_b > I_a > I_c,$$

(in diagramă $I_a = 4\,\text{A}$, $I_b = 5\,\text{A}$, $I_c = 3\,\text{A}$).

Se permută circular valorile efective ale curenţilor în raport cu fazele, faţă de cazul D) şi rezultă diagrama vectorială din fig. 10.

Expresiile analitice ale indicaţiilor wattmetrului devin:

$$(E)\quad \begin{cases} a = +\frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} + \frac{q_2}{\sqrt{3}}, & b = -\frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} - \frac{p_2}{2} - \frac{q_2}{2\sqrt{3}}, \\ c = +\frac{Q}{\sqrt{3}} + \frac{p_2}{2} - \frac{q_2}{2\sqrt{3}}, & d = +\frac{Q}{\sqrt{3}} - \frac{p_2}{2} - \frac{q_2}{2\sqrt{3}}, \\ e = +\frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} + \frac{p_2}{2} - \frac{q_2}{2\sqrt{3}}, & f = -\frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} + \frac{q_2}{\sqrt{3}}, \\ g = -\frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} + \frac{p_2}{2} - \frac{q_2}{2\sqrt{3}}, & h = +\frac{Q}{\sqrt{3}} + \frac{q_2}{\sqrt{3}}, \\ i = -\frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} - \frac{p_2}{2} - \frac{q_2}{2\sqrt{3}}. \end{cases}$$

$$F)\quad I_c > I_b > I_a,$$

(în diagramă $I_a = 3\,\text{A}$, $I_b = 4\,\text{A}$, $I_c = 5\,\text{A}$).

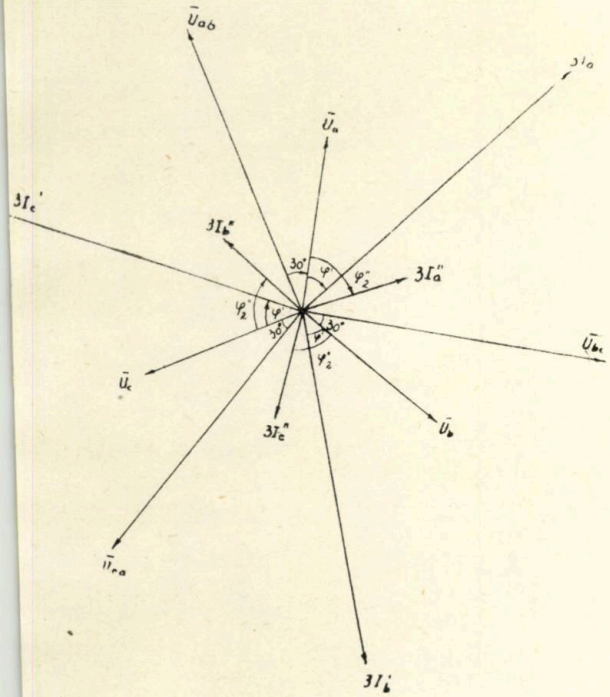
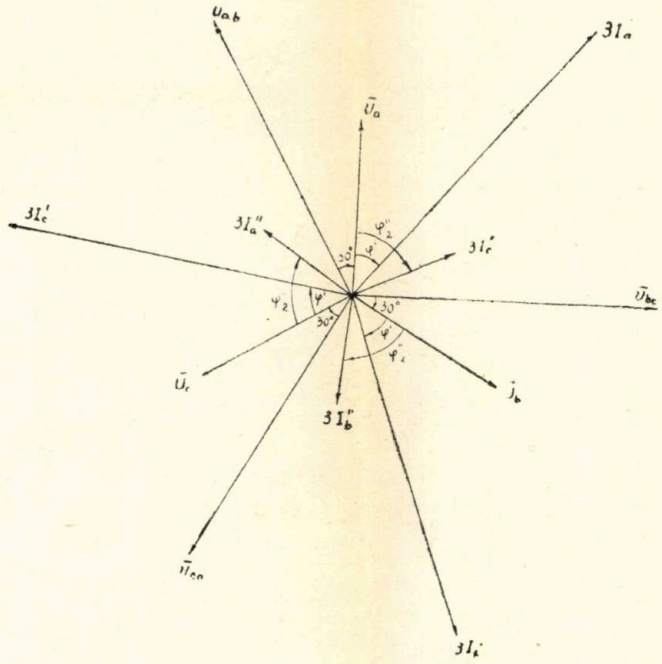


Fig. 9



Flg. 10

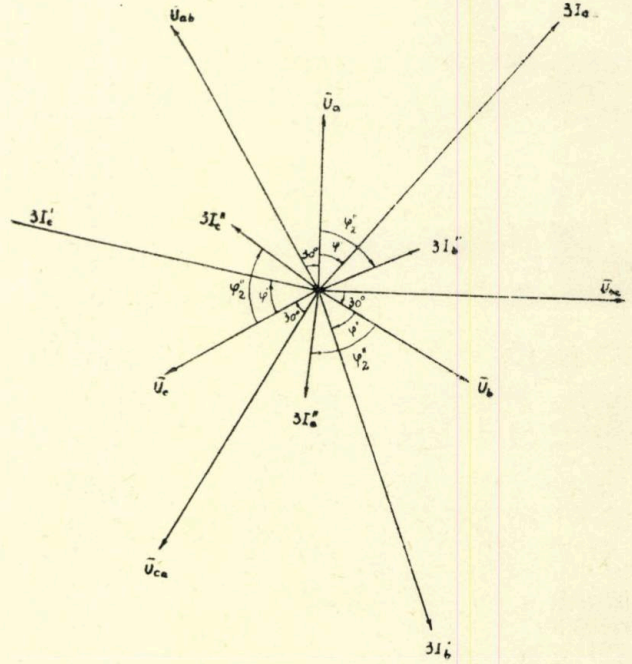
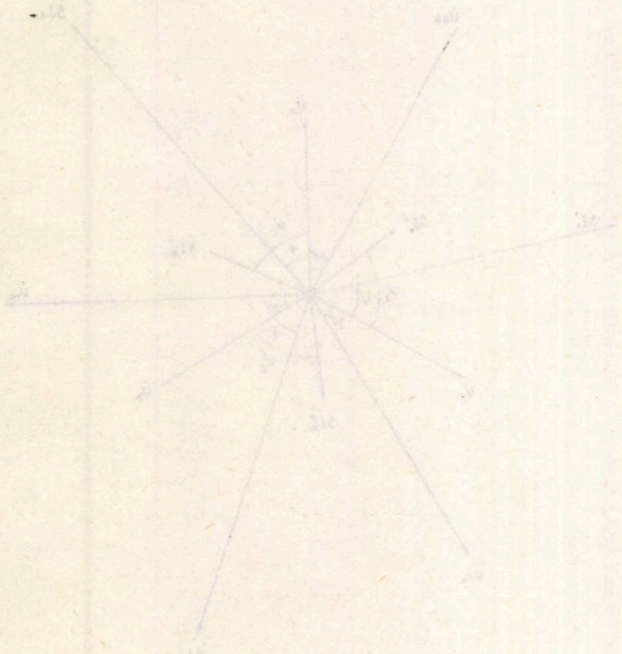


Fig. 11



Tabelul 3

		I_a						I_b						I_c					
		K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
U_{ab}	A	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0
	B	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0
	C	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0
	D	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
	E	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
	F	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$
U_{bc}	A	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0
	B	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0
	C	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0
	D	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
	E	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$
	F	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
U_{ca}	A	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0
	B	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0
	C	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0
	D	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$
	E	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
	F	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	0	0	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$

A) $I_a > I_b > I_c$; B) $I_b > I_c > I_a$; C) $I_c > I_a > I_b$; D) $I_a > I_c > I_b$; E) $I_b > I_a > I_c$; F) $I_c > I_b > I_a$.

Se permută din nou circular valorile efective ale curenților în raport cu fazele, față de cazul D), și se obține diagrama vectorială din fig. 11.

Expresiile analitice ale indicațiilor wattmetrului devin:

$$(F)\quad \begin{cases} a = +\frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} - \frac{p_2}{2} - \frac{q_2}{2\sqrt{3}}, & b = -\frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} + \frac{p_2}{2} - \frac{q_2}{2\sqrt{3}}, \\ c = + \frac{Q}{\sqrt{3}} + \frac{q_2}{\sqrt{3}}, & d = + \frac{Q}{\sqrt{3}} + \frac{p_2}{2} - \frac{q_2}{2\sqrt{3}}, \\ e = +\frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} + \frac{q_2}{\sqrt{3}}, & f = -\frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} - \frac{p_2}{2} - \frac{q_2}{2\sqrt{3}}, \\ g = -\frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} + \frac{q_2}{\sqrt{3}}, & h = + \frac{Q}{\sqrt{3}} - \frac{p_2}{2} - \frac{q_2}{2\sqrt{3}}, \\ i = +\frac{P}{2} - \frac{Q}{2\sqrt{3}} + \frac{p_2}{2} - \frac{q_2}{2\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Se constată că în cazurile D), E), F) se obține același grup de nouă expresii analitice care sînt însă diferite de celelalte nouă corespunzătoare cazurile A), B), C). Deci în total rezultă 18 expresii diferite pentru indicația instrumentului de măsură.

Și în cazurile E) și F) se constată valabilitatea relației (1).

Analiza celor 6 cazuri posibile A), B),..., F) arată că expresia analitică a indicației instrumentului are forma

$$(2)\qquad (a,\ b,\ldots,i) = K_1 P + K_2 Q + K_3 p_1 + K_4 q_1 + K_5 p_2 + K_6 q_2 .$$

Valorile coeficienților $K_1,\ldots,K_6$, pentru fiecare caz în parte, sînt date în tabelul 3.

Verificarea experimentală a confirmat toate datele obținute pe cale teoretică.

3. Concluzii

1. Într-un sistem trifazat cu trei conductoare, simplu simetric (cu nesimetrie de curenți), un wattmetru monofazat montat într-un mod oarecare dă o deviație $(a, b,\ldots, i)$ proporțională cu puterile activă și reactivă din circuitul respectiv, precum și cu puterile activă și reactivă de nesimetrie, ce se exprimă prin (2).

Expresia analitică are întotdeauna cel mult patru termeni, deoarece dacă $K_3 \neq 0$ sau $K_4 \neq 0$ atunci $K_5 = K_6 = 0$ iar dacă $K_5 \neq 0$ sau $K_6 \neq 0$, $K_3 = K_4 = 0$.

2. Dacă se cunoaşte ordinea dezechilibrului se poate determina doar cu patru măsurători puterea activă, reactivă şi de nesimetrie (deoarece $S_{nes} = \sqrt{p^2 + q^2}$) prin rezolvarea a patru ecuaţii cu patru necunoscute.

3. Între defazajele componentelor directe şi inverse există relaţia (1).

4. Expresiile analitice permit găsirea montajelor de măsurare a puterilor (energiilor) active, reactive şi de nesimetrie determinînd P, Q, p şi q în funcţie de $(a, b, ..., i)$.

Primit la 5 iunie 1966

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de măsuri şi maşini electrice,
Laboratorul de măsuri electrice

BIBLIOGRAFIE

1. Neiman L. R., Kalantarov P. L., *Bazele teoretice ale electrotehnicii.* Vol. **III**, E. E. S., Buc., 1955 (trad. din l. rusă).
2. Goriunov P. N. ş. a., *Contoare electrice.* E. E. S., Buc., 1954 (trad. din l. rusă).
3. Baida I., *Curs general de măsuri electrice.* E. E. S., Buc., 1960 (trad. din l. rusă).
4. Popescu Al., *Măsurări electrice şi magnetice.* În Manualul inginerului electrician, Vol. **I**, cap. **IV**, Ed. Tehn., Buc., 1953.
5. — *Măsurări electrice şi magnetice. (Îndrumar de laborator).* E. D. P., Buc., 1965.
6. Antoniu I. S., St. şi cerc. de energ., 1954, **IV**, pp. 39—63.
7. Fränkel D., Electrotehnica, 1955, *2-3*, pp. 51—50.
8. — Electrotehnica, 1956, *2*, pp. 56—60.
9. — Bul. şt. şi tehn. Inst. polit. Timişoara, 1960, V, *1—2*, pp. 139—142.

THE ANALYSIS OF THE INDICATIONS OF A SINGLEPHASED WATTMETER MOUNTED IN A NETWORK WITH THREE CONDUCTORS, IN AN UNBALANCED REGIM (SIMPLLY SYMETRICAL) AT THE MODIFICATION OF THE NETWORK'S ASYMETRY

(Summary)

For a network with three conductors with symmetrical voltages to is terminals but asymmetrical currents are made the vectorial diagrams. On establishe the analitical expression of the measuring instrument indications as function of the manner of mounting and the order of the current's asymmetry.

In the building of vectorial diagrams were used the same values of the currents which have been permuted in report to the phases of the six possible maners.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 621.317.33

COMPORTAREA PUNȚII OWEN, STUDIATĂ CU AJUTORUL TRANSFORMĂRII CONFORME

DE

P. POGÎNGEANU

Comunicare prezentată în sesiunea științifică a Institutului politehnic din Iași, din 5—7 februarie 1965

1. Considerațiuni generale

Se știe din teoria funcțiilor de variabilă complexă [1] că funcția omografică

$$Z = \frac{A z + B}{C z + D} = f(z),$$

fiind o funcție analitică, realizează o transformarea conformă—transformare a cărei principală proprietate este aceea că păstrează unghiurile figurilor din cele două plane de corespondență. În forma de mai sus a funcției omografice, z este variabila complexă curentă iar $A, B, C,$ și D sînt constante complexe. Exprimînd constantele complexe prin părțile lor reale și imaginare,

$$A = a + \mathrm{j}\, b, \quad B = c + \mathrm{j}\, d, \quad C = e + \mathrm{j} f, \quad D = g + \mathrm{j}\, h,$$

iar funcția complexă Z prin $Z = u + \mathrm{j}v$, se poate demonstra [2] că aceasta din urmă reprezintă grafic o familie de cercuri. Într-adevăr, fie

$$u + \mathrm{j}v = \frac{(a + \mathrm{j}\, b)\, s + (c + \mathrm{j}\, d)}{(e + \mathrm{j} f)\, s + (g + \mathrm{j}\, h)},$$

unde s este un număr real, reprezentînd una din componentele variabilei complexe și care aici reprezintă variabila curentă. Să eliminăm întîi numitorul

$$u\,[(e + \mathrm{j} f)\, s + (g + \mathrm{j}\, h)] + \mathrm{j}\, v\,[(e + \mathrm{j} f)\, s + (g + \mathrm{j}\, h)] = (a + \mathrm{j}\, b)\, s + (c + \mathrm{j}\, d).$$

Egalarea părţilor reală şi respectiv imaginară conduce la ecuaţiile în s,

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} (a - ue + vf)\, s = ug - vh - c, \\ (b - ve - uf)\, s = vg + uh - d, \end{cases}$$

care prin împărţire dau

$$\frac{a - ue + vf}{b - ve - uf} = \frac{ug - vh - c}{vg + uh - d}.$$

Eliminînd mai departe numitorii şi grupînd corespunzător termenii, se obţine

$$u^2 + v^2 - \frac{bg + cf - ah - de}{fg - eh}\, u - \frac{ce + df - ag - bh}{fg - eh}\, v - \frac{ad - bc}{fg - eh} = 0.$$

Dacă formăm pătrate perfecte în această expresie, căpătăm

$$u^2 - 2\,\frac{bg + cf - ah - de}{2(fg - eh)}\, u + \left(\frac{bg + cf - ah - de}{fg - eh}\right)^2 - \left(\frac{bg + cf - ah - de}{fg - eh}\right)^2 +$$

$$+ v_2 - 2\,\frac{ce + df - ag - bh}{2(fg - eh)}\, v + \left(\frac{ce + df - ag - bh}{fg - eh}\right)^2 - \left(\frac{ce + df - ag - bh}{fg - eh}\right)^2 -$$

$$- \frac{ad - bc}{fg - eh} = (u - u_0)^2 + (v + v_0)^2 - \left(u_0^2 + v_0^2 + \frac{ad - bc}{fg - eh}\right) = 0,$$

sau

$$\text{(1)} \qquad (u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 = R_0^2.$$

Se vede cu uşurinţă că (1) reprezintă ecuaţia unui cerc cu centrul în punctul de coordonate

$$\text{(2)} \qquad u_0 = \frac{bg + cf - ah - de}{2(fg - eh)}, \qquad v_0 = \frac{ce + df - ag - bh}{2(fg - eh)}$$

şi de rază

$$\text{(3)} \qquad R_0 = \sqrt{u_0^2 + v_0^2 + \frac{ad - bc}{fg - eh}}.$$

2. Aplicaţie la puntea Owen

Scriind expresia potenţialelor electrice complexe în punctele M şi N (fig. 1), avem respectiv:

$$\underline{U}_M = E\,\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \qquad \text{şi} \qquad \underline{U}_N = E\,\frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4},$$

Prin urmare, diferența de potențiale în diagonala de măsură a punții, sesizată de indicatorul de nul, va avea forma $\underline{E}_m = \underline{E}[\underline{Z}_1/(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) - \underline{Z}_3/(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)]$ sau

$$\frac{\underline{E}_m}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_4 - \underline{Z}_2\underline{Z}_3}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)}.$$

Această ecuație fundamentală a punților de curent alternativ se poate pune ușor sub forma unei funcții omografice. În cazul concret ales, puntea Owen (fig.2), ecuația devine:

$$\frac{\underline{E}_m}{\underline{E}} = \frac{-\mathrm{j}\,[1/(C_1\omega)](R_4 + \mathrm{j}\,L_4\omega) - R_2\{R_3 - [\mathrm{j}\,(1/C_3\omega)]\}}{[-\mathrm{j}\,(1/C_1\omega) + R_2]\{[R_3 - \mathrm{j}\,(1/C_3\omega)] + (R_4 + \mathrm{j}\,L_4\omega)\}}.$$

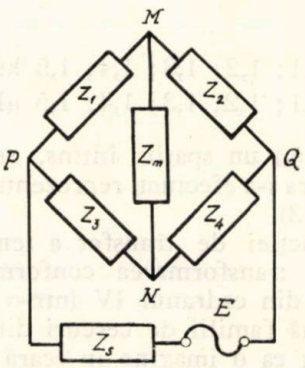


Fig. 1

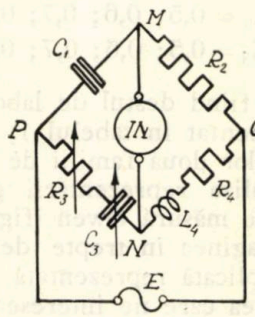


Fig. 2

Să luăm impedanța ramurii notată cu indicele *3* drept element variabil și – evidențiind ca variabilă s, fie rezistența R_3, fie reactanța $X_3 = 1/(C_3\omega)$ — obținem pentru ecuația de mai sus două forme distincte care, grafic, reprezintă două familii de cercuri ortogonale [3], având toate un punct comun ce corespunde valorilor de la infinit ale variabilelor R și X:

$$(4)\quad \frac{\mathrm{j}\,R_2[1/(C_3\omega)] + (L_4/C_1 - R_2R_3) - \mathrm{j}\,R_4[1/(C_1\omega)]}{-[1/(C_1\omega) + \mathrm{j}\,R_2][1/(C_3\omega)] + R_2(R_3 + R_4) + L_4/C_1 + \mathrm{j}R_2L_4\omega - [1/(C_1\omega)](R_3 + R_4)} = u + \mathrm{j}\,v,$$

$$(4')\quad \frac{-R_2R_3 + L_4/C_1 + \mathrm{j}\,\{R_2[1/(C_3\omega)] - R_4[1/(C_1\omega)]\}}{\{R_2 - \mathrm{j}[1/(C_1\omega)]\}R_3 + (R_2R_4 + L_4/C_1) + \mathrm{j}\,\{R_2L_4\omega - R_4[1/(C_1\omega)] - R_2[1/(C_3\omega)]\}} = u' + \mathrm{j}\,v'.$$

Se vede așadar, că în ecuația (4) $X = 1/(C_3\omega)$ este variabilă iar $R = R_3$ este parametru și invers, în (4'), $R = R_3$ este variabilă iar $X = 1/(C_3\omega)$ este parametru.

Aşa cum s-a spus mai înainte, cele două familii de cercuri au un punct comun de intersecţie, dat de valorile de la infinit ale variabilei $s = R$ sau $s = X$. Într-adevăr, examinînd (I), cînd s tinde la infinit se observă că rămîne sistemul de ecuaţii de gradul I cu două necunoscute u şi v

$$a - ue + vf = 0, \quad b - ve - uf = 0,$$

care capătă de asemenea două forme distincte după cum variabila este R sau X. După rezolvarea sistemului — aşa cum uşor se poate verifica — rezultă două perechi de valori care coincid şi care sînt coordonatele punctului de intersecţie I_0.

În cazul concret al punţii Owen, parametrii aleşi au fost următorii:

$C_1 = 10^{-6}$F, $R_2 = 10^3\ \Omega$, $R_4 = 850\ \Omega$, $L_4 = 1$H, $\omega = 314$ sec^{-1} (frecvenţa industrială) iar elementele variabile:

$$R_3 = 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9;\ 1;\ 1{,}1;\ 1{,}2;\ 1{,}3;\ 1{,}4;\ 1{,}5\ \text{k}\Omega,$$
$$C_3 = 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}7;\ 0{,}8;\ 0{,}9;\ 1;\ 1{,}1;\ 1{,}2;\ 1{,}3;\ 1{,}4;\ 1{,}5\ \mu\text{F}.$$

Calculul fiind destul de laborios, necesitînd un spaţiu întins, rezultatele s-au prezentat în tabelul 1, pe baza cărora s-a efectuat reprezentarea grafică a celor două familii de cercuri (fig. 3).

Analiza reprezentării grafice a funcţiei de transfer a tensiunii în puntea de măsură Owen (fig. 3) arată că transformarea conformă transpune imaginea în trepte de scară R, X din cadranul IV într-o imagine mai complicată reprezentată prin cele două familii de cercuri din tot planul. Partea care ne interesează rezultă tot ca o imagine în scară dar formată din segmente de cerc. Se observă că transformarea conformă a conservat unghiurile drepte sub care se intersectează tangentele la cercuri în punctele de intersecţie. Pentru a evidenţia mai clar partea din imaginea transformată care interesează, ea a fost reprezentată prin linii îngroşate.

Observaţii. 1. Cele două plane complexe de corespondenţă s-au luat confundate fapt concretizat prin aceea că cele două sisteme de axe de coordonate coincid. Primul sistem s-a notat cu R şi X ţinînd seama că avem de a face cu mărimi fizice concrete, rezistenţa ohmică, respectiv reactanţa.

2. Din punct de vedere formal, ecuaţia (4) dă aceeaşi imagine transformată, indiferent dacă în faţa reactanţei $X = 1/(C_3\,\omega)$ apare semnul + sau —. Preferăm semnul „—“ spre a fi concordanţă cu regulile electrotehnicii ca reactanţa capacitivă să se considere negativă.

3. Concluzii

Utilizarea transformării conforme conduce la o reprezentare grafică atotcuprinzătoare ce permite cu uşurinţă fixarea poziţiei şi mărimii vec-

Tabelul 1

Curba Nr.	a Ω	b Ω	c Ω²	d Ω²	e Ω	f Ω	g Ω²	h Ω²	$u_0 = \frac{bg+cf-ah-de}{2(fg-eh)}$	$v_0 = \frac{ce+df-ag-bh}{2(fg-eh)}$	$\varrho_0 = \sqrt{u_0^2+v_0^2+\frac{ad-bc}{fg-eh}}$
Familia de cercuri avînd ca variabilă curentă rezistenţa ohmică R (parametru constant reactanţa X_c)											
1				3,660 10^6			−18,470 10^6	−9,746 10^6	−0,121	−1'395	imaginar
2				2,610 10^6			−15,025 10^6	−7,696 10^6	−0,122	−0'201	0,091
3				1,850 10^6			−12,610 10^6	−6,936 10^6	−0,127	−0·186	0,107
4				1,280 10^6			−10,800 10^6	−6 366 10^6	−0,133	−0·170	0,123
5				0,830 10^6			−9,375 10^7	−5,916 10^6	−0,139	−0·154	0,148
6	−1 000	0	10^6	0,480 10^6	1 000	−3 180	−8,250 10^6	−5,566 10^6	−0,145	−0·138	0,158
7				0,190 10^6			−7,330 10^6	−5,276 10^7	−0,151	−0,121	0,175
8				−0,050 10^6			−6,575 10^6	−5,036 10^6	−0,158	−0,104	0,194
9				−0,250 10^6			−5,940 10^6	−4,836 10^6	−0,164	−0,088	0,212
10				−0,430 10^6			−5,370 10^6	−4,656 10^6	−0,171	−0,069	0,232
11				−0,530 10^6			−4,890 10^6	−4,506 10^6	−0,177	−0,051	0,251
Familia de cercuri avînd ca variabilă curentă reactanţa X_c (parametru constant rezistenţa ohmică R)											
*1**			0,500 10^6				2,350 10^6	−3,976 10^6	0,226	−0,170	0,337
*2**			0,400 10^6				2,450 10^6	−4,294 10^6	0,203	−0,177	0,313
*3**			0,300 10^6				2,550 10^6	−4,611 10^6	0,184	−0,185	0,293
*4**			0,200 10^6				2,650 10^6	−4,930 10^6	0,167	−0,191	0,274
*5**	0	1 000	0,100 10^6	−2,7 10^6	−3 180	−1 000	2,750 10^6	−5,251 10^6	0,153	−0,196	0,258
*6**			0				2,850 10^6	−5,566 10^6	0,134	−0 201	0,245
*7**			−0,100 10^6				2,950 10^6	−5,886 10^6	0,128	−0,206	0,233
*8**			−0,200 10^6				3,050 10^6	−6,194 10^6	0,117	−0,209	0,221
*9**			−0,300 10^6				3,150 10^6	−6,521 10^6	0,108	−0,213	0,211
*10**			−0,400 10^6				3.250 10^6	−6,836 10^6	0,099	−0,216	0,201
*11**			−0,500 10^6				3,350 10^6	−7,156 10^6	0,091	−0,219	0,193

Coordonatele punctului de intersecţie al celor două familii de cercuri ortogonale: $u_{0I} = -0{,}090$, $v_{0I} = -0{,}285$.

Valorile rezistenţei ohmice: 500, 600, 700, 800, 900, 1 000, 1 100, 1 200, 1 300, 1 400, şi 1 500 Ω.

Valorile ezistanţei capacitive: 6 360, 5 310, 4 550, 3 980, 3 530, 3 180, 2 890, 2 650, 2 450, 2 270, şi 2 120 Ω (corespunzătoare, respectiv, valorilor capacităţii: 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9, 1,0, 1,1, 1,2, 1,3, 1,4 şi 1,5 μF).

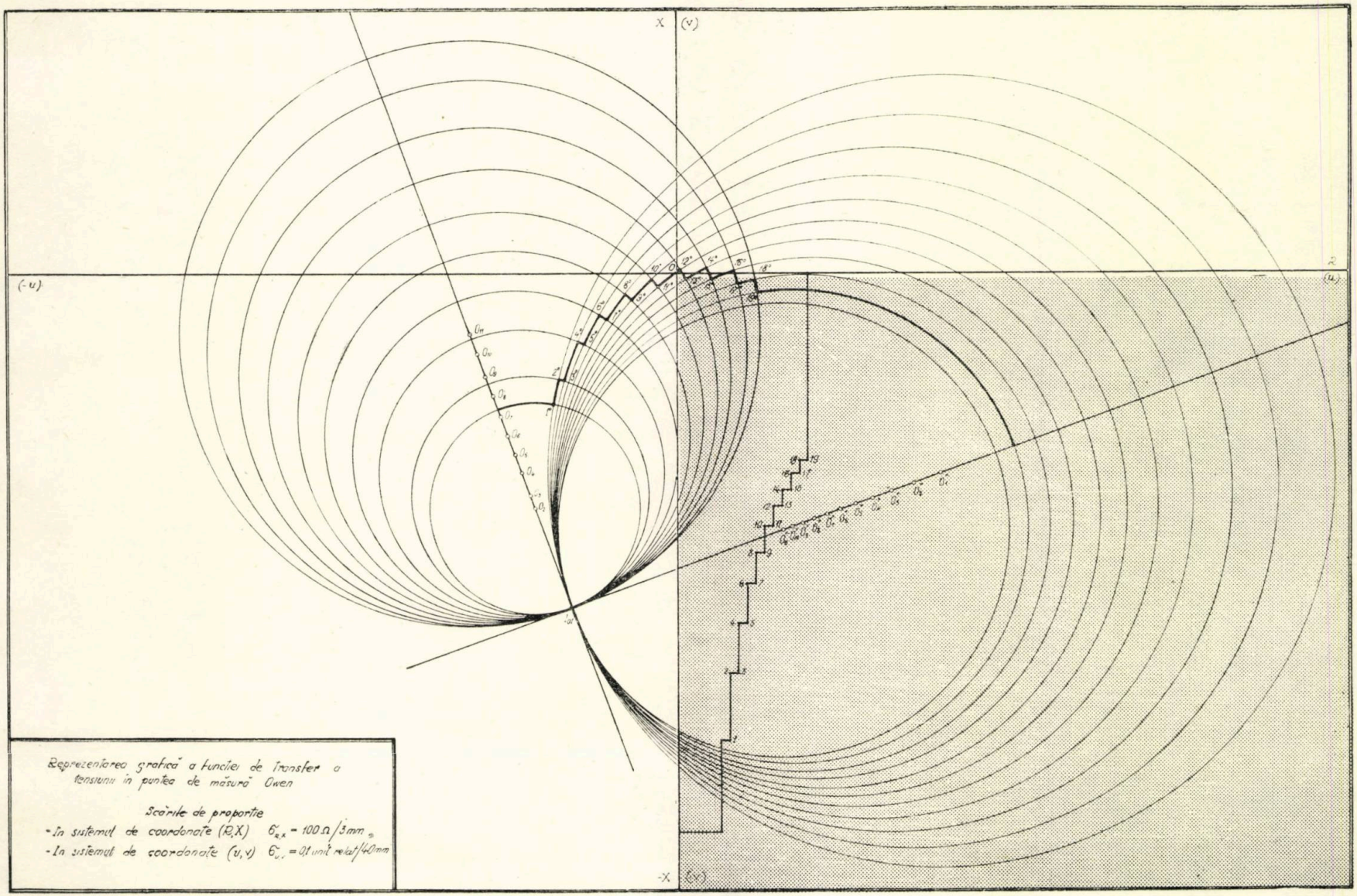
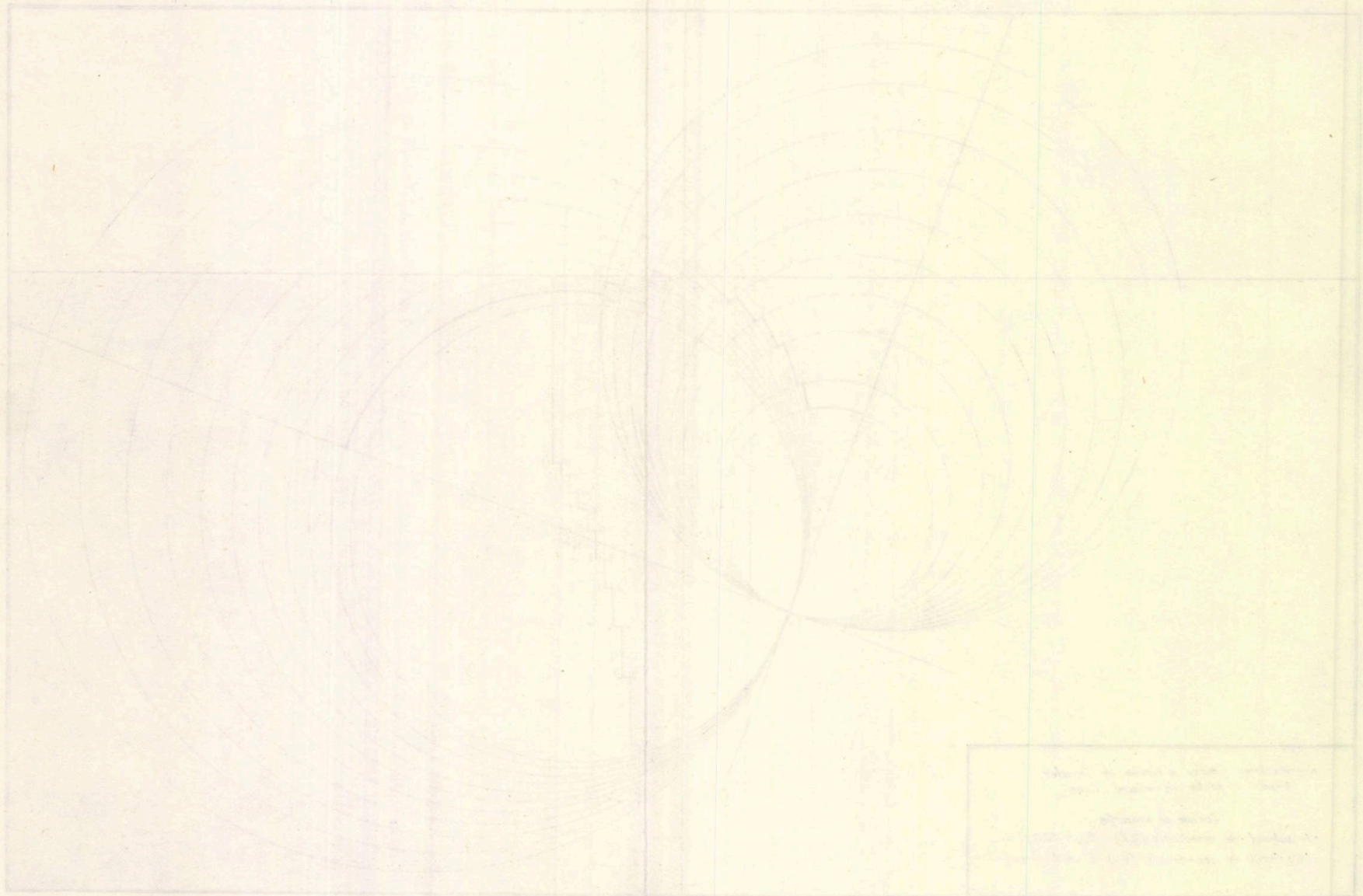

X
(v)
(-u)
(u)
-X
(-v)
Reprezentarea grafică a funcției de transfer a tensiunii în punțea de măsură Owen
Scările de proporție
- În sistemul de coordonate (R,X) $6_{R,X}$ = 100 Ω / 3 mm
- În sistemul de coordonate (u,v) $6_{u,v}$ = 0,1 unit relat / 40 mm

Fig. 3



torului tensiune de dezechilibru din diagonala de măsură a punții, funcție de valorile cunoscute ale impedanței variabile.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de măsuri și mașini electrice,
Laboratorul de măsuri electrice

BIBLIOGRAFIE

1. Gheorghiu Gh. T., *Probleme de algebră și analiză matematică.* Ed. Tehn., Buc., 1953, pp. 615—625.
2. Franck E., *Electrical Measurement Analysis.* McGraw-Hill Book Co., Inc., N Y-Toronto-London, 1959, pp. 358—361.
3. Thurin J., *Mesures électriques et électroniques.* Eyrolles, Paris, 1961, pp. 269—271.

L'ÉTUDE À L'AIDE DE LA TRANSFORMATION CONFORME DU COMPORTEMENT DU PONT OWEN

(Résumé)

L'utilisation de la transformation conforme conduit à une représentation graphique très claire et complète qui permet d'obtenir aisément la position et l'intesité du vecteur tension de déséquilibre dans la diagonale de mesure du pont Owen, en fonction des valeurs de l'impédance variable.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

Ç. Z. 621.314.63

CONSIDERAŢII ASUPRA INFLUENŢEI TENSIUNII DE ÎNALTĂ FRECVENŢĂ APLICATE JONCŢIUNII PN ÎN MODULATOARELE CU ELEMENTE SEMICONDUCTOARE

DE

KEVORC ARABAGIAN

1. În ultimii ani utilizarea dispozitivelor semiconductoare de circuit s-a extins în foarte mare măsură.

Modulatoarele de frecvenţă realizate cu elemente semiconductoare care utilizează capacitatea de barieră a unei joncţiuni PN, sînt din ce în ce mai mult utilizate în locul modulatoarelor de frecvenţă realizate cu tuburi electronice. În comparaţie cu modulatoarele cu tuburi, modulatoarele cu elemente semiconductoare prezintă numeroase avantaje, printre care în primul rînd pot fi citate consumul de energie mic, funcţionarea mai stabilă în prezenţa vibraţiilor mecanice şi loviturilor etc.

Diodele cu joncţiune PN utilizate în scheme de modulatoare de frecvenţă pot lucra la frecvenţe înalte pînă la 500...700 MHz, frecvenţe la care modulatoarele cu tuburi electronice nu pot funcţiona.

După cum este cunoscut, capacitatea de barieră a joncţiunii PN utilizată la obţinerea modulaţiei de frecvenţă variază aproximativ invers proporţional cu rădăcina patrată a tensiunii aplicate joncţiunii.

Trebuie să notăm că de multe ori la calcularea coeficientului de distorsiuni nelineare şi a deviaţiei de frecvenţă se obţin rezultate aproximative deoarece se neglijează variaţia capacităţii joncţiunii PN în funcţie de tensiunea de înaltă frecvenţă. Datorită acestei neglijări se obţine o eroare suplimentară care creşte atunci cînd tensiunea rezultantă aplicată joncţiunii tinde spre zero (fapt care intervine în cele mai multe cazuri).

În această lucrare se stabilesc relaţii pentru calculul variaţiei capacităţii în funcţie de amplitudinea semnalului de înaltă frecvenţă comparîndu-se rezultatele teoretice cu cele experimentale.

2. Să presupunem că unei joncţiuni PN i se aplică o tensiune de forma

$$U(t) = U_{a0} + U_a \cos \theta, \tag{1}$$

unde U_{a0} este tensiunea continuă, U_a — amplitudinea semnalului alternativ, $\theta = \omega t$.

Aici însă, regimul fiind variabil, distribuţiile purtătorilor minoritari vor fi variabile în timp în jurul distribuţiei staţionare.

Într-adevăr, la aplicarea acestei tensiuni alternative, capacitatea de barieră variază cu frecvenţa semnalului aplicat. După cum se ştie [1]

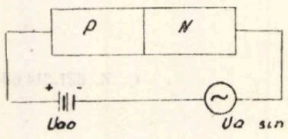


Fig. 1

$$C_c = \frac{k}{\sqrt{U_{c0} + U_0}}, \quad \text{cu} \quad k = S\sqrt{\frac{q\varepsilon p_0}{8\pi}}, \tag{2}$$

dă expresia capacităţii de barieră a joncţiunii PN a colectorului. Introducînd în (2) în locul tensiunii U_{c0} expresia tensiunii aplicate, obţinem

$$C_{b'c} = k(U_0 - U_{a0} - U_0 \cos\theta)^{-1/2} = k(U_0 - U_{a0})^{-1/2}\left(1 - \frac{U_a}{U_0 - U_{a0}}\cos\theta\right)^{-1/2},$$

sau

$$C_{b'c} = C_{b'c0}(1 - \mu\cos\theta)^{-1/2}. \tag{3}$$

În relaţia (3) primul termen al produsului $k(U_0 - U_{a0})^{-1/2}$ reprezintă capacitatea de barieră $C_{b'c0}$ pentru tensiunea continuă U_{a0}. Parametrul adimensional

$$\mu = \frac{U_a}{U_0 - U_{a0}} \tag{4}$$

poate avea numai valori cuprinse între $0 < \mu < 1$.

Expresia capacităţii $C_{b'c}$ dată de (3) se poate dezvolta şi în serie Fourier: [2], [3], obţinînd

$$C_{b'c} = C_0 + 2C_1\cos\theta + 2C_2\cos 2\theta + \dots, \tag{5}$$

$$C_n = \frac{C_{b'c0}}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1 - \mu\cos\theta)^{-1/2}\cos n\theta\, d\theta, \quad n = 0, 1, \dots. \tag{6}$$

Pentru calculul aproximativ al lui C_n este mai simplu să dezvoltăm expresia (3) în serie Taylor în jurul punctului $\mu\cos\theta = 0$. Notînd $\mu\cos\theta = x$, (3) devine

$$f(x) = (1 - x)^{-1/2}, \tag{7}$$

care se dezvoltă în jurul punctului $x = 0$ sub forma obişnuită

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \dots. \tag{8}$$

Introducînd valorile funcţiei şi ale derivatelor în punctul $x = 0$ ţinînd seama că $f^{(n)}_{(0)} = 1\cdot 3\cdot 5 \dots (2n - 1)/(2n)$, se obţine

$$(9)\qquad f\,x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!}\frac{1\cdot3}{2^2}x^2 + \frac{1}{3!}\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3}x^3 + \frac{1}{4!}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2^4}x^4 + \ldots .$$

Înlocuind acum $x = \mu\cos\theta$ și ținînd seama că

$$(10)\qquad \begin{cases} \cos^2\theta = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta), \quad \cos^3\theta = \dfrac{3}{4}\cos\theta + \dfrac{1}{4}\cos 3\theta, \\ \cos^4\theta = \dfrac{3}{8} + \dfrac{4}{8}\cos 2\theta + \dfrac{1}{8}\cos 4\theta, \\ \cos^5\theta = \dfrac{10}{16}\cos\theta + \dfrac{5}{16}\cos 3\theta + \dfrac{1}{16}\cos 5\theta, \\ \cos^6\theta = \dfrac{10}{32} + \dfrac{15}{32}\cos 2\theta + \dfrac{6}{32}\cos 4\theta + \dfrac{1}{32}\cos 6\theta, \end{cases}$$

rezultă

$$(11)\qquad f(\mu\cos\theta) = 1 + \frac{1}{2}\mu\cos\theta + \frac{1}{2!}\frac{1\cdot3}{2^3}\mu^2\cos^2\theta + \frac{1}{3!}\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3}\mu^3\cos^3\theta + \\ + \frac{1}{4!}\frac{2^4}{1\cdot3\cdot5\cdot7}\mu^4\cos^4\theta + \ldots .$$

Scriind $\cos_n\theta = \sum_0^n A_n\, n\theta$ obținem:

$$(12)\qquad C_{b'c0} = f(\mu\cos\theta) = C_0 + C_1\cos\theta + C_2\cos 2\theta + C_3\cos 3\theta + \ldots ,$$

expresiile capacităților $C_0, C_1, C_2, C_3, \ldots$ fiind

$$(13)\qquad C_0 = C_{b'c0}\left(1 + \frac{1\cdot3}{2!\,2^2}\mu^2 + \frac{3}{8}\frac{3\cdot5\cdot7}{4!\,2^4}\mu^4 + \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{6!\,2^6}\mu^6\right),$$

$$(14)\qquad C_1 = C_{b'c0}\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{3!}\frac{3}{4}\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3}\mu^3 + \frac{10}{16}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{5!\,2^5}\mu^5\right),$$

$$(15)\qquad C_2 = C_{b'c0}\left(\frac{1}{2}\frac{2}{2!}\frac{1\cdot3}{2^2}\mu^2 + \frac{4}{8}\frac{1}{4!}\frac{3\cdot5\cdot7}{2^4}\mu^4 + \frac{10}{32}\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{6!\,2^6}\mu^6\right),$$

$$(16)\qquad C_3 = C_{b'c0}\left(\frac{1}{4}\frac{1\cdot3\cdot5}{3!\,2^3}\mu^3 + \frac{5}{16}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{5!\,2^5}\mu^5 + \frac{21}{64}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{2^7\,7!}\mu^7\right).$$

Din dezvoltarea obținută rezultă că C_0 este componenta continuă a capacității iar $C_1, C_2, C_3, \ldots$ sînt respectiv valorile amplitudinii primei, a

celei a doua ş. a. m.d. armonice a capacităţii de barieră datorită părţii reactive a impedanţei prezentate de joncţiunea PN.

Aceste componente apar ca funcţii de paramentrul adimensional μ, care la rîndul său este proporţional cu amplitudinea tensiunii alternative.

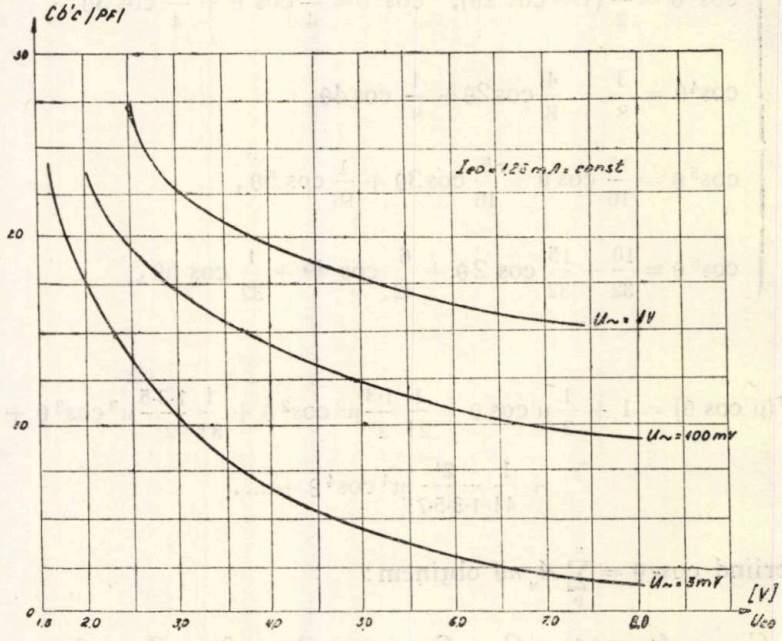


Fig. 2

Din expresiile lui $C_0, C_1, C_2, C_3, \ldots$ se conchide că la creştea amplitudinii U_a cresc atît componenta continuă a capacităţii de barieră, cît şi componentele alternative. Un criteriu pentru semnal mic este greu de stabilit, dat fiind că acest criteriu depinde de valoarea limită admisibilă a distorsiunilor neliniare în schema concretă. Ne vom mărgini la cazul cînd este necesară o legătură liniară între amplitudinea tensiunii sinusoidale aplicate capacităţii de barieră şi prima armonică a curentului care traversează capacitatea.

În acest caz criteriul pentru semnal mic va fi

$$C_2 \ll C_1, \tag{17}$$

adică

$$C_{b'c0}\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2!}\,\frac{1\cdot 3}{2^2}\,\mu^2 + \frac{4}{8}\,\frac{1}{4!}\,\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2^4}\,\mu^4 + \frac{10}{32}\,\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{6!\,2^6}\,\mu^6\right) \ll C_1. \tag{18}$$

Curbele trasate experimental verifică teoria, în urma creşterii amplitudinii tensiunii alternative aplicate înregistrîndu-se creşterea capacităţii de barieră. Aceasta rezultă din fig. 2 unde s-au eprezentat curbele pentru tranzistorul OC 44 la curent de emiter constant, pentru diferite amplitudini ale tensiunii alternative.

Primit la 25 II 1966

Institutul de cercetări ştiinţifice în telecomunicaţii, Sofia, R. P. Bulgaria

BIBLIOGRAFIE

1. Самойленко В. И., *Особенности работы полупроводниковых диодов и триодов при больших напряжениях*. Оборонгиз, М., 1959.
2. Верман Л. С., *Нелнейная полупроводниковая емкость*. Физматгиз, М., 1963.
3. Sensiper S., Weglein R. D., *Capacitance and charge coefficients for parametric diode devices*. Proc. IRE, 1960, **48**, *8*, pp. 1482—1483.
4. Arabagian K., *Condiţiile de producere a modulaţiei de frecvenţă la oscilatoarele cu tranzistoare*. Lucrare de disertaţie, Institutul politehnic, Bucureşti, 1965.

CONSIDERATIONS ON THE INFLUENCE OF THE HIGH-FREQUENCY VOLTAGE APPLIED TO THE PN JUNCTION IN THE MODULATOR BUILT UP WITH SEMICONDUCTOR ELEMENTS

(Summary)

The influence of the H.F. voltage on the barrier capacity of the PN junction has been analysed in this paper in connection with the realisation of frequency modulation. The analysis is carried out by means of a more rational mathematical method.

In the process of determination of the nonlinear distortion and frequency modulation factors approximative results have often been obtained because of the neglection of the variation in the capacity of the PN junction in dependance of the applied H.F. voltage, which causes a supplementary error.

The experimental data and graphic responses which confirm the theoretical conclusions show the existence of a directly proportional dependence between the increasing of the amplitude of the applied H.F. voltage and the value of barrier capacity.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 621.313

К ВЫБОРУ МЕТОДА РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ШИХТОВАННОМ ПАКЕТЕ

В. Г. ДАНЬКО

Принятые обозначения: T — температура железа; $T_г$ — температура газа в радиальном вентиляционном канале; $T_{г0}$ — температура газа в радиальном зазоре; q — удельное тепловыделение; λ — коэффициент теплопроводности; α — коэффициент теплоотдачи; Q — расход охлаждающего газа, приходящийся на 1 см ширины стенки радиального вентиляционного канала; c_p — удельная теплоемкость охлаждающего газа; $\gamma_{ср}$ — средний удельный вес охлаждающего газа; b — толщина пакета; h — высота зубца; H — высота пакета; x, y — координаты; в качестве индексов указывают направление для параметров и функций; $i = 1, 2$ — индексы, определяющие принадлежность рассматриваемых величин к области зубца или спинки, соответственно.

В практике крупного электромашиностроения расчет температурного поля статора мощного турбогенератора с радиальным охлаждением сводится к решению уравнения Пуассона в двух сопрягаемых прямоугольных областях (зубец и спинка):

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2} + q_i(y) = 0, \tag{1}$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{cases} x = 0, & \dfrac{\partial T_i}{\partial x} = 0; \\ x = \dfrac{b}{2}, & T_i = \dfrac{c_p \gamma_{ср} Q(y)}{\alpha(y)} \dfrac{dT_г}{dy} + T_г; \\ y = 0, & \lambda_y \dfrac{\partial T_1}{\partial y} = \alpha_1 (T_1 - T_{г0}), \quad T_г = T_{г0}; \\ y = h, & \dfrac{\partial T_1}{\partial y} = \dfrac{\partial T_2}{\partial y}, \qquad T_1 = T_2; \\ y = H, & -\lambda_y \dfrac{\partial T_2}{\partial y} = \alpha_2 (T_2 - T_г). \end{cases} \tag{2}$$

Точно решить эту задачу практически нельзя. Можно получить ее приближенное решение, и в этом случае очень важно принять достаточно простой и в то же время достаточно точный приближенный метод расчета.

Методы решения одного из частных видов задачи:

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + q = 0, \tag{3}$$

$$\begin{cases} x = 0, \quad \dfrac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad x = \dfrac{b}{2}, \quad -\lambda_x \dfrac{\partial T}{\partial x} = \alpha T; \\ y = 0, \quad \dfrac{\partial T}{\partial y} = 0; \quad y = H, \quad -\lambda_y \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}y} = \alpha_2 T, \end{cases} \tag{4}$$

предлагались рядом автором [1]...[6]. Некоторые из них могут быть распространены на решение (1) при граничных условиях (2).

Однако одни из указанных методов довольно сложные [1]...[3], другие-недостаточно точные [4], [5]. Наиболее приемлем для решения (1) при граничных условиях (2) метод, изложенный в [6]. Но даже он уже при первом приближении практически исключает ручной счет и требует применения вычислительной техники.

Учитывая все вышеизложенное, нами предлагается следующий приближенный метод, который для простоты рассмотрим на примере (3) при граничных условиях (4).

Решение (3) будем искать в виде

$$T = X(x)\, T(y), \tag{5}$$

где $X(x)$ — парабола, определяющая изменение температуры в направлении оси X при условии постоянных удельных тепловыделений; $T(y)$ — средняя температура на отрезке $[0, b/2]$, зависящая от y.

Вид $X(x)$ определяем, решая (3) для случая бесконечной пластины

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} + \frac{q}{\lambda_x} = 0, \tag{6}$$

при граничных условиях

$$x = 0, \quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = 0; \quad x = \frac{b}{2}, \quad -\lambda_x \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \alpha T; \tag{7}$$

$$T = \frac{qb}{2}\left[\left(\frac{b}{4\lambda_x} + \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{x^2}{b\lambda_x}\right]. \tag{8}$$

Как нетрудно заметить,

$$\frac{qb}{2} = k\,T_{\text{хср}} = k\,T(y). \tag{9}$$

Выражение для коэффициента теплопередачи K, устанавливающего связь средней температуры на отрезке $[0, b/2]$ с температурой охлаждающей среды, легко получить, проинтегрировав (8) на отрезке $[0, b/2]$ и взяв среднее значение интеграла на этом отрезке.

$$T_{\text{хср}} = T(y) = \frac{2}{b}\int_0^{b/2} T\,\mathrm{d}x = \frac{qb}{2}\left(\frac{b}{6\lambda_x} + \frac{1}{\alpha}\right),$$

следовательно

$$k = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{b}{6\lambda_x}\right)^{-1}. \tag{10}$$

Итак, $T = \left(1 + \dfrac{kb}{12\lambda_x} - \dfrac{k}{b\lambda_x}x^2\right)T(y)$, или

$$X(x) = 1 + \frac{kb}{12\lambda_x} - \frac{k}{b\lambda_x}x^2. \tag{11}$$

Дифференциальное уравнение для определения $T(y)$ учитывает краевой эффект — теплоотвод при $x = b/2$ — и имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}^2T(y)}{\mathrm{d}y^2} - \frac{2k}{b\lambda_y}T(y) + \frac{q}{\lambda_y} = 0. \tag{12}$$

Граничные условия:

$$y = 0,\quad \frac{\mathrm{d}T(0)}{\mathrm{d}y} = 0; \qquad y = H,\quad -\lambda_y\frac{\mathrm{d}T(H)}{\mathrm{d}y} = \alpha_2\,T(H). \tag{13}$$

Решение уравнения (12) при граничных условиях (13):

$$T(y) = \frac{qb}{2k}\left\{1 - \frac{\operatorname{ch}\left[\sqrt{2k/(b\lambda_y)}\,y\right]}{\operatorname{ch}\left[\sqrt{2k/(b\lambda_y)}\,H\right] + (\lambda_y/\alpha_2)\sqrt{2k/(b\lambda_y)}\operatorname{sh}\left[\sqrt{2k/(b\lambda_y)}\,H\right]}\right\}. \tag{14}$$

Подставляя (11) и (14) в (5), окончательно имеем

$$T = \frac{qb}{2k}\left(1 + \frac{kb}{12\lambda_x} - \frac{k}{b\lambda_x}x^2\right)\times$$

$$\times\left\{1 - \frac{\operatorname{ch}\left[\sqrt{2k/(b\lambda_y)}\,y\right]}{\operatorname{ch}\left[\sqrt{2k/(b\lambda_y)}\,H\right] + (\lambda_y/\alpha_2)\sqrt{2k/(b\lambda_y)}\operatorname{sh}\left[\sqrt{2k/(b\lambda_y)}\,H\right]}\right\}. \tag{15}$$

Действуя аналогичным образом, можно легко получить решения уравнений (1) при граничных условиях (2) в виде

$$T_i = T_\Gamma(y) + [T_i(y) - T_\Gamma(y)]\left[1 + \frac{k(y)\,b}{12\lambda_x} - \frac{k(y)}{b\lambda_x}x^2\right]. \tag{16}$$

Функции $T_i(y)$ и $T_\Gamma(y)$ определяются в результате совместного решения двух систем дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2T_i(y)}{dy^2} - \dfrac{2k(y)}{b\lambda_y}[T_i(y) - T_\Gamma(y)] + \dfrac{q(y)}{\lambda_y} = 0, \\ \dfrac{dT_\Gamma(y)}{dy} - \dfrac{2k(y)}{c_p\gamma_{cp}Q(y)}[T_i(y) - T_\Gamma(y)] = 0, \end{cases} \tag{17}$$

при граничных условиях, полученных из (2) таким же образом, как граничные условия (7) были получены из (4).

В таблице 1 для сравнения приведены численные результаты решения разными методами уравнения (3) при граничных условиях (4). Исходные данные были взяты из примера расчета в [2]:

$$q = 0{,}06 \text{ Вт/см}^3,\ \lambda_x = 0{,}0125 \text{ Вт/см°С},\ \lambda_y = 0{,}5 \text{ Вт/см°С},$$

$$\alpha = \alpha_2 = 0{,}05 \text{ Вт/см}^2\text{°С},\ b = 5 \text{ см},\ H = 40 \text{ см}.$$

Таблица 1

Расчетные точки (x, y)	по [2]	по [5]	по [6]	по формуле (15)
0, 0	17,4	15,91	17,64	17,61
0, H	8,3	4,31	8,6	8,81
$b/2$, 0	2,85	2,725	2,95	2,935
$b/2$, H	1,45	−8,875	1,7	1,47

Как видно из таблицы 1, результаты решения предлагаемым методом хорошо совпадают с результатами точного решения. В то же время, метод очень простой и дает возможность производить практические расчеты сопряженных областей при сложных граничных условиях.

Поступила 6 XII 1965 г.

Научно-исследовательский институт по тяжелому электромашиностроению, Харьков, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков А. В., *Теория теплопроводности.* ГИТТЛ, М., 1952.
2. v. Szalay L., *Beitrag zur Ermittlung der Temperaturen im Stator eines Turbogenerators.* E. u. M., 1955, *2.*
3. — *Anwendung des Picone-Verfahren auf die Wärmeleitungsdifferentialgleichung.* ETZ, 1953, **A**, S. 141.
4. Бойков Г. П., *Температурные поля в телах конечных размеров при внутреннем тепловыделении.* ИФЖ., 1959, **II.** *5.*
5. Бойков Г. П., Короленко Ю. А., *Температурное поле в анизотропном теле при внутреннем тепловыделении.* Изв. ВУЗ-ов, Электромеханика, 1961, *2.*
6. Власова З. А., *О методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям.* Тр. мат. ин-та АН СССР, 1959, **53.**

ASUPRA ALEGERII METODEI DE CALCUL A CÎMPULUI TERMIC ÎN PACHETUL DE TOLE

(Rezumat)

Se propune o metodă aproximativă de rezolvare a ecuaţiei lui Poisson cu aplicaţie la problemele de conductibilitate termică în maşinile electrice de mare putere. Metoda aproximativă propusă se remarcă prin simplitate şi o precizie suficient de mare, care permit utilizarea ei largă în calculele practice. Soluţia pe care o dă această metodă satisface precis condiţiile la limită, însă nu şi ecuaţia diferenţială. Prin natura sa metoda aproximativă propusă este apropiată de metoda variaţională.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 621.313.3

CUPLURI PARAZITE ŞI PIERDERI SUPLIMENTARE ÎN SARCINĂ LA MAŞINILE ASINCRONE

DE

ANDREI NICOLAIDE

1. Introducere

O influenţă însemnată asupra randamentului unei maşini asincrone, a caracteristicii mecanice şi a încălzirii, o au pierderile suplimentare. Influenţa asupra randamentului are un rol deosebit de mare la motoarele mici, unde pierderile suplimentare reprezintă o parte mai mare din puterea maşinii, decît la motoarele mari. În lucrarea de faţă se vor considera cuplurile parazite şi pierderile suplimentare în rotorul motoarelor cu colivie, datorite armonicilor superioare ale cîmpului magnetic din întrefier la funcţionarea în sarcină.

În diferite lucrări [1]...[3] s-au arătat efectele curenţilor care se închid între barele coliviei prin tolele rotorului, numiţi curenţi transversali. Aceste efecte pot fi sintetizate, pentru motoarele de construcţie normală, după cum se indică mai departe.

1. În rotoarele cu colivie curenţii transversali sînt relativ importanţi dacă barele sînt înclinate şi sînt neglijabili dacă barele sînt drepte.

2. Înclinarea barelor coliviei duce la micşorarea pierderilor suplimentare în rotor şi a cuplurilor parazite, dacă după cum s-a arătat în [2], produsul $\gamma_\nu l \ll 1$ şi duce la mărirea lor dacă produsul $\gamma_\nu l \gg 1$. Indicele ν se referă la ordinul armonicii considerate, iar produsul $\gamma_\nu l$ reprezintă o mărime adimensională, care depinde de parametrii rotorului [2].

3. Pentru ca curenţii transversali să nu ducă la o creştere importantă a pierderilor suplimentare şi a cuplurilor parazite trebuie ca rezistenţa transversală r_q să fie în afara unui anumit interval cuprins între limitele r_{q1}, r_{q2}, după cum se arată în [2].

Datorită prelucrărilor mecanice, izolaţia dintre tole în apropierea suprafeţei rotorului se distruge şi astfel apare o peliculă conductoare subţire la suprafaţa rotorului.

Saturaţia dinţilor şi curenţii longitudinali, adică paraleli cu axa maşinii, din pelicula conductoare de la suprafaţa rotorului, influenţează de asemenea asupra cuplului şi a pierderilor suplimentare în sarcină.

Scopul lucrării de faţă este examinarea următoarelor probleme.

1. Influenţa cantitativă a curenţilor longitudinali menţionaţi asupra pierderilor suplimentare în sarcină.

2. Efectul cantitativ al rezistenţei transversale asupra curbei cuplului şi a pierderilor suplimentare în sarcină, în cazul motoarelor de putere mică.

În acest scop s-au făcut mai multe încercări experimentale pe diferite motoare de putere mică (sub 10 kW) şi s-au determinat pierderile suplimentare şi caracteristicile mecanice.

Pentru determinarea experimentală a pierderilor suplimentare în rotor la funcţionarea în sarcină, P_{supl}, există diferite metode expuse în lucrările [1], [3], [7], care vor fi indicate în paragraful următor.

2. Metode de determinare a pierderilor suplimentare în sarcină la motoarele asincrone

1. *Metoda sarcinii reciproce cu legătură mecanică*

În fig. 1 este reprezentată schema instalaţiei [4]. Schema cuprinde două maşini asincrone identice, conectate la aceeaşi reţea şi cu arborii cuplaţi mecanic cu curea de transmisie. Diametrul discurilor celor două maşini pe care se pune cureaua de transmisie, se alege conform relaţiei $D_G/D_M = (1 - s_M)/(1 + s_M)$, sau $D_G/D_M = n_M/n_G$, unde cu D_G şi D_M s-a notat diametrul discului maşinii M, respectiv al discului maşinii G, cu n_M şi n_G — vitezele de rotaţie ale aceloraşi maşini iar cu s_M — alunecarea corespunzătoare regimului care se studiază. Astfel maşina M va funcţiona ca motor cu alunecarea $+ s_M$ iar maşina G va funcţiona ca generator cu alunecarea $- s_M$.

Wattmetrele W_1 indică puterea P_{1M} absorbită de motor, wattmetrele W_2 — puterea P_{1G} furnizată de generator, iar wattmetrele W — suma pierderilor în cele două maşini şi în transmisie. Componentele puterii indicate de wattmetrele W constau din:

1. Pierderile în oţel la funcţionarea în gol (P_{Fe1}).
2. Pierderile mecanice prin frecare şi ventilaţie în maşină (P_{mec}).
3. Pierderile în înfăşurarea statorului maşinilor (P_{Cu1}).
4. Pierderile prin frecare la alunecarea curelei de transmisie (P_c).
5. Pierderile în înfăşurarea rotorului maşinilor, datorite curenţilor induşi de armonica fundamentală a inducţiei în întrefier (P_{Cu2}).
6. Pierderile suplimentare în sarcină (P_{supl}).

Pierderile de la punctul 4 se determină cu relaţia

$$P_c = \frac{P_M n_c}{n_M},$$

unde P_M este puterea la arborele motorului; n_c — alunecarea curelei exprimată în rot/min, care se determină uşor dacă se cunosc vitezele de rotaţie ale discurilor şi diametrele lor.

Este necesar ca determinarea vitezelor de rotaţie să se facă prin metode stroboscopice sau alte metode foarte exacte.

Pierderile de la punctul 5 se determină cu relaţiile:

$$P_{2M} \approx s_M(P_{1M} - P_{Cu1} - P_{Fe2}), \quad P_{2G} \approx s_M(P_{1G} + P_{Cu1} + P_{Fe1}),$$

unde P_{2M} reprezintă pierderile în rotorul maşinii M; P_{1M} — puterea absorbită de maşina M de la reţea, măsurată cu wattmetrele W_1; P_{1G} — puterea cedată de maşina G reţelei, măsurată cu wattmetrele W_2; P_{2G} — pierderile în rotorul maşinii G; P_{Cu1} — pierderile în înfăşurarea statorului maşinii M, respectiv G; P_{Fe1} — pierderilor în oţel la mers în gol în maşina M, respectiv G.

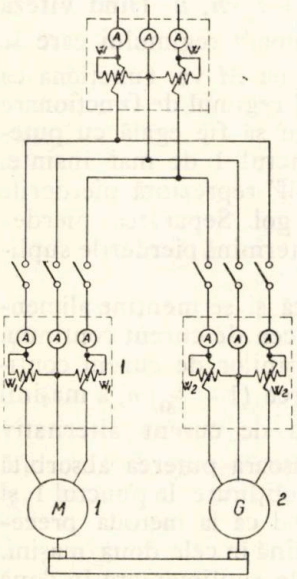


Fig. 1. — Schema instalaţiei pentru determinarea pierderilor suplimentare prin metoda sarcinii reciproce cu legătură mecanică.

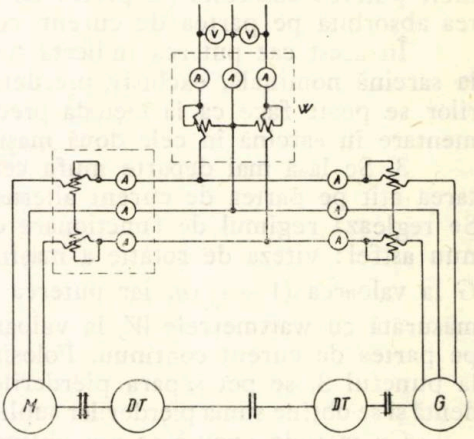


Fig. 2. — Schema instalaţiei pentru determinarea pierderilor suplimentare prin metoda sarcinii reciproce cu legătură electromecanică.

Scăzînd din puterea măsurată de wattmetrele W pierderile de la punctele 1...5 rezultă suma pierderilor suplimentare în sarcină în cele două maşini.

Dacă maşinile sînt identice se poate considera că pierderile suplimentare în sarcină în una din maşini sînt egale cu jumătate din această sumă.

2. *Metoda sarcinii reciproce cu legătură electromecanică*

În fig. 2 este reprezentată schema instalaţiei. Ea cuprinde patru maşini: două maşini asincrone identice şi două maşini de curent continuu tarate, de asemenea identice.

Se fac succesiv următoarele încercări.

1. Se cuplează mufa centrală şi se antrenează sistemul de pe partea de curent continuu, reglînd viteza de rotaţie peste valoarea de sincronism, pînă cînd wattmetrele W indică puterea zero. În acest caz puterea absorbită de sistem reprezintă pierderile la mers în gol ale intregii instalaţii.

2. Se decuplează mufa centrală şi se alimentează instalaţia atît pe partea de curent alternativ cît şi fiecare maşină de curent continuu. Se reglează viteza de rotaţie cu ajutorul maşinilor de curent continuu şi anume maşina M la $(1 - s_M)n$, iar maşina G la $(1 + s_M)n$, n fiind viteza de rotaţie sincronă, iar s_M — alunecarea corespunzătoare regimului care se studiază, de exemplu regimul nominal. Astfel maşina M va funcţiona ca motor iar maşina G ca generator. Se reglează astfel regimul de funcţionare încît puterea absorbită pe partea de curent continuu să fie egală cu puterea absorbită pe partea de curent continuu la punctul 1 de mai înainte. În acest caz puterea indicată de wattmetrele W reprezintă pierderile la sarcină nominală, exclusiv pierderile la mers în gol. Separarea pierderilor se poate face ca la metoda precedentă şi se determină pierderile suplimentare în sarcină în cele două maşini.

3. Se lasă mai departe mufa centrală decuplată şi se menţine alimentarea atît pe partea de curent alternativ, cît şi pe cea de curent continuu. Se reglează regimul de funcţionare cu ajutorul maşinilor de curent continuu astfel: viteza de rotaţie a maşinii M la valoarea $(1 - s_M)n$, a maşinii G la valoarea $(1 + s_M)n$, iar puterea de la reţeaua de curent alternativ măsurată cu wattmetrele W, la valoarea zero. Se măsoară puterea absorbită pe partea de curent continuu. Folosind rezultatele obţinute la punctul 1 şi la punctul 3, se pot separa pierderile în acelaşi mod ca la metoda precedentă şi se obţine suma pierderilor suplimentare în sarcină în cele două maşini.

Cu metoda expusă se pot obţine deci pierderile suplimentare în două moduri, indicate la punctul 2 respectiv 3.

Dacă maşinile sînt identice se poate considera că pierderile suplimentare ale unei maşini reprezintă jumătate din suma pierderilor suplimentare din cele două maşini.

Metoda sarcinii reciproce cu legătură electromecanică evită cuplarea prin curea de transmisie, folosită în metoda sarcinii reciproce cu legătură mecanică, care datorită alunecării curelei poate introduce erori, dar necesită multe maşini, aparatură şi este foarte laborioasă.

3. *Metoda antrenării în contracîmp*

Se va stabili mai întîi expresia pierderilor suplimentare în rotor în sarcină, în funcţie de puterea absorbită de stator.

Puterea la arbore este

$$P_u = M\Omega_1(1 - s), \tag{1a}$$

unde Ω_1 este viteza unghiulară de rotaţie sincronă, iar s — alunecarea.

Puterea transferată arborelui este

$$P_u = P_1 - P_{Cu1} - P_{Fe1} - P_{Cu2} - P_{supl} - P_{mec}, \tag{1b}$$

unde P_1 reprezintă puterea absorbită de la rețea.

Puterea transferată rotorului este

$$P_1 - P_{Cu1} - P_{Fe1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Omega_\nu M_\nu, \tag{2}$$

unde Ω_ν este viteza unghiulară de rotație corespunzătoare armonicii ν.

Pierderile în rotor datorită t. e. m. induse de armonica fundamentală sînt $P_{Cu2} = s\Omega_1 M_1$, iar pierderile în rotor datorite întregului cîmp sînt

$$P_{Cu2} = s \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{s_\nu}{s} \Omega_\nu M_\nu. \tag{3}$$

Din relațiile (1 a), (1 b), (2) și (3) rezultă:

$$P_{supl} = (P_1 - P_{Cu1} - P_{Fe1}) \left(1 - s \frac{M_1}{\sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu/\nu} \right) - (P_u + P_{mec}), \tag{4}$$

sau, deoarece $\nu \gg 1$,

$$P_{supl} \approx (P_1 - P_{Cu1} - P_{Fe1})(1 - s) - (P_u + P_{mec}). \tag{5}$$

Ordinul ν al armonicii este un număr pozitiv respectiv negativ, după cum armonica este directă sau inversă [8].

Pentru cazul cînd mașina funcționează ca frînă la $s = 2$, ținînd seama că P_u schimbă de semn, se obține

$$P_{supl} \approx (P_u - P_{mec}) - (P_1 - P_{Cu1} - P_{Fe1}). \tag{6}$$

Din relațiile (2) și (3) se vede că în regim de frînă la $s = 2$ puterea $P_1 - P_{Cu1} - P_{Fe1}$ reprezintă aproximativ jumătate din pierderile în înfășurarea rotorului. Urmează că jumătate din pierderile în rotor sînt acoperite de puterea primită la arbore, iar jumătate de puterea primită de la rețea.

Frecvența t. e. m. induse în rotor este

$$f_{2\nu} = \pm f_1 [1 - (1 - s)\nu],$$

unde ν este pozitiv pentru armonicile directe și negativ pentru armonicile inverse; înaintea parantezei se ia semnul plus sau minus, astfel încît $f_{2\nu}$ să fie pozitiv. La funcționarea în regim nominal, pentru armonicile superioare deoarece $s \ll 1$ se poate scrie $f_{2\nu} \approx (\nu - 1) f_1$, sau deoarece $\nu \gg 1$, $f_{2\nu} \approx \nu f_1$.

La funcționarea în regim de frînă în contracîmp ($s = 2$) se obține $f_{2\nu} = (\nu + 1)f_1$, sau deoarece $\nu \gg 1$, $f_{2\nu} \approx \nu f_1$.

Rezultă că în cazul cînd curentul din stator este același ca în regim nominal, pierderile suplimentare în rotor la regimul de frînă în contracîmp la $s = 2$ sînt aproximativ egale cu pierderile suplimentare în rotor, la regimul de funcționare nominal.

Se efectuează o încercare în contracîmp ; pierderile suplimentare în sarcină se calculează cu relația (6). Puterea la arbore P_u și pierderile mecanice prin frecare și ventilație se pot determina cu ajutorul unui dinam tarat, iar suma $P_{Cu1} + P_{Fe1}$ se poate determina aproximativ, efectuînd o probă cu rotorul scos.

Metoda antrenării în contracîmp conține o serie de erori datorită mai multor cauze: pierderile nu se pot separa prea exact, nu se poate efectua încercarea la saturația care are loc în regim nominal etc. Aplicarea metodei este însă relativ simplă și se poate utiliza atît la mașini mici cît și la mașini mijlocii sau chiar mari.

4. *Metoda directă*

Se efectuează o încercare în sarcină și se utilizează relația (5) de la metoda precedentă. Puterea P_1 absorbită de la rețea se măsoară cu ajutorul unor wattmetre, puterea P_u se deduce din cuplul măsurat la arbore și viteza de rotație, pierderile P_{Cu1} se calculează cunoscînd curentul și rezistența, P_{Fe1} se deduce din încercarea de mers în gol, P_{mec} se determină antrenînd motorul deconectat de la rețea la viteza de rotație nominală. Introducînd valorile obținute în relația (5) se obțin pierderile suplimentare.

Metoda directă [1] permite determinarea pierderilor chiar în situația reală; prezintă însă desavantajul că necesită scăderea a două valori apropiate și deci poate duce la erori, în special la mașinile mari unde pierderile suplimentare sînt relativ mici.

5. *Metoda excitației în curent continuu*

Aplicarea metodei [6] este diferită după cum rotorul este cu colivie în scurtcircuit sau cu inele. Se va expune mai întîi primul caz. Se leagă fazele statorului ca în fig. 3 și se alimentează cu curent continuu a cărui valoare se calculează după formulele cunoscute [8], astfel încît t. m. m. să fie aceeași ca la regim nominal. Se antrenează rotorul la viteza de sincronism cu un motor de curent continuu tarat. Puterea cedată la arbore de motorul de curent continuu acoperă pierderile prin frecare și ventilație, pierderile în rotor datorită t.e.m. induse de armonica fundamentală a cîmpului și pierderile în rotor datorită t.e.m. induse de armonicile superioare.

Pierderile prin frecare și ventilație se determină ușor printr-o încercare cu statorul motorului asincron nealimentat. Pierderile în rotor datorită armonicii fundamentale se calculează dintr-o probă cu rotorul calat, statorul

fiind alimentat de o tensiune la frecvenţa nominală şi curentul nominal. Se înmulţeşte cuplul măsurat la această probă cu viteza unghiulară de rotaţie, obţinîndu-se pierderile căutate. Prin scădere se separă pierderile suplimentare în rotor, în sarcină.

Se va expune acum al doilea caz, cel al maşinii cu rotor bobinat. În acest caz se leagă rotorul conform aceleiaşi scheme ca cea folosită în fig. 3 pentru înfăşurarea statorului. Se alimentează rotorul in curent continuu, se scurtcircuitează statorul şi se antrenează maşina cu ajutorul motorului de curent continuu, la viteza de sincronism. Se fac două încercări, una pentru curentul indus în stator egal cu curentul de magnetizare, alta pentru curentul indus în stator egal cu curentul nominal. Pentru fiecare încercare se scad din puterea primită de la arbore pierderile în înfăşurarea statorului şi se separă astfel pierderile în rotor. Diferenţa acestor pierderi din cele două încercări dă aproximativ pierderile suplimentare în rotor, în sarcină.

Metoda cuprinde erori deoarece cîmpul magnetic nu este identic cu cel din maşina alimentată în curent alternativ.

Este util de adăugat că t.e.m. induse de armonicile superioare, induc în circuitele rotorului curenţi care nu se închid pe toate fazele decît dacă rotorul este excitat de la o maşină de curent continuu. Dacă însă este alimentat de la un redresor, atunci curenţii nu se pot închide în tot timpul unei perioade prin circuitul de alimentare şi erorile sînt mai mari.

3. Măsurarea rezistenţei bară-tole

Pierderile suplimentare în rotor sînt funcţie de impedanţa transversală, adică impedanţa corespunzătoare curenţilor care se închid prin tole între două bare vecine ale coliviei. Impedanţa transversală poate fi considerată [1] practic determinată numai de rezistenţa de contact bară-tole. Măsurarea acestei rezistenţe se poate face folosind schema din fig. 4 după [1].

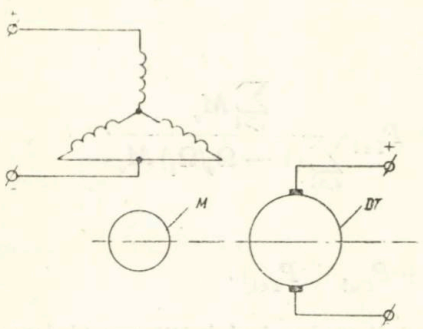


Fig. 3. — Schema instalaţiei pentru determinarea pierderilor suplimentare la un motor asincron cu rotorul cu colivie, prin metoda excitaţiei în curent continuu.

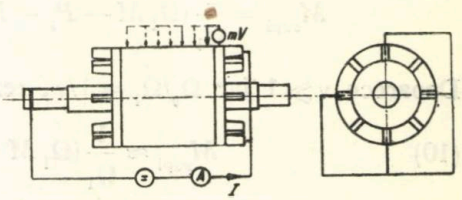


Fig. 4 — Schema instalaţiei pentru măsurarea rezistenţei bară-tole.

Se măsoară curentul total I şi se deduce curentul dintr-o bară. Se măsoară tensiunea U_{nc} între un inel al coliviei şi diferite puncte ale tolelor. Se face un număr cît mai mare de determinări şi se calculează valoarea medie a rezistenţei pe unitatea de lungime cu formula:

$$r_{\text{bară-tole}} = \frac{U_{\text{med}}}{I/Z_2} l_{\text{Fe}} \ (\Omega\,\text{cm}), \tag{7}$$

$$U_{\text{med}} = \frac{1}{n}(U_{1c} + U_{2c} + \ldots + U_{nc}), \tag{8}$$

în care l_{Fe} reprezintă lungimea pachetului de tole al rotorului, iar Z_2 — numărul de bare ale coliviei.

Cu neglijările menţionate, ţinînd seama de secţiunile prin care trece curentul, se poate scrie cu aproximaţie

$$r_q \approx 4 r_{\text{bară-tole}}, \tag{9}$$

unde r_q este rezistenţa dintre două bare vecine.

4. Separarea cuplului armonicii fundamentale

Se va indica modul în care se poate separa curba cuplului corespunzător armonicii fundamentale din curba rezultantă a cuplului, ridicată experimental.

Puterea transferată de la stator la rotor este:

$$P_1 - P_{\text{Cu1}} - P_{\text{Fe1}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Omega_\nu M_\nu .$$

Se va nota $M_{\text{supl}} = M - M_1$, unde M_{supl} reprezintă cuplul suplimentar, M — cuplul rezultant la arbore, M_1 — cuplul la arbore corespunzător armonicii fundamentale a cîmpului.

Dar $M = \sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu$, deci

$$M_{\text{supl}} = \frac{1}{\Omega_1}(\Omega_1 M - P_1 + P_{\text{Cu1}} + P_{\text{Fe1}}) \frac{\sum_{\nu>1} M_\nu}{\sum_{\nu>1} (1 - \Omega_\nu/\Omega_1) M_\nu} .$$

Deoarece $\nu \gg 1$ iar $\Omega_\nu/\Omega_1 = 1/\nu$, rezultă

$$M_{\text{supl}} \approx \frac{1}{\Omega_1}(\Omega_1 M - P_1 + P_{\text{Cu1}} + P_{\text{Fe1}}). \tag{10}$$

Mărimile $P_1, P_{\text{Cu1}}, P_{\text{Fe1}}$ din membrul al doilea al relaţiei (10) pot fi determinate prin metodele cunoscute, M fiind cuplul rezultant la arbore; astfel rezultă M_{supl} şi M_1.

5. Încercări experimentale [1])

S-au făcut măsurări de pierderi suplimentare P_{supl} pentru rotoare cu diferite valori ale rezistenţei transversale r_q, la maşini de putere mică (sub 10 kW) cu colivie de aluminiu. Datele obţinute pentru pierderile suplimentare sînt indicate în fig. 5.

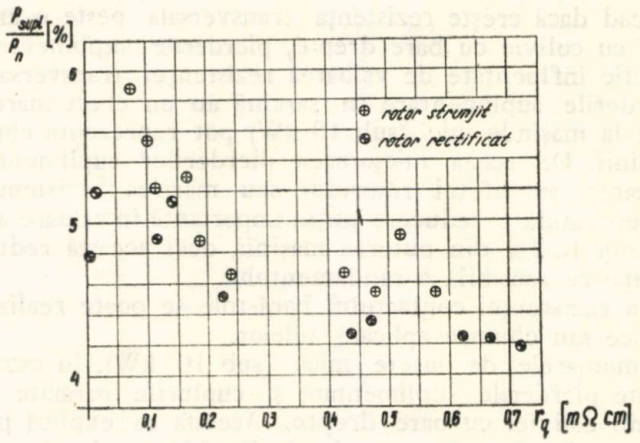


Fig. 5. — Dependenţa $P_{supl} = f(r)_q$ la motoare asincrone de mică putere cu colivie cu bare înclinate.

S-au efectuat probe atît pe rotoare cu suprafaţa rectificată, cît şi pe rotoare cu suprafaţa strunjită dar nerectificată. Pelicula conductoare formată în urma prelucrărilor mecanice la suprafaţa rotorului este neglijabilă în cazul suprafeţei rectificate şi este mai importantă în cazul suprafeţei strunjite.

S-a determinat de asemenea experimental curba cuplului la motoare de acelaşi tip. Curbele de cuplu obţinute sînt reprezentate în fig. 6...9. În fig. 6 şi 7 se dau curbele de cuplu pentru motoare care diferă prin tipul coliviei: cu bare înclinate, respectiv cu bare drepte. În rest datele constructive sînt aceleaşi. Menţiunea este valabilă şi pentru curbele din fig. 8 şi 9. Rotoarele maşinilor la care s-a măsurat cuplul au avut suprafaţa rectificată.

În acest paragraf se indică cîteva din rezultatele experimentale obţinute. Studiul teoretic şi rezultatele încercărilor experimentale permit să se stabilească anumite concluzii interesante pentru construcţia maşinilor asincrone de putere mică cu colivie, care sînt expuse în continuare.

---

[1]) Autorul ţine să exprime mulţumirile sale Uzinei „Electroprecizia" – Săcele şi în specia ing. B. Dobra şi Gh. Macarie pentru concursul dat la realizarea încercărilor experimentale.

6. Concluzii

1. În cazul rotoarelor strunjite pierderile suplimentare sînt ceva mai mari decît în cazul rotoarelor cu suprafaţa rectificată. Aceasta are loc datorită peliculei conductoare mai importante care se formează la suprafaţa rotorului strunjit.

2. La motoarele cu colivie cu bare înclinate, pierderile suplimentare în sarcină scad dacă creşte rezistenţa transversală peste o anumită limită. La motoare cu colivie cu bare drepte, pierderile suplimentare în sarcină nu sînt practic influenţate de valoarea rezistenţei transversale.

3. Pierderile suplimentare în sarcină au un efect mare asupra randamentului; la maşinile mici (sub 10 kW) pot reprezenta chiar 5...6% din puterea maşinii. De aceea micşorarea pierderilor suplimentare obţinută prin rectificarea suprafeţei rotorului sau mărirea rezistenţei bară-tole, chiar dacă reprezintă o reducere puţin importantă în valoare absolută, poate însă reprezenta 1...2% din puterea maşinii, deci această reducere conduce la o îmbunătăţire sensibilă a randamentului.

Mărirea rezistenţei contactului bară-tole se poate realiza prin tratamente termice sau chimice aplicate tolelor.

4. La motoarele de putere mică (sub 10 kW), în cazul coliviei cu bare înclinate pierderile suplimentare şi cuplurile parazite sînt mai mici decît în cazul coliviei cu bare drepte. Aceasta se explică prin faptul că în acest caz are loc inegalitatea $\gamma_v l \ll 1$. Dacă însă $\gamma_v l \gg 1$, ceea ce se poate întîmpla pentru rotoarele unor maşini de putere mică cu anumiţi parametri sau pentru rotoarele unor maşini de putere mare cu o valoare mare a lungimii l a rotorului, atunci ca urmare a înclinării barelor, pierderile suplimentare şi cuplurile parazite cresc.

5. Este util de amintit că dacă barele coliviei sînt înclinate, cuplul maxim este mai mic decît atunci cînd barele sînt drepte, celelalte date constructive fiind aceleaşi. Aceasta se explică prin mărirea reactanţei scăpărilor diferenţiale, ca urmare a înclinării barelor coliviei.

Primit la 5 iulie 1966 *Institutul politehnic, Braşov*

BIBLIOGRAFIE

1. Odok A. M., *Stray-Load Losses and Stray Torques in Induction Machines.* Trans. AIEE, Power Apparatus and Systems, 1958, *77*, pp. 43—53.
2. Nicolaide A., *Pierderi suplimentare în rotoarele cu colivie ale maşinilor asincrone şi sincrone.* Electrotehnica, 1964, **12**, *10*, pp. 361—368.
3. Данилевич Я. В., Кащарский Е., *Добавочные потери в электрических машинах* Госэнергоиздат, 1963.
4. Morgan T. H., Narbutovskih, *Stray Load Loss Test on Induction Machines.* Part I: Trans. AIEE, 1934, *53*, p. 287; Part II: Trans. AIEE, 1936, *55*, p. 319
5. Morgan T. H., Brown W. E., Schuman A. J., *Reverse Rotation Test for the Determination of Stray Load Loss in Induction Machines.* Trans. AIEE, 1939, *58* pp. 319—324.

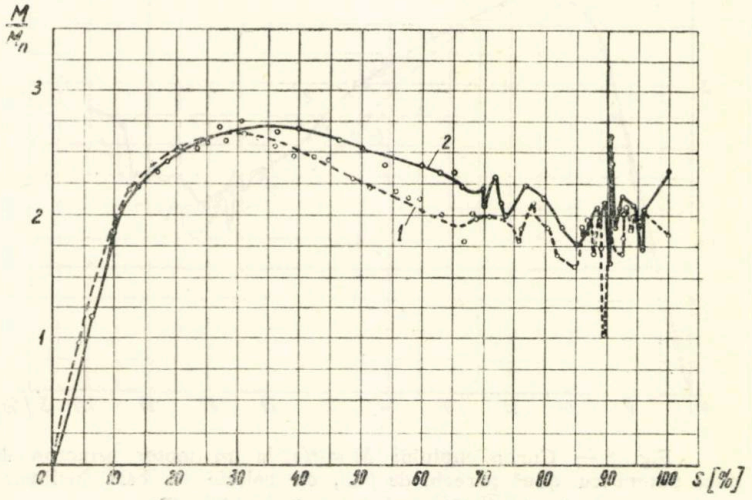


Fig. 6 — Curba cuplului $M = f(s)$ la un motor asincron de mică putere cu o pereche de poli, cu colivie cu bare înclinate:
$1 - r_q = 1{,}497$ mΩ cm ; $2 - r_q = 23{,}6$ mΩ cm.

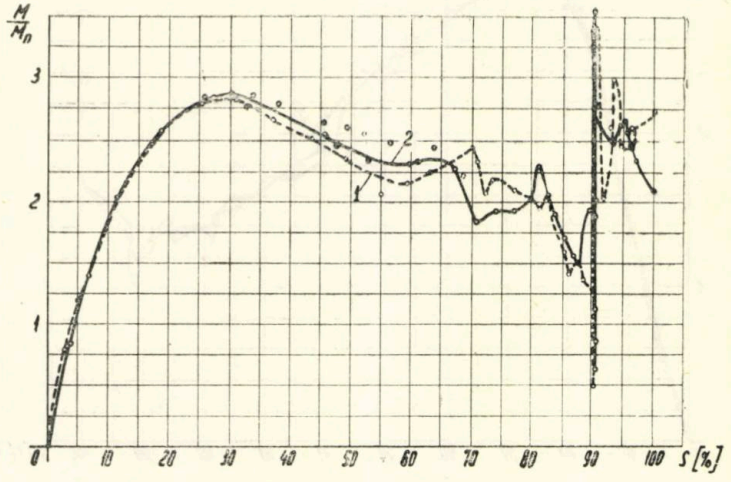


Fig. 7 — Curba cuplului $M = f(s)$ la un motor asincron de mică putere cu o pereche de poli, cu colivie cu bare drepte:
$1 - r_q = 0{,}431$ mΩ cm ; $2 - r_q = 1{,}023$ mΩ cm.

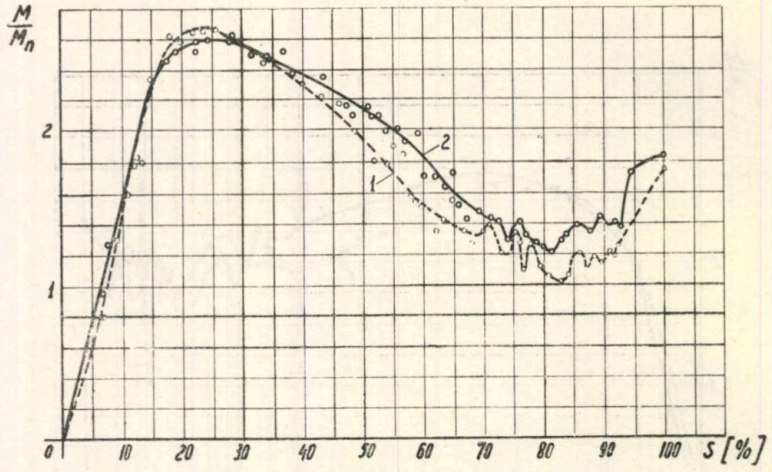


Fig. 8 — Curba cuplului $M = f(s)$ la un motor asincron de mică putere cu două perechi de poli, cu colivie cu bare înclinate: $1 — r_q = 0{,}76$ mΩ cm; $2 — r_q = 4{,}23$ mΩ cm.

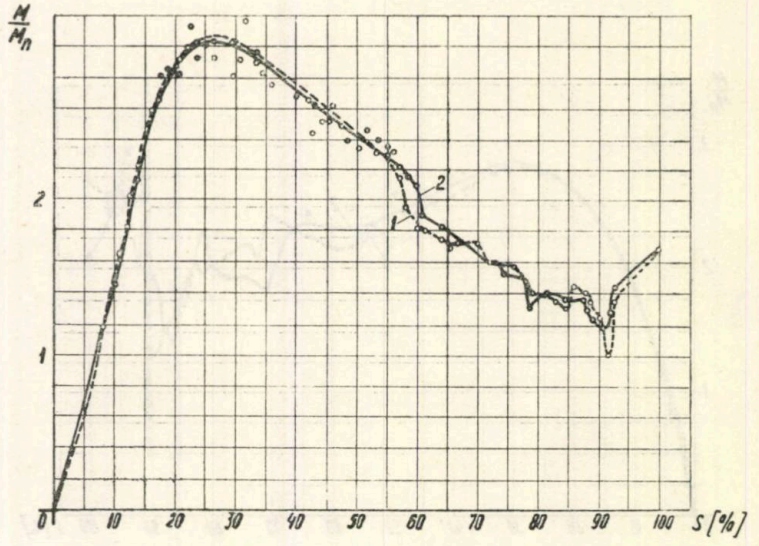


Fig. 9 — Curba cuplului $M = f(s)$ la un motor asincron de mică putere cu două perechi de poli, cu colivie cu bare drepte: $1 — r_q = 0{,}29$ mΩ cm; $2 — r_q = 8{,}86$ mΩ cm.

6. Koch J. B., *Measurement of Stray Load Loss in Polyphase Induction Motors.* Trans. AIEE, 1932, *51*, pp. 265—267.
7. Nedelcu V. N., *Pierderi suplimentare în sarcină în maşinile asincrone.* Electrotehnica, 1961, **9**, *12*, pp. 423—432.
8. Richter R., *Maşini Electrice.* Vol. **IV**, Ed. Tehn., Buc., 1960 (trad. din l. germană).

COUPLES PARASITES ET PERTES SUPPLÉMENTAIRES EN CHARGE DANS LES MACHINES ASYNCHRONES

(Résumé)

Après avoir montré les résultats de quelques études antérieures, on indique le but de ce travail à savoir :

a) l'étude de l'influence quantitative sur les pertes supplémentaires en charge, des courants longitudinaux, de la pellicule formée à la surface du rotor, à la suite de l'usinage mécanique ;

b) l'étude de l'effet quantitatif de la résistance du contact entre les barres et les tôles sur la courbe du couple et sur les pertes supplémentaires en charge, au cas des moteurs asynchrones de petite puissance.

L'analyse théorique et expérimentale conduit aux conclusions suivantes :

1. Au cas des rotors travaillées à la tour, les pertes supplémentaires en charge sont un peu plus grandes qu'au cas des rotors ayant la surface rectifée, ce qui est du à l'effet des courants longitudinaux de la pellicule conductrice formée à la suite du tournage.

2. Les pertes supplémentaires et les couples parasites diminuent avec l'augmentation, au delà d'une certaine limite, de la résistance du contact entre les barres et les tôles, si les barres ne sont pas inclinées.

La résistance entre les barres de la cage du rotor et les tôles peut être augmentée à l'aide des traitements thermiques ou chimiques appliqués aux tôles.

3. Les pertes supplémentaires peuvent avoir un effet sensible sur le rendement des petits moteurs (inférieurs à 10 kW), pouvant représenter 5...6% de la puissance du moteur.

4. Au cas des moteurs de petite puissance (inférieurs à 10 kW), les pertes supplémentaires et les couples parasites sont en général sensiblement plus importants si les barres de la cage ne sont pas inclinées. La situation peut être tout autre au cas de certains moteurs de grande puissance, pour des raisons mentionées dans l'étude.

Il est utile de souligner que si les barres de la cage sont inclinées, le couple maximum est plus petit qu'au cas ou les barres ne sont pas inclinées, tous les autres éléments de la construction restant les mêmes ; ce qui s'explique par l'augmentation de la réactance différentielle des fuites, à la suite de l'inclinaison des barres.

Explication des figures

Fig. 1 — Schéma de l'installation pour déterminer les pertes supplémentaires par la méthode des charges réciproques à liaison mécanique.

Fig. 2 — Schéma de l'installation pour déterminer les pertes supplémentaires par la méthode des charges réciproques à liaison électromécanique.

Fig. 3 — Schéma de l'installation pour déterminer les pertes supplémentaires chez un moteur asynchrone à rotor en cage, par la méthode de l'excitation en courrant continu.

Fig 4 — Schéma de l'installation pour mesurer la résistance barre-tôle.

Fig. 5 — Fonction $P_{supl} = f(r_q)$ pour les moteurs asynchrones de petite puissance à cage avec barres inclinées.

Fig. 6 — Courbe du couple $M = f(s)$ d'un moteur asynchrone de petite puissance ayant une paire de pôles et à cage avec des barres inclineés : $1 - r_q = 1{,}497$ mΩ cm; $2 - r_q = 23{,}6$ mΩ cm.

Fig. 7 — Courbe du couple $M = f(s)$ d'un moteur asynchrone de petite puissance ayant une paire de pôles et à cage avec des barres droites : $1 - r_q = 0{,}431$ mΩ cm ; $2 - r_q = 1{,}028$ mΩ cm.

Fig. 8 — Courbe du couple $M = f(s)$ d'un moteur asynchrone de petite puissance ayant deux paires de pôles et à cage avec des barres inclinées : $1 - r_q = 0{,}76$ mΩ cm ; $2 - r_q = 4{,}23$ mΩ cm.

Fig. 9 — Courbe du couple $M = f(s)$ d'un moteur asynchrone de petite puissance ayant deux paires de pôles et à cage avec des barres droites : $1 - r_q = 0{,}29$ mΩ cm ; $2 - r_q = 8{,}86$ mΩ cm.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 621.313.3

ASUPRA POSIBILITĂŢII FUNCŢIONĂRII UNUI MOTOR TRIFAZAT SERIE CU COLECTOR CU DUBLU RÎND DE PERII CA MOTOR DERIVAŢIE

DE

IOSIF BERGMAN şi P. LEONTE

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

În lucrarea anterioară [1] s-a prezentat un studiu experimental comparativ privind funcţionarea unei maşini trifazate cu colector, cu trei perii pe perechea de poli, în regim de motor serie şi de motor derivaţie. S-a pornit de la ideea că proiectarea unei maşini trifazate cu colector decurge la fel indiferent dacă ea este destinată a funcţiona în regim serie sau derivaţie.

S-au ridicat caracteristicile în cele două regimuri şi s-a constatat că la viteze suprasincrone este mai avantajos regimul derivaţie iar la viteze subsincrone cel serie. S-au făcut unele observaţii privind funcţionarea maşinii în regim compensat şi ca motor asincron normal.

În această lucrare se demonstrează pe cale teoretică posibilitatea funcţionării unui motor serie ca motor derivaţie şi se verifică concluziile pe un motor trifazat serie cu colector cu şase perii pe perechea de poli (cu dublu rînd de perii). De asemenea se prezintă unele observaţii privind comutaţia motorului trifazat cu colector alimentat prin stator cînd acesta este destinat a funcţiona atît în regim serie cît şi derivaţie şi se dau indicaţii privind proiectarea transformatorului intermediar.

După cum s-a indicat în [1] problema prezintă interes atît sub aspectul transformării unui motor serie în motor derivaţie sau invers cît şi pentru construirea unor maşini care să poată funcţiona în ambele regimuri. Asemenea maşini ar găsi aplicaţii în diferite ramuri industriale.

2. Maşina trifazată cu colector alimentată prin stator funcţionînd în regim serie şi în regim derivaţie la acelaşi cuplu pe arbore

Pentru a deduce condiţiile în care o maşină trifazată cu colector alimentată prin stator poate furniza acelaşi cuplu pe arbore cînd funcţionează ca motor serie şi ca motor derivaţie s-a pornit de la expresiile cuplului maşinilor trifazate cu colector serie şi derivaţie.

S-a dedus expresia cuplului maşinii trifazate serie cu colector în cazul practic al existenţei transformatorului intermediar scriind, analog ca în [2], ecuaţiile circuitelor primar şi secundar ale maşinii serie. S-a ajuns la aceeaşi expresie a cuplului ca în [3], cu observaţiile ce se vor nota mai jos.

Cuplul maşinii serie are expresia

$$C = \frac{3\,U_p^2\,x_1\,k\sin\alpha}{\omega\,z^2}, \tag{1}$$

iar raportul global de transformare este

$$k = k_m\,k_t = \frac{w_2\,k_{w2}\,w_{1t}}{\sqrt{3}\,w_1\,k_{w1}\,w_{2t}}, \tag{2}$$

k_m şi k_t fiind rapoartele de transformare ale motorului şi transformatorului intermediar; w_1, w_2, k_{w1} şi k_{w2} — numerele de spire şi coeficienţii de înfăşurare pentru stator şi rotor; w_{1t} şi w_{2t} — numerele de spire ale primarului şi secundarului transformatorului intermediar; α — unghiul de decalaj al colierului de perii din poziţia de mers în gol, considerat pozitiv dacă colierul de perii se decalează în sens contrar sensului de rotaţie al rotorului (la motorul serie cu dublu rînd de perii şi cu un singur colier decalabil α este jumătatea unghiului de decalaj al colierului); U_p — tensiunea pe fază a reţelei; $\omega = 2\pi f$ — pulsaţia curentului de alimentare; x_1 — reactanţa principală a înfăşurării statorului; z^2 — pătratul modulului impedanţei totale a motorului

$$z^2 = x_1^2(a\,s_s^2 + b\,s_s + c), \tag{3}$$

unde

$$\begin{cases} a = k^2(1 + 2\,k\cos\alpha + k^2), \\ b = 2\,k[-\varepsilon\sin\alpha + \tau\,(k + \cos\alpha) + \cos\alpha\,(1 + 2\,k\cos\alpha + k^2)], \\ c = \varepsilon^2 + (1 + \tau)^2 + 2\,k\,[(1 + \tau)\cos\alpha + \varepsilon\sin\alpha] + k^2. \end{cases} \tag{4}$$

Cu s_s s-a notat alunecarea maşinii în montaj serie iar

$$\varepsilon = \frac{r_1 + r_{1t} + k_{ts}^2\,(r_2 + r_{2t})}{x_1} \quad \text{şi} \quad \tau = \frac{x_{1s} + x_{1t} + k_{ts}^2\,(x_{2s} + x_{2t})}{x_1}, \tag{5}$$

r_1, r_2, r_{1t} și r_{2t} fiind rezistențele înfășurărilor statorului și rotorului motorului, respectiv ale primarului și secundarului transformatorului intermediar; x_{1s}, x_{2s}, x_{1t} și x_{2t} — rectanțele corespunzătoare; $k_{ts} = w_{1t} w_{2t}$ — raportul de transformare al transformatorului intermediar în regim serie.

Dacă se notează cu $k_{td} = w_{1t}/w_{2t}$ raportul de transformare al transformatorului de alimentare a periilor, atunci expresia cuplului mașinii derivație este

$$C = \frac{3U_p^2}{\omega} \frac{r_2 k_m^2 s_d + (k_m/k_{td}) r_2 (1 + \tau_1) \cos\beta - x_2 (\tau' + \tau'') s_d) \sin\beta}{r_2^2 (1 + \tau_1)^2 + x_2^2 (\tau' + \tau'' s_d)^2}, \tag{6}$$

în care s_d reprezintă alunecarea motorului derivație. Relația pentru cuplul motorului derivație a fost dedusă analog ca în [3], neglijînd rezistențele, rectanțele și curentul de magnetizare al transformatorului. De asemenea, ca la orice mașină asincronă, s-a neglijat rezistența activă a înfășurării statorului.

Reactanța de scăpări a înfășurării rotorului mașinii trifazate cu colector are două componente [4], una independentă de alunecare și una funcție de aceasta

$$x_{2s} = x'_{2s} + s_d x''_{2s}, \tag{7}$$

în care

$$\tau_1 = \frac{x_{1s}}{x_1}, \quad \tau' = \frac{x'_{2s}}{x_2} + \frac{x_{1s}}{x_1} \frac{x'_{2s}}{x_2}, \quad \tau'' = \frac{x_{1s}}{x_1} + \frac{x''_{2s}}{x_2} + \frac{x_{1s}}{x_1} \frac{x''_{2s}}{x_2}, \tag{8}$$

iar β este unghiul de decalaj al periilor față de poziția de zero. Considerînd că mașina derivație funcționează fără compensarea factorului de putere prin decalarea colierului de perii, în relația (6) se ia $\beta = 0$.

La deducerea ecuațiilor mașinii serie nu s-a ținut seama de influența alunecării asupra reactanței de scăpări a înfășurării rotorului, ca și în [3]. Pentru a se putea compara cele două regimuri se va neglija această influență și în expresia cuplului mașinii derivație, adică se va considera $x''_{2s} = 0$. Atunci (6) devine

$$C = \frac{2U_p^2}{\omega} \frac{r_2 k_m^2 s_d + (k_m/k_{td}) r_2 (1 + \tau_1)}{r_2^2 (1 + \tau_1)^2 + x_2^2 [\tau' + s_d (x_{1s}/x_1)]^2}, \tag{9}$$

Din (9) rezultă că alunecarea la mersul în gol ($C = 0$) are expresia

$$s_{d0} = -\frac{1}{k_m k_{td}}. \tag{10}$$

Aceasta înseamnă că la raport de transformare k_{td} negativ alunecarea de mers în gol a motorului derivație este pozitivă, motorul funcționînd

la viteze subsincrone, iar la k_{td} pozitiv motorul funcţionează la viteze de mers în gol suprasincrone.

Neglijarea în calcul a termenului $s_d x_{1s}/x_1$ duce la simplificarea relaţiilor iar rezultatele nu sînt afectate de erori mai mari de 10%.

Prin egalarea relaţiilor (1) şi (9) s-a obţinut, după unele calcule, condiţia pentru ca o maşină serie să poată fi transformată în maşină derivaţie

$$\frac{1+\tau_1}{k_m k_{td}} + s_d = \frac{k_{ts} \sin\alpha \,[r_2^2(1+\tau_1)^2 + x_2^2 \tau'^2]}{r_2 k_m x_1 (a s_s^2 + b s_s + c)}. \tag{11}$$

Relaţia (11) conţine ca termeni variabili unghiul α de decalaj al periilor şi alunecarea s_s a maşinii funcţionînd în regim serie iar pentru regimul derivaţie — alunecarea s_d şi raportul de transformare k_{td} al transformatorului de alimentare a periilor.

Pentru orice cuplu se poate găsi experimental, sau prin calcul cu relaţia (1), curba $s_s = f(\alpha)$ corespunzătoare motorului serie respectiv. Tot experimental sau cu relaţiile (6) sau (9) se obţine $s_d = f(k_{td})$ pentru funcţionarea unui motor derivaţie la cuplu constant.

Dacă se cunoaşte $s_s = f(\alpha)$ pentru un cuplu oarecare constant la care funcţionează motorul trifazat serie cu colector se pot determina diferitele perechi de valori k_{td} şi s_d la care motorul trifazat cu colector respectiv transformat în motor derivaţie va funcţiona la acelaşi cuplu pe arbore. Avînd în vedere că (11) conţine patru parametri variabili, ea poate fi satisfăcută în orice condiţii; rezultă că transformarea unui motor serie trifazat cu colector în motor derivaţie este totdeauna posibilă.

Maşinile trifazate derivaţie alimentate prin stator se construiesc în general pentru o funcţionare între 0,5 şi 1,5 ori viteza sincronă, adică pentru alunecări s_d cuprinse între $-0{,}5$ şi $+0{,}5$, din condiţii de comutaţie.

În baza lui (10) rezultă că pentru a obţine aceste limite de reglaj ale vitezei este necesar ca raportul de transformare global $k = k_m k_{td}$ să varieze între ± 2 şi $\pm\infty$. La $k_m k_{td} = \pm 2$ se obţin vitezele de mers în gol de 0,5 n_1 şi 1,5 n_1, $n_1 = 60f/p$ fiind viteza de sincronism a motorului. La $k_m k_{td} = \pm\infty$ maşina trifazată cu colector devine un motor asincron normal avînd periile de pe colector scurtcircuitate.

La motorul trifazat derivaţie diferenţa procentuală dintre vitezele de mers în gol şi la sarcina nominală nu depăşeşte o anumită valoare s_n (la maşinile asincrone normale s_n depăşeşte rareori 0,1...0,15),

$$\frac{n_0 - n}{n} \leqslant s_n. \tag{12}$$

Dacă se notează

$$n_0 = n_1(1 - s_{d0}), \quad n = n_1(1 - s_d), \tag{13}$$

$$B = \frac{k_{ts} \sin \alpha \, [r_2^2 (1 + \tau_1)^2 + x_2^2 \tau'^2]}{r_2 k_m x_1 (a s_s^2 + b s_s + c}, \tag{14}$$

inegalitatea (12) devine

$$\frac{-s_{d0} + s_d}{1 - s_{d0}} \leqslant s_n, \tag{15}$$

sau ținînd seama de (10) și (11)

$$B \leqslant s_n \left(1 - \frac{1}{k_m k_{td}} \right) - \frac{\tau_1}{k_m k_{td}}. \tag{16}$$

Dacă se utilizează relația dintre puterea utilă, cuplu și viteză

$$P_u = C \frac{2\pi f}{p} (1 - s) \text{ W}, \tag{17}$$

se poate obține puterea furnizată de mașina transformată în motor derivație, sau la o putere necesară dată — alunecarea la care trebuie să funcționeze motorul derivație în regimul dat.

3. Verificarea experimentală

Pentru verificarea experimentală s-au utilizat un motor trifazat serie cu colector alimentat prin stator cu dublu rînd de perii de 3,1 kW, 800 rot/min, 380 V, $2p = 4$, valorile parametrilor motorului fiind $r_1 = 1{,}25\ \Omega$, $r_2 = 0{,}53\ \Omega$, $x_{1s} = 2{,}65\ \Omega$, $x_{2s} = 0{,}157\ \Omega$, $x_1 = 49\ \Omega$, $k_m = 0{,}27$ și $k = 1{,}07$.

În fig. 1 s-a reprezentat schema de montaj a motorului trifazat cu colector alimentat prin stator, cu dublu colier de perii destinat a funcționa ca motor serie și ca motor derivație. Cu S și R s-au notat statorul și rotorul motorului iar cu Pr și Sec primarul și secundarul transformatorului.

Pentru a obține montajul serie se alimentează motorul prin întreruptorul K_1, întreruptorul K_3 rămînînd deschis, iar pentru montajul derivație se alimentează motorul prin întreruptorul K_3 după ce a fost închis întreruptorul K_2. Cu ajutorul comutatoarelor wattmetrice C_1, C_2, C_3 și C_4 și a instrumentelor de măsură corespunzătoare se citesc curenții și puterile pe fază la alimentare, la înfășurarea statorului, la înfășurarea primară a transformatorului și la perii. Alimentarea transformatorului se face prin întreruptorul K_4.

Pentru încărcarea motorului s-a folosit dinamul frînă G montat coaxial cu acesta și excitat separat.

Pentru montajul motorului în regim derivație, colierul fix al motorului serie rămîne în poziția de mers în gol iar colierul reglabil trebuie decalat cu 180° electrice în sens invers sensului de mers al motorului. Acest lucru se explică prin faptul că la poziția de mers în gol rotorul

motorului serie cu şase perii pe perechea de poli nu este alimentat, transformatorul funcţionînd în scurtcircuit ceea ce nu este posibil în regim derivaţie. La transformarea motorului serie cu trei perii pe perechea de poli în motor derivaţie colierul rămîne în poziţia de mers în gol.

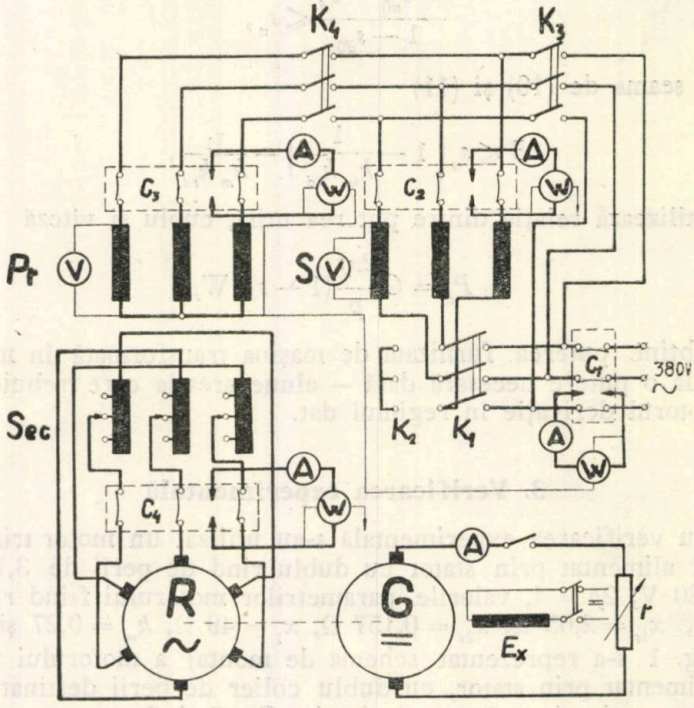
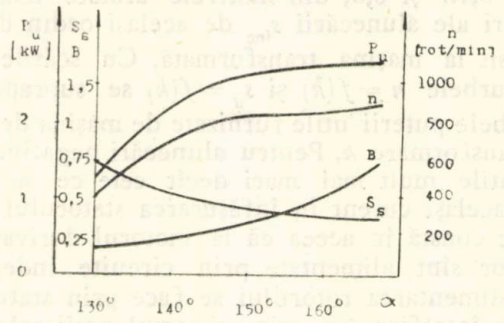


Fig. 1

În fig. 2 s-a trasat curba $s_s = f(\alpha)$ obţinută experimental pentru funcţionarea motorului studiat în regim serie la cuplu constant pe arbore ($C = 3$ kgm). Pentru acelaşi cuplu s-au reprezentat curbele vitezei, puterii utile şi parametrului B în funcţie de α.

Din fig. 2 rezultă că valorile lui B sînt mai mari decît cele ce rezultă din inegalitatea (16) dacă pentru s_n se înlocuiesc valorile obişnuite pentru maşini asincrone. Creşterea lui B se datoreşte existenţei în circuitul secundar al maşinilor cu colector a rezistenţelor contactului perie-colector şi a înfăşurării secundare a transformatorului. Creşterea diferenţei dintre viteza de mers în gol şi cea în sarcină cu îndepărtarea de viteza sincronă se explică prin introducerea înfăşurării secundare a transformatorului.

În fig. 3 s-au reprezentat curbele $s_d = f(k)$ obținute experimental pentru cuplul constant pe arbore $C = 3$ kgm la rapoarte de transformare k pozitive (curba superioară) și la rapoarte de transformare k negative (curba inferioară). Cu linii întrerupte s-au reprezentat curbele $s_d = f(k)$



Fi . 2

calculate cu relația (11) pentru valorile limită ale parametrului B (B=0,18 și $B = 0{,}775$). Valorile alunecării s_d obținute experimental sînt cuprinse între valorile limită calculate. Prin urmare se verifică prin calcul posibilitatea transformării motorului serie utilizat ca motor derivație.

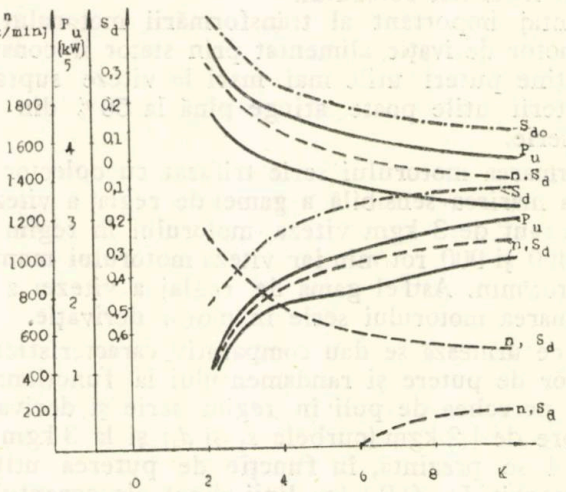


Fig. 3

În fig. 3 sînt reprezentate cu linie-punct curbele alunecării la mersul în gol în funcție de raportul de transformare global, $s_{d0} = f(k)$, calculate cu relația (10). Se observă că alunecarea dintre viteza de mers în gol și cea la sarcina nominală

$$s_{inc} = \frac{n_0 - n}{n_0} \tag{18}$$

este mai mare decît la o maşină asincronă normală şi cuprinsă, pentru cuplul ales, între 0,13 şi 0,5, din motivele arătate mai sus. De altfel în [4] se indică valori ale alunecării s_{inc} de acelaşi ordin de mărime cu cele pe care le-am găsit la maşina transformată. Cu scările alese pentru alunecări şi viteze curbele $n = f(k)$ şi $s_d = f(k)$ se suprapun. În fig. 3 s-au reprezentat şi curbele puterii utile furnizate de maşina derivaţie, în funcţie de raportul de transformare k. Pentru alunecări negative maşina derivaţie poate da puteri utile mult mai mari decît cele ce se pot obţine de la motorul serie la acelaşi curent în înfăşurarea statorului. Diferenţa dintre cele două montaje constă în aceea că la motorul derivaţie statorul şi sistemul perii-colector sînt alimentate prin circuite independente, pe cînd la motorul serie alimentarea rotorului se face prin stator indiferent dacă puterea trece prin întrefier sau prin sistemul perii-colector în rotor. La funcţionarea la viteze suprasincrone (alunecări negative) motorul derivaţie absoarbe energie de la reţea atît prin stator cît şi prin sistemul perii-colector; de aceea la acelaşi curent în stator ca şi la motorul serie puterea absorbită poate creşte mult. În această situaţie creşte numai f. e. m. secundară dar nu şi curentul în rotor. Prin urmare puterea mărită se obţine fără creşterea încălzirii rotorului.

Un avantaj important al transformării motorului serie trifazat cu colector în motor derivaţie alimentat prin stator îl constituie deci faptul că se pot obţine puteri utile mai mari la viteze suprasincrone. Această creştere a puterii utile poate atinge pînă la 50% din puterea nominală a motorului serie.

Transformarea motorului serie trifazat cu colector în motor derivaţie duce şi la mărirea sensibilă a gamei de reglaj a vitezei maşinii. Astfel la cuplul constant de 3 kgm viteza motorului în regim serie a putut fi variată între 400 şi 900 rot/min iar viteza motorului montat derivaţie între 1 740 şi 370 rot/min. Astfel gama de reglaj a vitezei a crescut la dublu prin transformarea motorului serie în motor derivaţie.

În cele ce urmează se dau comparativ caracteristicile curenţilor primari, factorilor de putere şi randamentului la funcţionarea motorului cu şase perii pe perechea de poli în regim serie şi derivaţie la cuplu constant pe arbore de 1,2 kgm (curbele s_1 şi d_1) şi la 3 kgm (curbele s_2 şi d_2).

În fig. 4 se prezintă, în funcţie de puterea utilă, caracteristicile curentului absorbit $I = f(P_u)$ (cu linii pline), ale curentului în înfăşurarea statorului $I_s = f(P_u)$ (cu linie punct) şi ale curentului în înfăşurarea primară a transformatorului $I_{tr} = f(P_u)$ (cu linii întrerupte); ultimele două sînt trasate numai la funcţionarea maşinii în regim derivaţie deoarece la regimul serie $I = I_s = I_{tr}$. La aceeaşi putere utilă curenţii absorbiţi sînt mai mari la maşina derivaţie decît la maşina serie. Mai mult şi curentul

absorbit de înfășurarea statorului în regim derivație este mai mare decît curentul primar al motorului serie.

Acest lucru se explică astfel: puterile utile mici la cuplu constant înseamnă viteze mici de rotație deci viteze subsincrone. La aceste viteze puterea absorbită de motorul trifazat cu colector alimentat prin stator trece din stator prin întrefier în rotor, motorul restituind prin colector și perii rețelei puterea de alunecare. Prin urmare prin statorul motorului serie circulă curentul corespunzător diferenței dintre puterea ce trece prin întrefier în rotor și puterea de alunecarea pe care rotorul o trimite înapoi în rețea. La motorul derivație însă puterea de alunecare circulă înapoi

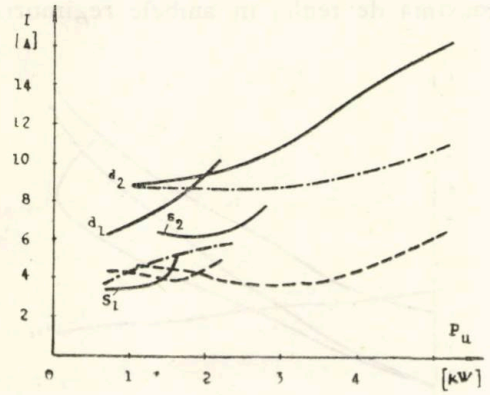


Fig. 4

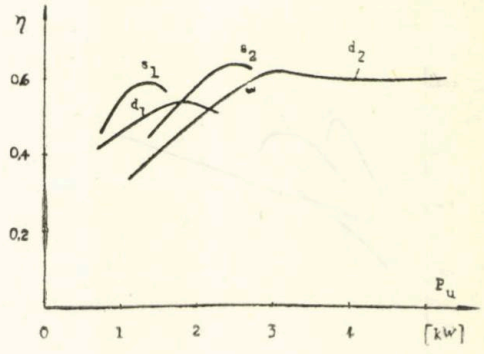


Fig. 5

în rețea printr-un circuit independent și deci cu toate că rotorul absoarbe aceeași putere în cele două regimuri, în stator puterea și curentul vor fi mai mici la motorul în regim serie decît în regim derivație. În plus creșterea puterii în înfășurarea statorului se obține și prin creșterea tensiunii la bornele acesteia în regim serie, în regim derivație această tensiune rămînînd constantă. La creșterea puterii utile curentul absorbit de motorul serie crește peste curentul din statorul motorului în regim derivație. Acest lucru este mai vizibil la curbele pentru $C = 1{,}2$ kgm. Faptul că curentul din primarul transformatorului este circa 50% din curentul statoric al motorului derivație trebuie luat în considerare la proiectarea acestuia.

În fig. 5 s-a reprezentat caracteristica randamentului în funcție de puterea utilă. Din motivele arătate randamentul motorului în regim derivație este mai mic decît în regim serie. Cu creșterea puterii utile diferența randamentelor scade.

În fig. 6 s-au reprezentat caracteristicile factorului de putere. La aceeași putere utilă factorul de putere al motorului în regim derivație este mai mic decît în regim serie. Numai la puteri utile mari, care nu se pot

obţine cu motorul serie, factorul de putere în regim derivaţie atinge valori mari. Factorul de putere al motorului cu dublu rînd de perii este mai mic decît al celui cu simplu rînd de perii, din motivele indicate în [5].

4. Funcţionarea motorului trifazat cu colector cu dublu rînd de perii, la viteză constantă, în regim serie şi derivaţie

Rezultatele experimentale privind funcţionarea motorului trifazat cu colector la viteză constantă sînt date pentru $n = 800$ rot/min (viteză subsincronă) la care s-a obţinut gama maximă de reglaj în ambele regimuri.

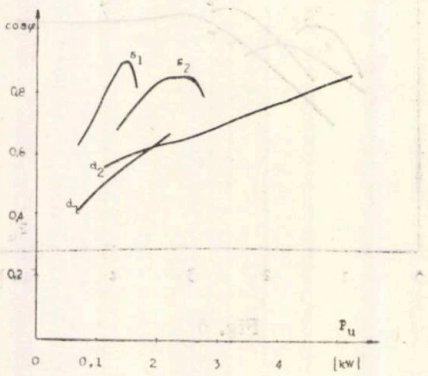


Fig. 6

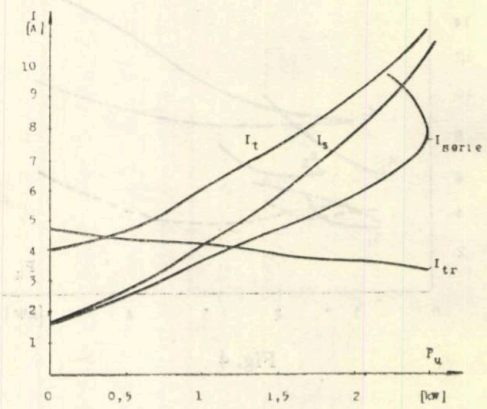


Fig. 7

În fig. 7 s-au reprezentat, în funcţie de puterea utilă, curenţii I absorbiţi în cele două regimuri, curenţii din înfăşurarea statorului I_s şi primarul transformatorului I_{tr} fiind reprezentaţi numai pentru regimul derivaţie, deoarece la regimul serie $I = I_s = I_{tr}$. Curentul absorbit de înfăşurarea statorului este mai mare în regim derivaţie decît în regim serie, deoarece la viteze subsincrone curentul din stator este dat de diferenţa dintre puterea absorbită de la reţea şi puterea de alunecare. Cu creşterea sarcinii curentul absorbit de primarul transformatorului I_{tr} în regim derivaţie scade deoarece puterea de alunecare pe care motorul o trimite înapoi în reţea se reduce.

Curenţii din rotor, reprezentaţi în figură, sînt aproximativ egali în ambele regimuri. Aceeaşi observaţie este valabilă şi pentru puterile din înfăşurarea statorului şi din primarul transformatorului. Factorii de putere în aceste înfăşurări sînt mai mari în regimul serie decît în regimul deri-

vație (fig. 8). Factorul de putere al transformatorului de alimentare a rotorului motorului derivație $\cos\varphi_{trd}$ este scăzut deoarece curentul și pierderile de mers în gol ale acestuia corespund tensiunii de alimentare. În regim serie el funcționînd ca transformator de intensitate, curentul de magnetizare și pierderile în fier sînt mici.

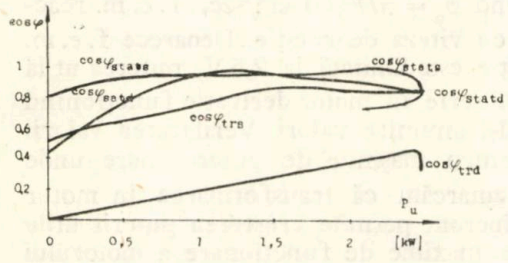


Fig. 8

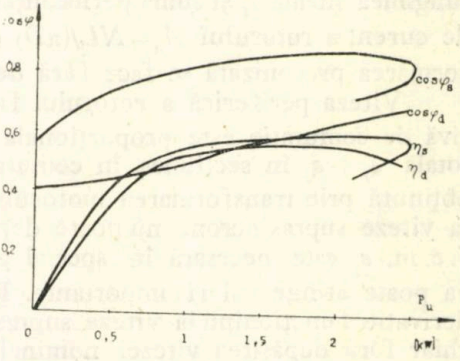


Fig. 9

Factorul de putere și randamentul în cele două regimuri sînt date în fig. 9. În regim derivație motorul are factorul de putere și randamentul mai mic decît în regim serie.

5. Comutația

Comutația constituie un fenomen specific mașinilor cu colector atît de curent continuu cît și de curent alternativ și hotărăște în ultimă analiză calitățile și performanțele lor.

Datele prezentate în această lucrare și în [1] sînt obținute în condiții de comutație bună.

Din [4] și [6] rezultă că f. e. m. de transformator ce apare între două lame de colector alăturate nu trebuie să depășească în funcționare 2,5 V în ambele cazuri. La mașina în rotație această f. e. m. se exprimă prin relația

$$e_t = 4{,}44 f s w'_s \frac{p}{a} \Phi 10^{-8} \quad \text{V}, \tag{19}$$

în care numărul de spire pe secțiune w'_s, numărul perechilor de poli p și numărul perechilor de circuite derivate la rotor a sînt date constructive ale mașinii care nu variază prin transformare; frecvența f este constantă iar fluxul Φ depinde în ambele cazuri de tensiunea de alimentare care este de asemenea constantă. Rezultă că f. e. m. de transformator e_t variază proporțional cu alunecarea și depășirea alunecării admise poate perturba buna funcționare a mașinii.

În ce priveşte f. e. m. reactivă din spira în comutaţie, ea se exprimă, în cazul maşinii cu şase perii pe perechea de poli, prin relaţia

$$e_s = 2 w'_s a_a l_i A_a \xi 10^{-8} \text{ V}; \tag{20}$$

ea este în general mai mică [5] decît f.e.m. de transformator e_t. În (20) lungimea ideală l_i şi suma permeanţelor ξ şi w'_s sînt date constructive. Pătura de curent a rotoruluï $A_a = NI_2/(\pi D)$ o considerăm constantă pentru că transformarea preconizată se face fără depăşirea valorii nominale a curentului.

Viteza periferică a rotorului fiind $v_a = \pi Dn/60$ cm/sec, f. e. m. reactivă de comutaţie este proporţională cu viteza de rotaţie. Deoarece f. e. m. totală $e_t + e_s$ în secţiunea în comutaţie este limitată la 2,5 V, puterea utilă obţinută prin transformarea motorului serie în motor derivaţie funcţionînd la viteze suprasincrone nu poate depăşi anumite valori. Verificarea valorii f. e. m. e_s este necesară în special pentru maşinile de putere mare unde ea poate atinge valori importante. Remarcăm că transformarea în motor derivaţie funcţionînd la viteze suprasincrone permite creşterea puterii utile chiar fără depăşirea vitezei nominale maxime de funcţionare a motorului în regim serie.

La maşina cu trei perii pe perechea de poli f. e. m. e_s calculată cu relaţia (20) trebuie înmulţită cu $\sqrt{3/2}$.

6. Indicaţii pentru proiectarea transformatorului de alimentare a periilor

Din cele expuse rezultă că se poate transforma orice motor trifazat serie cu colector în motor derivaţie alimentat prin stator fără a modifica construcţia motorului.

Pentru reglajul vitezei motorului serie trifazat se decalează colierul de perii. Transformatorul intermediar are rolul de a reduce tensiunea ce se aplică la perii la valorile admisibile din punctul de vedere al tensiunii dintre lame. Raportul de transformare al transformatorului intermediar este constant şi se alege în aşa fel încît raportul global de transformare al motorului dat de (2) să fie cuprins între 1,0...1,2 [6]. În cazul limitelor de reglaj ale vitezei de 1/3 (între $0{,}5 n_1$ şi $1{,}5 n_1$) puterea transformatorului intermediar este de cca. jumătate din puterea nominală a motorului. Curenţii din primarul şi din secundarul transformatorului sînt respectiv egali cu curenţii din statorul şi din periile motorului; prin urmare tensiunea nominală din primar a unui asemenea motor este de cca. 0,5 din tensiunea nominală a motorului.

La motorul derivaţie alimentat prin stator colierul de perii rămîne fix astfel încît axele cîmpurilor statorului şi rotorului să coincidă. Uneori colierul se decalează cu cîteva grade pentru îmbunătăţirea factorului de putere. Reglajul vitezei motorului derivaţie se face prin reglarea mărimii

tensiunii aplicate la perii. Dacă tensiunea aplicată la colector este în fază cu tensiunea secundară a motorului acesta va funcționa la viteze subsincrone.

Dacă tensiunea aplicată este în opoziție de fază cu tensiunea secundară a motorului, el va funcționa la viteze suprasincrone.

Pentru transformarea motorului serie în motor derivație cea mai simplă soluție de obținere a tensiunii de alimentare a periilor este utilizarea unui transformator cu prize, conectarea periilor la diferitele prize făcîndu-se prin intermediul unui controler. La motoarele cu colier simplu de perii, se folosesc transformatoare trifazate cu secundarul în stea dublă (cu legătura de nul la mijloc) pentru a obține fără dificultate trecerea de la rapoarte negative de transformare (tensiuni în fază cu secundarul) la rapoarte pozitive. După cum s-a arătat mai sus din motive de comutație motoarele trifazate cu colector derivație se construiesc pentru game de reglaj asemănătoare cu motoarele serie. Prin urmare puterea transformatorului de alimentare a periilor motorului derivație va fi aceeași cu a motorului serie. Dacă înfășurarea secundarului transformatorului intermediar al motorului serie ar fi prevăzută cu un număr suficient de prize ea ar putea fi folosită și pentru reglajul vitezei motorului în regim derivație, bineînțeles fie pentru viteze subsincrone fie pentru viteze suprasincrone. Pentru a putea regla viteza de la $0{,}5\,n_1$ la $1{,}5\,n_1$ la mașina cu trei perii pe perechea de poli, este necesar a se prevedea încă o înfășurare secundară de aceeași putere cu prima avînd nulul comun și prizele necesare.

Înfășurarea primară a transformatorului de alimentare a periilor mașinii în regim derivație trebuie să aibă alte caracteristici decît în cazul transformatorului intermediar pentru aceeași mașină funcționînd în regim serie. Astfel, după cum rezultă și din § 3, curentul său nominal reprezintă cca. 50% din curentul nominal al motorului iar tensiunea sa nominală este egală cu tensiunea rețelei de alimentare. Dacă este necesară folosirea motorului atît în regim serie cît și derivație atunci înfășurarea primară se poate realiza prin legarea în serie cu înfășurarea existentă la transformatorul intermediar al motorului serie a unei înfășurări care să realizeze condițiile pentru regimul derivație.

Pentru aprecierea faptului dacă se poate folosi același miez de transformator pentru mașina transformată trebuie ținut seama că transformatoarele intermediare ale motoarelor serie cu decalarea tuturor periilor se construiesc puternic saturate, inducțiile în miez putînd atinge 2,2 Wb/m^2 [4] pentru mărirea stabilității în funcționarea acestor motoare la viteze mici. La motoarele serie cu șase perii pe perechea de poli și un singur colier decalabil saturarea magnetică a miezului transformatorului nu mai este necesară, stabilitatea lor fiind bună și la viteze mici [5]. Prin urmare este posibil ca fie din cauza miezului mic, a ferestrei mici sau a numărului relativ mare de prize să nu poată fi folosit miezul transformatorului intermediar al mașinii în regim serie pentru trecerea ei în regim derivație. Acest lucru este de așteptat în special la transformarea motoarelor cu trei perii pe perechea de poli.

7. Concluzii

a) Orice motor trifazat cu colector de tip serie poate fi transformat în motor derivaţie.

b) Se poate obţine o creştere importantă a puterii utile a motorului serie prin transformarea lui în motor derivaţie funcţionînd la viteze suprasincrone.

c) Transformarea în motor derivaţie permite creşterea gamei de reglaj a vitezei motorului.

d) Condiţiile de comutaţie rămîn în general neschimbate în această transformare.

e) Pentru a putea transforma motorul serie în motor derivaţie nu sînt necesare modificări constructive ale motorului, dar transformatorul de alimentare al periilor trebuie modificat sau înlocuit. La motorul cu colier dublu şi un singur colier decalabil transformatorul intermediar poate fi modificat mai uşor.

f) Printr-un montaj adecvat al transformatorului acelaşi motor poate fi folosit atît în regim serie cît şi în regim derivaţie.

g) Pentru a transforma motorul serie cu dublu rînd de perii în motor derivaţie colierul mobil de perii trebuie decalat cu 180° electrice în sens invers sensului de mers din poziţia de mers în gol în regim serie.

h) Se confirmă faptul constatat în [1] că la viteze subsincrone motorul serie are caracteristici mai bune decît motorul derivaţie.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de măsuri şi maşini electrice,
Laboratorul de maşini electrice

BIBLIOGRAFIE

1. Bergman I., Leonte P., Corlăţeanu V., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1961, **VII**, (**XI**), *1—2*, pp. 217—232.
2. Corlăţeanu V., Bergman I., Şerban Gh., Leonte P., Ştirbu V., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1961, **VII** (**XI**), *3—4*, pp. 207—220.
3. Michael W., *Theorie der Wechselstrommaschinen in vektorieller Darstellung*. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin, 1937.
4. Richter R., *Maşini electrice*. Vol. **V**, Ed. Tehn., Buc., 1961 (trad. din l. germană).
5. *** *Manualul inginerului electrician*. Vol. **II**, Ed. Tehn., Buc., 1954.
6. Liwschitz M., *Die elektrischen Maschinen*. Bd. **III**, B. G. Teubner, Leipzig. u. Berlin, 1934.

ÜBER DIE ARBEITSMÖGLICHKEIT ALS NEBENSCHLUSSMOTOR DER DREIPHASENREIHENSCHLUSSMOTOREN MIT DOPPELTEM BÜRSTENSATZ

(Zusammenfassung)

Es wird theoretisch die Umwandlungsmöglichkeit der Dreiphasenreihenschlussmotoren in Nebenschlussmaschinen bewiesen und auf einen Doppeltbürstensatzmotor geprüft.

Es werden Bemerkungen zum Entwurf des Zwischentransformatores für die Arbeit der Maschine in Reihen- und Nebenschlussbetrieb gemacht.

Durch Umwandlung des Reihenschlussmotors in Nebenschlussmotor der bei übersynchronen Geschwindigkeiten arbeitet kann man eine wichtige Vergrösserung der Nutzleistung erziehlen.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 338.062.219.3

DAUNELE PROVOCATE DE ÎNTRERUPEREA ALIMENTĂRII CU ENERGIE ELECTRICĂ LA FABRICAREA PRODUSELOR DIN MASE PLASTICE

DE

AL. POEATĂ, LAURIAN PREDA şi ADINA DANIŞ

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

După cum este cunoscut, unul din principalii indici ai regimului de funcţionare a unui sistem energetic este siguranţa în funcţionare sau continuitatea în alimentarea cu energie electrică a tuturor consumatorilor, cu păstrarea indicilor de calitate în limitele admise.

Cauzele întreruperilor în alimentarea cu energie au un caracter întîmplător. Cele mai dese întreruperi se datoresc avariilor ce se produc la diferitele elemente ale sistemului energetic (cazane, turbine, linii etc.). Întreruperile pot fi cauzate şi de alţi factori, cum ar fi de ex. lipsa de putere în sistem etc. Aceasta la rîndul ei se poate datora fie prognozei greşite privind creşterea cererii de putere, fie din cauza scăderii debitelor la centralele hidroelectrice etc. Şi aceste întreruperi sînt tot evenimente întîmplătoare.

Prin urmare, baza ştiinţifică a aprecierii siguranţei în alimentarea cu energie o constitue calculul probabilităţilor [1]. Pe această bază siguranţa în alimentare în anumite condiţii poate fi apreciată prin probabilitatea asigurării alimentării cu energie.

Din experienţa de exploatare a sistemelor energetice s-au acumulat suficiente date statistice din care s-au dedus caracteristicile probabilistice ale evenimentelor întîmplătoare, pe baza cărora să se poată calcula probabilitatea de alimentare a unui anumit consumator într-o anumită variantă dată.

Problema importantă însă pe care o ridică proiectanţii sistemelor energetice este aceea de a stabili nivelul optim al siguranţei în alimentarea cu energie electrică a diferiţilor consumatori. Într-adevăr, mărirea nivelului siguranţei în alimentarea cu energie duce evident la scăderea dauneler provocate de întreruperile în alimentarea cu energie dar necesită sporirea cheltuielilor de investiţii şi curente în instalaţiile de alimentare. Deci problema se reduce la un calcul tehnico-economic care în majoritatea cazurilor nu se poate face din lipsa unor date sigure privind daunele provocate de întreruperile în alimentarea cu energie electrică [1].

Înainte de a trece la problema daunelor provocate de întreruperile în alimentarea cu energie a consumatorilor, este util să precizăm că stabilirea nivelului siguranţei în alimentarea cu energie este importantă într-o serie de probleme ca: stabilirea rezervei optime de putere în sisteme, alegerea schemelor sistemului, a numărului de linii de alimentare, a măsurilor privind prevenirea avariilor şi a creşterii coeficientului de siguranţă al rezervei de stabilitate a sistemului.

De asemenea cunoaşterea daunelor permite personalului de exploatare să efectueze corect sacrificările în sistem, să se cunoască abonaţii care pot fi prevăzuţi cu relee D. A. S., precum şi să se reglementeze litigiile dintre furnizorii şi beneficiarii de energie electrică.

Este important apoi, din aceleaşi considerente, să se cunoască variaţia daunelor în funcţie de durata întreruperii.

Plecînd de la aceste considerente şi ţinînd seama de faptul că problema prezintă interes pentru multe întreprinderi şi institute de proiectări de la noi, ne-am propus să analizăm cazul complet al daunelor într-o întreprindere de produse din mase plastice, întreprinderi cu mari perspective de dezvoltare, problemă nestudiată pînă în prezent sub acest aspect.

2. Metodologia de calcul

Problema metodei analizei daunelor provocate prin întreruperile în alimentarea cu energie este expusă detaliat în [2]. Ulterior au fost publicate rezultatele cercetărilor făcute la noi privind daunele provocate de întreruperile în alimentarea cu energie la o serie de întreprinderi [5] ... [6].

În literatura tehnică mai există o lucrare de acest gen [3], dar am preferat metodologia expusă în [2] ca fiind mai completă şi totodată pentru că rezultatele cercetărilor să poată avea o bază de interpretare comună indiferent de colectivul care a efectuat studiul.

Conform acestei metodologii, daunele provocate de întreruperile în alimentare pot fi grupate după natura lor în următoarele categorii: D_1 — rebuturi în producţie şi stricarea materiei prime; D_2 — avarii şi deranjamente ale utilajului; D_3 — amortismente şi cheltuieli generale; D_4 — salarii plătite inutil pe perioada întreruperii; D_5 — venit net pierdut prin nerealizarea producţiei.

Pentru aprecierea acestor daune trebuie să se analizeze amănunţit procesul tehnologic, să se analizeze structura preţului de cost al producţiei şi să se întocmească curbele de variaţie a întreruperii producţiei în funcţie de timpul de întrerupere a alimentării

$$\theta_p = f(\theta),$$

în care θ_p este timpul de întrerupere a producţiei, iar θ — timpul de întrerupere a alimentării cu energie electrică.

Avînd în vedere că într-o asemenea întreprindere realizarea diferitelor produse se face pe linii tehnologice sau utilaje independente, am analizat daunele pe fiecare linie sau utilaj seperat. În felul acesta se pot trage concluzii privitoare la nivelul siguranţei în alimentare necesar pentru fiecare utilaj sau linie tehnologică în parte.

Pentru aprecierea daunei D_1 la utilajele ce pot fabrica diferite sortimente, s-a considerat că avaria apare în timpul cînd se fabrică produsul cu dimensiuni medii. Pentru aprecierea consumurilor suplimentare de energie în timpul reglării utilajelor s-au urmărit schemele electrice şi în special valorile puterilor instalate pe fiecare utilaj. Menţionăm că în

aceste întreprinderi se consumă o cantitate mare de energie electrică pentru încălzit. Deoarece aparatele de măsură pentru energie electrică sînt instalate pe secţii, am apreciat consumul de energie necesar încălzirii pe bază de putere instalată.

Pentru aprecierea daunelor D_3, D_4, şi D_5 s-a ţinut seama că ele depind de cantitatea de produse nerealizate ΔP din cauza întreruperii alimentării şi de structura preţului de cost, respectiv de livrare.

Astfel

$$D_3 = C_a \Delta P, \quad D_4 = C_s \Delta P, \quad D_5 = b \Delta P, \tag{1}$$

unde C_a reprezintă componenta amortizărilor şi cheltuielilor generale în lei/kg, C_s — componenta salariilor directe în preţul de cost în lei/kg, b — beneficiul în lei/kg.

Pentru simplificarea calculelor în conformitate cu [4] am calculat aceste daune cu relaţiile

$$D_3 = m_3 \theta_p, \quad D_4 = m_4 \theta_p,$$
$$D_5 = m_5 \theta_p, \quad D_3 + D_4 + D_5 = D_p = m \theta_p, \tag{2}$$

în care $m_3 = C_a P'$ lei/min, $m_4 = C_s P'$ lei/min, $m_5 = b P'$ lei/min, $m = m_3 + m_4 + m_5$ lei/minut, P' reprezintă productivitatea medie în kg/min iar θ_p — timpul de întrerupere a producţiei.

3. Procesul tehnologic

În cadrul întreprinderii analizate se obţin o serie de produse finite din mase plastice dintre care cele mai importante sînt ţevile cu diametrul de la 10 ... 280 mm şi grosime variabilă, plăci, covoare, butoaie etc.

Aceste produse se obţin în general prin prelucrarea la cald a prafului de P. V. C. şi a granulelor de polietilenă şi polistiren, amestecate cu diferiţi plastifianţi, stabilizatori, lubrefianţi, coloranţi şi materiale de umplutură.

În mod normal, în cadrul procesului de fabricaţie nu au loc reacţii chimice. Materialul este doar încălzit pînă la o anumită temperatură, în general pe cale electrică, şi prin amestecare este gelifiat, stare în care poate lua cu uşurinţă forma dorită a obiectului finit.

În cazul în care se depăşesc temperaturile prescrise pentru prelucrare, se produc reacţii care duc la descompunerea materiei prime prin arderea carbonului (în cazul polietilenei şi a polistirenului) ori a degajării acidului clorhidric în cazul P. V. C. Temperaturile la care nu se produce descompunerea materialelor sînt: 180° pentru P. V. C., 170° la polietilenă şi 200° la polistiren. În cazul întreruperii alimentării cu energie, există pericolul ca materia primă să staţioneze în anumite zone de încălzire un timp mai îndelungat decît cel necesar atingerii temperaturii prescrise.

În acest caz, pe lîngă rebutarea produsului are loc o depunere a materialului pe piesele de antrenare (şnecuri) care nu mai pot funcţiona şi necesită demontarea şi curăţirea lor, operaţie care consumă un timp suficient de lung.

În cele ce urmează se descrie procesul tehnologic pentru fiecare utilaj sau linei tehnologică, şi se trasează caracteristica $\theta_p = f(\theta)$ precum şi caracteristicile daunelor.

a) *Secţia ţevi*

Ţevile se fabrică cu ajutorul extruderelor pentru ţevi din mase plastice. Pe extruderele tip $A_2/80$ se fabrică ţevi cu diametrul 10 ... 125 mm, iar pe extruderele $A_2/120$ – ţevi cu diametrul 140 ... 280 mm, de tip uşor, mediu sau greu, în funcţie de presiunea la care rezistă.

Procesul tehnologic de fabricare a ţevilor este dat în fig. 1.

Praful P. V. C. din bunkerul *1* trece în maşina de extrudere *2* care prin intermediul unor şnecuri, transportă materialul de-a lungul unui cilindru încălzit din exterior cu rezistenţe electrice pînă la cca. 180°; şnecurile omogenizează materialul. La capătul cilindrului este capul de extrudere dotat cu o duză şi dorn. Ţeava extrusă, încă în stare plastică, este introdusă în duza de calibrare *3* unde este presată de pereţii acesteia cu aer comprimat; duza este răcită în exterior. Ţeava astfel calibrată este trasă cu un dispozitiv special *4*, cu viteză constantă, şi dusă la maşina de tăiere *5*.

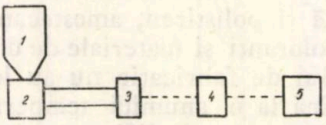


Fig. 1

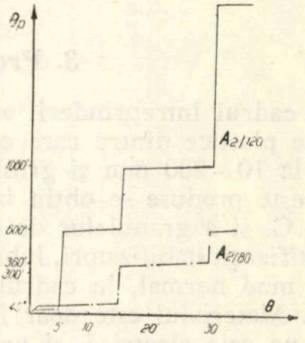


Fig. 2

În cazul întreruperilor în alimentarea cu energie pînă la 5 min, ţeava se rupe, din care cauză este necesară o nouă operaţie de prindere şi reglare a grosimii ţevii, care durează în medie 45 min (funcţie de abilitatea muncitorului).

La întreruperi în alimentarea cu energie cuprinse între 5 şi 15 min apar arsuri pe capul de extrudere din cauza supraîncălzirii materialului. În acest caz este necesară demontarea capului, operaţie care durează

aproximativ 1 oră, curăţirea lui — 2 ore şi remontarea — 3 ore, după care se aşteaptă reîncălzirea capului care durează circa 4 ore.

În cazul cînd întreruperea durează peste 15 min materialul aflat în cilindru, după supraîncălzire şi descompunere, începe să se răcească, apărînd arsuri pe şnec, încît este necesară şi demontarea şnecului pentru curăţire, operaţie destul de greoaie care durează în medie 18 ore.

Dacă întreruperea durează peste 1/2 oră, materialul din cilindru se întăreşte şi scoaterea şnecului se face mult mai greu, operaţia de repunere în funcţiune putînd dura circa 2 zile.

Aceleaşi procese se întîmplă şi în cazul maşinilor $A_2/80$, numai că duratele de demontare şi montare sînt ceva mai mici.

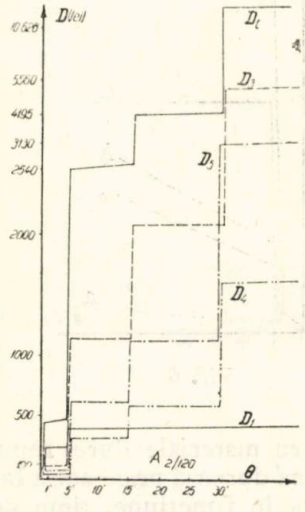


Fig. 3

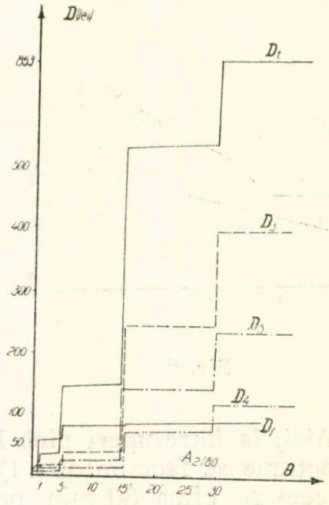


Fig. 4

În fig. 2 sînt date curbele $\theta_p = f(\theta)$ pentru extruderele $A_2/120$ şi $A_2/80$.

În ceea ce priveşte daunele D_1 ele se compun din valoarea unei ţevi, din care se scade valoarea materiei prime recuperate, mai puţin costul pentru remăcinarea materialului rebutat, consumul de energie pentru reîncălzirea cilindrului şi cel din timpul reglării maşinii, precum şi costul remăcinării materialului obţinut în timpul reglării.

Dauna D_2 provenită din uzura suplimentară a utilajelor din cauza întreruperilor există cu siguranţă, dar din lipsa unor date statistice privind scurtarea vieţii utilajelor din cauza curăţirilor dese, nu a putut fi apreciată.

Daunele D_1, D_3, D_4, şi D_5 pentru extruderele $A_2/120$ şi $A_2/80$ sînt reprezentate în fig. 3 şi 4.

b) *Secţia granulatoare*

Granulatoarele sînt utilaje cu ajutorul cărora se fabrică granule dure sau plastifiate din praf de P.V.C., granule utilizate ca materie primă în alte întreprinderi.

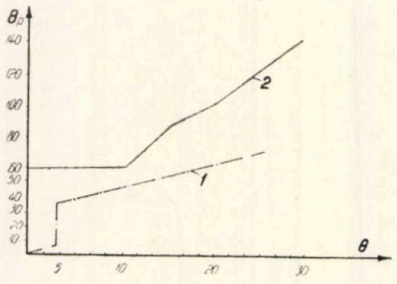


Fig. 5

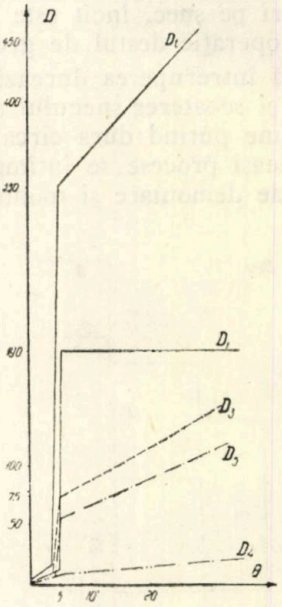


Fig. 6

Aici, la întreruperi pînă la 5 min (pentru materiale dure) repunerea în funcţiune se face imediat. Dacă întreruperea durează peste acest interval sînt necesare circa 30 min pentru repunerea în funcţiune, timp necesar pentru curăţirea maşinei şi reîncălzirea ei.

În fig. 5 s-a reprezentat caracteristica $\theta_p = f(\theta)$ (curba *1*), iar în fig. 6 curba daunelor pentru granulatoare.

c) *Secţia produse calandrate*

În această secţie se produc covoare, dale, foi dure etc. Materia primă utilizată este P.V.C.-1 praf şi diferite adaosuri (lubrefianţi, stabilizatori plastifianţi, materiale de umplutră). Schema bloc a procesului tehnologic este dată în fig. 7 unde *1* este un amestecător la rece al materialelor menţionate iar *2* — bunker-tampon de unde materialul este descărcat în şarje de circa 50 kg în malaxorul plastomat *3* care gelifiază produsul. Din trei în trei minute şarja este descărcată pe o bandă şi transportată la valţul *4* unde se continuă operaţia de omogenizare, după care materialul este transportat la dispozitivul *5* (streiner) care reţine impurităţile. Produsul astfel obţinut

este transportat pe bandă la calandrul *7* unde materialul este trecut printr-o serie de cilindri obţinîndu-se folii care se rulează în dispozitivul *8*. Foliile asfel obţinute sînt trecute la maşina de dublat *9* de la care se capătă produsul finit, covor sau dale.

Este important să subliniem că valţul *4* este format din 2 cilindri în interiorul cărora se găseşte o anumită cantitate de apă şi în care sînt introduşi 2 electrozi, încălzirea făcîndu-se electric. Operaţia de încălzire şi răcire a acestor cilindri trebuie făcută cu multă precauţie, după graficul din fig. 8, şi în plus, între 80° şi 180 °C; atît răcirea cît şi încălzirea trebuie să se facă cu cilindrii în rotaţie pentru a se evita apariţia tensiunilor care duc la deformarea cilindrilor. Menţionăm că cilindrii valţului sînt utilaje foarte scumpe (de ordinul unui milion lei).

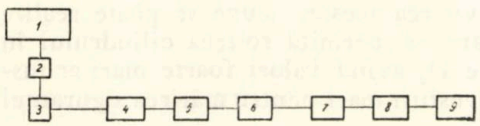


Fig. 7

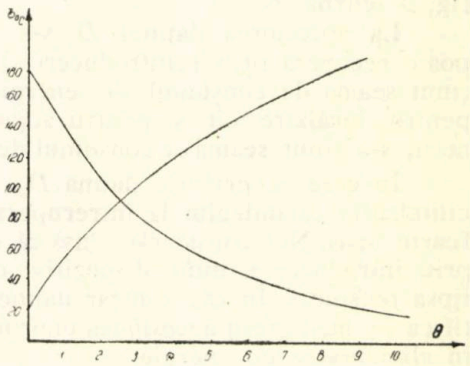


Fig. 8

Cilindrul o dată încălzit nu se admite să stea în repaos mai mult de 10 min, în caz contrar apărînd pericolul deformării valţului şi deci a degradării lui.

În cazul întreruperilor în alimentarea cu energie de scurtă durată (chiar instantanee) şi pînă la 10 min, întreaga linie trebuie oprită pentru curăţirea şi reglarea distanţei între cilindrii calandrului care au fost distanţaţi în momentul întreruperii, pentru a se evita apariţia arsurilor. Repunerea în funcţiune durează aproximativ 1 oră, timp constatat experimental.

Dacă întreruperea durează peste 10 min, repunerea în funcţiune necesită pe lîngă timpul consacrat reglajului şi un altul cerut de încălzirea calandrului la temperatura de 180 °C. Prin urmare, întreruperea totală se poate aprecia cu relaţia

$$\theta_p = \theta + \int_{\tau_r}^{180} \frac{C\,d\tau}{Q - A(\tau - \tau_0)} + \theta_r,$$

unde θ_p este intervalul de timp din momentul întreruperii curentului şi pînă cînd linia începe să lucreze normal, θ — durata întreruperii alimentării cu energie, τ — temperatura valţului, τ_r — temperatura pînă la care s-a răcit valţul cînd reapare tensiunea, τ_0 — temperatura mediului ambiant, C — capacitatea calorică a valţului şi a instalaţiei auxiliare de încălzire, Q — cantitatea de căldură întrodusă în instalaţia de încălzire în unitatea de timp, A — cantitatea de căldură pe unitatea de timp şi de temperatură cedată mediului ambiant, θ_r — timpul necesar pentru reglaj.

Integrala menţionată s-a calculat pe cale grafică folosind curbele de variaţie a temperaturii calandrului la întreruperea curentului şi la revenirea tensiunii din fig. 8.

Caracteristica întreruperilor $\theta_p = f(\theta)$ pentru calandre este dată în fig. 5 (curba *2*).

La aprecierea daunei D_1 s-a ţinut seama că materialul rebutat se poate recupera prin reintroducere în ciclul tehnologic. De asemenea, s-a ţinut seama de consumul de energie din perioada de reglare a liniei atît pentru încălzire cît şi pentru acţionarea liniei. Pentru întreruperile mai mari, s-a ţinut seama de consumul de energie suplimentar necesar încălzirii.

În ceea ce priveşte dauna D_2, aceasta ar putea consta în deformarea cilindrului calandrului la întreruperi de peste 10 min şi ar avea valori foarte mari. Noi considerăm însă că evitarea acestei daune se poate realiza prin introducerea unui dispozitiv care să permită rotirea cilindrului în lipsa tensiunii. În caz contrar daunele D_2 avînd valori foarte mari ar justifica în mod greşit necesitatea unor investiţii mari pentru mărirea siguranţei în alimentarea cu energie.

Curbele daunelor pentru secţia calandre sînt reprezentate în fig. 9.

Daunele D_3, D_4 şi D_5 au fost calculate pe baza valorilor medii ale componentelor preţului de cost pentru covor, dale, foi dure şi foi plastifiate de dimensiuni medii.

d) *Secţia corpuri suflate*

În cadrul acestei secţii se produc canistre, butoaie, bidoane tip Peco şi plăci extruse.

Pentru fiecare produs menţionat există o maşină specială, procesul tehnologic fiind următorul: materia primă, hostalen-granule sau rigidex granule, este întrodusă într-un cilindru ce se încălzeşte din exterior pe cale electrică. De aici, prin intermediul unui şnec, materialul este scos în stare plastică sub formă de tuburi cilindrice. Bucăţile de material, lipite la un capăt, sînt introduse în matriţe speciale iar prin suflarea de aer cilindrul din material plastic ia forma produsului finit.

În acest caz, la întreruperea alimentării cu energie electrică, materialul plastifiat aflat în cilindru începe să se întărească fără să se pună problema de arsuri şi deci de demontare a utilajului.

O întrerupere de scurtă durată are drept consecinţă dereglarea procesului tehnologic deoarece repornirea motorului de acţionare al maşinii nu se poate face decît prin micşorarea raportului de transmisie al cutiei de viteză (6 — 4), timp în care maşina lucrează cu productivitate redusă. După golirea cilindrului se modifică raportul de transmisie (cuplînd viteza 6), se încarcă maşina din nou şi procesul de producţie reîncepe după circa 10 min, necesare pentru scoaterea materialului plastifiat.

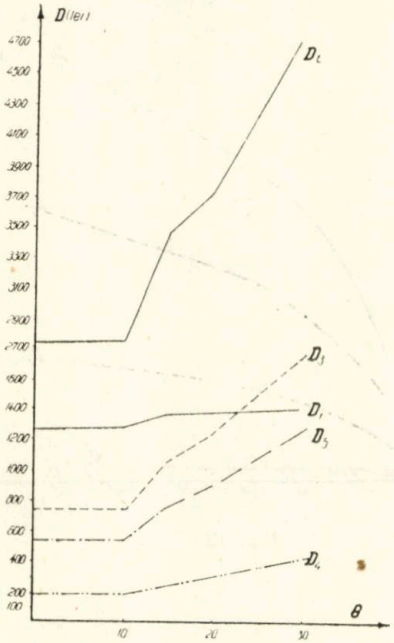


Fig. 9

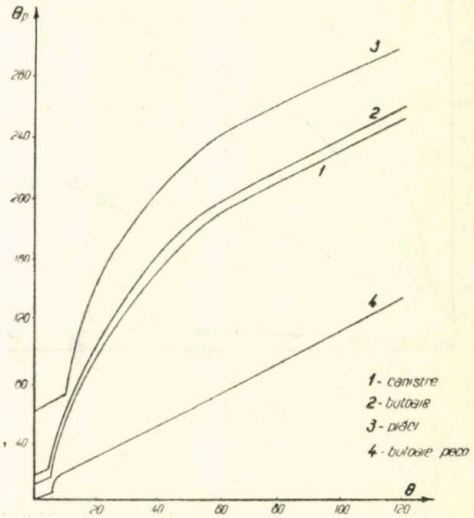


Fig. 10

La întreruperi de durată mai mare, procesul de producţie este suspendat pentru un interval de timp mai lung, egal cu timpul întreruperii plus timpul necesar reîncălzirii cilindrului şi materialului.

Pe această bază au fost construite curbele $\theta_p = f(\theta)$ din fig. 10. Pe aceeaşi figură s-au trasat şi curbele pentru maşinile la care se fabrică butoaie şi sticluţele Peco.

La întreruperea alimentării la maşinile de corpuri suflate se rebutează produsul în curs de fabricaţie. În calcule s-a introdus jumătate din valoarea unui produs (canistră, butoi etc.) considerînd probabilitatea de apariţie a întreruperii mai frecventă la mijlocul intervalului de fabricaţie. Aprecierea valorică s-a făcut ca şi în cazurile precedente, considerînd pe lîngă dauna provenită din rebutarea materialului şi consumul de energie electrică suplimentar necesar pentru reîncălzire.

În fig. 11 şi 12 sînt reprezentate curbele daunelor la corpurile suflate, canistre şi butoaie.

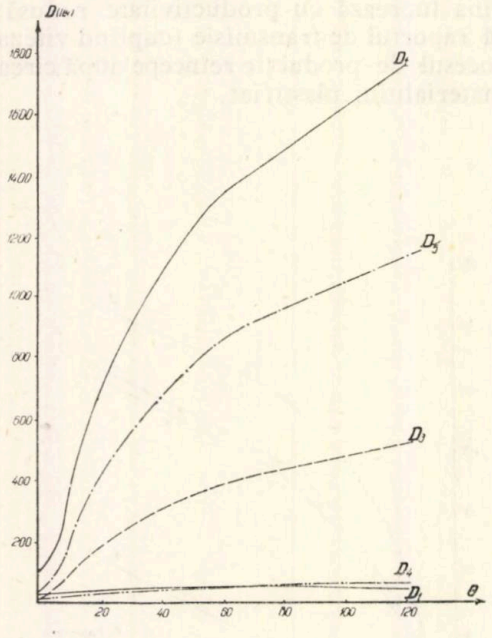


Fig. 11

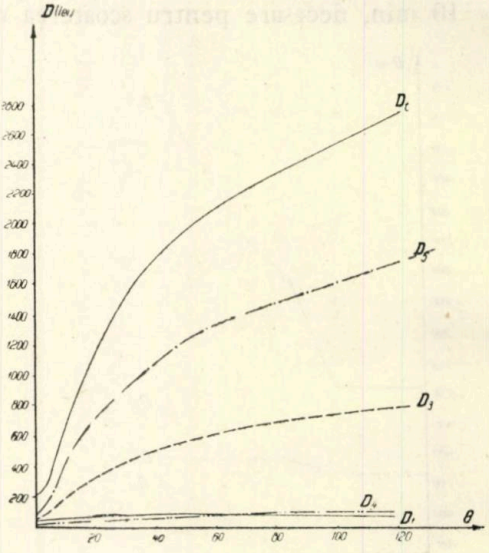


Fig. 12

e) *Plăci extruse*

În instalaţia de plăci extruse procesul tehnologic constă în plastifierea prin încălzire electrică a polistirenului care apoi este extrus sub formă de placă şi trecut pentru calibrare şi uniformizare printre două valţuri încălzite cu apă caldă (electric).

La întreruperea alimentării cu energie de scurtă durată, chiar sub 1 min placa extrusă se rupe şi reluarea procesului de producţie durează circa 1 oră pînă se reuşeşte reglarea maşinii. La întreruperi mai mari se ţine seama şi de timpul necesar pentru încălzirea materialului din cilindru.

Curba $\theta_p = f(\theta)$ este dată în fig. 10 iar curbele daunelor pentru plăci extruse sînt date în fig. 13.

Avînd în vedere că lucrarea s-a efectuat în cadrul unei anumite întreprinderi, am trasat în fig. 14 curbele daunelor pentru toată întreprinderea, la trasarea lor ţinîndu-se seama de numărul maşinilor de acelaşi tip. De asemenea s-a considerat că toate maşinile sînt în funcţiune.

4. Daunele specifice

Pentru ca datele specificate mai sus să poată fi utilizate mai operativ în scopurile menţionate în întroducere, vom da următorii indici specifici:

a) Dauna specifică pe kWh nelivrat, dedusă din relaţia $d = D/\Delta E$, unde D este dauna totală iar ΔE este energia nelivrată în timpul întreruperii. Avînd în vedere că procesul de producţie este continuu, am dedus

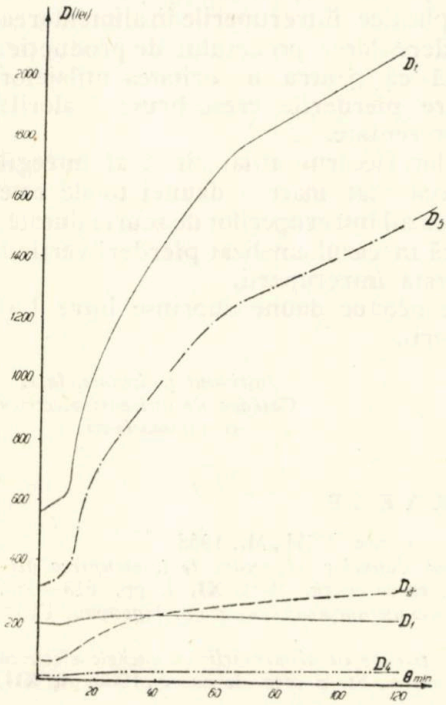


Fig. 13

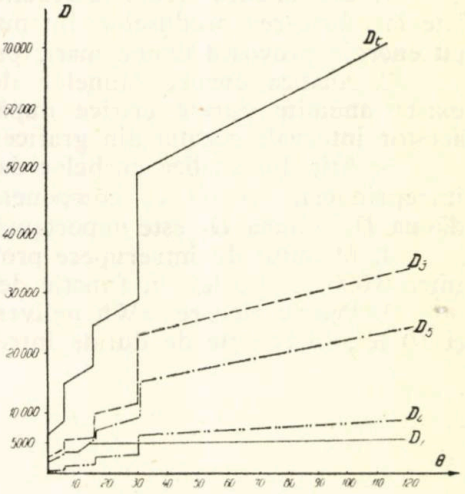


Fig. 14

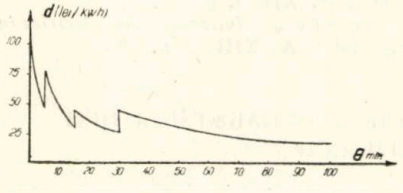


Fig. 15

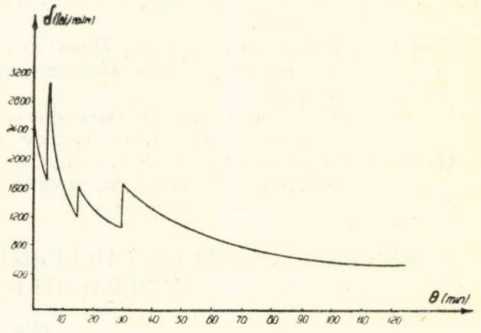


Fig. 16

valoarea lui d pentru întreaga întreprindere considerînd puterea cerută constantă în cazul cînd lucrează toată întreprinderea. Rezultatele sînt reprezentate în fig. 15.

b) Daunele raportate la minutul de întrerupere în funcţie de durata întreruperii determinate cu relaţia $\delta = D/\theta$ sînt date în fig. 16. Ele pot fi deduse uşor pentru fiecare utilaj în parte.

5. Concluzii

1. Din analiza efectuată rezultă că pentru majoritatea utilajelor folosite la fabricarea produselor din mase plastice întreruperile în alimentarea cu energie provoacă daune mari, prin dereglarea procesului de producţie.

2. Analiza curbei daunelor denotă că pentru majoritatea utilajelor există anumite durate critice după care pierderile cresc brusc. Valorile acestor intervale rezultă din graficele prezentate.

3. Atît din analiza curbelor daunelor fiecărui utilaj cît şi al întregii întreprinderi, rezultă că componenta cea mai mare a daunei totale este dauna D_3; dauna D_1 este importantă în cazul întreruperilor de scurtă durată.

4. Minutul de întrerupere provoacă în cazul analizat pierderi variind între 3000 şi 600 lei, în funcţie de durata întreruperii.

5. Pentru fiecare kWh nelivrat se produc daune cuprinse între 100 şi 19 lei, în funcţie de durata întreruperii.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de utilizări electrice
şi automatizări

BIBLIOGRAFIE

1. Маркович И. М,. *Режим энергетических систем.* ГЕИ, М., 1963.
2. Guţu C., Petcu M., Soci A., *Determinarea daunelor provocate de întreruperea alimentării cu energie electrică.* St. şi cerc. de energ. 1961, **XI**, *4*, pp. 613—625.
3. Афонин Н. С., *Надежность электроснабжения промышленых предприятии.* ГЕИ, М., 1958.
4. Guţu C., Petcu M., Soci A., *Daune prin întreruperea alimentării cu energie electrică la fabricarea fibrelor sintetice poliamidice.* St. şi cerc. de energ., 1962, **A**, **XII**, *2*, p. 229.
5. — *Daune provocate de întreruperea alimentării cu energie electrică la fabricarea mătăsei-viscoză.* St. şi cerc. de energ., 1962, **A**, **XII**, *1*, p. 25.
6. Guţu C., Iordache I.. Soci A., *Consecinţele economice ale întreruperilor electrice în procesele siderurgice.* St. şi cerc. de energ., 1963, **A**, **XIII**, *2*, p. 191.

УЩЕРБЫ ВЫЗВАННЫЕ ПЕРЕРЫВОМ ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ ПРИ ПЕРЕРАБОТКЕ ПЛАСТМАССЫ

(Рзюме)

Для составления расчетов уровня надежности работы энергетических систем необходимо иметь данные по ущербу, вызванному недоотпуском электрической энергии.

Авторы изучают эти ущербы для пластмассовых предприятий.

Дается зависимость между временем перерыва электроснабжения и перерывом работы предприятия. Указываются также ущербы на один недоотпущенный kWh и для каждой минуты перерыва.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C Z 621.392.5

DETERMINAREA EXPERIMENTALĂ A DOMENIILOR DE EXISTENŢĂ ALE COEFICIENŢILOR DE TRANSFER AI UNUI CUADRIPOL DIPORT LINIAR, PASIV ŞI RECIPROC

DE

HUGO ROSMAN

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

I. Introducere

1. Într-o lucrare anterioară [1] am arătat că în cazul unui cuadripol diport liniar, pasiv şi reciproc, alimentînd un receptor pasiv, în regim permanent sinusoidal, coeficienţii de transfer (de ex. [2]) ai cuadripolului pot lua valori numai în interiorul şi pe frontiera unor domenii în general finite. Anume, am arătat că aceste domenii sînt delimitate, în general, de cercuri, ale căror ecuaţii depind exclusiv de parametrii fundamentali ai cuadripolului. Or, se ştie că aceşti parametri pot fi determinaţi experimental cu ajutorul încercărilor experimentale la gol şi în scurtcircuit; rezultă aşadar că aceste încercări vor fi suficiente pentru determinarea, pe cale experimentală, a domeniilor de existenţă ale coeficienţilor de transfer.

O analiză amănunţită a configuraţiei domeniilor de existenţă ale coeficienţilor de transfer ai unui cuadripol din clasa considerată, permite precizarea metodei celei mai expeditive pentru determinarea experimentală a fiecărui domeniu în parte. Scopul acestei lucrări este de a rezolva problema de mai sus.

Vom considera, în cele ce urmează, un cuadripol diport, liniar, pasiv şi reciproc, avînd ecuaţiile

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

cu

$$\det |\underline{A}_{st}| = 1, \quad (s, t = 1, 2), \tag{2}$$

II. Determinarea experimentală a domeniului de existenţă al coeficientului de transmisie a tensiunii

2. Dacă parametrii fundamentali ai cuadripolului satisfac relaţia $\mathcal{R}e\,(\underline{A}^*_{11}\,\underline{A}_{12}) \neq 0$ (echivalentă cu $P_{2sc} \neq 0$), domeniul de existenţă $\mathcal{D}_{\underline{k}_U}$ al coeficientului de transmisie a tensiunii este delimitat de cercul avînd ecuaţia [1]:

$$k'^2_U + k''^2_U - \frac{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{12})}{\mathcal{R}e\,(\underline{A}^*_{11}\,\underline{A}_{12})}\,k'_U + \frac{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{12})}{\mathcal{R}e\,(\underline{A}^*_{11}\,\underline{A}_{12})}\,k''_U = 0\,, \tag{3}$$

cu centrul în

$$k'_{U_c} = \frac{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{12})}{2\,\mathcal{R}e\,(\underline{A}^*_{11}\,\underline{A}_{12})}\,,\quad k''_{U_c} = -\frac{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{12})}{2\,\mathcal{R}e\,(\underline{A}^*_{11}\,\underline{A}_{12})}\,, \tag{4}$$

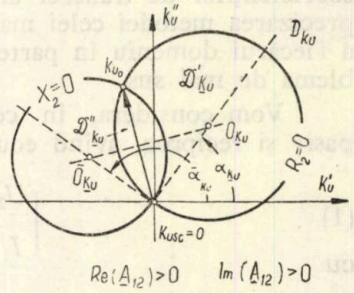
unde $k'_U = \mathcal{R}e\,(\underline{k}_U)$, $k''_U = \mathcal{I}m\,(\underline{k}_U)$.

Cercul (3) poate fi determinat efectuînd doar cîte o singură încercare la gol şi în scurtcircuit, cuadripolul considerat fiind alimentat în sens direct. Se are în vedere, în acest scop, că: a) cercul (3) conţine punctele corespunzătoare regimurilor de funcţionare la gol şi în scurtcircuit; b) diametrul care trece prin origine are panta

$$\operatorname{tg}\alpha_{\underline{k}_U} = -\operatorname{tg}\alpha_{12}\,, \tag{5}$$

unde $\alpha_{12} = \arg \underline{A}_{12}$.

Rezultă că pentru a determina pe cale experimentală cercul (3) este necesar să se procedeze în modul următor: a) se determină fazorul $\underline{k}_{U_0} = (\underline{U}_2/\underline{U}_1)_0$, ceea ce implică necesitatea de a măsura tensiunile $\underline{U}_{10}$, $\underline{U}_2$ la funcţionarea la gol dar şi a defazajului dintre aceste tensiuni în acelaşi regim de funcţionare [3]; b) se determină dreapta $D_{\underline{k}_U}$ pe care este situat centrul cercului (3), ceea ce face necesară măsurarea defazajului dintre $\underline{U}_{1sc}$ şi $\underline{I}_2$ la funcţionarea cuadripolului în scurtcircuit [3]; c) se ridică perpendiculara pe mijlocul fazorului $\underline{k}_{U_0}$; punctul de intersecţie al acesteia cu dreapta $D_{\underline{k}_U}$ furnizează centrul $O_{\underline{k}_U}$ al cercului (3) (fig. 1).



Re(A12)>0 Im(A12)>0

Fig. 1

3. În cazul în care parametrii fundamentali ai cuadripolului satisfac relaţia $\mathcal{R}e\,(\underline{A}^*_{11}\,\underline{A}_{12}) = 0$ cercul (3) degenerează în dreapta

$$\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{12})\,k'_U - \mathcal{I}m\,(\underline{A}_{12})\,k''_U = 0. \tag{6}$$

Rezultă că în acest caz este suficient să se supună cuadripolul doar unei singure încercări, și anume în scurtcircuit, măsurînd în acest regim defazajul dintre $\underline{U}_{1sc}$ și $\underline{I}_2$ [3].

4. Un procedeu experimental analog poate fi utilizat pentru determinarea subdomeniilor $\mathfrak{D}'_{\underline{k}_U}$, $\mathfrak{D}''_{\underline{k}_U}$, $(\mathfrak{D}'_{\underline{k}_U} \cup \mathfrak{D}''_{\underline{k}_U} = \mathfrak{D}_{\underline{k}_U})$, corespunzătoare unor sarcini pasive ale receptorului, de natură inductivă, respectiv capacitivă. Se are în vedere, în acest scop, că aceste subdomenii sînt delimitate de arcul cercului de ecuație [1]:

$$k'^2_U + k''^2_U - \frac{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{12})}{\mathcal{I}m\,(\underline{A}^*_{11}\,\underline{A}_{12})}\,k'_U - \frac{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{12})}{\mathcal{I}m\,(\underline{A}^*_{11}\,\underline{A}_{12})}\,k''_U = 0, \tag{7}$$

cu centrul în

$$\bar{k}'_{U_c} = \frac{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{12})}{2\mathcal{I}m\,(\underline{A}^*_{11}\,\underline{A}_{12})}, \quad \bar{k}''_{U_c} = \frac{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{12})}{2\mathcal{I}m\,(\underline{A}^*_{11}\,\underline{A}_{12})}, \tag{8}$$

conținut în domeniul $\mathfrak{D}_{\underline{k}_U}$, unde s-a considerat cazul cînd $\mathcal{I}m\,(\underline{A}^*_{11}\,\underline{A}_{12}) \neq 0$ (echivalentă cu $\underline{Q}_{2sc} \neq 0$).

Pentru a construi acest arc de cerc sînt necesare aceleași încercări ca în cazul determinării experimentale a cercului (3). Într-adevăr: a) arcul de cerc (7) conține punctele corespunzătoare regimurilor de funcționare la gol și în scurtcircuit; b) diametrul care trece prin origine are panta dată de:

$$\operatorname{tg} \alpha_{\underline{k}_U} = \operatorname{cotg} \alpha_{12}, \tag{9}$$

cu alte cuvinte este perpendicular pe diametrul cercului (3) care trece prin origine.

Așadar, pentru a determina pe cale experimentală subdomeniile $\mathfrak{D}'_{\underline{k}_U}$, $\mathfrak{D}''_{\underline{k}_U}$: a) se determină fazorul $\underline{k}_{U_0}$; b) se construiește dreapta $\bar{D}_{\underline{k}_U}$ — perpendiculară în origine pe $D_{\underline{k}_U}$ — pe care este situat centrul arcului cercului (7); c) se ridică perpendiculara pe mijlocul fazorului $\underline{k}_{U_0}$, punctul de intersecție al acesteia cu dreapta $\bar{D}_{\underline{k}_U}$ constituind centrul $\bar{O}_{\underline{k}_U}$ al arcului cercului (7) (fig. 1).

5. Dacă parametrii fundamentali ai cuadripolului satisfac relația $\mathcal{I}m\,(\underline{A}^*_{11}\,\underline{A}_{11}) = 0$, arcul cercului (8) degenerează în segmentul dreptei:

$$\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{12})\,k'_U + \mathcal{R}e\,(\underline{A}_{12})\,k''_U = 0, \tag{10}$$

conținut în domeniul $\mathfrak{D}_{\underline{k}_U}$, perpendicular pe dreapta (6).

Rezultă că delimitarea subdomeniilor $\mathfrak{D}'_{\underline{k}_U}$, $\mathfrak{D}''_{\underline{k}_U}$ pe cale experimentală se rezumă în acest caz la măsurarea defazajului dintre $\underline{U}_{1sc}$ și $\underline{I}_2$, la funcționarea cuadripolului în scurtcircuit [3].

III. Determinarea experimentală a domeniului de existenţă al coeficientului de transmisie a curentului

6. Domeniul de existenţă $\mathcal{D}_{\underline{k}_I}$ al coeficientului de transmisie a curentului, în cazul în care parametrii fundamentali ai cuadripolului satisfac relaţia $\mathcal{R}e\,(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22}) \neq 0$ (echivalentă cu $P_{20} \neq 0$), este delimitat de cercul [1]:

$$k'^2_I + k''^2_I - \frac{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{21})}{\mathcal{R}e\,(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22})}\,k'_I + \frac{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{21})}{\mathcal{R}e\,(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22})}\,k''_I = 0, \tag{11}$$

cu centrul în

$$k'_{I_c} = \frac{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{21})}{2\,\mathcal{R}e\,(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22})}, \quad k''_{I_c} = -\frac{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{21})}{2\,\mathcal{R}e\,(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22})}, \tag{12}$$

unde $k'_I = \mathcal{R}e\,(\underline{k}_I)$, $k''_I = \mathcal{I}m\,(\underline{k}_I)$.

Un raţionament similar celui din § 2 pune în evidenţă faptul că pentru determinarea experimentală a cercului (11) sînt necesare aceleaşi încercări — la gol şi în scurtcircuit — ca cele folosite pentru determinarea experimentală a cercului (3).

Se ţine seama că: a) cercul (11) conţine punctele corespunzătoare regimului de funcţionare la gol şi în scurtcircuit; b) diametrul care trece prin origine are panta:

$$\operatorname{tg} \alpha_{\underline{k}_I} = -\operatorname{tg} \alpha_{21}, \tag{13}$$

unde $\alpha_{21} = \arg \underline{A}_{21}$.

Rezultă că pentru a determina pe cale experimentală cercul (11) este necesar să se procedeze după cum urmează: a) se determină fazorul $\underline{k}_{I_{sc}} = (\underline{I}_2/\underline{I}_1)_{sc}$, ceea ce implică necesitatea măsurării curenţilor $\underline{I}_{1sc}$, $\underline{I}_2$ în scurtcircuit precum şi a defazajului dintre aceşti curenţi în acelaşi regim de funcţionare [3]; b) se determină dreapta $D_{\underline{k}_I}$ pe care este situat centrul cercului (11), ceea ce necesită măsurarea defazajului dintre $\underline{I}_{10}$ şi $\underline{U}_2$ la funcţionarea cuadripolului la gol [3]; c) se ridică perpendiculara pe mijlocul fazorului $\underline{k}_{I_{sc}}$, punctul de intersecţie al acesteia cu dreapta $D_{\underline{k}_I}$ reprezentînd centrul $O_{\underline{k}_I}$ al cercului (11) (fig. 2).

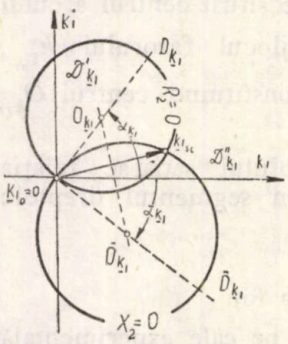


Fig. 2

7. Dacă parametrii fundamentali ai cuadripolului satisfac relaţia $\mathcal{R}e\,(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22}) = 0$ cercul (11) degenerează în dreapta:

$$\mathcal{R}e(\underline{A}_{21})\,k'_I - \mathcal{I}m(\underline{A}_{21})\,k''_I = 0. \tag{14}$$

Pentru determinarea experimentală a acestei drepte, care delimitează semiplanul $\mathcal{D}_{k_I}$, este suficientă o încercare la gol, măsurînd defazajul dintre $\underline{I}_{10}$ și $\underline{U}_2$ [3].

8. Aceleași încercări experimentale sînt utile pentru determinarea subdomeniilor $\mathcal{D}'_{k_I}$, $\mathcal{D}''_{k_I}$, $(\mathcal{D}'_{k_I} \cup \mathcal{D}''_{k_I} = \mathcal{D}_{k_I})$, corespunzătoare unor sarcini pasive ale receptorului, de natură inductivă, respectiv capacitivă. Se ține seama că aceste subdomenii sînt delimitate de arcul cercului de ecuație [1]:

$$k'^2_I + k''^2_I + \frac{\mathcal{I}m(\underline{A}_{21})}{\mathcal{I}m(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22})}\,k'_I + \frac{\mathcal{R}e(\underline{A}_{21})}{\mathcal{I}m(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22})}\,k''_I = 0, \tag{15}$$

cu centrul în

$$\bar{k}'_{I_c} = -\frac{\mathcal{I}m(\underline{A}_{21})}{2\,\mathcal{I}m(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22})}, \quad \bar{k}''_{I_c} = -\frac{\mathcal{R}e(\underline{A}_{21})}{2\,\mathcal{I}m(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22})}, \tag{16}$$

conținut în domeniul $\mathcal{D}_{k_I}$, unde s-a considerat cazul cînd $\mathcal{I}m(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22}) \neq 0$ (echivalentă cu $Q_{20} \neq 0$).

Într-adevăr construcția acestui arc de cerc implică efectuarea acelorași încercări ca în cazul determinării experimentale a cercului (11). În acest sens ce ține seama că: a) arcul de cerc (15) conține punctele corespunzătoare regimurilor de funcționare la gol și în scurtcircuit; b) diametrul care trece prin origine are panta

$$\operatorname{tg} \bar{\alpha}_{k_I} = \operatorname{cotg} \alpha_{21}, \tag{17}$$

fiind perpendicular pe diametrul cercului (11) care trece prin origine.

În consecință, pentru a determina pe cale experimentală subdomeniile $\mathcal{D}'_{k_I}$, $\mathcal{D}''_{k_I}$: a) se determină fazorul $\underline{k}_{I_{sc}}$; b) se determină dreapta $\bar{D}_{k_I}$, perpendiculară în origine pe D_{k_I} și care conține centrul cercului (15); se ridică perpendiculara pe mijlocul fazorului $\underline{k}_{I_{sc}}$, punctul de intersecție al acesteia cu dreapta $\bar{D}_{k_I}$ reprezentînd centrul $\bar{O}_{k_I}$ al cercului (15) (fig. 2).

9. În cazul cînd parametrii fundamentali ai cuadripolului satisfac relația $\mathcal{I}m(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22}) = 0$, arcul cercului (15) degenerează în segmentul de dreaptă

$$\mathcal{R}e(\underline{A}_{21})\,k'_I - \mathcal{I}m(\underline{A}_{21})\,k''_I = 0, \tag{18}$$

conținut în domeniul $\mathcal{D}_{k_I}$ și perpendicular pe dreapta (14).

Pentru a delimita, în acest caz, subdomeniile $\mathcal{D}'_{k_I}$, $\mathcal{D}''_{k_I}$ pe cale experimentală, este suficient de măsurat defazajul dintre $\underline{I}_{10}$ și $\underline{U}_2$ la funcționarea cuadripolului la gol [3].

IV. Determinarea experimentală a domeniului de existenţă al impedanţei de transfer

10. În cazurile în care parametrii fundamentali ai cuadripolului satisfac relaţia $\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{21}^{*}\,\underline{A}_{22}) \neq 0$, domeniul de existenţă $D_{\underline{Z}_m}$ al impedanţei de transfer este delimitat de cercul [1]:

$$R_m^2 + X_m^2 - \frac{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{22})}{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{21}^{*}\,\underline{A}_{22})} R_m + \frac{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{22})}{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{21}^{*}\,\underline{A}_{22})} X_m = 0, \tag{19}$$

cu centrul în

$$R_{m_c} = \frac{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{22})}{2\,\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{21}^{*}\,\underline{A}_{22})}, \quad X_{m_c} = -\frac{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{22})}{2\,\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{21}^{*}\,\underline{A}_{22})}, \tag{20}$$

unde $R_m = \mathcal{R}e\,(\underline{Z}_m)$, $X_m = \mathcal{I}m\,(\underline{Z}_m)$.

Utilizînd un procedeu analog celui expus în §§ **2** şi **6** se ajunge la concluzia că alimentînd cuadripolul în sens direct şi supunîndu-l încercărilor la gol şi-n scurtcircuit, este posibil să se determine, în baza rezultatelor obţinute, cercul (19).

Anume, se are în vedere că: a) cercul (19) conţine punctele corespunzătoare regimurilor de funcţionare la gol şi în scurtcircuit; b) diametrul acestui cerc, care trece prin origine, are panta

$$\operatorname{tg} \alpha_{\underline{Z}_m} = \operatorname{tg} \alpha_{22}, \tag{21}$$

unde $\alpha_{22} = \arg \underline{A}_{21}$.

În consecinţă, pentru a determina pe cale experimentală cercul (19) urmează: a) să se determine fazorul $\underline{Z}_{m_0} = (\underline{U}_2/\underline{I}_1)_0$, ceea ce implică pe lîngă măsurarea tensiunii $\underline{U}_2$ şi a curentului $\underline{I}_{10}$, la funcţionarea cuadripolului la gol, şi măsurarea defazajului dintre $\underline{U}_2$ şi $\underline{I}_{10}$ în acelaşi regim de funcţionare [3]; b) să se determine dreapta $D_{\underline{Z}_m}$ pe care se află centrul cercului (19), fiind necesară, în acest scop, măsurarea defazajului dintre $\underline{I}_{1sc}$ şi $\underline{I}_2$, la funcţionarea în scurtcircuit [3]; c) să se ridice perpendiculara pe mijlocul fazorului $\underline{Z}_{m_0}$. Punctul de intersecţie al acesteia din urmă cu dreapta $D_{\underline{Z}_m}$ reprezintă centrul $O_{\underline{Z}_m}$ al cercului (19) (fig. 3).

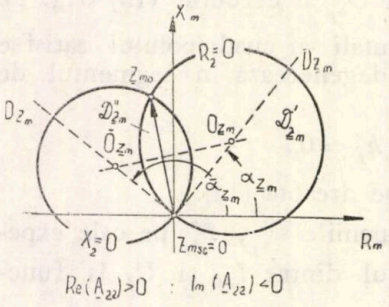


Fig. 3

11. Dacă parametrii fundamentali ai cuadripolului satisfac relalaţia $\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{21}^{*}\,\underline{A}_{22}) = 0$ cercul (19) degenerează în dreapta:

$$\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{22})\,R_m - \mathcal{I}m\,(\underline{A}_{22})\,X_m = 0\,. \tag{22}$$

Pentru a determina pe cale experimentală poziția acestei drepte, care delimitează semiplanul $\mathcal{D}_{\underline{Z}_m}$, este suficientă o încercare în scurtcircuit, măsurînd defazajul dintre $\underline{I}_{1sc}$ și $\underline{I}_2$.

12. Determinarea experimentală a subdomeniilor $\mathcal{D}'_{\underline{Z}_m}$, $\mathcal{D}''_{\underline{Z}_m}$, $(\mathcal{D}'_{\underline{Z}_m} \cup \mathcal{D}''_{\underline{Z}_m} = \mathcal{D}_{\underline{Z}_m})$, corespunzătoare unor sarcini pasive ale cuadripolului, de natură inductivă, respectiv capacitivă, este posibilă dacă se face apel la aceleași încercări — la gol și în scurtcircuit.

Dacă se admite că $\mathcal{I}m\,(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22}) \neq 0$, subdomeniile $\mathcal{D}'_{\underline{Z}_m}$, $\mathcal{D}''_{\underline{Z}_m}$ sînt delimitate de arcul cercului [1]:

$$R_m^2 + X_m^2 - \frac{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{22})}{\mathcal{I}m\,(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22})}\,R_m - \frac{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{22})}{\mathcal{I}m\,(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22})}\,X_m = 0\,, \tag{23}$$

cu centrul în

$$\overline{R}_{m_c} = \frac{\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{22})}{2\,\mathcal{I}m\,(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22})}\,, \qquad \overline{X}_{m_c} = \frac{\mathcal{R}e\,(\underline{A}_{22})}{2\,\mathcal{I}m\,(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22})}\,, \tag{24}$$

conținut în domeniul $\mathcal{D}_{\underline{Z}_m}$.

În vederea precizării procedeului experimental de determinare a arcului cercului (23) se observă în prealabil că: a) cercul (23) conține punctele corespunzătoare regimurilor de funcționare la gol și în scurtcircuit; b) diametrul care trece prin origine are panta

$$\operatorname{tg} \alpha_{\underline{Z}_m} = \operatorname{cotg} \alpha_{22}\,, \tag{25}$$

fiind perpendicular pe diametrul cercului (19) care trece prin origine.

Prin urmare, pentru a determina pe cale experimentală cercul (23): a) se determină fazorul $\underline{Z}_{m_0}$; b) se determină dreapta $D_{\underline{Z}_m}$ perpendiculară în origine pe $D_{\underline{Z}_m}$ și care conține centrul cercului (23); c) se ridică perpendiculara pe mijlocul fazorului $\underline{Z}_{m_0}$, punctul de intersecție al acesteia cu dreapta $D_{\underline{Z}_m}$ reprezentînd centrul $\overline{O}_{\underline{Z}_m}$ al cercului (23) (fig. 3).

13. Dacă parametrii fundamentali ai cuadripolului satisfac relația $\mathcal{I}m\,(\underline{A}^*_{21}\,\underline{A}_{22}) = 0$, arcul cercului (23) degenerează în segmentul de dreaptă:

$$\mathcal{I}m\,(\underline{A}_{22})\,R_m + \mathcal{R}e\,(\underline{A}_{22})\,X_m = 0\,, \tag{26}$$

conținut în domeniul $\mathcal{D}_{\underline{Z}_m}$ și perpendicular pe dreapta (22).

Delimitarea subdomeniilor $\mathcal{D}'_{\underline{Z}_m}$, $\mathcal{D}''_{\underline{Z}_m}$ implică, în acest caz, necesitatea măsurării defazajului dintre $\underline{I}_{1sc}$ și $\underline{I}_2$ la funcționarea cuadripolului în scurtcircuit.

14. Observaţie. Metodele preconizate în paragrafele precedente, privind determinarea experimentală a domeniilor $\mathcal{D}_{k_U}$, $\mathcal{D}_{k_I}$, $\mathcal{D}_{Z_m}$ precum şi a subdomeniilor $\mathcal{D}'_{k_U}$, $\mathcal{D}''_{k_U}$; $\mathcal{D}'_{k_I}$, $\mathcal{D}''_{k_I}$; $\mathcal{D}'_{Z_m}$, $\mathcal{D}''_{Z_m}$ sînt utilizabile numai în cazul cuadripolilor la care măsurarea defazajelor dintre mărimi care aparţin la porţi diferite, este accesibilă. În caz opus (de ex. liniile de transport sau de telecomunicaţii) este necesar să se apeleze la procedeele de măsurare a parametrilor fundamentali ai unui cuadripol cu ajutorul încercărilor (la gol şi în scurtcircuit) care implică numai măsurări de mărimi la cîte una din porţile cuadripolului [4].

V. Concluzii

Cu ajutorul unor procedee bazate pe rezultatele încercărilor uzuale la gol şi în scurtcircuit, este posibil să se determine, pe cale experimentală, în cazul unui cuadripol diport liniar, pasiv şi reciproc, avînd un receptor pasiv, domeniile de existenţă ale coeficientului de transmisie a tensiunii, coeficientului de transmisie a curentului şi impedanţei de transfer.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de electrotehnică

DÉTERMINATION EXPÉRIMENTALE DES DOMAINES D'EXISTENCE DES COEFFICIENTS DE TRANSFERT D'UN QUADRIPÔLE DIPORTE LINÉAIRE, PASSIF ET RÉCIPROQUE

(Résumé)

On propose nombre de procédés expérimentaux, basés sur les résultats des essais usuels à vide et en courtcircuit, qui permettent à déterminer, dans le cas d'un quadripôle diporte linéaire, passif et réciproque, ayant un récepteur passif, les domaines d'existence du coefficient de transmission de la tension, du coefficient de transmission du courant et de l'impédance de transfert.

BIBLIOGRAFIE

1. Rosman H., *Domeniile de existenţă ale coeficienţilor de transfer ai unui cuadripol diport liniar, pasiv şi reciproc, alimentînd un receptor pasiv.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *1—2*, pp. 292—310.
2. Атабеков Г. И., *Теоретические основы элктротехники.* Ч. **I**, ГЭИ, М.-Л., 1962, стр. 131.
3. Şora C., *Cuadripolul electric.* Edit. Tehn., Buc., pp. 66—68.
4. Antoniu I. S., *Chestiuni speciale de electrotehnică.* Ed. Acad. R.P.R., 1956, p. 103.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3—4, 1966

Mecanică tehnică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XII (XVI), вып. 3—4, 1966

Техническая механика

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XII (XVI), 3—4, 1966

Mechanical Engineering

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 531

DINAMICA SISTEMELOR VIBROPERCUTANTE

NOTA I
PROBLEMA ÎN CARE CIOCNIREA SOLIDELOR NU SE CONSIDERĂ INSTANTANEE

DE

D. MANGERON, GH. SILAŞ, LIVIU BRÎNDEU, ATTILA HEGEDÜS
şi CORNELIU ENĂCHESCU

Extras din comunicrarea prezentată la Conferinţa de Mecanică, organizată de Academia Republicii Socialiste România în colaborare cu Ministerul Învăţământului, Bucureşti, 27–30 septembrie 1965

1. Introducere

1. În ultimele trei decade oamenii de ştiinţă şi inginerii acordă din ce în ce mai multă atenţie soluţionării problemelor referitoare la ciocniri de corpuri solide şi fluide. Astfel, de ex., recentul volum al lui Werner Goldsmith [23] consacrat teoriei şocurilor şi comportării fizice a solidelor în percuţie conţine trimiteri bibliografice la 442 titluri, iar în revistele internaţionale de bibliografie mecanică s-au publicat în anii 1963 şi 1964 respectiv 345 şi 377 recenzii de articole de specialitate referitoare la ciocniri şi la unde de şoc.

Studiul ciocnirii corpurilor solide libere a fost făcut, de ex., ţinînd cont de deformaţiile locale, în lucrările [1], [2]. În cazul cînd unul din corpuri are o legătură elastică, studiul corespunzător, pe baza aceloraşi deformaţii, s-a făcut în lucrarea [2].

Mecanismele vibropercutante au fost studiate în ipoteza că ciocnirile sînt instantanee, de ex., în [6], [7]. Trebuie menţionat că această ipoteză aduce simplificări în calcule, dar este numai o aproximare a fenomenului real.

În prezenta lucrare vom face studiul unui mecanism vibropercutant ţinînd seama de deformaţiile locale ce se produc în timpul ciocnirii.

2. Studiul mişcării sistemului vibropercutant

2. Să considerăm sistemul vibropercutant din fig. 1 care constă dintr-o masă percutantă m suspendată pe un arc cu constanta elastică k şi un element fix.

Generatorul de vibraţii este solidar legat cu masa percutantă. Vibraţiile pot fi obţinute prin una din metodele cunoscute, de exemplu prin două excentrice, ce se rotesc în sens invers cu viteza unghiulară constantă ω. În acest fel, asupra masei percutante va

acţiona pe verticală forţa perturbatoare $F = F_0 \sin(\omega t + \varphi)$. Folosind două excentrice de masă $m_0/2$ fiecare, cu excentricitatea e, avem $F_0 = m_0 e\omega^2$.

Masa percutantă şi elementul fix se ciocnesc prin intermediul a două emisfere E_1 şi E_2, ce le vom numi ciocane. Vom nota cu δ distanţa dintre ciocane în cazul echilibrului static.

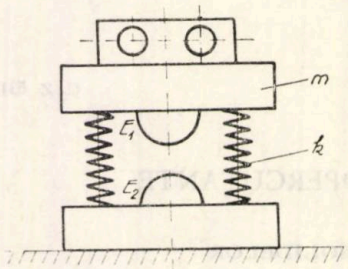


Fig. 1

Aici vom considera numai cazul cînd vitezele de ciocnire sînt suficient de mici şi tensiunile care apar la ciocnire nu întrec limita de elasticitate. Pentru bile de oţel s-a arătat că teoria ciocnirii elastice este valabilă în cazul vitezelor ce nu întrec cîteva sute de cm/s [1].

În timpul ciocnirii, cele două ciocane se vor deforma. Notînd cu ξ ($\xi > 0$) apropierea celor două ciocane, forţa de contact P o vom considera dată de relaţia lui Hertz [1])

$$P = k_1 \xi^{3/2}, \tag{1}$$

unde pentru ciocanele de formă sferică avem [2]:

$$k_1 = \frac{2}{3(1-\mu^2)} E \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}.$$

Considerînd ca origine poziţia de echilibru static a masei m şi sensul pozitiv în sus, ecuaţia diferenţială a mişcării acestei mase va fi

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t + \varphi) + P. \tag{2}$$

În intervalele dintre ciocniri ecuaţia (2) nu conţine forţa P.

În decursul ciocnirii între x şi ξ avem următoarea relaţie:

$$x = -\delta - \xi. \tag{3}$$

Dînd lui (3) un sens mai larg (considerînd pentru ξ şi valori negative), o putem interpreta ca o transformare de coordonate. Ecuaţia diferenţială (2) devine:

$$m\ddot{\xi} + k\xi + P(\xi) = -k\delta - F_0 \sin(\omega t + \varphi), \tag{4}$$

unde

$$P(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \xi \leqslant 0, \\ k_1 \xi^{3/2} & \text{pentru } \xi > 0. \end{cases}$$

Ecuaţia (4) poate fi scrisă sub o formă mai simplă folosind următoarele schimbări de variabile:

1) Cu toate că diferite variante ale legii lui Hertz, propuse de alţi autori, ca de ex., legea lui Meyer [20, p. 91], pot să ofere aproximări mai bune ale proceselor de contact decît ecuaţia (1), folosirea acestora în problemele de ciocniri ce includ şi fenomene vibratorii a fost pînă astăzi în deajuns de limitată [21], [22].

(5) $$\tau = t\sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{\varphi}{p}, \qquad \eta = \xi\left(\frac{k_1}{k}\right)^2$$

şi notaţiile

$$a = \left(\frac{k_1}{k}\right)^2 \delta, \qquad b = \frac{F_0 k_1^2}{k^3}, \qquad p = \omega\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Ecuaţia diferenţială a mişcării devine

(6) $$\eta'' + \eta + f(\eta) = -a - b\sin p\tau,$$

unde

$$f(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \eta \leqslant 0, \\ \eta^{3/2} & \text{pentru } \eta > 0. \end{cases}$$

Deci ecuaţia (6) descrie întregul fenomen, în care pentru $\eta \leqslant 0$ avem etapa între două ciocniri succesive, iar pentru $\eta > 0$ ciocnirea propriu zisă.

3. Să studiem mişcarea sistemului între două ciocniri succesive ($\eta \leqslant 0$). Pentru aceasta vom integra ecuaţia (6). Originea timpului $t = 0$ va fi luată la sfîrşitul ciocnirii. Deci pentru $\tau = \varphi/p$ avem $\eta = 0$. Notînd cu $\alpha\,(\alpha > 0)$ valoarea derivatei η' în acest moment, obţinem

(7) $$\eta = A\sin\left(\tau - \frac{\varphi}{p}\right) + B\cos\left(\tau - \frac{\varphi}{p}\right) - a - \theta\sin p\tau,$$

în care s-a notat

$$A = -\alpha + p\theta\cos\varphi, \qquad B = a + \theta\sin\varphi, \qquad \theta = \frac{b}{1 - p^2}.$$

Relaţia (7) descrie mişcarea masei m pînă în momentul în care η devine din nou zero. Deci sfîrşitul acestui interval definit prin τ_0 se găseşte rezolvînd ecuaţia

(8) $$A\sin\left(\tau_0 - \frac{\varphi}{p}\right) + B\cos\left(\tau_0 - \frac{\varphi}{p}\right) - a - \theta\sin p\tau_0 = 0.$$

De asemenea se poate determina mărimea $(\eta')_{\tau=\tau_0} = \beta$, necesară pentru studiul etapei următoare (ciocnirea următoare):

(9) $$\beta = A\cos\left(\tau_0 - \frac{\varphi}{p}\right) - \theta\sin\left(\tau_0 - \frac{\varphi}{p}\right) - Bp\cos p\tau_0.$$

4. Elementele mişcării determinate la sfîrşitul etapei anterioare reprezintă condiţii iniţiale pentru mişcarea ce are loc în timp ce ciocanele se află în contact. În această perioadă este valabilă ecuaţia diferenţială a mişcării (6) pentru $\eta > 0$, cu condiţiile iniţiale $\eta = 0$ şi $\eta' = \beta$ $(\tau = \tau_0)$.

Ecuaţia este neliniară. Pentru integrarea ei vom folosi o metodă de aproximare poligonală elaborată de unii dintre autori în [5], pe care o considerăm cea mai potrivită cazului studiat. Pentru a aplica această metodă este necesar să stabilim în prealabil valoarea maximă a lui η şi anume η_m. Ţinînd cont de faptul că timpul de ciocnire este scurt, vom putea scrie în orice moment τ al ciocnirii, în primă aproximaţie, că $\sin p\tau \cong \sin p\tau_0$.

Din integrala primă a ecuaţiei şi anume $5\eta'^2 + 4\eta^{5/2} + 5\eta^2 + 10\eta\lambda - 5\beta^2 = 0$, unde $\lambda = a + b\sin p\tau_0$, se poate determina η_m din condiţia $\eta' = 0$.

Valoarea lui η_m va fi rădăcina ecuaţiei

$$4\eta^{5/2} + 5\eta^2 + 10\lambda\eta - 5\beta^2 = 0. \tag{10}$$

Se poate arăta că ecuaţia (10) admite o singură rădăcină reală.

Metoda aproximării poligonale amintită constă în înlocuirea caracteristicii neliniare $F(\eta) = \eta + f(\eta)$ printr-o linie poligonală în aşa fel încît eroarea medie pătratică să fie minimă. Prima latură a poligonului se va alege în aşa fel ca să reprezinte chiar partea liniară a caracteristicii. Laturile poligonului se exprimă prin ecuaţii de forma

$$g_i(\eta) = m_i\eta + n_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

unde m_i şi n_i sînt constante ce se determină din condiţiile de continuitate

$$g_{i-1}(\eta_i) = g_i(\eta_i), \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

şi din ecuaţiile

$$\int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} [g_i(\eta) - F(\eta)]\,d\eta = 0, \qquad \int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} [g_i(\eta) - F(\eta)]\eta\,d\eta = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

În cazul nostru, în care $F(\eta) = \eta + \eta^{3/2}$, vom face aproximare poligonală luînd $n = 2$, iar pentru precizie mai mare $n = 3$. Elementele necesare obţinute pentru cazul aproximării biliniare se află în tabelul 1, iar pentru aproximarea triliniară în tabelul 2.

Tabelul 1

i	m_i	n_i	η
0	1	0	$0 \leqslant \eta \leqslant 0{,}162\,\eta_m$
1	$1 + 1{,}127\,\eta^{1/2}$	$-0{,}1826\,\eta^{3/2}$	$0{,}162\,\eta_m \leqslant \eta \leqslant \eta_m$

Tabelul 2

i	m_i	n_i	η
0	1	0	$0 \leqslant \eta \leqslant 0{,}08\,\eta_m$
1	$1+0{,}792\,\eta_m^{1/2}$	$-0{,}06336\,\eta_m^{3/2}$	$0{,}08\,\eta_m \leqslant \eta \leqslant 0{,}494\,\eta_m$
2	$1+1{,}292\,\eta_m^{1/2}$	$-0{,}310\,\eta_m^{3/2}$	$0{,}494\,\eta_m \leqslant \eta \leqslant \eta_m$

Deoarece am aproximat caracteristica neliniară cu un poligon, pe fiecare interval corespunzător unei laturi ecuaţia diferenţială (6) devine liniară. Folosind rezultatele cuprinse în tabele, se obţine soluţia pe un anumit interval i ($\eta_i \leqslant \eta \leqslant \eta_{i+1}$) sub forma

$$\eta = A_i \sin \sqrt{m_i}(\tau - \tau_i) + B_i \cos \sqrt{m_i}(\tau - \tau_i) - \frac{a+n_i}{m_i} - \frac{b}{m_i - p^2} \sin p\tau_i, \tag{11}$$

unde constantele de integrare A_i şi B_i se determină din condiţiile de la începutul intervalului, care coincid cu cele de la sfîrşitul intervalului precedent. Astfel, dacă presupunem la începutul intervalului $\tau = \tau_i$, $\eta = \eta_i$ şi $\eta' = \eta'_i$, se obţine

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{\sqrt{m_i}}\left(\eta'_i + \frac{bp}{m_i - p^2}\cos p\tau_i\right), \\ B_i &= \eta_i + \frac{a+n_i}{m_i} + \frac{b}{m_i - p^2}\sin p\tau\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Deoarece η_{i+1} este o valoare cunoscută cuprinsă în tabelele date, prin înlocuirea ei în ecuaţia (11) vom obţine ecuaţia

$$\begin{aligned} \eta_{i+1} = A_i \sin \sqrt{m_i}(\tau_{i+1} - \tau_i) + B_i \cos \sqrt{m_i}(\tau_{+} - \tau_i) - \\ - \frac{a+n_i}{m_i} - \frac{b}{m_i - p^2}\sin p\tau_{i+1}, \end{aligned} \tag{13}$$

din care se determină τ_{i+1}, sfîrşitul intervalului i.

Prin înlocuirea lui τ_{i+1} în derivata expresiei (11) se obţine $(\eta')_{\tau=\tau_{i+1}} = \eta'_{i+1}$.

$$\eta'_{i+1} = A_i \sqrt{m_i} \cos \sqrt{m_i}(\tau_{i+1} - \tau_i) - B_i \sqrt{m_i} \sin \sqrt{m_i}(\tau_{i+1} - \tau_i) - \frac{bp}{m_i - p^2}\cos p\tau_{i+1}. \tag{14}$$

Elementele obţinute prin relaţiile (13) şi (14) constituie condiţii iniţiale ($\tau = \tau_{i+1}$) pentru intervalul următor, pentru care calculele se fac la fel.

În ultimul interval, procedînd ca mai sus, $\eta = \eta_n$ va trebui să aibă valoarea maximă η_m. De aceea, la sfîrşitul acestui ultim interval, derivata η'_n determinată va trebui să rezulte zero. Dacă această condiţie nu este îndeplinită, calculul trebuie reluat cu o altă valoare a lui η_m.

Cu metoda de mai sus am studiat ciocnirea din momentul cînd η avea valoarea zero pînă la valoarea η_m. Vom proceda absolut analog în studiul ciocnirii de la η_m la $\eta = 0$. În acest moment vom obţine pentru τ valoarea τ_s şi pentru η' valoarea $-\gamma$.

Calculul făcut permite determinarea tuturor parametrilor care caracterizează fenomenul de ciocnire în sistemele vibropercutante. Astfel se obţine timpul total de ciocnire $\Delta t_0 = (\tau_s - \tau_0)\sqrt{m/k}$, durata fiecărei faze a ciocnirii şi anume comprimarea $\Delta t'_0 = (\tau_n - \tau_0)\sqrt{m/k}$ şi destinderea $\Delta t''_0 = (\tau_s - \tau_0)\sqrt{m/k}$. De asemenea, se obţine deformaţia maximă $\xi_m = (k/k_1)^2\eta_m$ şi forţa maximă de contact $P_{max} = k_1 \xi_m^{3/2}$.

5. Metoda de calcul prezentată se referă la un ciclu al mişcării compus din mişcarea dintre două ciocniri succesive şi ciocnirea propriu zisă. Mişcarea sistemului fiind o succesiune de astfel de cicluri, studiul complet se va face trecînd de la un ciclu la următorul. Condiţiile iniţiale pentru un ciclu sînt cele finale ale ciclului precedent. Astfel pentru ciclul următor celui expus mai sus vom avea ca moment iniţial $\tau = \tau_s$ şi condiţiile iniţiale $\eta = 0$, $\eta' = -\gamma$.

Într-un regim tranzitoriu ciclurile nu se repetă identic. Studiul acestui regim în general necesită calcule multe, însă problema poate fi programată şi rezolvată la maşinile electronice de calcul.

Ne vom ocupa în mod deosebit de mişcarea staţionară a sistemului vibropercutant, adică de cazul cînd mişcarea se repetă identic în fiecare ciclu. Pentru aceasta este necesar ca vitezele la începutul şi sfîrşitul unui ciclu să fie egale, iar forţa perturbatoare să se repete identic. Pentru a fi îndeplinită prima condiţie va trebui să avem

$$\alpha = \gamma. \tag{15}$$

A doua condiţie este îndeplinită în cazul cînd perioada $T = (\tau_s - \varphi/p)\sqrt{m/k}$ a mişcării staţionare este un multiplu al perioadei forţei perturbatoare:

$$T = \left(\tau_s - \frac{\varphi}{p}\right)\sqrt{\frac{m}{k}} = r\frac{2\pi}{\omega}, \quad (r = 1, 2, \ldots). \tag{16}$$

Dacă în ecuaţiile (15) şi (16) am reuşi să exprimăm valorile intermediare ale lui τ şi η' din ecuaţiile intermediare (8), (9), (13) şi (14) cu ajutorul valorilor α şi φ, atunci aceste ecuaţii ar constitui un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute. Rezultă deci că mişcarea staţionară se realizează numai cînd aceste condiţii sînt verificate, deci numai pentru anumite valori ale lui α şi φ.

Cum exprimările de mai sus ale lui τ şi η' sînt foarte greu de efectuat, va trebui să determinăm două valori aproximative ale lui α şi φ cu care vom începe calculele. Dacă α şi φ calculaţi din ecuaţiile (15) şi (16) nu sînt egali cu valorile de la început, vom relua calculele cu noile valori. Folosirea acestei metode duce la rezultate suficient de exacte, însă necesită multe calcule, mai ales că se foloseşte iteraţia. Rezolvarea se poate face în condiţii bune folosind un program ciclic la maşina electronică de calcul.

În ce privește valorile aproximative de început ale lui α și φ, vom ține seama de faptul că pentru majoritatea sistemelor vibropercutante durata ciocnirii nu influențează esențial elementele mișcării [2]. Aceasta înseamnă că se pot obține concluzii privind mișcarea sistemului vibropercutant folosind ipoteza ciocnirii instantanee. Deci calculele pot fi efectuate în primă aproximație pornind de la valorile obținute pentru necunoscute în studiul ciocnirii instantanee. Astfel pe baza teoriei ciocnirii elastice instantanee rezultă $\varphi = -\pi/2$ și $\alpha = (\theta - a)\,\mathrm{tg}\,(\pi r/p)$, pe care le vom folosi ca valori inițiale de calcul.

Dacă timpul de ciocnire este scurt în raport cu perioada forței perturbatoare, anume sub cîteva sutimi din perioada forței perturbatoare — condiție în general îndeplinită la mecanismele vibropercutante — se pot face unele aproximări care ne conduc la un calcul suficient de simplu și exact. Din relațiile (13) și (14), după aproximațiile ce se pot face în aceste condiții, se obține

$$\eta'^{2}_{i+1} = \eta'^{2}_{i} - 2m_i(\eta_{i+1} - \eta_i)\left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{2} + \frac{a + n_i}{m_i} - \frac{b}{m_i - p^2}\right). \tag{17}$$

În relația (17), pentru fiecare etapă este necunoscută mărimea η'_{i+1}, celelalte fiind determinate fie din tabelele 1 și 2, fie din etapa anterioară.

Pentru determinarea lui τ_{i+1}, din relațiile (13) și (14) se obține după simplificare următoarea ecuație:

$$\cos\left[\sqrt{m_i}\,(\tau_{i+1} - \tau_i) - \psi_i\right] = \frac{\eta'_{i+1}}{\eta_i}\cos\psi_i\,, \tag{18}$$

unde $\mathrm{tg}\,\psi_i = B_i/A_i$.

Cu ajutorul formulelor (17) și (18) se pot calcula toate mărimile necunoscute care apar la ciocnire.

Cînd condiția amintită nu este îndeplinită, atunci formulele (17) și (18) pot fi folosite pentru a obține valori aproximative care urmează să fie îmbunătățite pe baza ecuațiilor (13) și (14).

6. Exemplu. Vom considera un sistem vibropercutant cu următoarele caracteristici: $a = 1{,}611\cdot10^{10}$, $b = 34{,}2\cdot10^{10}$ și $p = 3{,}26$. Acest caz corespunde unui sistem vibropercutant cu $m = 0{,}53$ kg fs^2/m, $k = 2{,}5$ kgf/cm, $R = 1{,}5$ cm, $\omega = 100$ rad/s, $\delta = 3$ mm, $F_0 = 31{,}8$ kgf.

Vom face presupunerea că durata ciocnirii este suficient de mică astfel încît să se poată face simplificările arătate anterior. Pentru calcul se alege un poligon cu trei laturi avînd elementele determinate în tabelul 2, unde $\eta_m = 9{,}0740\cdot10^8$ se obține din ecuația (10).

Aplicînd succesiv (17) se obțin următoarele valori:

$$\eta'_0 = 13{,}86\cdot10^{10},\ \eta'_1 = 13{,}85\cdot10^{10},\ \eta'_2 = 12{,}67\cdot10^{10},\ \eta'_3 = 0,$$
$$\eta'_4 = -12{,}67\cdot10^{10},\ \eta'_5 = -13{,}85\cdot10^{10},\ \eta'_6 = -13{,}86\cdot10^{10}.$$

În mod asemănător, folosind (18), se obține:

$$\tau_0 = 3{,}3728,\ \tau_1 = 3{,}3732,\ \tau_2 = 3{,}3759,\ \tau_3 = 3{,}3826,\ \tau_4 = 3{,}3924,\ \tau_5 = 3{,}3955,$$
$$\tau_s = \tau_6 = 3{,}3960.$$

Deci durata ciocnirii rezultă $\Delta t_c = 0{,}75\cdot10^{-3}$ s, deformația maxlmă $\xi = 0{,}0169$ cm iar forța maximă $P_{max} = 2\,550$ kgf.

3. Partea experimentală

7. Studiul experimental al fenomenului de ciocnire s-a făcut cu sistemul vibropercutant din fig. 2. Masa percutantă *5* este suspendată elastic prin arcurile *3* de un suport *1*. Suportul *1* este așezat pe o masă vibrantă *2* care efectuează vibrații armonice. Vibrațiile

rectilinii relative ale masei *5* faţă de suportul *1* se execută datorită ghidajului *4* fixat de suportul *1*. Forţa perturbatoare în această mişcare relativă este determinată de vibraţia armonică a suportului *1*, identică cu a masei vibrante *2*. Pentru ca frecarea să nu influenţeze mişcarea sistemului, ghidajul barei, de care este legată masa percutantă, este realizat cu bile.

Între masa percutantă *5* şi baza suportului *1* au loc ciocniri prin intermediul ciocanelor de formă simetrică, aşezate pe aceste elemente. Vibraţiile suportului *1* legat de masa vibrantă nu sînt influenţate de percuţii.

Mişcarea relativă a masei percutante *5* faţă de suportul *1* este descrisă de ecuaţia diferenţială (4), în care $F_0 = m\omega^2 h$, unde ω şi h sînt respectiv amplitudinea şi pulsaţia mişcării armonice a suportului. Dispozitivul realizat este un model potrivit pentru studiul experimental al sistemelor vibropercutante analizate mai înainte.

Prin modificarea parametrilor dispozitivului putem realiza diferite cazuri de mişcare pentru sistemul vibropercutant studiat. Astfel, se poate schimba forţa perturbatoare prin modificarea amplitudinii şi pulsaţiei masei vibrante. De asemenea distanţa dintre ciocane se reglează cu ajutorul unei piuliţe de strîngere. Există posibilitatea de a schimba şi alte elemente ca de exemplu arcurile, masa percutantă etc.

Cu dispozitivul descris s-au măsurat duratele diferitelor faze ale mişcării. Pentru aceasta s-a conceput o instalaţie electronică cu care s-a măsurat atît timpul de ciocnire, cît şi intervalul de timp dintre două ciocniri. Schema instalaţiei de măsură se află în fig. 3 şi se compune din generatorul de impulsuri *G*, osciloscopul *O* şi numărătorul de impulsuri *N*. Circuitul electric alimentat de la generatorul de impulsuri *G* se schimbă prin cele două ciocane în contact, care sînt izolate de restul instalaţiei.

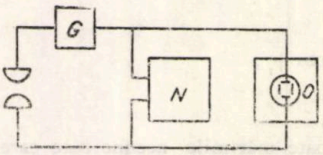


Fig. 3

Pentru determinarea timpului dintre ciocniri s-a folosit osciloscopul *O* prevăzut cu un aparat de filmare. Pe plăcile de deviaţie verticale ale osciloscopului se aplică tensiunea dată de generatorul *G*. La fiecare ciocnire osciloscopul primeşte tensiune şi prin filmare se obţine cîte o linie verticală, deoarece timpul de ciocnire este scurt. Cunoscînd viteza de înaintare a filmului, distanţa dintre două linii determină timpul între ciocniri. Numărul de linii de pe film este egal cu numărul de ciocniri ce au avut loc.

Numărătorul de impulsuri *N* numără impulsurile date de generator atît timp cît ciocanele se află în contact. Cunoscînd acest număr precum şi frecvenţa impulsurilor rezultă cu o precizie mare timpul de ciocnire. În regimul staţionar pe care-l studiem, numărătorul electronic rămîne în circuit pe durata mai multor ciocniri, mai ales că perioada mişcării masei percutante este mică. Numărul de impulsuri corespunzător unei ciocniri se află prin împărţirea numărului total de impulsuri înregistrat de numărător la numărul ciocnirilor, determinat mai sus.

8. Pentru încercări s-a folosit un model de sistem vibropercutant avînd caracteristicile din exemplul de calcul dat anterior, cu amplitudinea masei vibrante h cuprinsă între 1 şi 6 mm şi distanţa dintre ciocane δ între 0 şi 4 mm. Din calcule rezultă $k_1 = 1{,}16 \cdot 10$ kgcm$^{-3/2}$.

Ţinînd seama de formula ciocnirii instantanee $\alpha = (\theta - a)\,\mathrm{tg}\,(\pi r/p)$, deoarece $\alpha > 0$, $\theta - a < 0$ rezultă $\mathrm{tg}\,(\pi r/p) \simeq \mathrm{tg}\, r < 0$, deci $r = 2$. Acest rezultat s-a confirmat experimental, adică timpul între ciocniri este dublul pericadei de oscilaţie a masei vibrante.

Pentru mai multe situaţii ale dispozitivului cu valori concrete ale caracteristicilor în regim staţionar s-au făcut citiri la numărător şi pe film. În fig. 5 se arată un asemenea film obţinut pentru $\delta = 3$ mm, $h = 6$ mm şi $\omega = 100$ rad/s. Pentru comparaţie este indicată şi baza de timp de 0,1 s. S-a determinat timpul dintre ciocniri şi s-a găsit egal cu 0,125 s, acelaşi în toate experienţele efectuate. Măsurătorile sînt foarte apropiate de rezultatele teoretice. Anterior am arătat că $r = 2$, ceea ce înseamnă că perioada $T = r\,(2\pi/\omega) = 0{,}1256$ s. Cum durata ciocnirii este foarte scurtă, cea mai mare parte a perioadei T reprezintă timpul între două ciocniri, pentru care experimental s-a găsit 0,125 s.

Duratele ciocnirilor pentru cazurile studiate au fost găsite cu valori cuprinse între 1 şi 2,5 μs, fiind mai mari în general decît cele rezultate din calcul.

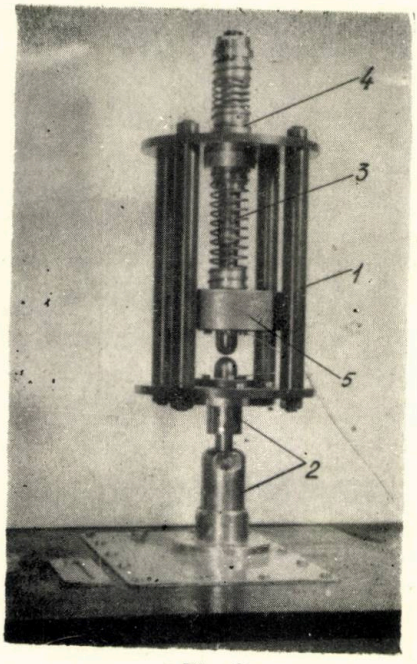


Fig. 2

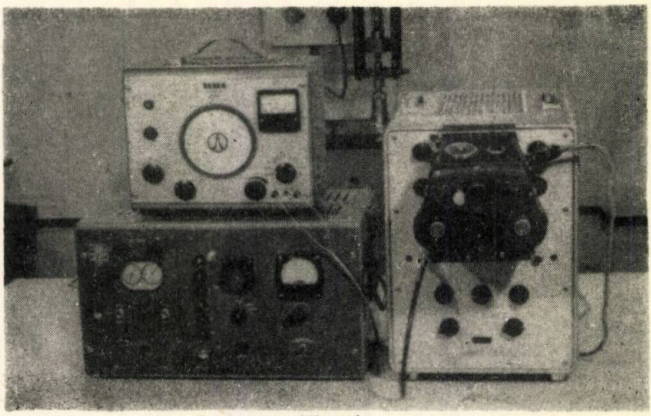


Fig. 4

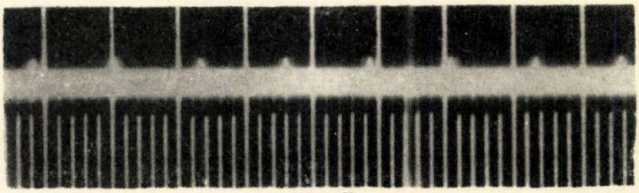


Fig. 5

4. Concluzii

1. S-a stabilit teoretic şi s-a verificat experimental că perioada mişcării staţionare a unui sistem vibropercutant, cînd ciocnirea nu se consideră instantanee, este un multiplu al perioadei forţei perturbatoare. Regimul staţionar s-a realizat în toate experienţele.

2. În toate cazurile experimentate, timpul de ciocnire variază foarte puţin cu distanţa între ciocane şi cu amplitudinea forţei perturbatoare.

3. Determinarea forţei P_{max} este importantă deoarece cu ajutorul ei se poate stabili starea de tensiune în elementele vibropercutorului sau acestea se pot verifica din punctul de vedere al rezistenţei la şocuri.

4. Studiul ciocnirii pentru viteze mai mari decît cele menţionate la început necesită considerarea proprietăţilor elastoplastice ale materialelor. În unele cazuri se poate presupune că la ciocniri repetate deformaţiile plastice nu se mai produc dacă forţa de contact depăşeşte valoarea maximă atinsă la prima ciocnire [2].

5. Tratarea teoretică şi practică a problemei luînd ca bază legea lui Hertz (1) se justifică prin faptul că — pe lîngă simplitatea matematică relativă a soluţiilor corespunzătoare acestei legi — incertitudinile care persistă şi astăzi în ceea ce priveşte explicarea mecanismului de contact nu reclamă luarea în consideraţie a altor schematizări matematice ale forţei de deformaţie, propuse de diferiţi autori [20]... [22].

6. Menţionăm în fine posibilităţile de tratare teoretică a schemelor matematice obţinute folosind aparatul de investigaţie ştiinţifică a dinamicii sistemelor oscilante neliniare, dezvoltat de autori în [15]... [19].

Institutul politehnic, Iaşi,
Institutul politehnic, Timişoara
şi
Academia Navală, Constanţa

BIBLIOGRAFIE

1. Динник А. Н., *Удар и сжатие упругих тел.* Избранные труды, **1**, Изд. АН УССР, Киев, 1952.
2. Ponomariov S. D., Biderman V. L., Liharev K. K., Makuşin V. M., Malinin N. N., Feodosiev V. I., *Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini.* Vol. **III**, Ed. Tehn., Buc., 1964 (trad. din l. rusă).
3. Раскин Я., М., Изв. высш. учебн. зав., Машиностроение, 1961, *2.*
4. Багреев В. В., Тр. Моск. ин-та инж. ж.-д. транспорта, 1964, *193.*
5. Silaş Gh., Mangeron D., Brîndeu L., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *1–2.*
6. Hamburger L., Buzdugan Gh., *Teoria vibraţiilor şi aplicaţiile ei în construcţia de maşini.* Ed. Tehn., Buc., 1958.
7. Цаплин С. А., *Виброударные механизмы.* Автотрансиздат, М., 1958.
8. Малышев В. М., Вест. Моск. ун-та, 1952, *5.*
9. Батуев Г. С., Федосов А. А., Ефремов А. К., *Соударение массивных тел при упруго-пластических деформациях.* În culegerea *Расчеты на прочность,* Машиностроение, М., *10.*

10. Vinh Toung N. P., Sorin P., C. r. Acad. Sci., Paris, 1962, *19.*
11. Багреев В. В., Тр. Моск. ин-та инж. ж.-д. транспорта, 1964, *193.*
12. Холмогоров Н. Н., Тр. Рост. ин-та стр. инж., 1961, *19.*
13. — Тр. Рост. ин-та стр. инж., 1961, *23.*
14. Лазарян В. А., Манашкін Л. А., Прикладна Механіка, 1964, **X**, *4,*
15. Mangeron D., *Mecanica vibraţiilor.* În vol. *Fundamentele Mecanicii* de D Mangeron, Z. Gàbos, şi I. Stan, Ed. Acad. R.P.R., Buc., 1962.
16. — Abh. DAW, Berlin, Kl. Math., Phys., Techn., 1965, *1,* S. 76—90.
17. Mangeron D., Chaléat R., Rev. Roum. Sci. Techn., Sér. Méc. appl., 1965, **10,** *4,* pp. 791—825.
18. Mangeron D., Chaléat R., Silaş Gh., Rev. Roum. Sci. Techn., Sér. Méc. appl. (sub tipar).
19. Mangeron D., Chaléat R., *Higher order approximations in the study of the disturbed motion of oscillators and general theory of synchronization.* ICM, Moscow: Appl. Math. a. Math. Phys., Abstracts, 1966, p. 14.
20. Crook A. W., Proc. Roy. Soc. London, 1952, **A, 212,** *377.*
21. Barnhart K. E., Jr. Goldsmith W., J. Appl. Mech., 1957, **24,** p. 440.
22. Bleich H. H., Salvadori M. G., Trans. Amer. Soc Civ. Engrs, 1955, **120,** p. 499.
23. Goldsmith W., *Impact. The theory and physical behaviour of colliding solids.* Edward Arnold, London, 1960.

DINAMICA DEI SISTEMI VIBROPERCUTTANTI

Nota I

Problema spettante al caso in cui la percussione non si considera istantanea

(Sunto)

Gli autori, prendendo le mosse dai loro previi risultati enunciati durante la Conferenza di Mecanica indetta dall'Accademia del la Repubblica Socialista di Romania e dal Ministero dell'Instruzione (Bucarest, 27—30 settembre 1965), determinano teoricamente e ne fanno la verifica sperimentale concernente la determinazione del periodo del moto stazionario di un sistema vibropercuttante, nel caso in cui la percurssione non si considera istantanea. Dopo aver accennato all'importanza pratica del lavoro compiuto, si indicano i passi susseguenti della ricerca stessa.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

D. C. 531

A METHOD OF ANALYSIS OR SYNTHESIS OF MECHANICAL SYSTEMS, USING „VERTEX" MATRICES

BY

V. KOMKOV

1. Introduction

This method is well known to electrical engineers and has been explained by Gabriel Kron [1], and by E. G. Keller [2]. However it has been almost completely neglected by mechanical engineers.

This article point out an application to the vibrational analysis of a geared system and attempts to explain the basic features of the method.

2. Notation and Symbolism

The notation will be the standard notation of Laplace's Operational Calculus, based on the one-sided Laplace's Transformation:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt = \mathcal{L}(f(t)). \tag{1}$$

The functions considered here will be at least piecewise continuous; and at most of exponential order, insuring the existence of the one sided transformation to the right of some S_0 (Real part of S) $>$ (Real part of S_0). The mechanical systems discussed here are linear.

$O(s)$ will denote the Laplace's transform of the output of our system, while $I(S)$ will denote the Laplace's transform of the input into our system. The ratio

$$\frac{O(s)}{I(s)} = G_{i0}(s) \tag{2}$$

will be called the transfer function. (Following the electrical engineering practices we may deal with „transfer functions" rather than „Mechanical impedances").

In general $I(s)$, $O(s)$, $G_{i0}(s)$ will be represented by matrices, whose elements are some functions of the Laplace's operator s.

The performance of the mechanical system is determined by the matrix equation:

$$G_{i0}(s)\, I(s) = O(s), \tag{3}$$

or written in full:

$$\begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \dots g_{1n}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \dots g_{2n}(s) \\ \vdots & \\ g_{n1}(s) & g_{n2}(s) \dots g_{nn}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(s) \\ i_2(s) \\ \vdots \\ i_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_1(s) \\ O_2(s) \\ \vdots \\ O_n(s) \end{bmatrix}. \tag{3$_1$}$$

Alternatively we could have:

$$[i_1(s)\ \ i_2(s) \dots i_n(s)] \begin{bmatrix} g_{11}(s) \dots g_{1n}(s) \\ \vdots \\ g_{n1}(s) \dots g_{nn}(s) \end{bmatrix} = [O_1(s)\ \ O_2(s) \dots O_n(s)]. \tag{4}$$

Equations (3) or (4) are matrix equations and are analogous to the matrix equations representing a change of coordinates from let's x_i to y system in a purely geometric interpretation

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ \vdots & \\ a_{n1} \dots \dots a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

It does no harm to associate mentally the input quantities $i_1(s), i_2(s), \dots, i_n(s)$ with the geometric notion of coordinates $x_1, x_2, \dots, x_n(s)$, and to talk about the changes of input quantities as of changes in „coordinates" of our system. The system has n degrees of freedom and n „generalized coordinates" will be required to describe it's behavior.

Our fundamental equation is (3) $O(s) = G_{i0}(s)\, I(s)$. Let us assume that G_{i0} is known for some frame of reference. Could the components of G_{i0} be determined for any frame? The answer is yes. The case for which G_{i0} is particularly easy to determine is when it is of a diagonal form:

$$G_{i0} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \dots 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 \dots g_{nn} \end{bmatrix}.$$

From the physical interpretation of equation (3) it is obvious that we have n mechanical elements which do not affect each other. In fact (3) degenerates into n independent equations:

$$(4_1) \qquad O_1(s) = g_{11}(s)\, i_1(s), \quad O_2(s) = g_{22}(s)\, i_2(s), \ldots, O_n(s) = g_{nn}(s)\, i_n(s).$$

This means that all mechanical elements have been disconnected from each other, and each is independently subjected to a given $I_{(j)}(s)$. We assume that this case is easy to calculate, and that $O_{(j)}(s)$ are obtained with little effort.

We shall call the system represented by equation (4_1) „primitive". A particular way in which we interconnect the elements and let them influence each others behavior will correspond then to a „change of a coordinate system". A matrix accomplishing this change will be called a *vertex matrix.*

Notation: T will denote an applied torque (example: T_1 — is the torque applied to mass 1); $\mathcal{J}$ denotes moment of inertia (example: $\mathcal{J}_7$ is the moment of inertia of the mass 7); f denotes the coefficient of viscous friction; k denotes the torsional spring constant of a shaft; n is the number of teeth in a gear.

The system shown on Fig. 1 is a gear system with fly wheels *1* and *8*. The gears *5*, *2*, *3* and *6*, *7*, *4* have moments of inertia $\mathcal{J}_5$, $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3$ and $\mathcal{J}_6$, $\mathcal{J}_7$, $\mathcal{J}_4$ respectively. Bearings are positioned as shown. The coefficients of viscous friction are indicated by $f_1, \ldots, f_7$.

The methods of analysis and synthesis of mechanical systems by this technique are best illustrated by some examples.

3. The Description of the Method of Solution

Let us establish the possibility of formulating a tensor equation in place of the matrix equations (3) and (4).

To achieve this we must formulate the laws of transformation of the quantities $O(s)$, $G_{i0}(s)$, $I(s)$ upon the change of the coordinate frame. Physically the change of the coordinate system represents the replacement of our system by another system having the same number of degrees of freedom. The situation is particularly simple if we can immediately establish some invariant quantities.

For example, if the elements of $I(s)$ represent generalised forces, and the elements of $O(s)$ the corresponding generalised displacements, then

$$I(s)\, O(s) = O(s)\, I(s) = \text{Invariant.}$$

Then if $O\ s)$ is a contravariant vector, $I(s)$ must be a covariant vector. This immediately establishes the tensor character of G.

4. An Example of the Method: A Problem of Dynamic Behavior

Let us simplify the problem by taking $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = f_6 = f_7 = f$. Let us consider the system shown on Fig. 1.

We choose the „primitive" system to be the collection of 4-2 mass systems not connected with each other as shown on Fig. 2.

Les us take the first 2-mass system. The equations describing its behavior are

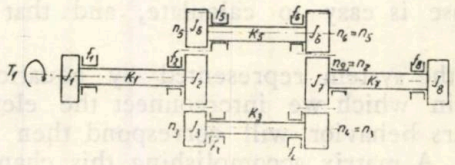


Fig. 1

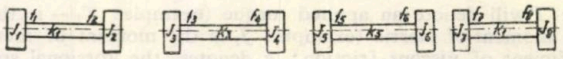


Fig. 2

(5) $T_1(s) = (\mathcal{J}_1 s^2 + fs + K_2)\,\theta_1 - K_1\,\theta_2\,, \quad T_2(s) = (\mathcal{J}_2 s^2 + fs + K_1)\,\theta_2 - K_1\,\theta_1\,,$

or

$$\begin{bmatrix} T_1(s) \\ T_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_1 s^2 + fs + K_1 & -K_1 \\ -K_1 & \mathcal{J}_2 s^2 + fs + K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix},$$

$$(5_1) \qquad (T) = (Z)(\theta).$$

Since the entire system consists of disconnected 2-mass systems, we have:

We now change the coordinates $\theta_1 \ldots \theta_8$ by connecting the system. The relationships are:

$$\theta_1 = \theta_1', \quad \theta_2 = \theta_2', \quad \theta_3 = \frac{n_2}{n_3}\,\theta_2\,, \quad \theta_4 = \theta_4',$$

$$\theta_5 = \frac{n_2}{n_5}\,\theta_2\,, \quad \theta_6 = \frac{n_4}{n_6}\,\theta_4'\,, \quad \theta_7 = \frac{n_4}{n_7}\,\theta_4'\,, \quad \theta_8 = \theta_8',$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_1 s^2 + fs + K_1 & -K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_1 & \mathcal{J}_2 s^2 + fs + K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{J}_3 s^2 + fs + K_3 & -K_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_3 & \mathcal{J}_4 s^2 + fs + K_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{J}_5 s^2 + fs + K_5 & -K_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -K_5 & \mathcal{J}_6 s^2 + fs + K_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{J}_7 s^2 + K_7 & -K_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_7 & \mathcal{J}_8 s^2 + fs + K_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \\ \theta_8 \end{bmatrix},$$

$$(T) = (Z)(\theta).$$

or

$$(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n_2}{n_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n_2}{n_5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n_4}{n_6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n_4}{n_7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (\theta'),$$

or

$$(\theta) = (C)(\theta'). \tag{6}$$

$$C_{TR} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{n_2}{n_3} & 0 & \frac{n_2}{n_5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{n_4}{n_6} & \frac{n_4}{n_7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

The new impedance matrix (in θ' coordinates) is obtained by the formula

$$Z' = C_{TR} Z C. \tag{7}$$

The matrix $C_{TR} Z C$ is given by

$\mathcal{J}_1 s^2+fs+K_1$	$-K_1+\frac{n_2}{n_3}(\mathcal{J}_2 s^2+fs+K_1)$	0		0	0	0	0
0	$(\mathcal{J}_2 s^2+fs+K_1+$ $+\left(\frac{n_2}{n_3}\right)^2(\mathcal{J}_3 s+f_2 s+K_1)+$ $+\left(\frac{n_2}{n_5}\right)^2(\mathcal{J}_5 s^2+fs+K_5)$	0	$-\frac{n_2}{n_3}K_3-\frac{n_2}{n_5}\frac{n_4}{n_6}K_5$	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	$-K_3\frac{n_2}{n_3}-\frac{n_2}{n_5}\frac{n_4}{n_6}K_5$	0	$(\mathcal{J}_4 s^2+fs+K_3)+$ $+\left(\frac{n_4}{n_6}\right)^2(\mathcal{J}_6 s^2+fs+K_5)-$ $-K_7\left(\frac{n_4}{n_7}\right)^2$	0	0	0	$-K_7\frac{n_4}{n_7}$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$-K_7\frac{n_4}{n_7}$	0	0	0	$\mathcal{J}_8 s+fs+K_7$

$$(Z)(C) = \begin{vmatrix} \mathcal{J}_1 s^2 + fs + K_1 & -K_1 + \frac{n_2}{n_3}(\mathcal{J}_2 s^2 + fs + K_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_1 & \mathcal{J}_2 s^2 + fs + K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n_2}{n_3}(\mathcal{J}_3 s^2 + fs + K_3) & 0 & -K_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_3\frac{n_2}{n_3} & 0 & \mathcal{J}_4 s^2 + fs + K_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n_2}{n_5}(\mathcal{J}_5 s^2 + fs + K_5) & 0 & -K_5\frac{n_4}{n_6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{n_2}{n_5}K_5 & 0 & \frac{n_4}{n_6}(\mathcal{J}_6 s^2 + fs + K_5) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n_4}{n_7}(\mathcal{J}_7 s^2 + K_7) & 0 & 0 & 0 & -K_7 \\ 0 & 0 & 0 & -K_7\frac{n_4}{n_7} & 0 & 0 & 0 & \mathcal{J}_8 s^2 + fs + K_7 \end{vmatrix}.$$

Supplying us with the complete information regarding the behavior of our system.

The justification of formula (7) is the following: our original equation was (5_1) $(T) = (Z)(\theta)$; combined with it, we have $(T\theta) = (T'\theta')$ (invariant quantity). $\theta = C\theta'$ (6) gives us $TC\theta' = T'\theta'$ or $TC = T' = T'_{TR}$ or $(C_{TR})(T) = (T')$; $T = Z\theta = ZC\theta'$ or $T' = (C_{TR}ZC)\theta'$ giving us $C_{RT}ZC = Z'$.

We have not attempted to use C^{-1} or C_{TR}^{-1} which in our case does not exist, since C is singular.

The formulation just obtained is very convenient for synthesis of the system. Namely, assuming some form of $\theta_1(s), \ldots, \theta_8(s)$, we immediately obtain a column matrix of

$$(T) = \begin{bmatrix} T_1(s) \\ \vdots \\ T_8(s) \end{bmatrix}.$$

Received the 29 IV 1965

University of Wisconsin,
Madisor, Wisconsin,
U. S. A.

REFERENCES

1. Kron G., *Tensors for circuits.* Dover Press, 1958.
2. Keller E. G., *Mathematics of modern engineering.* Dover Press, 1960.
3. Concordia C., *The use of tensors in mechanical engineering problems.* General Electric Review, 1936, July, pp. 335–341.

O METODĂ DE ANALIZĂ ŞI SINTEZĂ A SISTEMELOR MECANICE UTILIZÎND MATRICE

(Rezumat)

Se prezintă trăsăturile fundamentale ale metodei matriciale de studiere a sistemelor mecanice, metodă larg utilizată în electrotehnică [1], [2]. Un exemplu de analiză vibraţională a sistemului mecanic din fig. 1 ilustrează eficienţa metodei.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 531 ; 621.01

APLICAREA UNOR CLASE DE SOLUŢII ALE ECUAŢIILOR POLIVIBRANTE ÎN STUDIUL DINAMICII MECANISMELOR ŞI MAŞINILOR (I)

DE

LIVIU CIOBANU, FLORIN POTERAŞ, ARSENIE OPREA, MALCA BERCOVICI şi SPIRIDON DELEANU

Extras din comunicarea prezentată în sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului politehnic din Iaşi, din 9—11 noiembrie 1962

1. Numeroşi oameni de ştiinţă din ţară şi de peste hotare, ca de ex., J. Favard [1], T. Kamytov [2], M. Salvadori [3], G. Stampacchia [4], Yu. M. Berezanski [5], F. Manaresi [6], A. Rosenblatt [7] au folosit rezultate privitoare la ecuaţiile polivibrante, numite „ecuaţiile lui Mangeron" şi introduse de acest autor [8]...[10], în studiul variatelor schematizări funcţionale interesînd tehnica şi fizica-matematică.

Fie

$$(1) \qquad x_1 = x_1(x, y, z), \quad x_2 = x_2(x, y, z), \quad x_3 = x_3(x, y, z),$$

reprezentarea biunivocă continuă a unui corp elastic C, individualizat prin punctul curent (x_1, x_2, x_3), pe un cub

$$Q\,(0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1),$$

astfel încît să se asigure respectiv corespondenţa între punctele interioare şi de frontieră ale lui C şi Q.

Autorii iau ca punct de plecare următoarea teoremă fundamentală a lui Mangeron [11] — Picone [12] relativă la rolul operatorilor polivibranţi, definiţi prin *derivatele totale*

$$(1) \qquad \mathrm{D}f = \frac{\partial^r f}{\partial x_1\, \partial x_2 \ldots \partial x_r}, \quad \mathrm{D}^p f = \frac{\partial^{pr} f}{\partial x_1^p\, \partial x_2^p \ldots \partial x_r^p}, \quad (p = 2, 3, \ldots),$$

în statica şi dinamica sistemelor materiale:

Teorema 1. *O funcţie $f(x, y, z)$ rezultă perfect determinată în cubul Q $(0 \leqslant x, y, z \leqslant 1)$ şi dată prin expresia*

$$
\begin{aligned}
f = {} & f^{000}(1-x)(1-y)(1-z) + f^{010}(1-x)\,y\,(1-z) + f^{001}(1-x)(1-y)\,z + \\
& + f^{011}(1-x)\,yz + f^{100}\,x\,(1-y)(1-z) + f^{110}\,xy\,(1-z) + f^{101}\,x\,(1-y)\,z + \\
& + f^{111}\,xyz + \sum_{(x,y,z)} \Bigg\{ (1-y)(1-z) \int_0^1 G(x,\xi)\, f_{yz}^{01}(\xi)\,d\xi + \\
& + y(1-z) \int_0^1 G(x,\xi)\, f_{yz}^{10}(\xi)\,d\xi + (1-y)\,z \int_0^1 G(x,\xi)\, f_{yz}^{01}(\xi)\,d\xi + \\
& + yz \int_0^1 G(x,\xi)\, f_{yz}^{11}(\xi)\,d\xi \Bigg\} + \qquad (2) \\
& + \sum_{(x,y,z)} \Bigg\{ (1-x) \int_0^1 \int_0^1 G(y,\eta)\, G(z,\zeta)\, f_x^0(\eta,\zeta)\,d\eta\,d\zeta + \\
& + x \int_0^1 \int_0^1 G(y,\eta)\, G(z,\zeta)\, f_x^1(\eta,\zeta)\,d\eta\,d\zeta \Bigg\} + \\
& + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 G(x,\xi)\, G(y,\eta)\, G(z,\zeta)\, D^2 f\, d\xi\,d\eta\,d\zeta \,^{1}),
\end{aligned}
$$

dacă i se prescriu arbitrar valorile sale în vîrfurile cubului şi valorile derivatelor sale totale secunde pe muchiile, feţele şi în interiorul cubului, $G(x, \xi)$ fiind definită prin

---

[1]) Vom nota cu f^{000}, f^{010}, f^{001}, f^{011}, f^{100}, f^{110}, f^{101}, f^{111} valorile ce le ia funcţia f în vîrfurile cubului Q: $(0,0,0)$, $(0,1,0)$,..., cu $f_{yz}^{00}(x)$, $f_{yz}^{01}(x)$, $f_{yz}^{10}(x)$, $f_{yz}^{11}(x)$, derivatele secunde ale funcţiilor de x la care se reduce f de-a lungul muchiilor lui Q, date respectiv prin ecuaţiile $y = 0$, $z = 0$; $y = 0$, $z = 1$; $y = 1$, $z = 0$; $y = 1$, $z = 1$, semnificaţii analoge avînd şi simbolurile $f_{zx}^{00}(y)$, $f_{zx}^{01}(y)$, $f_{zx}^{10}(y)$, $f_{zx}^{11}(y)$, $f_{xy}^{00}(z)$, $f_{xy}^{01}(z)$, $f_{xy}^{10}(z)$, $f_{xy}^{11}(z)$. Vom nota prin $f_x^0(y, z)$, $f_x^1(y, z)$ derivatele totale secunde ale funcţiilor de y şi z la care se reduce f de-a lungul feţelor lui Q, date respectiv prin ecuaţiile $x = 0$ şi $x = 1$, semnificaţie analogă avînd şi simbolurile $f_y^0(z, x)$, $f_y^1(x, z)$, $f_z^0(x, y)$, $f_z^1(x, y)$. Prin $D^2 f(x, y, z)$ sau $f''(x, y, z)$ s-a notat, în conformitate cu (1), derivata secundă totală a funcţiei f în interiorul cubului Q.

$$G(x,\xi)\begin{cases} = \xi(x-1), & \text{pentru } \xi \leqslant x, \\ = x(\xi-1), & \text{pentru } \xi \geqslant x, \end{cases}$$

iar termenii din sumele ce figurează în (2) *obținîndu-se prin permutări circulare între* (x, y, z), (ξ, η, ζ).

În această Notă și într-una următoare se prezintă clase de soluții ale unor ecuații polivibrante, care se vor folosi apoi în studiul dinamicii mecanismelor și mașinilor.

2. Fie [13]

$$\theta^2 \mathrm{D}^2 u + \theta \mathrm{D} u + (\theta^2 - n^{2m}) u = 0 \tag{3}$$

și

$$(1-\theta^2)\mathrm{D}^2 u - 2^m \theta \mathrm{D} u + \lambda_{n,m} u = 0, \tag{4}$$

ecuațiile cu operator polivibrant $\mathrm{D} = \dfrac{\partial^m}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m}$, în care $\theta = x_1 x_2 \ldots x_m$ și $\lambda_{n,m} = n^m[(n-1)^m + 2^m]$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

Dintre clasele de funcții noi relative la ecuațiile (3) și (4) vom menționa aici funcțiile

$$Y_1 = \mathrm{J}_{n,m}(\theta) = c_0 \theta^n \left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s \theta^{2s}}{\prod_{p=1}^{s} \chi^m_{2p,n}}\right), \tag{5}$$

$$\chi^m_{2p,n} = (2p+n)^m (2p+n-1)^m + (2p+n)^m - n^{2m},$$

$$Y_2 = Y_1 \ln\theta + c_0 m \left\{ \frac{\theta^2}{2^{m+2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) - \right.$$

$$- \frac{\theta^4}{2^{m+1}(4^m 3^m + 4^m)} \left(\frac{1}{2} + \frac{1^{m-1}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3^{n-1}}{3^m + 1}\right) + \tag{6}$$

$$\left. + \ldots + \frac{(-1)^{s-1} \theta^{2s}}{2^{m+1} 4^m (3^m+1)\ldots 2^m s^m [(2s-1)^m+1]} \sum_{p=1}^{s} \left[\frac{1}{2p} + \frac{(2p-1)^{m-1}}{(2p-1)^m+1}\right] + \ldots \right\}$$

și polinoamele

$$P_{n,m} = \left\{ \frac{\prod_{r=1}^{n-2} (\lambda_{r,m} - \lambda_{n,m})}{(n!)^m} \theta^n + \frac{\prod_{r=1}^{n-4} (\lambda_{r,m} - \lambda_{n,m})}{[(n-2)!]^m} \theta^{n-2} + \ldots + \right.$$

$$+ \frac{\prod_{r=1}^{n-2k} (\lambda_{r,m} - \lambda_{n,m})}{[(n-2k+1)!]^m} \theta^{n-2k+2} + \ldots + \frac{\prod_{r=1}^{n-2\frac{n-2}{2}} (\lambda_{r,m} - \lambda_{n,m})}{[(n-2\frac{n-2}{2}+2)!]^m} \theta^4 + \tag{7}$$

$$\left. + \frac{\prod_{r=1}^{n-2\frac{n}{2}} (\lambda_{r,m} - \lambda_{n,m})}{[(n-2\frac{n}{2}+2)!]^m} \theta^2 + 1 \right\} a_0 ,$$

între coeficienţii polinomului $P_{n,m}$ avînd loc următoarea relaţie:

$$a_{n-k+2,m} = \frac{\lambda_{n-k,m} - \lambda_{n,m}}{(n-k+2)^m (n-k+1)^m} a_{n-k,m} .$$

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedrele de matematici I şi II,
Catedra de statica construcţiilor
şi
Catedra de mecanică teoretică

BIBLIOGRAFIE

1. Favard J., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **XI (XV)**, *1—2*, pp. 17—20.
2. Камытов Т., Тр. по матем. физ. имех., фрунз. политехн. ин-т, 1965, *21*, стр. 81—89.
3. Salvadori M., Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1936, s. *2*, **V**, pp. 51—72.
4. Stampacchia G., Giorn. di Mat., 1948—49, s. *4*, **78**, pp. 81—96.
5. Березанский Ю. М., ДАН СССР, 1958, *122*, *6*, стр. 959—962.
6. Manaresi F., Rend. Sem. Mat Univ. Padova, 1954, **XXIII**, pp. 163—213.
7. Rosenblatt A., C. r. Acad. Sci., Paris, 1933, **197**, pp. 1278—1280.
8. Mangeron D., Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Cl. sci. fis., mat. e nat., 1932, s. *6*, **XVI**, *7—8*, pp. 305—310.
9. — C. r. Acad. Sci., Paris, 1937, **204**, pp. 94—96, 544—546, 1022—1024.
10. — Bull. Inst. Polyt. Jassy, 1948, **3**, *1*, pp. 153—155.
11. — Mathematica (Cluj), 1938, **14**, pp. 31—35.
12. Picone M., Ann. Sci. Univ. Jassy, *I*-e section (Math., Phys., Chimie), 1940, **26**, *1*, pp. 183—232.
13. Mangeron D., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1958, **IV (VIII)**, *3—4*, pp. 73—74.

POLYVIBRATING EQUATIONS SOLUTIONS APPLIED IN THE DYNAMICS OF MECHANISMS AND MACHINES (I)

(Summary)

The authors, starting from a set of results concerned with polyvibrating equations, called „Mangerons equations" [1], [2], first introduced by this author [8].. [10], and subsequently considered by various other scientists [3]...[7], [12], present in this paper a class of new functions (5)...(7), related with polyvibrating equations (3), (4), in view of subsequent applications to the Dynamics of Machines and Mechanisms.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

D. C. 531 ; 621.01

LINEAR ENVELOPING CURVES BELONGING TO PLANE MECHANISMS WITH MORE MOTIVE ELEMENTS EQUATIONS FORMATION ALGORITHM USING THE TANGENTIAL METHOD AND APPLICATIONS (I)

BY

GH. MUNTEANU, N. ORLANDEA, AMEDEU ORĂNESCU, ELENA ORĂNESCU, GH. DELIU, I. GOIA and BARBU BĂLAN

1. The tangential method by studying mechanisms and machines, first introduced by D. Mangeron [1] and subsequently but independently considered by J. L. Gueronimus and his pupil L. Borisenko [2], was successfully developed parallely with the reduced accelerations of any order method as well as with the matrix-tensor method by D. Mangeron and his pupils [3] .., [10], and consequently applied in the Machine Dynamics by other scientists [11] ... [16].

In what follows we expose the formation algorithm of the equations in punctual and tangential co-ordinates of linear enveloping curves belonging to plane mechanisms with more motive elements and mention the J. J. Artobolevski's research work in this domain in punctual co-ordinates [17], [18].

2. Let us consider a desmodromic plane mechanism (M) with k degree of freedom. The known parameters $q_i(t), (i = 1, 2, \ldots, k)$, functions of time, which determine position of it, are the generalized co-ordinates. Let the straight line (D) and the frame $x_n A_n y_n$ be invariably connected to the element I_n of (M). The equation of (D) in the frame $x_n A_n y_n$, according to the Fig. 1, is given by

$$y_n = x_n \operatorname{tg} \gamma + d. \tag{1}$$

Let $x_{A_n} = x_{A_n}(q_1, q_2, \ldots, q_k)$, $y_{A_n} = y_{A_n}(q_1, q_2, \ldots, q_k)$ and $\varphi_n = \psi_n - 3\pi/2 = \varphi_n(q_1, q_2, \ldots, q_k)$ be the three functions which determine the position of I_n in the fixed frame xOy (Fig. 1). One obtains

$$(2)\qquad \begin{aligned} x_n &= (x - x_{A_n})\sin\varphi_n - (y - y_{A_n})\cos\varphi_n, \\ y_n &= (x - x_{A_n})\cos\varphi_n - (y - y_{A_n})\sin\varphi_n. \end{aligned}$$

The equation of (D) in the fixed frame is given by

$$(3)\qquad (x - x_{A_n})M - (y - y_{A_n})N + d = 0,$$

where

$$(4)\qquad M = \sin\varphi_n \operatorname{tg}\gamma - \cos\varphi_n \quad \text{and} \quad N = \cos\varphi_n \operatorname{tg}\gamma + \sin\varphi_n.$$

The punctual co-ordinates of the linear by the straight line (D) enveloping curve are

$$(5)\qquad \begin{cases} x = x_{A_n} + \left(N\dfrac{Mv_{x_{A_n}} - Nv_{y_{A_n}}}{\omega_n} + Md\right)\cos^2\gamma, \\ y = y_{A_n} + \left(N\dfrac{Mv_{x_{A_n}} - Nv_{y_{A_n}}}{\omega_n} - Nd\right)\cos^2\gamma, \end{cases}$$

where the velocity components of the point A_n on Ox and Oy and the angular speed ω_n of I_n are given by

$$(6)\qquad v_{x_{A_n}} = \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial x_{A_n}}{\partial q_j}\dot{q}_j, \quad v_{y_{A_n}} = \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial y_{A_n}}{\partial q_j}\dot{q}_j, \quad \omega_n = \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\varphi_n}{\partial q_j}\dot{q}_j.$$

3. By working out the tangential equations of the curve (5), let

$$(7)\qquad u\,x + v\,y + 1 = 0$$

be a new form of equation (3), where $u = M/P$, $v = -N/P$ and $P = Ny_{A_n} - Mx_{A_n} + d$.

The parametrical equations of the requested linear enveloping curve (5) in tangential co-ordinates are

$$(8)\qquad \begin{cases} u = -\dfrac{\cos(\varphi_n + \gamma)}{y_{A_n}\sin(\varphi_n + \gamma) + x_{A_n}\cos(\varphi_n + \gamma) + d}, \\ x = -\dfrac{\sin(\varphi_n + \gamma)}{y_{A_n}\sin(\varphi_n + \gamma) + x_{A_n}\cos(\varphi_n + \gamma) + d}. \end{cases}$$

These equations present a very great interest in practice, because they give indications concerning the posibility of grinding with plane or simply profiled (shaped) stone — by means of some simple devices — cylindrical surfaces of any profile as well as the flanks (sides) of convolute and archimedic worms.

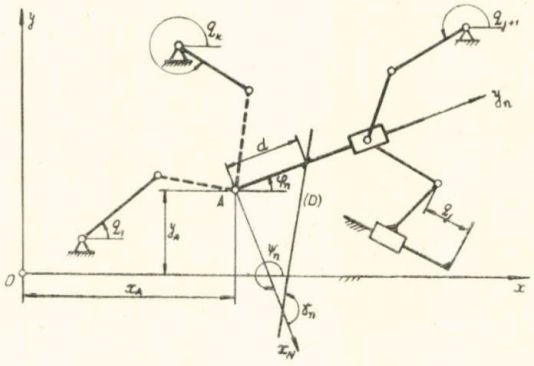


Fig. 1

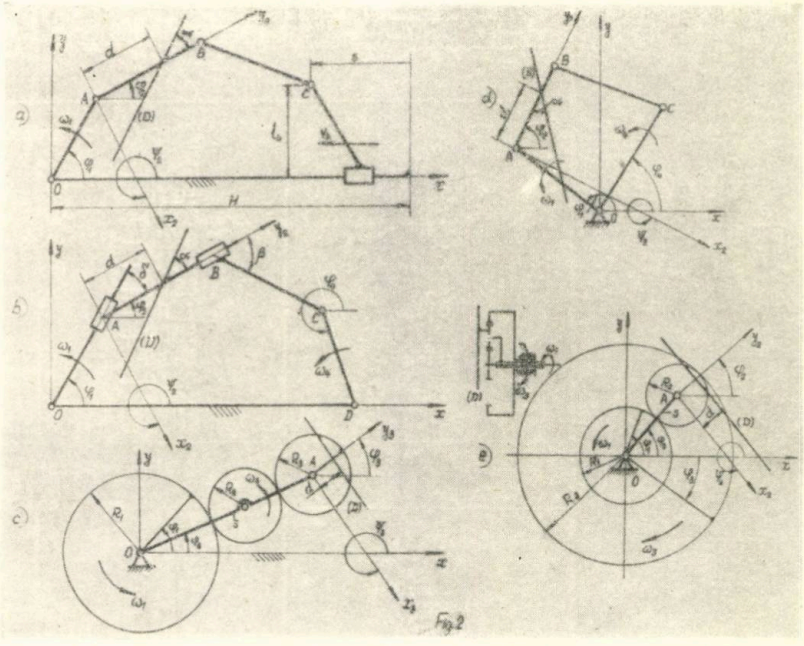


Fig. 2

4. To exemplify, let us derive the requested tangential equations concerned with mechanisms with two degree of mobility (Fig. 2*a*, 2*b*, 2*c*, 2*d*, 2*e*,). One obtains respectively

$$(9)\qquad \begin{cases} u = -\dfrac{\sin(\varphi_2+\alpha)}{l_1\sin[\alpha+(\varphi_2-\varphi_1)]+d\sin\alpha}, \\ v = \dfrac{\cos(\varphi_2+\alpha)}{l_1\cos[\alpha+(\varphi_2-\varphi_1)]+d\sin\alpha}, \end{cases}$$

where $\varphi_1[\varphi_1(t), s(t)]$ is given by the relation

$$(10)\qquad \varphi_2 = \arccos\frac{(H-s)-l_1\cos\varphi_1}{\sqrt{l_1^2+l_4^2+(H-s)-2l_1[l_4\sin\varphi_1+(H-s)\cos\varphi_1]}} + \\ + \arccos\frac{l_2^2+l_1^2+l_4^2+(H-s)^2-l_3^2-2l_1[l_4\sin\varphi_1+(H-s)\cos\varphi_1]}{2l_2\sqrt{l_1^2+l_4^2+(H-s)^2-2l_1[l_4\sin\varphi_1+(H-s)\cos\varphi_1]}}$$

and $l_1 = OA$, $l_2 = AB$, $l_3 = BC$ (Fig. 2*a*);

$$(11)\qquad u = -\frac{\sin[\varphi_1+(\alpha-\delta)]}{l_1\sin(\alpha-\delta)+d\sin\alpha}, \qquad v = \frac{\cos[\varphi_1+(\alpha-\delta)]}{l_1\sin(\alpha-\delta)+d\sin\alpha},$$

where $q_1 = \varphi_1(t)$, $q_2 = \varphi_4(t)$,

$$(12)\qquad l_1 = \frac{l_4\sin[(\varphi_4-\varphi_1)+\delta]+l_5\sin(\varphi_1-\delta)-l_3\sin\beta}{\sin\delta}$$

and $l_3 = BC$, $l_4 = CD$, $l_5 = OD$ (Fig. 2*b*);

$$(13)\qquad \begin{cases} u = -\dfrac{\cos\{[\varphi_s(i_{13}^s-1)+\varphi_1]/i_{13}^s\}}{(R_1+2R_2+R_3)\cos[i_{13}^s(\varphi_1+\varphi_s)]+d}, \\ v = -\dfrac{\sin\{[\varphi_s(i_{13}^s-1)+\varphi_1]/i_{13}^s\}}{(R_1+2R_2+R_3)\cos[i_{13}^s\varphi_1+\varphi_s)]+d}, \end{cases}$$

where $q_1 = \varphi_1(t)$, $q_2 = \varphi_s(t)$,

$$(14)\qquad \varphi_s = \frac{\varphi_1+\varphi_s(i_{13}^s-1)}{i_{13}^s}$$

and $R_3/R_1 = i_{13}^s$ (Fig. 2*c*);

$$(15)\qquad u = -\frac{\sin(\varphi_2+\alpha)}{l_1\sin[(\varphi_1-\varphi_2)-\alpha]+d\sin\alpha}, \qquad v = \frac{\cos(\varphi_2+\alpha)}{l_1\sin[(\varphi_1-\varphi_2)-\alpha]+\sin\alpha},$$

where $q_1 = \varphi_1(t)$, $\varphi_2 = \varphi_4(t)$,

$$\varphi_2 = \arccos \frac{l_1^2 - l_2^2 - l_1^2 - l_4^2 + 2 l_1 l_4 \cos(\varphi_1 - \varphi_4)}{2 l_2 \sqrt{l_1^2 + l_4^2 - 2 l_1 l_4 \cos(\varphi_1 - \varphi_4)}} + \tag{16}$$

$$+ \arccos \frac{l_4 \cos \varphi_4 - l_1 \cos \varphi_1}{\sqrt{l_1^2 + l_4^2 - 2 l_1 l_4 \cos(\varphi_1 - \varphi_4)}}$$

and $l_1 = OA$, $l_2 = AB$, $l_3 = BC$, $l_4 = CO$ (Fig. 2*d*) and so on.

5. One obtains more sophistical results in the same domain concernig the five-bars mechanisms considered by R. Bogdan in his Thesis accepted for higher degree by using the complex harmonic analysis method and his mechanical-electronic method [19], [20].

Polytechnical Institutes of Braşov, Cluj and Galaţi

Received the 26 X 1965

REFERENCES

1. Mangeron D., *Study of mechanisms by means of projective co-ordinates.* Sesiunea ştiinţifică jubiliară a Institutului de Mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei R.P.R, Bucureşti, 4—7 iulie 1960, pp. 371—372.
2. Gueronimus Ia. L., Borisenko L., Trudy Sem. TMM, 1962.
3. Манжерон Д., ДАН СССР, 1955, **102**, *5*, стр. 797—798; 1957, **112**, *1*, стр. 27—28.
4. — Rev. Roum. Sci. Tech., Sér. Méc. appl., 1963, **8**. *1*, pp. 5—17.
5. — *Eine neue Methode zum Studium der Getriebe und Antriebe.* II. Czechoslovak Conference Dynamics of Machines, Abstracts of papers, Smolenice, October 1961, pp. 57—59.
6. Mangeron D., Chaléat R., Drăgan C., Rev. Roum. Sci. Techn., Méc. appl., 1965, **10**, *5*, pp. 1187—1233.
7. Uicker John Jr., *Velocity and Acceleration Analysis of Spacial Mechanisms using 4×4 Matrices.* Northwestern University, Evanston, Illinois, 1963.
8. Mangeron D., Drăgan C., Izv. na matem. Inst., Sofia, BAN, 1960, **4**, *2*, pp. 57—65.
9. Mangeron D., Kozhevnikov S. N,, Bul. Inst. polit. Iaşi, 1964, **X (XIV)**, *1—2*, pp. 243—254.
10. Mangeron D., Ciobanu Gh., Braier A., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1965, **II (VI)**, *1—2*, pp. 29—39.
11. Pelecudi Chr., Rev. Roum. Sci. Techn., Sér. Méc. appl., 1965, **10**, *2*, pp. 379—419.
12. Chace M. E., ASME Publ., 64—Mech—*23*, 8 p.
13. Litvin F. L., *New methods in gear-wheel theory.* Conference de Mécanique, Academy Romania Socialist Republic, Résumés des travaux, Bucarest, 1965, pp. 95—99.
14. Beggs J. S., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1960, **VI (V)**, *3—4*, pp. 315—322.
15. Зильберман Я. С., Тр. Р /на/ Дону ИИЖТ, 1961, *21*, стр. 11—95.
16. Чжан Цы-Сянь, ТММ, АН СССР, 1962, *92—93*, стр. 17—27.
17. Артоболевкий И. И., ДАН СССР, 1961, *2*.
18. Боголюбов И. Н., *История механики машин.*, Наукова Думка, Киев, 1964.
19. Bogdan R., Rev. Roum. Sci. Techn. Sér. Méc. appl., 1964, **9**, *4*, pp. 851—868.
20. Mangeron D., Bogdan R., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1958, **IV (VIII)**, *1—2*, pp. 471—478.

ALGORITMUL DE FORMARE A CURBELOR DE INFĂŞURARE LINIARĂ APARŢINÎND MECANISMELOR PLANE COMPLEXE FOLOSIND METODA TANGENŢIALĂ ŞI APLICAŢII (I)

(Rezumat)

Autorii, luînd ca punct de plecare lucrările [1] şi următoarele datorite prof. Mangeron şi consacrate elaborării unor noi metode de studiu a mecanismelor, printre care şi *metoda tangenţială*, stabilesc rezultatele enunţate în titlul lucrării.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

Д. К. 531

ОБ ЭФФЕКТИВНОМ РЕЖИМЕ ТОРМОЖЕНИЯ

В. И. АРАБАДЖИ

Впервые Н. П. Петров [1] установил, что наиболее быстрое торможение локомотивов осуществляется в переходном режиме трения от качения к скольжению. Насколько нам известно, физический механизм режима выяснен не был.

На наш взгляд, процесс торможения в этом случае осуществляется следующим образом. В момент, когда прекратилось качение и еще не началось горизонтальное скольжение, колесо локомотива будет находиться в небольшом углублении на рельсе, образовавшемся под действием силы тяжести. Для осуществления горизонтального скольжения колесо должно быть вынесено из этого углубления. При этом, в процессе выноса, оно некоторое время будет скользить вверх по небольшому вогнутому наклону. В результате потери энергии вертикальная скорость колеса уменьшится, и оно снова опустится вниз. Процесс этот повторяется многократно, пока энергия движения не иссякнет.

При скольжении колеса локомотива из углубления вверх по наклону трение будет значительно больше, чем при установившемся горизонтальном качении или скольжении, что и обеспечивает высокую эффективность этого режима торможения.

Для получения величины коэффициента трения при скольжении колеса вверх по вогнутому профилю углубления запишем закон сохранения энергии в форме

$$\frac{mv^2}{2} = \left[\mu mg\left(\cos\Theta + \frac{v^2}{rg}\right) \pm mg\sin\Theta\right] S, \tag{1}$$

где μ — коэффициент трения скольжения, $mg\cos\Theta$ — нормальное давление, $mg\sin\Theta$ — составляющая силы тяжести вдоль наклонной плоскости (отрицательный знак соответствует движению вниз по наклону, положительный — движению вверх), mv^2/r — центробежная сила, Θ

— угол наклона плоскости к горизонту и S — путь, проходимый телом массы m по наклону.

Ограничиваясь малыми Θ, из уравнения (1) получим

$$S = \frac{v^2}{2g\{\mu[1+v^2/(rg)]\pm\Theta\}}. \tag{2}$$

В соответствии с уравнением (2) для коэффициента трения, который будет действовать при выносе колеса вверх из углубления, будем иметь

$$\mu^* = \mu\left(1+\frac{v^2}{rg}\right). \tag{3}$$

Ввиду того, что радиус углубления приблизительно совпадает с радиусом колеса, формула (3) в основном дает зависимость коэффициента трения только от скорости движения.

Движение колеса, состоящее из ряда последовательных подъемов из углубления и спусков в него, требует более значительной затраты энергии, чем установившееся горизонтальное качение или скольжение. Поэтому торможение в этом режиме движения осуществляется наиболее эффективно.

Поступила 31 III 1965 г.

Педагогический институт, Тула, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Костомаров В. М., Бургвиц А. Г., *Основоположник теории гидродинамического трения в машинах Н. П. Петров.* Энергоиздат, М., 1952.

ASUPRA REGIMULUI EFECTIV DE FRÎNARE

(Rezumat)

Se explică particularităţile mecanismului de frînare a roţilor de locomotivă, semnalate pentru prima dată de N. P. Petrov [1].

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 531; 531.231

DETERMINĂRI GRAFICE DE MOMENTE DE INERŢIE MECANICE LA CORPURI OMOGENE CILINDRICE DREPTE, CU SECŢIUNI TRANSVERSALE OARECARI

DE

N. IRIMICIUC, SPIRIDON DELEANU şi ELISABETA RUSU

1. Tratarea momentelor de inerţie geometrice în cadrul cursurilor de Mecanică teoretică se explică, după cum se ştie, numai prin faptul că toate relaţiile legate de definirea şi calculul acestor momente de inerţie, care interesează de fapt disciplina de Rezistenţa materialelor, pot fi obţinute, în cazul corpurilor omogene, prin particularizarea relaţiilor corespunzătoare, stabilite pentru momentele de inerţie mecanice. Disciplina de Rezistenţa materialelor preluînd aceste relaţii şi perfecţionînd metodele practico–inginereşti de determinare a momentelor de inerţie geometrice, a dezvoltat îndeosebi metoda grafică, ajungîndu-se astfel la cunoscutele procedee grafice de determinare a momentelor de inerţie geometrice axiale şi centrifugale, a direcţiilor axelor principale de inerţie relative la un pol dat, precum şi a momentelor principale de inerţie.

În cele ce urmează se va arăta că aceste procedee, proprii disciplinei de Rezistenţa materialelor, pot fi folosite şi la determinarea momentelor de inerţie mecanice, a direcţiilor axelor elipsoidului de inerţie, precum şi la determinarea momentelor principale de inerţie mecanice, la corpuri omogene prismatice şi cilindrice drepte, cu secţiuni transversale oarecari.

2. Fie deci solidul S (fig. 1), omogen, avînd forma unui cilindru drept, de secţiune oarecare, $\sum$. Existînd un plan de simetrie materială, — planul II, normal la direcţia comună a generatoarelor şi trecînd prin mijlocul lor — , conform proprietăţii cunoscute, elipsoidul de inerţie corespunzător oricărui pol din acest plan va fi şi el de simetrie. De asemenea, alegînd acest plan ca plan de coordonate $Q x_1' x_2'$, cu originea într-un punct arbitrar Q din acest plan, va rezulta, datorită aceloraşi condiţii de simetrie materială, egalitatea cu zero a momentelor de inerţie centrifugale

$$\mathcal{J}'_{13} = \mathcal{J}'_{23} = 0 . \tag{1}$$

În consecinţă, determinarea grafică a momentelor de inerţie se va reduce numai la determinarea momentelor de inerţie axiale $\mathcal{J}'_{11}$, $\mathcal{J}'_{22}$ şi $\mathcal{J}'_{33}$, precum şi a momentului de inerţie centrifugal $\mathcal{J}'_{12}$.

Alegînd, mai întîi, elementul de volum din corp sub forma unei prisme elementare, cu muchiile paralele la generatoarele cilindrului (fig. 2) şi cu aria bazei egală cu $\mathrm{d}A$, se poate scrie pentru masa elementară expresia:

$$\mathrm{d}m = \varrho\,\mathrm{d}V = \frac{M}{V}\mathrm{d}V = \frac{M}{Ab}\mathrm{d}Ab = \frac{M}{A}\mathrm{d}A\,.$$

În consecinţă, expresiile momentelor de inerţie axiale $\mathcal{J}'_{11}$, $\mathcal{J}'_{22}$ şi $\mathcal{J}'_{33}$ vor putea fi scrise sub formele:

$$\mathcal{J}'_{11} = \int_M (x'^2_2 + x'^2_3)\,\mathrm{d}m = \frac{M}{A}\int_A x'^2_2\,\mathrm{d}A + \int_M x'^2_3\,\mathrm{d}m = \frac{M}{A}I'_{11} + \mathcal{J}'_{\pi_3}\,, \tag{2}$$

$$\mathcal{J}'_{22} = \int_M (x'^2_1 + x'^2_3)\,\mathrm{d}m = \frac{M}{A}\int_A x'^2_1\,\mathrm{d}A + \int_M x'^2_3\,\mathrm{d}m = \frac{M}{A}I'_{22} + \mathcal{J}'_{\pi_3}\,, \tag{3}$$

$$\mathcal{J}'_{33} = \int_M (x'^2_1 + x'^2_2)\,\mathrm{d}m = \frac{M}{A}\int_A (x'^2_1 + x'^2_2)\,\mathrm{d}A = \frac{M}{A}I'_Q = \frac{M}{A}(I'_{11} + I'_{22}), \tag{4}$$

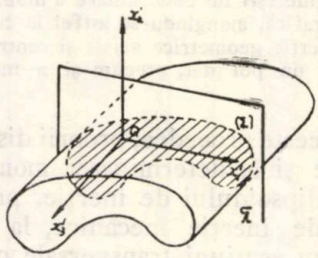


Fig. 1

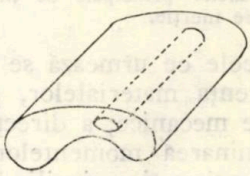


Fig. 2

unde prin I'_{11}, I'_{22} şi I'_Q au fost notate momentele de inerţie geometrice, axiale şi polar, ale ariei A de secţiune a cilindrului cu planul de simetrie, — momente ce vor putea fi determinate prin procedeele grafice cunoscute —, iar prin $\mathcal{J}'_{\pi_3}$, a fost notat momentul de inerţie al solidului faţă de planul de simetrie

$$\mathcal{J}'_{\pi_3} = \int_M x'^2_3\,\mathrm{d}m\,, \tag{5}$$

care moment, considerînd acum elementul de volum sub forma unei fîșii paralelă cu corpul (fig. 3) de arie A, egală cu aria bazei corpului și de grosime dx'_3, va avea valoarea

$$\mathcal{J}'_{x_3} = \frac{M}{Ab}\int_{-b/2}^{b/2} x_3'^2 A\,dx'_3 = \frac{M}{b}\int_{-b/2}^{b/2} x_3'^2\,dx'_3 = \frac{1}{12}\frac{M}{A}Ab^2. \tag{6}$$

De asemenea, considerînd iarăși elementul de volum ca la determinarea momentelor de inerție axiale ($dV = b\,dA$), rezultă și pentru momentul de inerție centrifugal, $\mathcal{J}'_{12}$, expresia

$$\mathcal{J}'_{12} = -\int_M x'_1 x'_2\,dm = -\frac{M}{A}\int_A x'_1 x'_2\,dA = \frac{M}{A}I'_{12}, \tag{7}$$

I'_{12} fiind, după cum se vede, momentul de inerție centrifugal geometric al secțiunii corpului cu planul de simetrie și care poate fi determinat grafic, așa cum se știe, cu ajutorul momentelor de inerție față de trei axe coplanare, două perpendiculare între ele și a treia după bisectoarea unghiului format de ele.

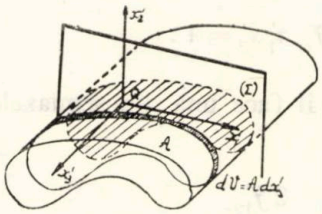


Fig. 3

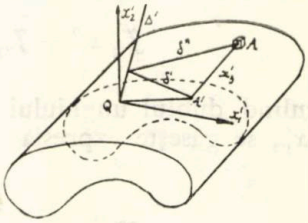


Fig. 4

După cum se vede, relațiile stabilite mai sus arată că determinarea pe cale grafică a momentelor de inerție mecanice ale corpurilor cilindrice drepte, și deci și prismatice, se reduce în ultimă instanță la determinarea pe cale grafică a unor momente de inerție geometrice axiale ale unor secțiuni transversale, oarecari, ale corpurilor:

$$\mathcal{J}'_{11} = \frac{M}{A}\left(I'_{11} + \frac{Ab^2}{12}\right), \tag{8}$$

$$\mathcal{J}'_{22} = \frac{M}{A}\left(I'_{22} + \frac{Ab^2}{12}\right), \tag{9}$$

$$\mathcal{J}'_{33} = \frac{M}{A}(I'_{11} + I'_{22}), \tag{10}$$

$$\mathcal{J}'_{12} = \frac{M}{A} I'_{12}. \tag{11}$$

3. Procedeele prafice de determinare a direcţiilor axelor de inerţie, (cercul lui Mohr, cercul lui Land) permit şi determinarea axelor principale de inerţie mecanice corespunzătoare unui pol oarecare din planul de simetrie, pentru corpurile considerate mai sus.

În adevăr, datorită simetriei materiale faţă de planul $Q x'_1 x'_2$, una din axele principale de inerţie corespunzătoare unui pol oarecare din planul de simetrie va fi chiar paralela la axa $Q x'_3$, – sau chiar această axă dacă polul considerat este originea Q —, elipsoidul de inerţie fiind şi el simetric în raport cu planul de simetrie materială.

Intersecţia cu planul de simetrie a elipsoidului de inerţie al corpului, corespunzător unui pol din planul de simetrie, va fi deci o elipsă, a cărei ecuaţie va fi obţinută făcînd $x'_3 = 0$ în ecuaţia elipsoidului de inerţie $\mathcal{J}'_{ij} x'_i x'_j = 1$, $(i, j = 1, 2, 3)$, ceea ce dă

$$\mathcal{J}'_{11} x'^2_1 + \mathcal{J}'_{22} x'^2_2 + 2\mathcal{J}'_{12} x'_1 x'_2 = 1. \tag{12}$$

Calculînd dublul unghiului pe care îl face una din semiaxele elipsei cu axa Qx'_1, se găseşte expresia

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{2\mathcal{J}'_{12}}{\mathcal{J}'_{11} - \mathcal{J}'_{22}},$$

sau încă, ţinînd seama de relaţiile (8), (9) şi (11), mai rezultă, după simplificări şi reduceri, expresia

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{2I'_{12}}{I'_{22} - I'_{11}} = \operatorname{tg} 2\theta_0, \tag{13}$$

adică, axele principale de inerţie mecanice situate în planul de simetrie, au aceeaşi orientare ca şi axele principale de inerţie geometrice, corespunzătoare aceluiaşi pol, ale ariei secţiunii corpului cu planul de simetrie.

Prin urmare, construcţiile cunoscute ale cercurilor lui Mohr sau Land pentru momentele de inerţie geometrice, vor da şi direcţiile axelor principale de inerţie mecanice, pentru categoria de corpuri geometrice considerate.

În fine, este ușor de verificat că aceleași construcții geometrice ale cercurilor Mohr sau Land vor permite să se determine și valorile extreme ale momentelor de inerție mecanice $\mathcal{J}'_1$ și $\mathcal{J}'_2$.

În adevăr, considerînd o axă Δ', trecînd prin originea Q a axelor de coordonate, avînd planul $Q x'_1 x'_2$ coincizînd cu planul de simetrie materială a corpului (fig. 4), atunci momentul de inerție mecanică față de această axă al corpului va avea expresia

$$\mathcal{J}'_\Delta = \int_M \delta^{*2}\,dm = \int_M \delta'^2\,dm + \int_M x'^2_3\,dm. \tag{14}$$

Pentru prima integrală din membrul drept, luînd iarăși elementul de volum ca la determinarea momentelor de inerție $\mathcal{J}'_{11}$ și $\mathcal{J}'_{22}$, rezultă expresia

$$\int_M \delta'^2\,dm = \frac{M}{A}\int_A \delta'^2\,dA = \frac{M}{A} I'_\Delta. \tag{15}$$

În baza relațiilor (15) și (6), — ultima dînd valoarea celei de a doua integrale din membrul drept al relației (14) —, expresia momentului de inerție $\mathcal{J}'_\Delta$ capătă forma

$$\mathcal{J}'_\Delta = \frac{M}{A}\left(I'_\Delta + \frac{Ab^2}{12}\right). \tag{16}$$

În consecință, momentele de inerție principale mecanice vor fi determinate, în funcție de momentele de inerție principale geometrice ale secțiunii din planul de simetrie, prin relațiile

$$\mathcal{J}'_1 = \frac{M}{A}\left(I'_1 + \frac{Ab^2}{12}\right), \tag{17}$$

$$\mathcal{J}'_2 = \frac{M}{A}\left(I'_2 + \frac{Ab^2}{12}\right). \tag{18}$$

4. Este ușor de înțeles, pe baza celor arătate mai sus, că procedeele grafice corespunzătoare momentelor de inerție geometrice vor putea fi folosite și în cazul corpurilor omogene mai complexe, rezultînd însă din compunerea unui număr de porțiuni simple, cilindrice sau prismatice drepte, cu generatoarele, respectiv muchiile, paralele între ele, aceasta fiind situația întîlnită în cazul celor mai multe dintre elementele mecanismelor plane.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de mecanică teoretică

CONSTRUCTION GRAPHIQUE DES MOMENTS D'INERTIE MÉCANIQUES DES CORPS HOMOGÈNES CYLINDRIQUES DROITS AYANT DES SECTIONS TRANSVERSALES ARBITRAIRES

(Résumé)

On montre que les procédés de la Résitance des Matériaux peuvent être utilisés pour déterminer par voie graphique les moments d'inertie mécanique, les directions des axes principaux d'inertie, de même que les moments principaux mécaniques des corps homogènes cylindriques droits, ayant des sections transversales de forme arbitraire.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

Ç. Z. 532.5

O METODĂ GRAFICĂ PENTRU DETERMINAREA COEFICIENTULUI DE DEBIT AL DEVERSOARELOR DE MĂSURĂ

DE

C. CIOBANU şi M. RĂDULESCU

1. Introducere

Pentru determinarea debitului deversoarelor se foloseşte relaţia cunoscută

$$Q = \frac{2}{3}\,\mu\, b\sqrt{2g}\,H^{3/2} = mb\sqrt{2g}\,H^{3/2}, \tag{1}$$

valabilă pentru toate tipurile de deversoare, modificîndu-se numai coeficientul m, sau înmulţindu-l cu alt coeficient.

Practic, uneori se admite $m = \text{const.}$, ceeace este cu totul greşit, dată fiind dependenţa lui m de sarcina H[1]), precum şi de anumite mărimi geometrice, caracteristice tipului de deversor.

În cazul deversoarelor de măsură, dreptunghiular (B a z i n) cu sau fără contracţie laterală şi triunghiular (T h o m s o n), pentru determinarea riguroasă a coeficientului m literatura de specialitate recomandă mai multe formule. Dintre acestea, cele mai des utilizate sînt cele de mai jos.

1. *Deversoare dreptunghiulare, fără contracţie laterală ($b=B$)*

a. B a z i n (1888) :

$$m = \left(0{,}405 + \frac{0{,}003}{H}\right)\left[1 + 0{,}55\left(\frac{H}{H+P}\right)^2\right], \tag{2}$$

valabilă în condiţiile:

$$0{,}2 < b < 2\,\text{m}, \quad 0{,}1 < H < 0{,}6\,\text{m}, \quad 0{,}2 < p < 2\,\text{m};$$

(abateri faţă de debitul măsurat—intervin la H şi p mici).

b. F r è z e (1890) :

$$m = \left(0{,}41 + \frac{1{,}4}{1000\,H}\right)\left[1 + 0{,}55\left(\frac{H}{H+p}\right)^2\right], \tag{3}$$

pentru $0{,}1 < H < 0{,}6$ m, $b > H$.

---

1) H se măsoară la distanţa de $3h \ldots 6h$, în amonte de creasta deversorului, h fiind sarcina din dreptul crestei.

c. S I A (Asociaţia inginerilor şi arhitecţilor elveţieni—1924):

$$m = 0{,}41\left(1 + \frac{1}{1000\,H + 1{,}6}\right)\left[1 + 0{,}5\left(\frac{H}{H+p}\right)^2\right], \tag{4}$$

pentru $p \geqslant 0{,}3$ m, $0{,}025 < H < 0{,}8$ m, $H/p \leqslant 1$.

d. Th. R e h b o c k (1929):

$$m = \frac{2}{3}\left(0{,}605 + \frac{0{,}001}{H} + 0{,}08\,\frac{H}{p}\right), \tag{5}$$

pentru $0{,}02 < H < 0{,}8$ m, şi a doua formulă — stabilită mai tîrziu:

$$m = \frac{2}{3}\left(0{,}605 + \frac{1}{1000\,H + 1{,}1} + 0{,}08\,\frac{H}{p}\right). \tag{5'}$$

e. S. B. M. (Société belge des Mécaniciens — 1942):

$$m = 0{,}4106\left(1 + \frac{1{,}8}{1000\,H}\right)\left[1 + 0{,}55\left(\frac{H}{H+p}\right)^2\right], \tag{6}$$

pentru $b > 0{,}5$ m, $0{,}1 < H < 0{,}8$ m, $H \leqslant p \geqslant 0{,}3$ m.

2. *Deversoare dreptunghiulare cu contracţie laterală* ($b < B$)

a. H è g l y (1921):

$$m = \left(0{,}405 - 0{,}03\,\frac{B-b}{B} + \frac{0{,}0027}{H}\right)\left[1 + 0{,}55\left(\frac{b}{B}\right)^4\left(\frac{H+p}{H}\right)^2\right], \tag{7}$$

pentru $H/B > 0{,}13$.

b. S I A (1924):

$$m = \left[0{,}385 + 0{,}025\left(\frac{b}{B}\right)^2 + \frac{2{,}41 - 2\,(b/B)^2}{1000H + 1{,}6}\right]\left[1 + 0{,}5\left(\frac{b}{B}\right)^4\left(\frac{H}{H+p}\right)^2\right], \tag{8}$$

pentru $p > 0{,}3$ m, $0{,}025 < H < 0{,}8$ m, $H \leqslant p$, sau

$$m = \frac{2}{3}\left[0{,}612\,\varphi + \frac{0{,}0027}{H + 0{,}02} + \frac{0{,}0027}{b + 2H}\,2\left(1 - \frac{b}{B}\right)\right]\left[1 + 0{,}5\left(\frac{b}{B}\right)^3\left(\frac{H}{H+p}\right)^2\right], \tag{9}$$

în care $\varphi \cong 1 - [2 + 4\,(b/B)]^{-2}$ are semnificaţia unui coeficient de frecare.

3. *Deversoare triunghiulare* ($\alpha = 90°$) *după Hègly (1921):*

$$m = \left(0{,}31 + \frac{0{,}002}{H}\right)\left[1 + \left(\frac{S}{S_1}\right)^2\right], \tag{10}$$

în care $S_1 = B\,(H + p)$, $S = H^2$, adică

$$m = \left(0{,}31 + \frac{0{,}002}{H}\right)\left[1 + \left(\frac{H}{B}\right)^2\left(\frac{H}{H+p}\right)^2\right]. \tag{10'}$$

Structural, formulele citate apar sub forma unor funcţii de tipul

$$\text{(I)}\quad m=f\left(H,\frac{H}{P}\right),\quad \text{(II)}\quad m=f\left(H,\frac{H}{P},\frac{b}{B}\right),\quad \text{(III)}\quad m=f\left(H,\frac{H}{p},\frac{H}{B}\right),$$

în care, natura şi numărul parametrilor depind de tipul deversorului.

Pentru a se evita calculul laborios, necesitat de utilizarea uneia din formulele citate, se propune o metodă grafică, urmărindu-se ca precizia să fie păstrată în limitele aceleia oferite de formulele utilizate, uneori chiar ameliorată.

De îndată ce mărimile H, B, b, p, aferente tipului de deversor, devin cunoscute prin măsurare, determinarea coeficientului de debit m se face prin lectură directă: pe graficul din fig. 3 pentru deversorul dreptunghiular cu şi fără contracţie laterală, iar pe graficul din fig. 4, pentru cele triunghiulare.

Calea pe care s-a ajuns la acest grafic, precum şi modul de utilizare, sînt redate mai jos.

2. Metoda grafică de determinare a coeficientului de debit

1. *Deversoare dreptunghiulare*

S-au trasat curbele de tipul (I) din fig. 1, pentru deversorul dreptunghiular — fără contracţie laterală — după formulele (2)... (9), sonsiderînd sarcina H drept parametru ($H = 0{,}025$ m, 0,05 m, 0,1 m, 0,2 m, 0,4 m, 0,8 m).

Din fig. 1 rezultă că abaterea valorilor maxime ale lui m, faţă de cele minime, la aceeaşi sarcină — calculate după formulele menţionate — sînt : sub 1 % pentru $0{,}025 < H < 0{,}1$ m şi $0{,}3 < H < 0{,}8$ m; sub 2 % pentru $0{,}1 < H < 0{,}3$ m, cu condiţia generală $0{,}02 < H/p < 1$.

În fig. 2 sînt reprezentate curbele de tipul (I) ca valori medii, la aceeaşi sarcină H. Pe aceeaşi figură s-au trasat curbele de tipul (II), tot pentru valori medii, pentru deversorul dreptunghiular cu contracţie laterală (pentru H şi b/B variabili).

Pe baza fig. 2 s-au trasat curbele de tipul (II) din fig. 3, în condiţiile $0{,}025 < H < 0{,}8$ m, $0{,}02 < H/p < 1$, $0{,}25 < b/B < 1$, pentru $b/B = 0{,}25$, 0,375, 0,5, 0,625, 0,75, 0,875 şi 1.

Graficul obţinut permite determinarea coeficientului de debit m, prin lectură directă, pentru deversoarele de măsură cu şi fără contracţie laterală, ceea ce şi constituie însăşi metoda grafică propusă.

EXEMPLE DE UTILIZARE

a. *Pentru valori b/B certe*, notate în grafic, modul de utilizare se poate urmări direct pe fig. 3.

Exemplu. Se dau $H = 0{,}2$ m, $b/B = 1$, $H/p = 0{,}6$.

Intersecţia dreptelor $H = 0{,}2$ şi $b/B = 1$ determină pe curba $H/p = 0{,}6$ punctul M, căruia îi corespunde un coeficient de debit $m = 0{,}4446$.

b. *Pentru valori b/B intermediare*, coeficientul de debit m va fi determinat prin interpolare grafică.

Exemplu. Se dau $H = 0{,}4$ m, $b/B = 0{,}95$, $H/p = 0{,}4$.

Dreapta $b/B = 0{,}95$ este cuprinsă între dreptele $b/B = 1$ şi $b/B = 0{,}875$. Intersecţia dreptelor $H = 0{,}4$ m şi $b/B = 1$ determină pe curba $H/p = 0{,}4$ — din domeniul $b/B = 1$ — punctul A; intersecţia dreptelor $H = 0{,}4$ m şi $b/B = 0{,}875$ determinată pe curba $H/p = 0{,}4$ — din domeniul $b/B = 0{,}875$ — punctul B. Intersecţia dreptelor $H = 0{,}4$ m şi $b/B = 0{,}95$ determină pe dreapta AB punctul C, căruia îi corespunde $m_1 = 0{,}4244$, adică valoarea căutată.

Cunoscînd coeficientul de debit m_1 şi sarcina H, pe graficul din fig. 4 se citeşte direct debitul deversorului pe m l de creastă (prag).

c. *Modul de utilizare* pentru $m_1 \neq m_{gr}$.

Exemplu. $m_1 = 0{,}4244$, $H = 400$ mm, $b = 0{,}5$ m.

Din grafic pentru $m_{gr} = 0{,}4$, $H = 400$ mm, $Q_{gr} = 452$ l/s, iar pentru $m_1 = 0{,}4244$ va fi $Q_{m_1} = Q_{gr}\,(m_1/m_{gr})\,b = 239{,}8$ l/s.

2. *Deversoare triunghiulare*

Fig. 5 reprezintă metoda grafică pentru determinarea coeficientului de debit m pentru deversorul triunghiular de măsură. Graficul a fost trasat pe baza formulei lui Hègly, ca fiind cea mai indicată în condiţiile $0{,}05$ m $< H < 0{,}5$ m, $0 < H/p < 1$, $\alpha = 90°$, pentru $H/B = 0$, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4 şi 0,5.

Modul de utilizare este identic cu cel de mai sus, cu singura deosebire că în locul parametrului b/B intervine H/B. Ca şi în cazul precedent se pot ivi două situaţii: citirea directă, pentru valori certe, notate în grafic; interpolarea grafică, între valorile H/B de mai sus, la acelaşi H/p (fig. 5).

Graficul este însoţit de fig. 6 care permite determinarea directă a debitului, cunoscînd coeficientul de debit m şi sarcina H, conform relaţiei

$$Q = m\sqrt{2g}\;H^{5/2}. \tag{11}$$

Pentru $m \neq m_{gr}$ va fi $Q = Q_{gr}\,(m/m_{gr})$.

3. Studiu comparativ al influenţei abaterilor coeficientului de debit m şi sarcinii H, asupra debitului.

Corespunzător lui m şi H, relaţiile sînt

$$Q_1 = (m \pm \Delta m)\, b\sqrt{2g}\,H^{2/3}, \quad Q_2 = m\sqrt{2g}\,b\;(H \pm \Delta H)^{3/2}.$$

Deci

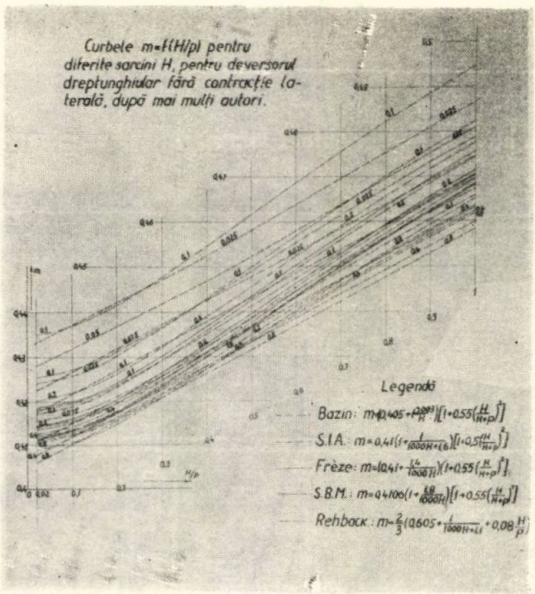

Curbele m=f(H/p) pentru diferite sarcini H, pentru deversorul dreptunghiular fără contracţie laterală, după mai mulţi autori.
Legendă
Bazin: $m=0.405+\frac{0.003}{H}\left[1+0.55\left(\frac{H}{H+p}\right)^2\right]$
S.I.A.: $m=0.41\left(1+\frac{0.0007}{H+0.6}\right)\left[1+0.5\left(\frac{H}{H+p}\right)^2\right]$
Frèze: $m=0.41+\frac{0.14}{1000H}\left[1+0.55\left(\frac{H}{H+p}\right)^2\right]$
S.B.M.: $m=0.4106\left(1+\frac{0.0018}{0.001+H}\right)\left[1+0.55\left(\frac{H}{H+p}\right)^2\right]$
Rehbock: $m=\frac{2}{3}\left(0.605+\frac{1}{1000H-1.1}+0.08\frac{H}{p}\right)$

Fig. 1

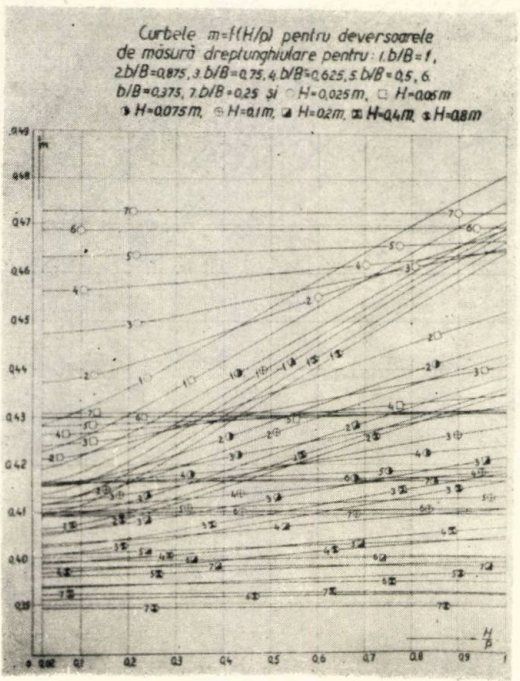

Curbele m=f(H/p) pentru deversoarele de măsură dreptunghiulare pentru: 1. b/B=1, 2. b/B=0.875, 3. b/B=0.75, 4. b/B=0.625, 5. b/B=0.5, 6. b/B=0.375, 7. b/B=0.25 şi ○ H=0.025 m, □ H=0.05 m ◑ H=0.075 m, ◎ H=0.1 m, ◪ H=0.2 m, ⊠ H=0.4 m, ⊞ H=0.8 m

Fig. 2

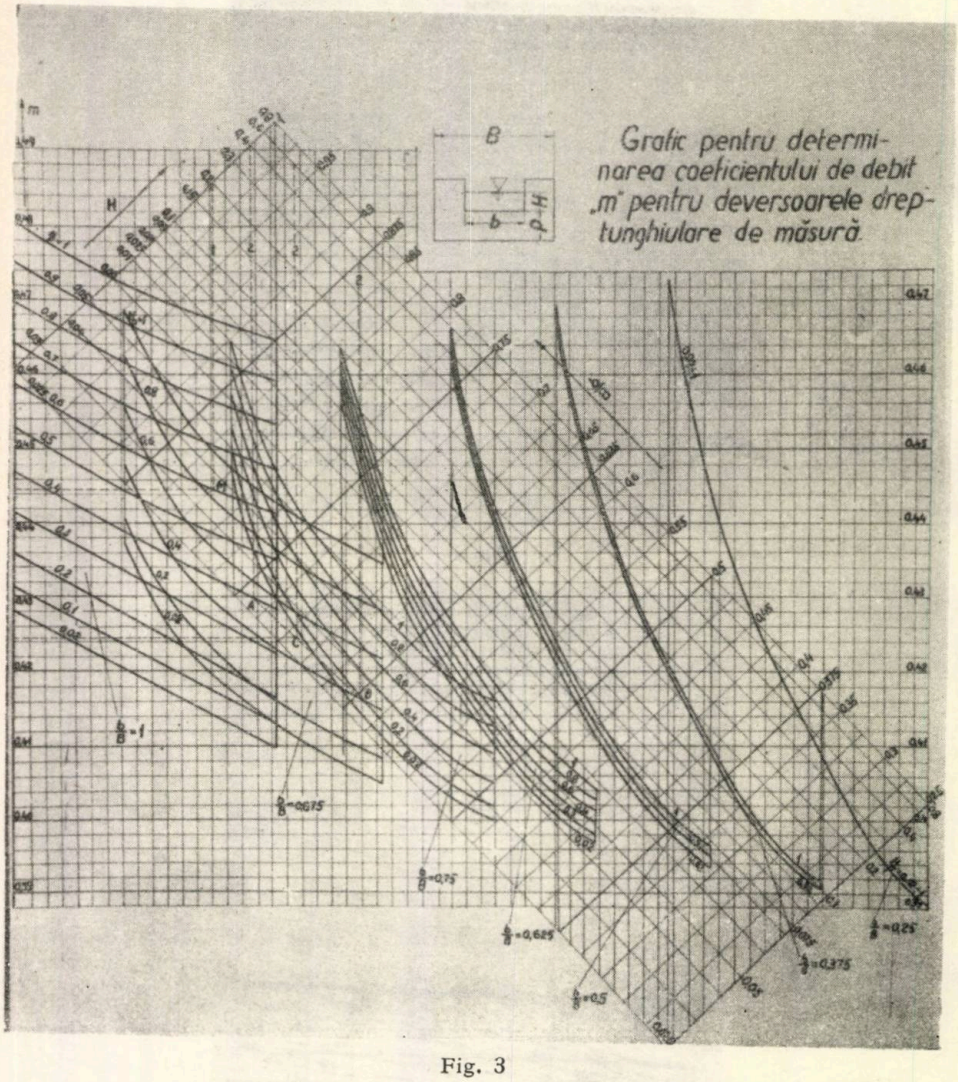

Grafic pentru determinarea coeficientului de debit „m" pentru deversoarele dreptunghiulare de măsură.
B
b
H
p
m
b/B = 1
b/B = 0,675
b/B = 0,75
b/B = 0,625
b/B = 0,5
b/B = 0,375
b/B = 0,25

Fig. 3

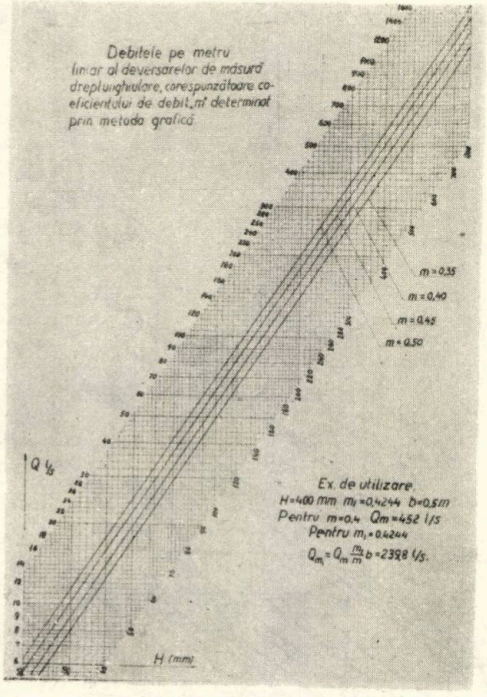

Debitele pe metru liniar al deversarelor de măsură dreptunghiulare, corespunzătoare coeficientului de debit m' determinat prin metoda grafică
m = 0,35
m = 0,40
m = 0,45
m = 0,50
Q l/s
H (mm)
Ex. de utilizare.
H=400 mm m₁=0,4244 b=0,5m
Pentru m=0,4 Qm=452 l/s
Pentru m₁=0,4244
Qm = Qm m₁/m b=239,8 l/s.

Fig. 4

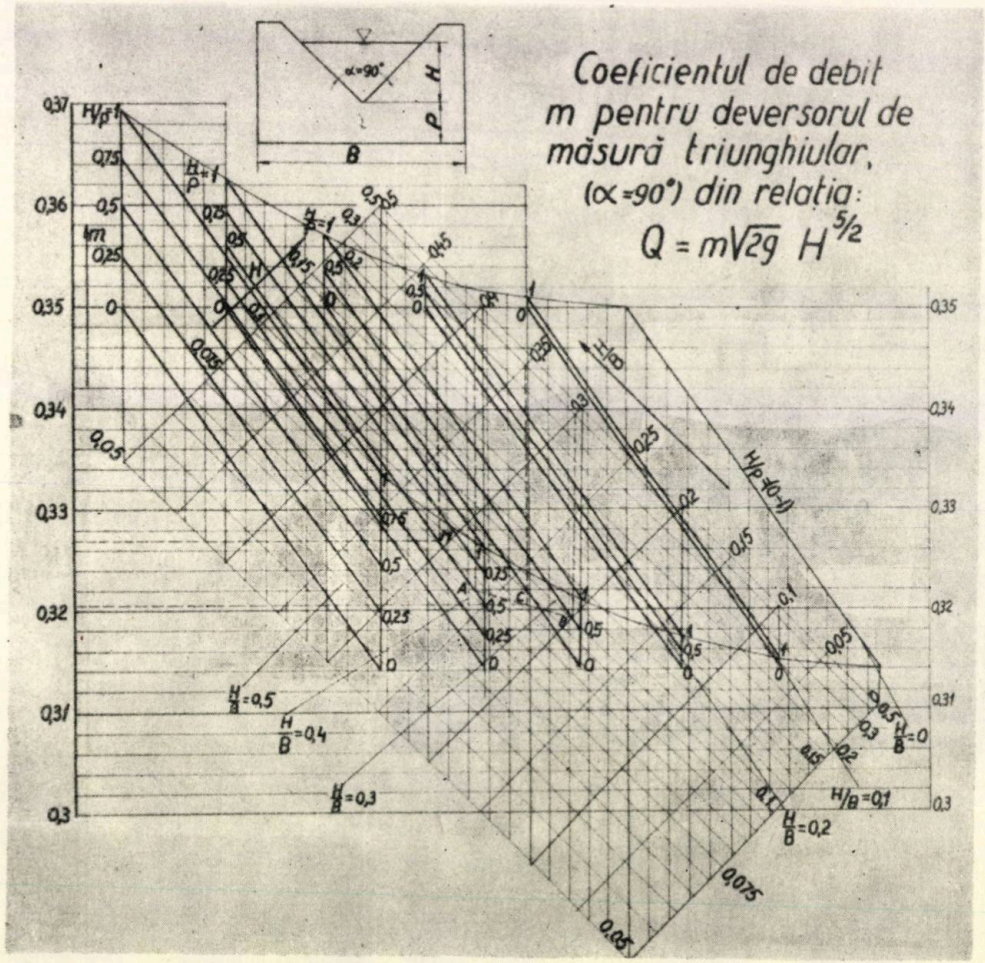

Coeficientul de debit m pentru deversorul de măsură triunghiular, (α=90°) din relaţia:
Q = m√2g H^5/2
α=90°
H
P
B

Fig. 5

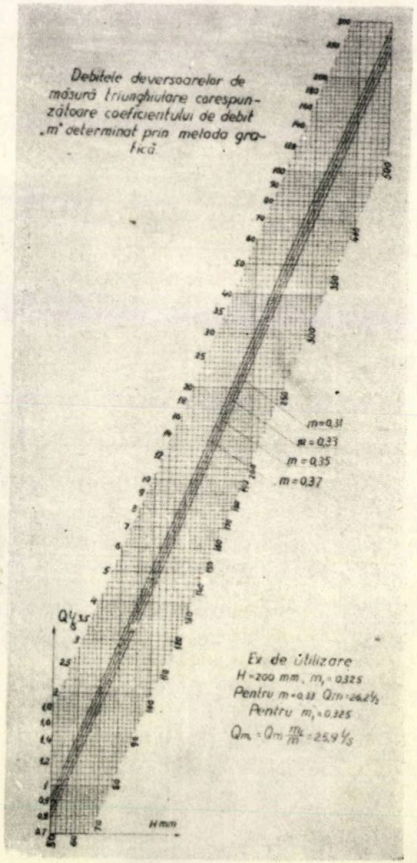

Debitele deversoarelor de măsură triunghiulare corespunzătoare coeficientului de debit „m" determinat prin metoda grafică.
m=0,31
m=0,33
m=0,35
m=0,37
Ex. de utilizare
H=200 mm, m=0,325
Pentru m=0,33 Q=26,4 l/s
Pentru m=0,325
Q = Q m/m = 25,9 l/s

Fig. 6

(12) $\Delta Q_1 = \pm \Delta m b \sqrt{2g} H^{3/2}$, $\Delta Q_2 = mb\sqrt{2g}[(H \pm \Delta H)^{3/2} - H^{3/2}]$.

Dezvoltînd în serie

$$(H \pm \Delta H)^{3/2} = H^{3/2} \pm \frac{3}{2} H^{1/2} \Delta H + \frac{1}{2}\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} - 1\right) H^{1/2} (\Delta H)^2 \pm \ldots,$$

$$\Delta Q_2 = mb\sqrt{2g}\left[\pm\frac{3}{2} H^{1/2} \Delta H + \frac{3}{8} H^{-1/2} (\Delta H)^2\right]$$

şi

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta Q_2} = \pm \frac{2}{3}\frac{\Delta m}{m}\frac{H^2}{\pm H\Delta H + (\Delta H)^2/4}.$$

Pentru $\varepsilon_m = \pm \Delta m/m$, $\varepsilon_H = \pm \Delta H/H$ rezultă

(13) $$\frac{\Delta Q_1}{\Delta Q_2} = \frac{2}{3}\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_H + \varepsilon_H^2/4},$$

relaţie ce dă posibilitatea comparării abaterilor debitului în funcţie de ε_m şi ε_H.

La lectura directă a sarcinii se pot întîlni cazurile:

$H = 0{,}5 \ldots 2$ mm — valoarea minimă corespunzînd sarcinilor mici şi condiţiilor foarte bune de liniştire;

$0{,}025\text{ m} < H < 0{,}8\text{ m}$, considerate în grafice; atunci $1/50 > \varepsilon > 1/400$, adică $0{,}02 > \varepsilon_H > 0{,}0025$. Pentru ca $\Delta_{Q_1} < \Delta^Q{}_2$, trebuie ca $\varepsilon_m < \frac{3}{2}\left[\varepsilon_H + \right.$ $\left. + \frac{1}{4}(\varepsilon_H)^2\right]$. După înlocuirea lui ε_H cu valorile limită, se obţine

(14) $$0{,}0303 > \varepsilon_m > 0{,}00375.$$

Abaterile posibile ale lui m, introduse prin utilizarea metodei grafice

1. *Abateri datorite reprezentării grafice.* Calculele pentru coeficientul *m* s-au efectuat cu cinci zecimale iar reprezentarea grafică cu patru zecimale (pe hîrtie milimetrică), ultima fiind apreciată. Citirea pe graficul propus se poate face cu trei zecimale, a patra fiind apreciată. Considerînd pentru *m* o valoare minimă $m = 0{,}38$, se poate citi cu precizia $m = 0{,}38 \pm$ $\pm\, 0{,}001$, în care condiţii

(15) $$\varepsilon_{m\,\max} = 0{,}00263.$$

2. *Abateri prin aproximarea între domenii b/B, printr-o dreaptă a curbelor $H/p = f(H, b/B)$, pentru $H = const.$* Prin faptul că s-au luat multe domenii b/B, pentru care s-au reprezentat curbele H/p între domenii, curbele $H/p = f(H, b/B)$ se pot aproxima printr-o dreaptă.

Pentru cazurile defavorabile s-a constatat că această abatere maximă este de 1 ... 4 mm. Ţinînd seama că 4 mm, la scara la care s-au trasat curbele, corespunde lui $m = 0{,}0008$, pentru valoarea $m = 0{,}4$ se obţine

$$\varepsilon_{m\,max} = 0{,}002. \tag{16}$$

3. *Abateri datorite aprecierii în cadrul aceluiaşi domeniu b/B, a curbelor de egal H/p.* S-au trasat suficiente curbe H/p pentru fiecare domeniu, care să permită aprecierea şi pentru valori intermediare. Abaterile sînt

$$\varepsilon_{m\,max} = 0{,}002 \ldots 0{,}008. \tag{17}$$

4. *Abateri de citire a debitului pe curbele* $Q = f(H)$. Curbele s-au trasat la scară dublu logaritmică, ceea ce permite citirea cu suficientă precizie a debitelor mici. Aceste abateri sînt.

$$\varepsilon_{Q\,max} = 0{,}003. \tag{18}$$

Din cele de mai sus se constată că abaterile lui m se plasează ca mărime sub cele rezultate prin lectura directă a sarcinii H.

4. Concluzii

Metoda grafică propusă pentru determinarea coeficientului de debit m poate fi utilă atît în lucrările practice de determinare a debitului cît şi în cele de proiectare.

Metoda prezentată, pe lîngă că este expeditivă, înlăturînd calculele laborioase implicate de utilizarea uneia din formulele citate, permite micşorarea abaterii mărimii coeficientului de debit m faţă de cea reală, deoarece graficele sînt construite pe baza valorilor medii ale lui m.

Totodată trebuie subliniat faptul că influenţa abaterilor lui m asupra debitului este mai mică decît cea datorită abaterilor lui H.

Primit la 12 XII 1965

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de hidraulică şi maşini hidraulice,
Laboratorul de hidraulică şi maşini hidraulice

MÉTHODE GRAPHIQUE POUR LA DÉTERMINATION DU COEFFICIENT DU DÉBIT DES DÉVERSOIRS DE MESURE

(Résumé)

On propose une méthode graphique pour la détermination du coefficient du débit m des déversoirs de mesure, du type Bazin (rectangulaire à contraction latérale ou non) et du type Thomson (triangulaire).

La méthode est expéditive et présente l'avantage que l'erreur dans la détermination de m est améliorée, parce que dans la réalisation des graphiques on a utilisé les valeurs moyennes de m calculées avec les relations citées dans le texte.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

Д. К. 533

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА В СЛУЧАЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

Н. Н. КОЧИНА

1. Задаче об одномерном неустановившемся движении идеального газа, вытесняемого поршнем, движущимся со скоростью $v=ct^m$ $(m>-1)$ посвящен ряд работ [2]... [5]. В статье [5] для широкого диапазона чисел m $(-1<m<\infty)$ проведено качественное исследование соответствующих уравнений и выяснена зависимость полей интегральных кривых от соотношений между параметрами m, ν и γ. В статье [4] рассмотрена задача Коши и задача о поршне для автомодельных движений, причем показано, что решение этих задач при $m>m'$ существует и единственно, а при $m\leqslant m'$ не существует (здесь $m'=-\nu/(2+\nu)$). Метод построения решения с двумя ударными волнами при движении газа дан в статье [8]. В работах [6]...[10] найдены примеры возникновения двух ударных волн при движении совершенного газа и некоторых идеальных сред.

В работе [11] дано более подробное, чем в статьях [4], 5] исследование полей интегральных кривых, на основании которого ниже показано, как получить решение задачи Коши и задачи о поршне для различных диапазонов чисел m, γ в случае цилиндрической и сферической симметрии. При этом выяснено, для каких диапазонов чисел m решение задачи о поршне получается с двумя ударными волнами и показано, что при движении поршня по покоящемуся газу при отсутствии противодавления возникновение двух ударных волн невозможно.

2. Пусть в начальный момент времени $t=0$ имеют место следующие распределения скорости, плотности и давления среды:

$$v_0=\alpha_1 c^{\frac{1}{m+1}} r^{\frac{m}{m+1}},\quad \varrho_0=\alpha_2\varrho_1,\quad p_0=\alpha_3\varrho_1^{\frac{2}{m+1}} r^{\frac{2m}{m+1}}, \tag{2.1}$$

где α_1, α_2, α_3 — заданные безразмерные константы.

Как показано Л. И. Седовым [1], возникающее при $t>0$ движение газа будет автомодельно. Автомодельно будет и движение при $t>0$ газа, вытесняемого поршнем, расширяющимся по закону

$$r_*=\frac{ct^{m+1}}{\lambda_*}, \tag{2.2}$$

где λ_* — заданная константа. Рассмотрим решение конкретных задач — начальной задачи и задачи о поршне, для различных областей величины m в зависимости от полей интегральных кривых, рассмотренных в работе [11], для случая цилиндрической и сферической симметрии.

Точка O ($V=0$, $z=0$), узел, отвечает бесконечно удаленной точке физического пространства ($\lambda=0$). (Здесь $z=\gamma pt^2/(\varrho r^2)$, $V=vt/r$, $\lambda=ct^{m+1}/r$). Если задано распределение характеристик движения в начальный момент времени (2.1), т. е. заданы константы α_1, α_2, α_3, изображающая точка для моментов времени, близких к начальному, должна двигаться в плоскости (z, V) из точки O по вполне определенной интегральной кривой с асиптотикой $z=[\alpha_3\gamma/(\alpha_2\alpha_1^2)]V^2$, если $\alpha_1\neq 0$, и $z=-(m+1)\gamma/(2m)$, если $\alpha_1=0$ [4]. Таким образом, чтобы получить решение задачи Коши, нужно попасть двигаясь по этой вполне определенной кривой (непрерывно или разрывным образом) в точку, отвечающую центру симметри ($\lambda=\infty$) или полости ($\lambda=\text{const}$, $p=0$).

Чтобы получить решение задачи о поршне, нужно, двигаясь по этой определенной интегральной кривой, попасть (также непрерывно или скачкообразно) в точку, отвечающую границе поршня $\lambda=\lambda_*$. Границе поршня отвечают точки C ($V=m+1$, $z=0$) и D ($V=m+1$, $z=\infty$), центру симметрии могут отвечать точки $E(V=-2m/(\nu\gamma)$, $z=\infty$) и $G(V=1$, $z=0)$ при $m>0$ и F_1, полости ($\lambda=\text{const}$, $p=0$) может отвечать точка C. Координаты особых точек $F_i(i=1, 2, 3)$ найдены в статье [10] где надо положить $\delta=m+1$, $\varkappa=-2m/\gamma$.

Если движение происходит со скачком, то условия на скачке имеют вид [1]

$$\varrho_1(v_1-c)=\varrho_2(v_2-c),$$

$$\varrho_1(v_1-c)^2+p_1=\varrho_2(v_2-c)^2+p_2, \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{2}(v_1-c)^2+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{\varrho_1}=\frac{1}{2}(v_2-c)^2+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_2}{\varrho_2}.$$

Здесь c — скорость ударной волны. Индексом 1 отмечены величины перед скачком, индексом 2 — за скачком. В безразмерной форме соотношения (2.3) примут вид [1] ($\delta=m+1$)

$$R_1(V_1-\delta)=R_2(V_2-\delta),$$

$$V_2-\delta=(V_1-\delta)\left[1+\frac{2}{\gamma+1}\frac{z_1-(V_1-\delta)^2}{(V_1-\delta)^2}\right], \tag{2.4}$$

$$z_2=\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^2\frac{1}{(V_1-\delta)^2}\left[(V_1-\delta)^2+\frac{2z_1}{\gamma-1}\right]\left[\frac{2\gamma}{\gamma-1}(V_1-\delta)^2-z_1\right].$$

Таким образом, скачок совершается из точки V_1, z_1, лежащей на интегральной кривой, выходящей из точки O с заданной асимптотикой, определяющейся из формул (2.1), в точку V_2, z_2 в соответствии с условиями скачка (2.4). При этом точки параболы

$$z = (V - m - 1)^2 \tag{2.5}$$

переходят сами в себя [1].

Для разных λ_* в формуле (2.2), дающей закон расширения поршня, получаются разные решения.

Для заданного начального распределения характеристик движения (2.1) константа λ_*, характеризующая расширение поршня может меняться от нуля (что соответствует скачку из точки O) $V_1 = z_1 = 0$ (на интегральную кривую, проходящую через точку $O'(V_2 = 2(m+1)/(\gamma+1),\ z_2 = 2\gamma(\gamma-1)(m+1)^2/(\gamma+1)^2)$ до $\lambda_* = \infty$ (если решение соответствующей задачи Коши доходит до центра симметрии, где $\lambda = \infty$) или до некоторого значения $\lambda = \lambda_0 = \text{const}$ (если решение соответствующей задачи Коши получается с полостью [8]).

Формулы

$$m_1 = \frac{-\nu(2\gamma-1) + \sqrt{\nu[\nu + 4\gamma(\gamma-1)]}}{2[2 + \nu(\gamma-1)]},$$

$$m_{3,4} = -\frac{\gamma(\nu-1)}{2 + \nu\gamma \pm \sqrt{2\gamma}} \quad (m_3 > m_4),$$

$$m'' = -\frac{\nu(\gamma-1)}{2 + \nu(\gamma-1)}, \qquad m''' = -\frac{\nu\gamma}{2 + \nu\gamma},$$

дают промежуточные значения параметра m (наряду с его значением $m = 0$). А именно, при уменьшении m получается следующая картина: при $m = 0$ точки C, G, F_3 сливаются, особенность в точке D исчезает; при $m = m_1$ точка F_1 сливается с точкой F_3, образуя сложную особую точку — седло-узел, в дальнейшем точки F_1 и F_3 меняются ролями (точка F_1 становится из седла узлом, точка F_3 из узла или фокуса седлом; при $m = m_3$ точки F_2 и F_3 сливаются и в дальнейшем исчезают, а при $m = m_4$ вновь появляются; при $m = m''$ точка F_1 сливается с точкой C и в дальнейшем точка F_1 переходит в нижнюю полуплоскость $z < O$; при $m = m'''$ точка E сливается с точкой D и в дальнейшем они меняются ролями (точка E, бывшая седлом, становится узлом, точка D — из узла седлом).

Величины $1 < \gamma < \infty$ делятся на 4 диапазона, причем для каждого диапазона для величины m, как функции от ν и γ, получается 7 различных случаев. Для каждого случая качественная картина поля интегральных кривых уравнения [1.7] работы [11] не меняется. Эти случаи представлены в таблице, данной в работе [11].

На границе между первым и вторым диапазонами $m'' = m_3$ (при $\nu = 2$ $\gamma = 1{,}1896$; при $\nu = 3$, $\gamma = 1{,}2612$), между вторым и третьим $m''' = m_4$ (при $\nu = 2$, $\gamma = 5{,}8286$; при $\nu = 3$, $\gamma = 6{,}5993$), между третьим и четвертым $m'' = m_4$ (при $\nu = 2$, $\gamma = 6{,}2750$; при $\nu = 3$, $\gamma = 7{,}0770$).

Рассмотрим поля интегральных кривых для некоторых случаев, данных в таблице 2 статьи [11]. Эти поля представлены на рис. 1...4. Пунктиром нанесена парабола (2.5). Стрелками указано направление убывания параметра λ.

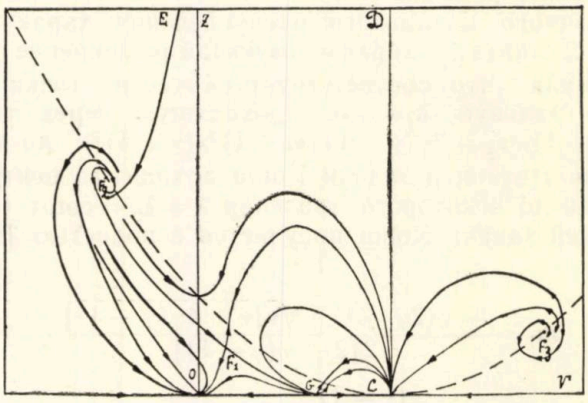


Рис. 1

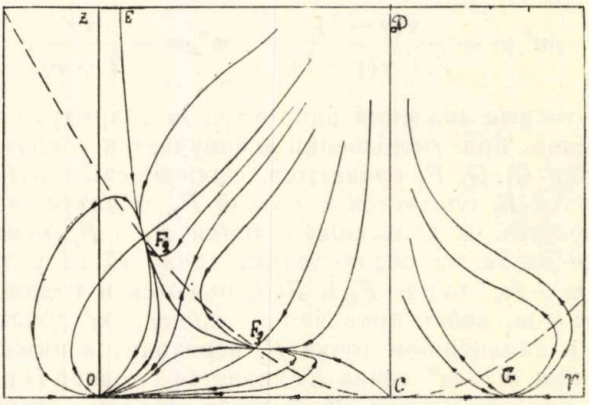


Рис. 2

Первый случай $m > 0$. Точки O и G — узлы, E, F_1 и D — седла, F_2 и F_3 — фокусы (или узлы), C — седло-узел (рис. 1).

Второ случай $m_1 < m < 0$. Точки O, G, D — узлы, F_2, F_3 — узлы (или фокусы), E и F_1 — седла, в C — два седла (рис. 2).

Покажем, как получить решение задачи Коши и задачи о поршне для двух следующих случаев.

Третий случай. Для диапазона *1* $m'' < m < m_1$, для диапазонов *2...4* $m_3 < m < m_1$ (рис. 3). Точки O, G, D — узлы, F_1 и F_2 — узлы (или фокусы), E и F_3 — седла, в точке C два седла.

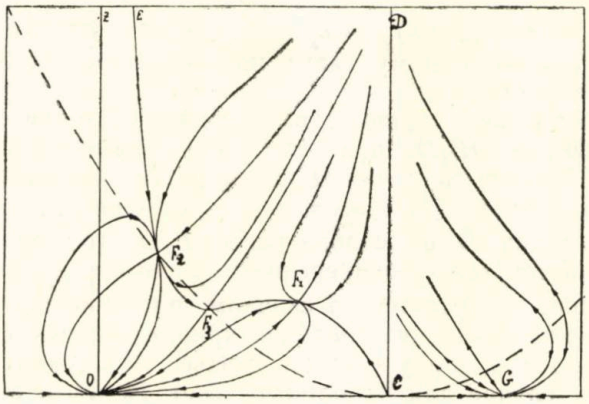


Рис. 3

Остановимся на случае, когда точки F_1 и F_2 — узлы.

Рассмотрим интегральные кривые, выходящие из точки O левее сепаратриссы OF_2D. Решение задачи Коши получается со скачком, совершаемым с заданной интегральной кривой на кривую F_2E, входящую в точку E, отвечающую центру симметрии ($\lambda = \infty$), где скорость равна нулю, плотность равна нулю, давление конечно, температура бесконечно велика.

Асимптотические формулы в окрестности точки E имеют вид (C_1, C_2, C_3 — константы)

$$\frac{p}{p_2} = C_1, \qquad \frac{r}{r_2} = C_2 V'^{\frac{1}{2}\left\{\frac{(2+\nu\gamma)m+\nu\gamma}{[2+\nu(\gamma-1)]m+\nu\gamma}\right\}}, \qquad \frac{\varrho}{\varrho_2} = C_3 V'^{-\frac{m\nu}{[2+\nu(\gamma-1)]m+\nu\gamma}},$$

$$\frac{v}{v_2} = C_4\frac{r}{r_2}, \qquad \frac{T}{T_2} = \frac{C_1}{C_3} V'^{\frac{m\nu}{[2+\nu(\gamma-1)]m+\nu\gamma}}, \qquad \left(V' = V + \frac{2m}{\nu\gamma}\right).$$

Решение задачи о поршне получается со скачком, совершаемым на кривую, входящую в точку D, причем в точке $D\lambda = \lambda_*$ скорость и давление конечны, температура бесконечно велика, а плотность равна нулю. В окрестности точки D имеют место формулы

$$\frac{p}{p_2} = C_1, \quad \frac{r}{r_2} = C_2, \quad \frac{\varrho}{\varrho_2} = C_3 V'^{-\frac{2m}{2m+\nu\gamma(m+1)}},$$

$$\frac{v}{v_2} = (m+1)C_4, \qquad \frac{T}{T_2} = \frac{C_1}{C_3} V'^{\frac{2m}{m+\nu\gamma(m+1)}}, \qquad (V' = m+1-V).$$

λ_* изменяется от $\lambda_* = \infty$ (что соответствует предельному случаю задачи о поршне — задаче Коши) до $\lambda_* = 0$ (что соответствует расширению поршня по невозмущенному газу; при этом скачок совершается из точки O в точку O').

Для интегральных кривых, выходящих из точки O между сепаратриссами OF_2 и OF_3D, при движении изображающей точки по интегральной кривой в точку E получается непрерывное решение задачи Коши. Если $\lambda_2 < \lambda_* < \infty$, где λ_2 — значение λ_*, соответствующее движению в точку D по сепаратриссе F_2D, то решение задачи о поршне получается также непрерывным. Если $0 < \lambda_* < \lambda_2$, то решение задачи о поршне получается со скачком, после которого изображающая точка движется по интегральной кривой в точку D.

Из результатов, полученных в статье [10], следует, что в рассматриваемом случае для координат точек F_2, F_3 и F_1 имеют место неравенства: $V_2 < V_3 < V_1$, причем все интегральные кривые, кроме одной, имеют в точке F_2 меньший, а в точке F_3 больший угол наклона к оси V, чем парабола (2.5) в соответствующей точке. Отсюда следует возможность возникновения в рассматриваемом случае второй ударной волны.

Рассмотрим теперь кривые, лежащие между осью $z = 0$ и сепаратриссой OF_3. Оказывается, что точка F_1 лежит ниже параболы

$$z = \frac{2\gamma}{\gamma - 1}(V - m - 1)^2, \tag{2.6}$$

которая скачком переходит в ось $z = 0$, если $m > m_0$, где

$$m_0 = \frac{-\nu(2\gamma - 1) + \sqrt{\gamma[2\gamma^2 - 4\gamma + \nu + 2]}}{2[2 + \nu(\gamma -)]}. \tag{2.7}$$

Остановимся сперва на случае, когда имеет место неравенство $m > m_0$. Оно выполнено для $m_0 < m < m_1$ в первом диапазоне и для всех m в остальных диапазонах значений γ.

Рассмотрим кривые, выходящие из точки O между сепаратриссой OF_3 и кривой OF_1' (F_1' — точка, в которую скачком переходит точка F_1). Решение задачи Коши для каждой из этих кривых получается со скачком, совершаемым на сепаратриссу $F_1F_2F_3$, после чего движение изображающей точки происходит по интегральной кривой F_1F_2E в точку E. Если $\lambda_2 < \lambda_* < \infty$, то решение задачи о поршне получается

с одним скачком, совершаемым на кривую F_3F_2D, после чего изображающая точка попадает в точку D. Если $\lambda_3 < \lambda_* < \lambda_2$, то решение задачи о поршне получается с двумя скачками: первый из них совершается на сепаратрису F_1F_3 второй — с отрезка кривой F_3F_2 на кривую, входящую в точку D. Здесь λ_3 — значение λ_*, соответствующее движению в точку D по сепаратриссе F_3D. Если точка O' лежит выше сепаратриссы F_3D, то такое решение будет иметь место при $0 < \lambda_* < \lambda_2$. Если же точка O' лежит ниже кривой F_3D, то решение задачи о поршне при $0 < \lambda_* < \lambda_3$ получается снова с одним скачком, совершаемым на кривую, входящую в точку D между сепаратриссой F_3D и кривой $O'D$.

Рассмотрим теперь интегральные кривые, выходящие из начала координат между кривыми OF_1' и осью V. Решение задачи Коши получается со скачком, совершаемым на интегральную кривую F_1C, входящую в точку C, которая соответствует полости ($\lambda = \lambda_0$), где скорость конечна, а давление, плотность и температура равны нулю. В окрестности точки C асимптотические формулы имеют вид:

$$\frac{p}{p_2} = C_1 V'^{\frac{\nu\gamma(m+1)}{[2+\nu(\gamma-1)]m+\nu(\gamma-1)}}, \quad \frac{r}{r_2} = C_2,$$

$$\frac{\varrho}{\varrho_2} = C_3 V'^{\frac{(\nu-2)m+\nu}{[2+\nu(\gamma-1)]m+\nu(\gamma-1)}}, \quad \frac{v}{v_2} = (m+1)C_4, \quad (V' = V - m - 1).$$

Решение задачи о поршне получается со скачком, совершаемым на интегральную кривую, входящую в точку D. При этом $0 < \lambda_* < \lambda_0$ где λ_0 — значение λ_*, отвечающее решению задачи Коши.

Остановимся теперь на случае, когда точка F_1 лежит выше параболы (2.6), что возможно только для первого диапазона значений γ при $m'' < m < m_0$. Решение задачи Коши и задачи о поршне для интегральных кривых, лежащих правее кривой OF_3, осуществляется так же, как решение соответствующих задач в случае $m > m_0$, для кривых, расположенных между OF_3 и OF_1'.

Четвертый случай для первого диапазона $m_3 < m < m''$. Точки O, G, D, F_2 — узлы, E и F_3 — седла, C — седло-узел (рис. 4). Для кривых, расположенных левее сепаратриссы OF_3D, решения такие же, как в третьем случае.

Рассмотрим кривые, лежащие между сепаратриссой OF_3D и осью V. Решение задачи Коши для этих кривых получается так же, как в третьем случае при $m < m_0$, решение задачи о поршне так же, как в третьем случае при $m > m_0$, для кривых, лежащих между OF_3D и OF_1', только сепаратрисса $F_1F_2F_3$ заменяется сепаратриссой CF_3F_2 (см. рис. 3 и 4).

3. Из изложенного выше следует, что в частности, при движении поршня по покоящемуся газу при отсутствии противодавления решение задачи с двумя ударными волнами невозможно, так как для этого нужно было бы, чтобы точка O' попала на интегральную кривую F_3F_1 в третьем случае или на кривую F_3C в четвертом случае первого диапазона значений γ, что невозможно.

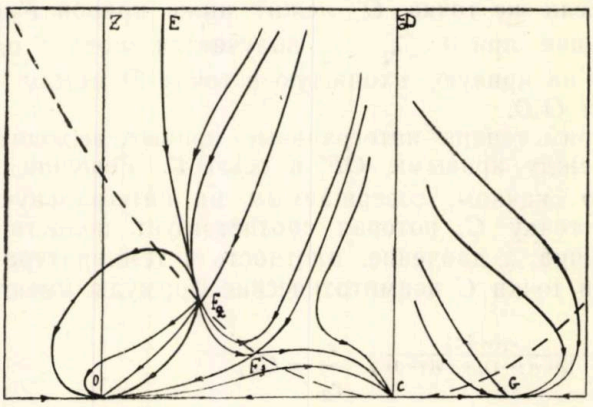


Рис. 4

В самом деле: точка O' лежит на параболе (2.6). Если точка F_1 лежит ниже этой параболы, как это будет для *2*-го, *3*-го и *4*-го диапазонов значений γ для третьего случая, точка O' не может попасть на интегральную кривую F_3F_1. То же относится к *1*-му диапазону значений γ при $m_0 < m < m_1$. Рассмотрение полей интегральных кривых показывает, что для *1*-го диапазона значений γ при $m'' < m < m_0$ для третьего случая и при $m_3 < m < m''$ для четвертого случая (а только в этих случаях отрезок интегральной кривой F_3F_1 или F_3C пересекает параболу (2.6)) точка O' лежит выше кривой

$$z = \frac{V(V-1)(V-m-1)}{2m/\gamma + \nu V}, \tag{3.1}$$

вдоль которой интегральные кривые вертикальны, а, следовательно, выше сепаратриссы F_3F_1 или F_3C, поскольку эти сепаратриссы расположены ниже кривой (3.1).

Так как результаты решения задачи о цилиндрическом поршне, движущимся по покоящемуся газу, можно использовать для нахождения обтекания осесимметричных тел установившимся потоком с большой сверхзвуковой скоростью [12], отсюда следует, что обтекание подобных тел с двумя ударными волнами невозможно.

Поля интегральных кривых для случая *IV* (для диапазонов *2...4* значений γ) и для случаев *V... VII* рассмотрены в статье [11] (рис. 4...6). Опущенное здесь детальное исследование решений задачи Коши и задачи о поршне для всех возможных случаев (решений, которые существуют и единственны при $m > m'$, а при $m \leqslant m'$ не существуют [4]) показывает, что вторая ударная волна может возникнуть только в рассмотренных нами случаях (*III* и *IV* для первого диапазона значений γ).

В заключение выражаю благодарность С. С. Григоряну за ряд ценных замечаний.

Поступила 15 III 1964 г.

Математический институт им. В. А. Стеклова, АН СССР, Москва, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И., *Методы подобия и размерности в механике.* Гостехиздат, М., 1957.
2. — *О некоторых неустановившихся движениях сжимаемой жидкости.* ПММ, 1945, **IX**, *4.*
3. Крашенинникова Н. Л., *О неустановившихся движениях газа, вытесняемого поршнем.* Изв. АН СССР, ОТН, 1955, *8.*
4. Григорян С. Ч., *Задача Коши и задача о поршне для одномерных неустановившихся движений газа (автомодельные движения).* ПММ, 1958, **XXII**, *2.*
5. Кочина Н. Н., Мельникова Н. С., *О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем, без учета противодавления.* ПММ, 1958, **XXII**, *4.*
6. Компанеец А. С., *Автомодельная задача о развитии ударной волны из волны сжатия.* ДАН СССР, 1956, **107**, *1.*
7. Григорян С. С., РЖМех., 1959, *6*, № 6050.
8. — *О некоторых точных решениях уравнений газовой динамики.* ДАН СССР, 1958 **121**, *4.*
9. Кочина Н. Н., *Об особенностях вблизи центра симметрии при точечном взрыве и о возникновении второй ударной волны.* ДАН СССР, 1959, **126**, *6.*
10. — *О свойствах движения некоторых идеальных сред при точечном взрыве.* ПММ, 1960, **XXIV**, *3.*
11. Кочина Н. Н., Мельникова Н. С., *Исследование полей интегральных кривых для системы уравнений, описывающих автомодельные движения газа.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII(XVI)**, *1—2.*
12. Бам-Зеликович Г. М., Бунимович А. И., Михайлова М. П., *Движение тонких тел с большими сверхзвуковыми скоростями.* В сб. ст. *Теоретическая гидромеханика,* 1949, *4*; Изв. АН СССР, ОТН, 1960, *1.*

ASUPRA UNOR PROBLEME DE MIŞCARE A GAZULUI NESTABIL ÎN CAZUL SIMETRIEI CILINDRICE ŞI SFERICE

(Rezumat)

În cazul simetriei cilindrice şi sferice, se arată cum se obţine soluţia problemei Cauchy şi a problemei de mişcare a gazului ideal evacuat de piston pentru o gamă întinsă de valori ale parametrilor care definesc mişcărea. Se presupune că în momentul iniţial densitatea gazului este constantă, iar presiuea şi viteza depind de rază după legea $v = ct^m$ $(m - 1)$. Se arată de asemenea că în timpul mişcării pistonului prin gazul în repaos, fără contrapresiune, nu este posibilă apariţia a două unde de şoc.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

ABLEITUNG DER GLEICHUNG DER BIEGUNGSLINIE BEI TRÄGERN MIT VERÄNDERLICHEM QUERSCHNITT IN STUFEN UND IHRE ANWENDUNG BEI DURHLAUFTRÄGERN MIT DEMSELBEN QUERSCHNITT

VON

D. HORBANIUC

Mitteilung an der wissenschaftlichen Tagung des Technisches Hochschule von Jassy, an 5—7 Februar 1965

1. Die bei der Berechnung det Verformung bei Trägern mit veränderlichem Querschnitt in Stufen verwendeten Methoden, sowohl die graphische (Mohr-Methode), als auch die analytische (der initialen Parameter [4]) beruhen auf der Vermeidung des Schreibens der Kontinuitätsbedingungen zwischen den Stababschnitten mit verschiedenen Trägheitsmomenten. Ausser den erwähnten Methoden wurde eine analytische Methode ausgearbeitet, die sogenannte Methode der drei Unbekannten [1], [4]. Bei den ersten zwei Methoden mussten vorher zusätzliche Berechnungen der Umwandlund des Stabes in einem Stab mit einem unveränderlichen Trägheitsmoment gemacht werden und die letzte wird von Standpunkt der Belastungen begrenzt; die Durchbiegungen können nur in bestimmten Punkten berechnet werden.

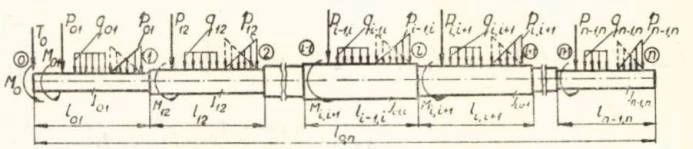


Abb. 1

Zum Zweck der Ermittlung einer Methode ohne vorherige Umwandlungen oder der Lösung der Gleichungssysteme [1] wird in der vorhandenen Arbeit die verallgemeinerte Gleichung der Biegungslinie für Träger mit veränderlichem Querschnitt in Stufen abgeleitet, indem man die Kontinuitätsbedingungen verwendet. Dafür betrachtet man den Stab aus Abb. 1 gebildet aus Abschnitten, wo jeder Abschnitt gleich belastet wird.

Der Stab wird in den Übergangspunkten zwischen den Querschnitten geschnitten und als Messursprung der Abszissen wird das linke Ende jedes Abschintes berücksichtigt. Man nimmt zwei aufeinanderfolgende Abschnitte $i-1,i$ und $i,i+1$ (Abb. 2).

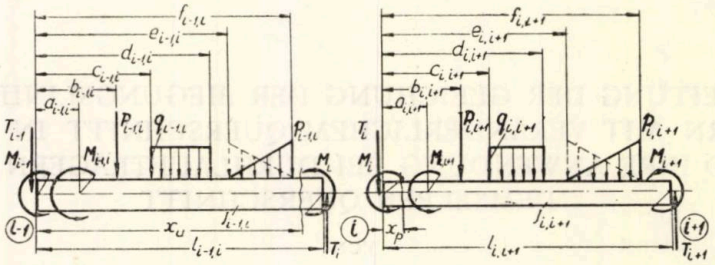


Abb. 2

Durch Verwendung der Arbeit [3] sind die Gleichungen der Biegungslinie im letzten Abschnitt $i-1,i$ und im ersten $i,i+1$:

$$
(1)\quad
\begin{cases}
E\mathcal{J}_{i-1,i}\varphi_{x_u} = E\mathcal{J}_{i-1,i}\varphi_{i-1} + M_{i-1}x_u + T_{i-1}\dfrac{x_u^2}{2!} + M_{i-1,i}(x_u - a_{i-1,i}) + \\
\quad + P_{i-1,i}\dfrac{(x_u - b_{i-1,i})^2}{2!} + \dfrac{q_{i-1,i}}{3!}[(x_u - c_{i-1,i})^3 - (x_u - d_{i-1,i})^3] + \\
\quad + p_{i-1,i}\left\{\dfrac{(x_u - f_{i-1,i})^3}{3!} - \dfrac{1}{4!(f_{i-1,i} - e_{i-1,i})}[(x_u - e_{i-1,i})^4 \pm (x_u - f_{i-1,i})^4]\right\}^{e_{i-1,i}}, \\
E\mathcal{J}_{i-1,i}y_{x_u} = E\mathcal{J}_{i-1,i}(y_{i-1} + x_u\varphi_{i-1}) + M_{i-1}\dfrac{x_u^2}{2!} + T_{i-1}\dfrac{(x_u^3}{3!} + \\
\quad + M_{i-1,i}\dfrac{(x_u - a_{i-1,i})^2}{2!} + P_{i-1,i}\dfrac{(x_u - b_{i-1,i})^3}{3!} + \\
\quad + \dfrac{q_{i-1,i}}{4!}[(x_u - c_{i-1,i})^4 - (x_u - d_{i-1,i})^4] + \\
\quad + p_{i-1,i}\left\{\dfrac{(x_u - f_{i-1,i})^4}{4!} - \dfrac{1}{5!(f_{i-1,i} - e_{i-1,i})}[(x_u - e_{i-1,i})^5 \pm (x_u - f_{i-1,i})^5]\right\}^{e_{i-1,i}},
\end{cases}
$$

$$(2)\qquad \begin{cases} E\mathcal{J}_{i,i+1}\varphi_{x_p} = E\mathcal{J}_{i,i+1}\varphi_i + M_i x_p + T_i \dfrac{x_p^2}{2!}, \\ E\mathcal{J}_{i-1,i}y_{x_p} = E\mathcal{J}_{i,i+1}(y_i + x_p\varphi_i) + M_i \dfrac{x_p^2}{2!} + T_i \dfrac{x_p^3}{3!}, \end{cases}$$

wo x_u ist die laufende Abszisse in dem letzten Feld des Abschnitts $i-1, i$; x_p — die laufende Abszisse in dem ersten Feld des Abschnitts $i, i+1$.

Bemerkung: Die Zeichen — und der Abstand $e_{i-1,i}$ aus den Klammern beziehen sich auf die dreieckige angeordnete durch eine unterbrochene Linie angedeutete Belastung in Abb. 2.

Zur Vereinfachung der Berechnungen bezeichnet man:

$$\Phi_{i-1,x_u} = M_{i-1}x_u + T_{i-1}\frac{x_u^2}{2} + M_{i-1,i}(x_u - a_{i-1,i}) + P_{i-1,i}\frac{(x_u - b_{i-1,i})^2}{2!} +$$

$$+ \frac{q_{i-1,i}}{3!}[(x_u - c_{i-1,i})^3 - (x_u - d_{i-1,i})^3] +$$

$$+ p_{i-1,i}\left\{\frac{(x_u - f_{i-1,i}^{e_{i-1,i}})^3}{3!} - \frac{1}{4!\,(f_{i-1,i} - e_{i-1,i})}[(x_u - e_{i-1,i})^4 \pm (x_u - f_{i-1,i})^4]\right\},$$

$$Y_{i-1,x_u} = M_{i-1}\frac{x_u^2}{2!} + T_{i-1}\frac{x_u^3}{3!} + M_{i-1,i}\frac{(x_u - a_{i-1,i})^2}{2!} + P_{i-1,i}\frac{(x_u - b_{i-1,i})^3}{3!} +$$

$$+ \frac{q_{i-1,i}}{4!}[(x_u - c_{i-1,i})^4 - (x_u - d_{i-1,i})^4] +$$

$$+ p_{i-1,i}\left\{\frac{(x_u - f_{i-1,i}^{e_{i-1,i}})^4}{4!} - \frac{1}{5!\,(f_{i-1,i} - e_{i-1,i})}[(x_u - e_{i-1,i})^5 \pm (x_u - f_{i-1,i})^5]\right\}.$$

So werden die Gleichungen (1) und (2) zu:

$$(1')\qquad \begin{cases} \varphi_{i-1,x_u} = \varphi_{i-1} + \dfrac{\Phi_{i-1,x_u}}{E\mathcal{J}_{i-1,i}}, \\ y_{i-1,x_u} = y_{i-1} + x_u\varphi_{i-1} + \dfrac{Y_{i-1,x_u}}{E\mathcal{J}_{i-1,i}}, \end{cases}$$

$$(2')\qquad \begin{cases} \varphi_{i,x_p} = \varphi_i + \dfrac{\Phi_{i,x_p}}{EJ_{i,i+1}}, \\ y_{i,x_p} = y_i + x_p\varphi_i + \dfrac{Y_{i,x_p}}{EJ_{i,i+1}}. \end{cases}$$

Wenn man die Kontinuitätsbedingungen in Punkt i, also für $x_u = l_{i-1,i}$ und $x_p = 0$ auferlegt, muss man $\varphi_{i-1,l_{i-1,i}} = \varphi_i$ und $y_{i-1,l_{i-1}} = y_i$ haben. Daher geht hervor:

$$(3)\qquad \varphi_i = \varphi_{i-1} + \frac{\Phi_{i-1,i}}{EJ_{i-1,i}}, \qquad y_i = y_{i-1} + l_{i-1,i}\varphi_{i-1,i} + \frac{Y_{i-1,i}}{EJ_{i-1,i}}.$$

Durch die Partikularisierung der Gleichungen (3) in den Punkten $1,2,\ldots,n-1$ und durch ihre Lösung im Verhältnis zu φ_0 und y_0 erhält man:

$$(4)\qquad \varphi_n = \varphi_0 + \sum_1^n \frac{\Phi_{i-1,i}}{EJ_{i-1,i}}, \qquad y_n = y_0 + l_{0,n}\varphi_0 + \sum_1^{n-1} \frac{\Phi_{i-1,i}}{EJ_{i-1,i}} l_{i,n} + \sum_1^n \frac{Y_{i-1,i}}{EJ_{i-i,i}},$$

wo φ_0 und y_0 der Neigungswinkel bzw. die Durchbiegung im Ursprung des ersten Abschnits sind, die aus den anfänglichen Bedingungen bestimmt werden. Auf Grund der Gleichungen (4) kann man die Verformugsfunktionen in einen laufenden Querschnitt eines irgendwelchen Abschnittes $i, i+1$, also

$$(5)\qquad \begin{cases} \varphi_{i,x} = \varphi_0 + \sum_1^i \dfrac{\Phi_{i-1,i}}{EJ_{i-1,i}} + \dfrac{\Phi_{i,x}}{EJ_{i,i+1}}, \\ y_{i,x} = y_0 + (l_{0,i} + x)\varphi_0 + \sum_1^{i-1} \dfrac{\Phi_{i-1,i}}{EJ_{i-1,i}} l_{i,x} + \sum_1^i \dfrac{Y_{i-1,i}}{EJ_{i-1,i}} + \dfrac{Y_{i,x}}{EJ_{i,i+1}} \end{cases}$$

schreiben.

2. Anwendung. Man bestimmt den Neigungswinkel im Stützpunkt A und die Durchbiegung in Richtung der ersten Last P bei einem einfach gelagerten Träger mit drei Abschnitten (Abb. 3); zwischen den Trägheits-

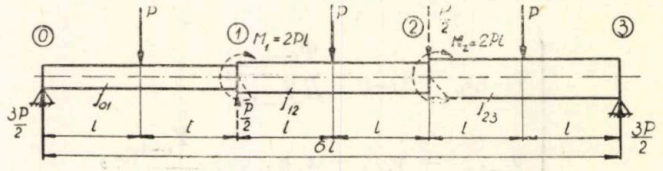


Abb. 3

momenten der Querschnitte der drei Abschnitte gilt das Verhältnis $\mathcal{J}_{01}:\mathcal{J}_{12}:\mathcal{J}_{23}=1:2:3$.

Lösung. Für den oben angegebenen Fall werden folgende Partikularisierungen gemacht: $y_0=0$ und bei $l_{03}=6l$, $y_3=0$ in der zweiten Gleichung des (4) Systems und es werden

$$\varphi_0=-\frac{1}{l_{03}E}\left(\sum_1^2\frac{\Phi_{i-1,i}}{\mathcal{J}_{i-1,i}}l_{i,3}+\sum_1^3\frac{Y_{i-1,i}}{\mathcal{J}_{i-1,i}}\right)=\frac{707}{108}\frac{Pl}{E\mathcal{J}_{12}},$$

wo

$$\sum_1^2\frac{\Phi_{i-1,i}}{\mathcal{J}_{i-1,i}}l_{i,3}=\left(-\frac{3P}{2}\frac{4l^2}{2}+\frac{Pl^2}{2}\right)\frac{4l}{\mathcal{J}_{01}}+\left(-\frac{P}{2}\frac{4l}{2}-2Pl\,2l+\frac{Pl^2}{2}\right)\frac{2l}{\mathcal{J}_{12}}=-\frac{29Pl^3}{\mathcal{J}_{12}},$$

$$\sum_1^3\frac{Y_{i-1,i}}{\mathcal{J}_{i-1,i}}=\left(-\frac{3P}{2}\frac{8l^3}{6}+\frac{Pl^3}{6}\right)\frac{1}{\mathcal{J}_{01}}+\left(-\frac{P}{2}\frac{8l^3}{6}-2Pl\frac{4l^2}{2}+\frac{Pl^3}{6}\right)\frac{1}{\mathcal{J}_{12}}+$$

$$+\left(-2Pl\frac{4l^2}{2}+\frac{P}{2}\frac{8l^3}{6}+\frac{Pl^3}{6}\right)=-\frac{185}{18}\frac{Pl^3}{\mathcal{J}_{12}}.$$

Also φ_0 ist eben der Neigungswinkel im Stützpunkt A. Die Durchbieguu in Richtung der ersten Last P wird

$$y_P=-\frac{1}{l_{03}E}\left(\sum_1^2\frac{\Phi_{i-1,i}}{\mathcal{J}_{i-1,i}}l_{i,3}+\sum_1^3\frac{Y_{i-1,i}}{\mathcal{J}_{i-1,i}}\right)l+\frac{Y_{0,l}}{E\mathcal{J}_{01}}=\frac{707}{108}\frac{Pl^3}{E\mathcal{J}_{01}}-\frac{3}{12}\frac{Pl^3}{E\mathcal{J}_{01}}=\frac{653}{108}\frac{Pl^3}{E\mathcal{J}_{12}}$$

sein.

Die Gleichungen (4) können auch im Falle der grapho-analytischen Methode angewandt werden, da die Funktion $\Phi_{i-1,i}$ und $Y_{i-1,i}$ die Flächen der Momentdiagramme $A_{i-1,i}$ bzw. die statischen Momente der Flächen des Biegungsmomentdiagramms $S_{i-1,i}$ auf den Abschnitten des Trägers sind. So können die Gleichungen

$$(6)\qquad\begin{cases}\operatorname{tg}\varphi_n=\operatorname{tg}\varphi_0-\sum_1^n\dfrac{A_{i-1,i}}{E\mathcal{J}_{i-1,i}},\\ y_n=y_0+l_{0,n}\operatorname{tg}\varphi_0-\sum_1^{n-1}\dfrac{A_{i-1,i}}{E\mathcal{J}_{i-1,i}}l_{i,n}-\sum_1^n\dfrac{S_{i-1,i}}{E\mathcal{J}_{i-1,i}},\end{cases}$$

geschrieben werden. Mit Hilfe der Gleichungen (6) wird in der Arbeit die Gleichung der drei Momente für Durchlaufträger mit veränderlichem Querschnitt in Stufen bestimmt. Der Abschnitt des isolierten Trägers (Abb. 4) ist einfach unbestimmt, dessen Unbestimmung durch $\operatorname{tg}\varphi_r^{(d)}=-\operatorname{tg}\varphi_r^{(s)}$ (7) beseitigt wird.

Zur Berechnung des $\operatorname{tg} \varphi_r^{(d)}$ und $\operatorname{tg} \varphi_r^{(s)}$ wird die zweite Gleichung aus (6) verwendet, also

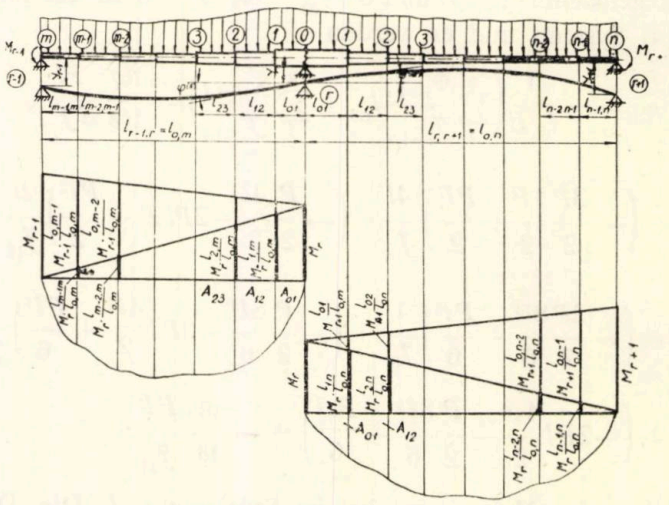


Abb. 4

$$\operatorname{tg} \varphi_r^{(d)} = \frac{y_r - y_{r+1}}{l_{r,r+1}} + \frac{2M_r}{6El_{r,r+1}} \sum_1^n \frac{l_{i-1,i}}{\mathcal{J}_{i-1,i}} \alpha_{i-1,i}^2 + \frac{M_{r+1}}{6El_{r,r+1}^2} \sum_1^n \frac{l_{i-1,i}}{\mathcal{J}_{i-1,i}} \beta_{i-1,i}^2 +$$

$$+ \frac{1}{El_{r,r+1}} \sum_1^{n-1} \frac{A_{i-1,i}}{\mathcal{J}_{i-1,i}} l_{i,n} + \frac{1}{El_{r,r+1}} \sum_1^n \frac{S_{i-1,i}}{\mathcal{J}_{i-1,i}}$$

und

$$\operatorname{tg} \varphi_r^{(s)} = \frac{y - y_{r-1}}{l_{r-1,r}} + \frac{2M_r}{6El_{r-1,r}^2} \sum_1^m \frac{l_{j-1,j}}{\mathcal{J}_{j-1,j}} \alpha_{j-1,j}^2 + \frac{M_{r-1}}{6El_{j-1,j}^2} \sum_1^m \frac{l_{j-1,j}}{\mathcal{J}_{j-1,j}} \beta_{j-1,j}^2 +$$

$$+ \frac{1}{El_{r-1,r}} \sum_1^{m-1} \frac{A_{j-1,j}}{\mathcal{J}_{j-1,j}} l_{j,m} + \frac{1}{El_{r-1,r}} \sum \frac{S_{j-1,j}}{\mathcal{J}_{j-1,j}},$$

wo $\alpha_{i-1,i}^2 = 3l_{i-1,n} l_{i,n} + l_{i-1,i}^2$, $\beta_{i-1,i}^2 = 3l_{i,n}(l_{0,i-1} + l_{0,i}) + l_{i-1,i}(2l_{0,i-1} + l_{0,i})$,

$\alpha_{j-1,j}^2 = 3l_{j-1,m} l_{j,m} + l_{j-1,j}^2$ und $\beta_{j-1,j}^2 = 3l_{j,m}(l_{0,j-1} + l_{0,j}) + l_{j-1,j}(2l_{0,j-1} + l_{0,j})$.

Durch ihre Einführung in Gleichung (7) und durch ihre vorteilhafte Anordnung erhält man die Gleichung der drei Momente für Träger mit veränderlichem Querschnitt, also

$$\frac{M_{r-1}}{l^2_{r-1,r}}\sum_1^m \frac{l_{j-1,j}}{\mathcal{J}_{j-1,j}}\beta^2_{j-1,j} + 2M_r\left(\frac{1}{l^2_{r-1,r}}\sum_1^m \frac{l_{j-1,j}}{\mathcal{J}_{j-1,j}}\alpha^2_{j-1,j} + \frac{1}{l^2_{r,r+1}}\sum_1^n \frac{l_{i-1,i}}{\mathcal{J}_{i-1,i}}\alpha^2_{i-1,i}\right) +$$

$$+ \frac{M_{r+1}}{l^2_{r,r+1}}\sum_1^n \frac{l_{i-1,i}}{\mathcal{J}_{i-1,i}}\beta^2_{i-1,i} + 6E\left(\frac{y_{r-1}-y_r}{l_{r-1,r}} + \frac{y_{r+1}-y_r}{l_{r,r+1}}\right) = \tag{8}$$

$$= -\frac{6}{l_{r-1,r}}\left(\sum_1^{m-1}\frac{A_{j-1,j}}{\mathcal{J}_{j-1,j}}l_{j,m} + \sum_1^m \frac{S_{j-1,j}}{\mathcal{J}_{i-1,j}}\right) - \frac{6}{l_{r,r+1}}\left(\sum_1^{n-1}\frac{A_{i-1,i}}{\mathcal{J}_{i-1,i}}l_{i,n} + \sum_1^n \frac{S_{i-1,i}}{\mathcal{J}_{i-1,i}}\right).$$

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl für Festigkeitslehre

LITERATURVERZEICHNIS

1. Buzdugan Gh., *Rezistența materialelor.* 1964, pp. 166–170.
2. Bauşic V., Horbaniuc D., *Rezistența meterialelor.* Vol. I, 1955.
3. Bauşic V., Havîrneanu Th., Preda N., Horbaniuc D., *Contribuțiuni la generalizarea ecuației fibrei elastice a barelor drepte.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1957, III (VII), *1–2.*
4. Ponomariov S. D., Biderman V. L., Liharev C. K., Makuşin V. M., Malinin N. M., Feodosiev V. I., *Calculul de rezistență în construcția de mașini.* Ed. Tehn., Buc., 1960, pp. 600—607 (trad. din l. rusă).

DEDUCEREA ECUAȚIEI AXEI DEFORMATE LA GRINZI CU SECȚIUNE VARIABILĂ ÎN TREPTE ŞI APLICAREA EI LA GRINZI CONTINUE DE ACEST FEL

(Rezumat)

Se deduc ecuațiile deformațiilor (4) şi (5) pentru grinzi cu secțiune variabilă în trepte (caz foarte des întîlnit în construcția de mașini), folosind condițiile de continuitate în punctele de trecere dintre secțiuni. Aceste ecuații conțin parametrii φ_0 şi y_0, care se determină din condițiile de rezemare ale grinzilor şi permit calculul rotirii şi săgeții în orice secțiune, fără transformări prealabile [4] sau rezolvări de sisteme de ecuații [1].

Ca aplicație la rezolvarea grinzilor continue cu secțiune variabilă s-a dedus ecuația celor trei momente (8).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C.Z. 621.7.01

DETERMINAREA CONSTANTELOR ŞI EXPONENŢILOR DIN RELAŢIILE MOMENTULUI DE TORSIUNE ŞI A FORŢEI AXIALE LA BURGHIEREA OŢELURILOR ROMÂNEŞTI GRUPA OŢEL CROM PENTRU RULMENŢI, STAS Nr. 1456—61

DE

AUREL RĂILEANU şi DAN NICOLESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

Autorii continuînd experienţele pentru determinarea constantelor şi exponenţilor din relaţiile forţei axiale şi a momentului de torsiune

(1) $$P = C_p d^{x_p} s^{y_p},$$ (2) $$M = C_M d^{x_M} s^{y_M},$$

au stabilit aceşti parametri la oţelurile RUL 1 şi RUL 2, procurate în 1964 de la „Combinatul Siderurgic"-Hunedoara.

Experienţele s-au executat pe o maşină de găurit cu coloană tip A2 („Înfrăţirea"-Oradea), folosind burghie româneşti (F. S. Rîşnov) din oţel rapid, cu unghiul de înclinare a canalului elicoidal $\omega = 30^0$, cu raportul dintre grosimea miezului şi diametru aproximativ constant (0,15) şi canalele lustruite, ascuţite după metoda conică astfel încît să aibă următoarea geometrie : $\alpha_{ex} = 12^0$, $\psi = 55^0$, $2\varkappa = 120^0$. În timpul lucrului materialul de încercat se fixează pe un dinamometru tip Paramonov, construit la Catedra de maşini unelte [1].

Cu ajutorul datelor experimentale s-au trasat diagramele în coordonate dublu logaritmice (fig. 1...4), pe baza cărora s-au calculat valorile exponenţilor x_p, y_p, x_M, y_M şi ale constantelor C_{pm} şi C_{Mm}, după metoda cunoscută [1], [2]. Valorile constantelor şi ale exponenţilor sînt date în tabelele 1 şi 2.

Tabelul 1

Oţel crom pentru rulmenţi STAS Nr. 1456—61	H_B kgf/mm²	x_{pm}	y_{pm}	C_{pm}
RUL 1	192	1,08	0,72	99,94
RUL 2	213	0,90	0,69	135,11

Tabelul 2

Oţel crom pentru rulmenţi STAS Nr. 1456—61	H_B kgf/mm²	x_{Mm}	y_{Mm}	C_{Mm}
RUL 1	192	1,80	0,81	7,80
RUL 2	213	1,70	0,79	9,48

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de maşini unelte şi scule

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Caşler, Al. Rener, Bul. Inst. polit. Iaşi, 1962, **VII (XII)**, *1—2*, pp. 345—348.
2. Răileanu A., Nicolescu D., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, **IX (XIII)**, *3—4*, pp. 331—334.

DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES DES FORCES DE COUPE ET DES MOMENTS CONCERNANT LE PERÇAGE DES ACIERS ROUMAINS STANDARDISÉS, STAS 1456—61

(Résumé)

On détermine les valeurs des paramètres C_p, x_p, y_p et C_M, x_M, y_M, définis par les relation (1) et (2), pour les aciers RUL 1 et RUL 2, STAS 1456—61.

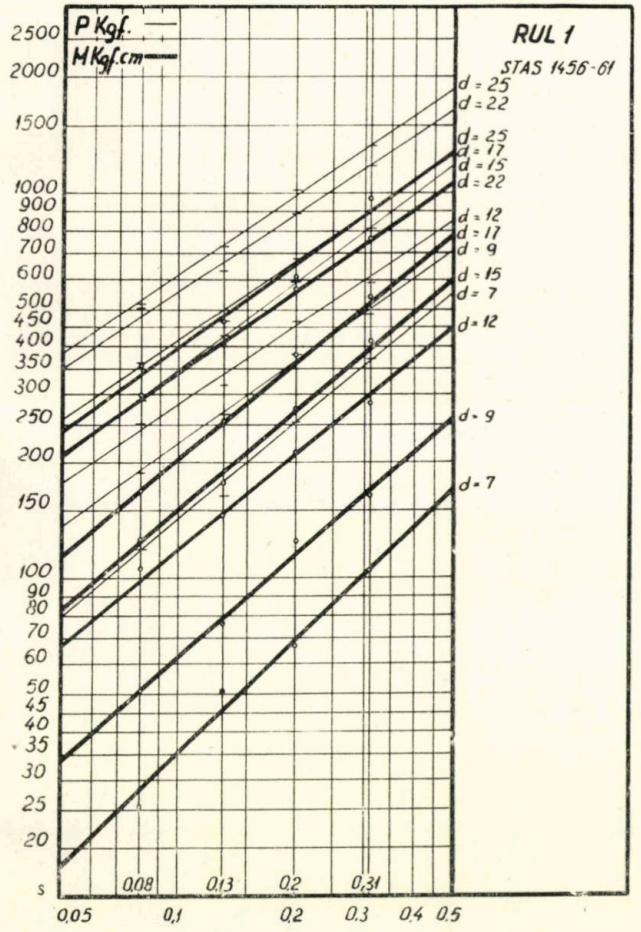


Fig. 1

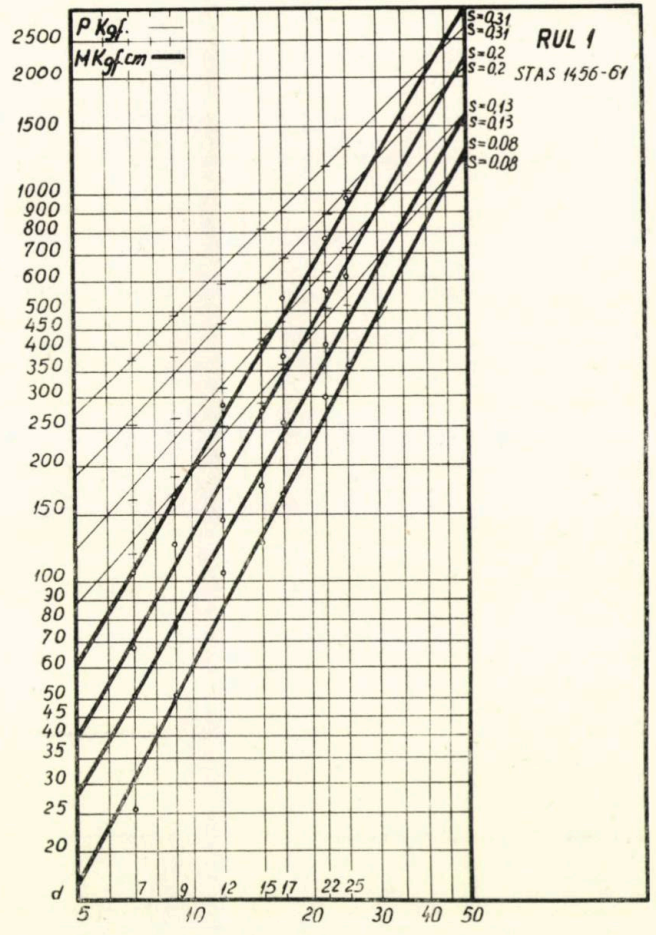


Fig. 2

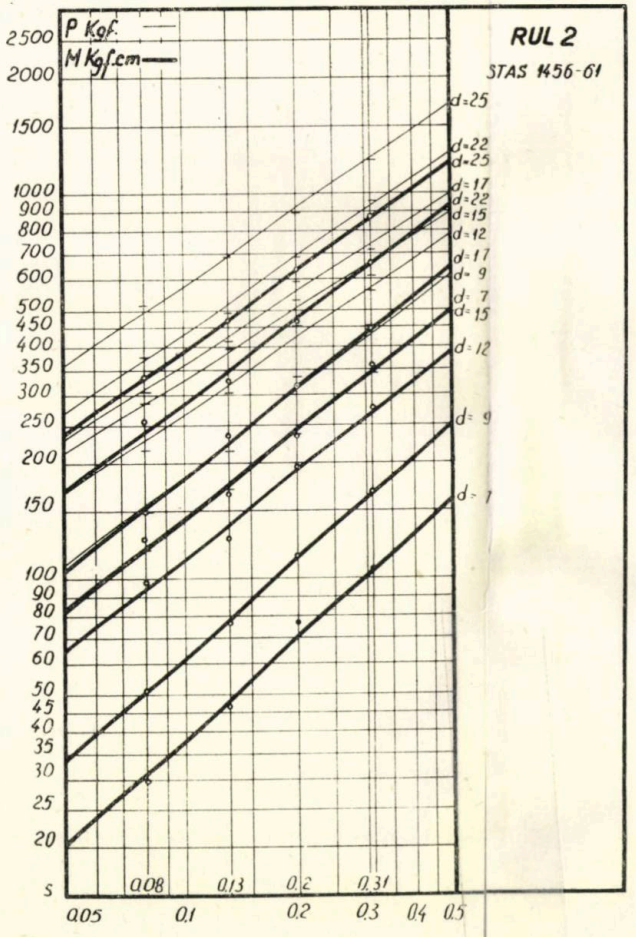


Fig. 3

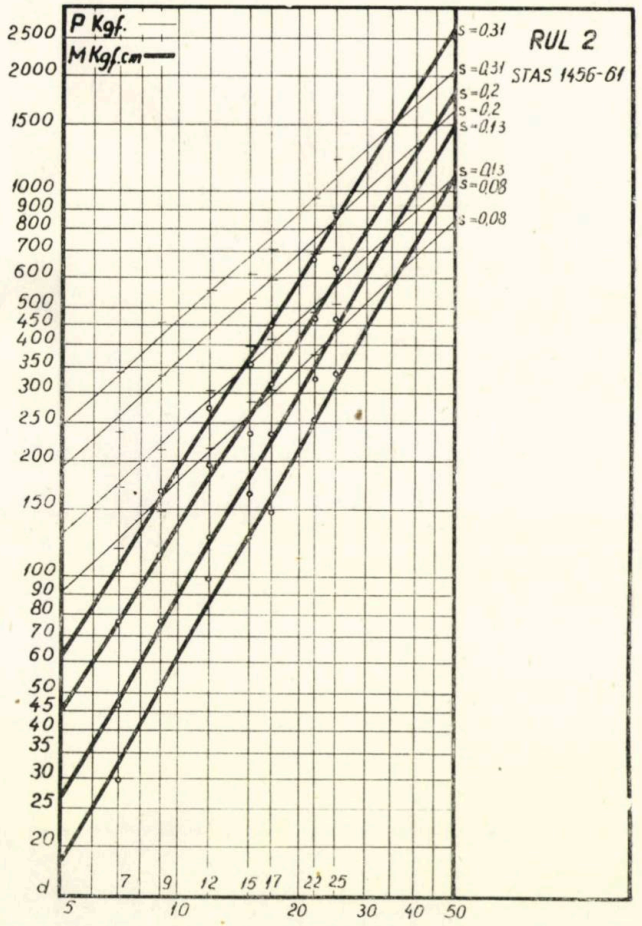
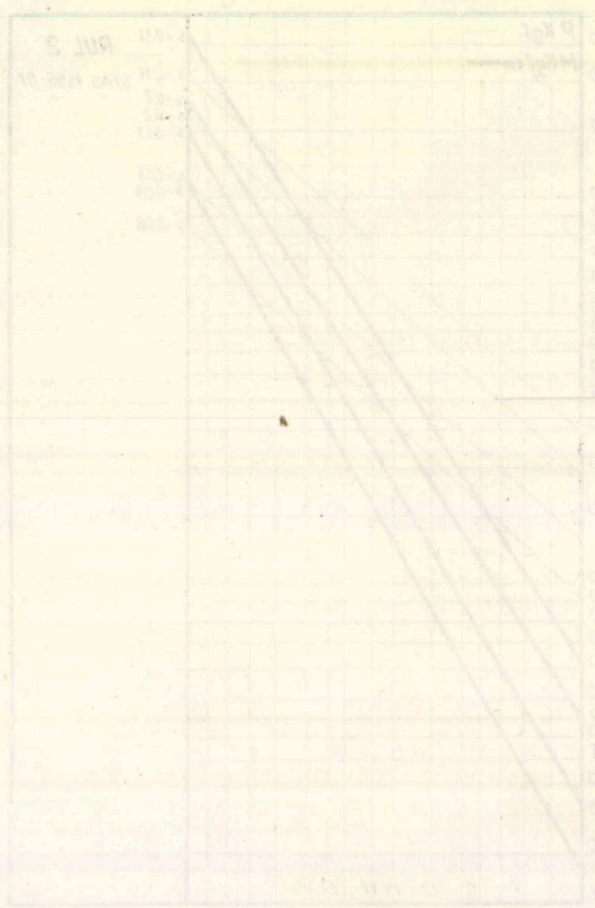
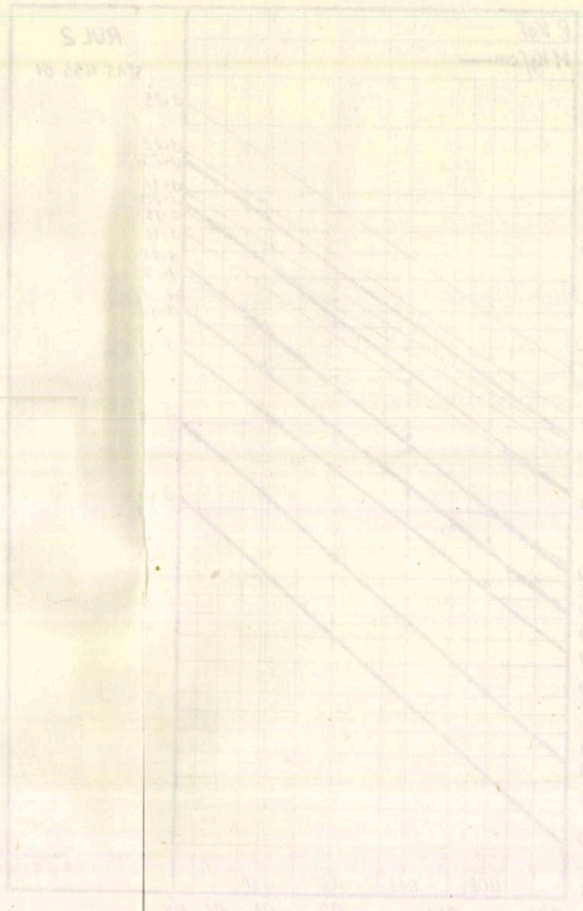
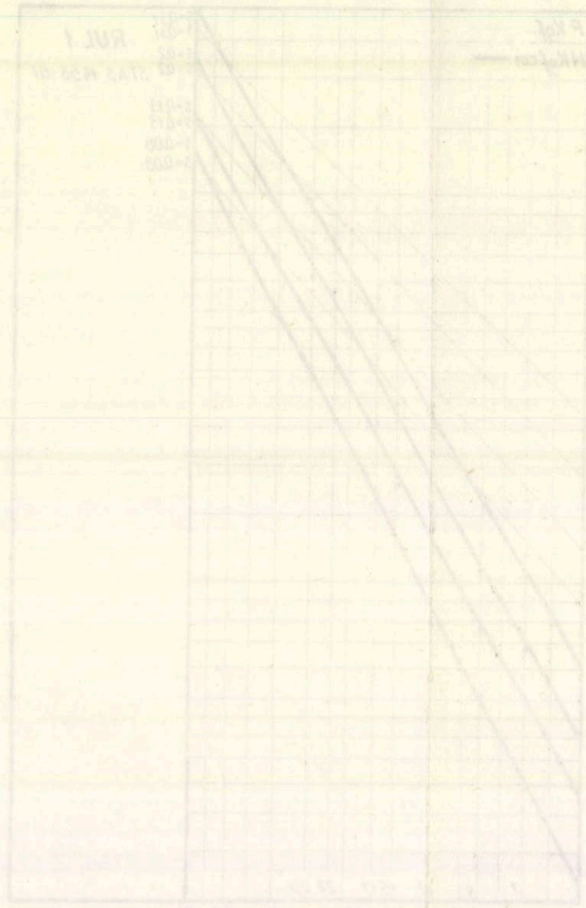


Fig. 4







BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

Д. К. 621.86

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК НА ПРИВОДНЫЕ ЦЕПИ

В. П. СЕРДЮК

Настоящая статья посвящена исследованию влияния центробежных сил, возникающих при работе цепной передачи, на нагрузку приводной цепи.

В течение длительного времени существовало мнение, что возникающее в цепи дополнительное натяжение от действия центробежных сил по мере увеличения скорости увеличивается.

В 1940 году было высказано предположение [1] что в цепи при высоких скоростях ее движения не возникают дополнительные натяжения, так как в этом случае центробежные силы воспринимаются

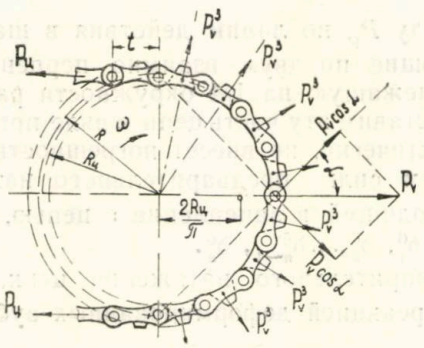


Рис. 1

зубьями звездочки и на цепь не передаются. Проведенные последующие исследования [2], [3] не дали должных результатов и вопрос о действии центробежных сил в цепных передачах остался открытым.

Цепь на звездочке цепной передачи располагается в виде половины периметра многоугольника (рис. 1). Предположим, что масса

одного звена сосредоточена в центре тяжести звена, а центр тяжести лежит на середине прямой, соединяющей шарниры звена (последнее допущение весьма близко к реальному). Тогда центры тяжести звеньев (расположенных на полуокружности звездочки) будут лежать на радиусе

$$R_ц = R\cos\frac{180°}{z}, \tag{1}$$

где z — число зубьев звездочки.

При принятых допущениях можно считать, что центробежная сила, развиваемая частью цепи, лежащей на полуокружности радиуса $R_ц$, будет приложена в центре тяжести этой полуокружности на радиусе

$$R_{цб} = \frac{2R\cos(180°/z)}{\pi}. \tag{2}$$

Величина центробежной силы будет определяться уравнением

$$P_V = m\omega^2 R_{цб}, \tag{3}$$

где m — масса цепи, лежащей на полуокружности, равная $m = q_0 z/(2g)$ (q_0 — вес одного звена), ω — угловая скорость звездочки.

Подставив значения m и $R_{цб}$ в уравнение (3), получим

$$P_V = 0{,}03\, q_0 z\omega^2 R\cos\frac{180°}{z}. \tag{4}$$

Перенесем силу P_V по линии действия в шарнир цепи и разложим на составляющие по двум взаимно перпендикулярным осям и рассмотрим цепь, лежащую на 1/4 окружности радиуса R.

Причем, представим эту часть цепи в виде прямолинейного участка (рис. 2). Это, практически, не внесет погрешности в наш анализ.

Под действием силы предварительного натяжения P_0 каждый зуб звездочки, входящий в зацепление с цепью, получит соответственно деформации δ_1^0, δ_2^0,..., δ_{n-1}^0, δ_n^0.

Сила P_0 предварительного натяжения цепи, будет уравновешиваться суммарной реакцией деформированных зубьев, т. е.

$$P_0 = P_1 + P_2 + \ldots + P_{n-1} + P_n = \sum_{i=1}^{i=n} P_i. \tag{5}$$

Суммарная деформация зубьев при этом будет

$$\delta_3^0 = \delta_1^0 + \delta_2^0 + \ldots + \delta_{n-1}^0 + \delta_n^0 = \sum_{i=1}^{i=n} \delta_i^0. \tag{6}$$

С другой стороны имеем

$$\delta_з^0 = \frac{P_0}{C_з}, \tag{7}$$

где $C_з$ — суммарная жесткость зубьев звездочки.

Одновременно получит удлинение и ветвь цепи (равная по длине межцентровому расстоянию цепной передачи)

$$\lambda_ц^0 = \frac{P_0}{C_ц}, \tag{8}$$

где $C_ц$ — жесткость цепи.

Уравнения (7), (8) будут справедливы при сделанном нами допущении, что нагрузка распределяется равномерно между всеми зубьями, входящими в зацепление со звездочкой и что жесткость всех зубьев одинакова. Учет неравномерности распределения нагрузки между пакетами не внесет существенных изменений в настоящую задачу, а только усложнит анализ.

При действии на рассматриваемую часть цепи центробежной силы T цепь будет находиться под действием силы $P_ц$, равной сумме центробежной силы T и реакции $P_з$ со стороны зубьев, т. е.

$$P_ц = T + P_з, \tag{9}$$

где $P_з = P'_1 + P'_2 + \ldots + P'_{n-1} + P'_n = \sum_{i=1}^{i=n} P'_i$ — суммарная реакция зубьев.

При этом удлинение цепи возрастает на величину $\Delta_ц$ и станет $\lambda'_ц$.

За счет дополнительного удлинения цепи деформация зубьев звездочки уменьшится на величину $\Delta_з$ и их суммарная деформация станет равной $\delta'_з$.

Аналогично предыдущему имеем

$$\delta'_з = \frac{P_з}{C_з}, \tag{10}$$

$$\lambda'_ц = \frac{P_ц}{C_ц} = \frac{T + P_з}{C_ц}. \tag{11}$$

Так как величина дополнительного удлинения цепи равна величине уменьшения деформации зубьев, т. е. $\Delta_з = \Delta_ц$, то

$$\lambda'_ц - \lambda_ц^0 = \delta_з^0 - \delta'_з, \tag{12}$$

или, с учетом формул (7), (8), (10), (11)

$$\frac{T + P_з}{C_ц} - \frac{P_0}{C_ц} = \frac{P_0}{C_з} - \frac{P_з}{C_з}, \tag{13}$$

откуда

(14) $$P_з = P_0 - T\frac{C_з}{C_з + C_ц}.$$

С учетом последнего уравнение (9) примет вид

(15) $$P_ц = P_0 + T\frac{C_ц}{C_ц + C_з}.$$

Величину центробежной силы T можно довести до такой величины, при которой деформированные зубья полностью восстановят первоначальное положение (рис. 2 *б*). Общее удлинение цепи при этом будет равно $\lambda_ц = \delta_з^0 + \lambda_ц^0$ (рис. 3), а деформация зубьев звездочки равна нулю.

Согласно графику (рис. 3) имеем

(16) $$P_0 = T\frac{\lambda_ц^0}{\lambda_ц^0 + \delta_з^0}.$$

С учетом (7), (8) уравнение (16) примет вид

(17) $$P_0 = T\frac{C_з}{C_з + C_ц}.$$

Подстановка значения (17) в уравнение (15) дает

(18) $$P_ц = T.$$

Таким образом, при условии $\lambda_ц = \delta_з^0 + \lambda_ц^0$, центробежная сила T будет полностью восприниматься цепью.

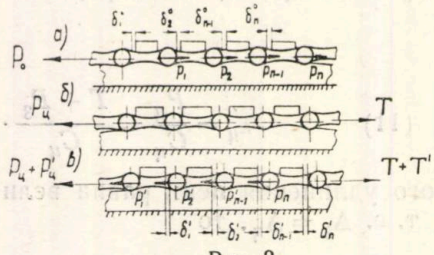


Рис. 2

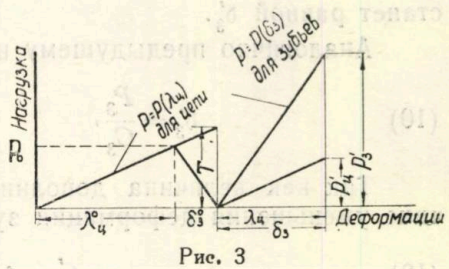


Рис. 3

При дальнейшем увеличении центробежной силы одновременно деформируются цепь и зубья звездочки. Пусть центробежная сила возросла на величину T_1 (рис. 2 *в*). Так как деформация цепи и зубьев одинаковы, то это увеличение центробежной силы распределится между цепью и зубьями пропорционально жесткости цепи и суммарной жесткости зубьев

$$\frac{P'_ц}{C_ц} = \frac{P'_з}{C_з}, \tag{19}$$

где $P'_з = P''_1 + P''_2 + \ldots + P''_{n-1} + P''_n = \sum_{i=1}^{i=n} P''_i$.

В свою очередь

$$T_1 = P'_ц + P'_з. \tag{20}$$

Решая совместно уравнения (19), (20), получим

$$P'_ц = T_1 \frac{C_ц}{C_з + C_ц}. \tag{21}$$

Суммарная нагрузка на цепь от действия центробежной силы будет определяться уравнением

$$P_{цΣ} = T + P'_ц = T + T_1 \frac{C_ц}{C_з + C_ц}, \tag{22}$$

но

$$T_1 = P_V \cos\alpha - T = 0{,}7\,P_V - T, \tag{23}$$

(при $\alpha = 45°$, рис. 1), тогда

$$P_{цΣ} = T \frac{C_з}{C_з + C_ц} + 0{,}7\,P_V \frac{C_ц}{P_з + P_ц}, \tag{24}$$

или (с учетом уравнения (17))

$$P_{цΣ} = P_0 + 0{,}7 P_V \frac{C_ц}{C_з + C_ц}. \tag{25}$$

Так как $C_з \gg C_ц$, то вторым слагаемым можно принебречь.

Таким образом, при расчете цепных передач (при высоких скоростях движения цепи) нет основания вводить в расчет дополнительную нагрузку на пепь от действия центробежных сил.

Поступила 27 IV 1965 г.

Киевский технологический институт легкой промышленности, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. * * * Product Engineering, 1940.
2. Попов В. Л., *Влияние центробежных сил инерции на натяжение ветвей в работающей цепной передаче.* В сб. ст. *Оцепных передачах,* Машгиз, М., 1955.

3. Кузнецова А. К., *Опытные исследования динамических нагрузок в цепных передачах.* В сб. ст. *О цепных передачах*, Машгиз, М., 1955.
4. Воробьев Н. В., *Цепные передачи.* Машгиз, М., 1962.

ASUPRA DETERMINĂRII SARCINILOR ÎN TRANSMISIILE CU LANŢ

(Rezumat)

Se cercetează teoretic influenţa forţelor centrifuge asupra tensiunilor din transmisiile cu lanţ, stabilindu-se următoarele:

a) mărimea forţei centrifuge ce apare în timpul funcţionării depinde de numărul verigilor lanţului ce angrenează cu roata dinţată;

b) încărcarea lanţului datorită forţei centrifuge este direct proporţională cu rigiditatea lanţului şi invers proporţională cu rigiditatea dinţilor roţii de angrenare;

c) în transmisiile cu lanţ, la viteze mari de deplasare ale lanţului, forţele centrifuge sînt preluate de dinţii roţii de angrenare şi nu se transmit lanţului.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C.Z. 669...61

CERCETĂRI TEORETICE ŞI EXPERIMENTALE ASUPRA DEBITĂRII METALELOR PRIN PROCEDEUL ELECTROEROZIV ANODOMEDANIC

DE

AUREL NANU, V. POPOVICI şi AL. NICHICI

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

În ultimii ani procedeele de prelucrare prin eroziune electrică a metalelor cunosc pe plan mondial o dezvoltare din ce în ce mai largă, orientată în spre extinderea domeniilor de aplicabilitate şi, în paralel cu aceasta, în spre aprofundarea fenomenelor fizico-chimice care le condiţionează.

În acest cadru, procedeul de prelucrare electroeroziv anodomecanic, bazat pe prelevarea de material pe cale electrochimică şi prin eroziune electrică, îşi găseşte o aplicare avantajoasă din punct de vedere tehnico-economic la debitarea metalelor greu prelucrabile prin procedeele clasice, la ascuţirea sculelor aşchietoare placate cu aliaje dure, precum şi la operaţii de rectificare.

Faţă de extinderea industrială a procedeului, cercetările privind esenţa fizică a fenomenelor ce au loc, interdependenţa diferiţilor factori ai procesului, precum şi posibilităţile de dirijare ale acestuia sînt sensibil rămase în urmă, au un pronunţat caracter empiric şi sînt în general unilaterale [1]...[4]. Această situaţie împiedică valorificarea superioară şi limitează perspectivele de dezvoltare ale procedeului.

Avînd în vedere aceste consideraţii, un colectiv al Catedrei de tehnologie mecanică de la Institutul politehnic din Timişoara se preocupă, începînd cu anul 1958, de studiul teoretico-experimental al procedeului electroeroziv anodomecanic în scopul evidenţierii legilor fundamentale şi pe această bază a determinării condiţiilor de optimizare ale procedeului în cazul debitării metalelor. Pentru aceasta, în prima etapă a cercetărilor s-a aprofundat teoretic prelevarea de material în procesul anodomecanic [5], s-a realizat o instalaţie de debitare a metalelor în condiţii de laborator [6], pe care s-au verificat concluziile cercetărilor teoretice şi s-a evidenţiat rolul unor factori fundamentali ca: presiunea dintre electrozi, natura lichidului de lucru şi densitatea curentului electric [7], [8].

Stabilindu-se posibilităţile de dirijare a procesului au putut fi determinate condiţiile de reglare automată a mişcării de avans [9], creîndu-se premisele realizării în a doua etapă a cercetărilor, a unei maşini de debitat prin procedeul

electroeroziv anodomecanic de concepţie originală, complet automatizată, cu performanţe tehnologice superioare.

În lucrarea de faţă se prezintă o sinteză a rezultatelor obţinute pînă în prezent.

2. Determinarea ecuaţiei productivităţii debitării electroerozive anodomecanice

La procedeul de debitare anodomecanică a metalelor prelevarea de metal se realizează sub acţiunea impulsurilor de curent generate în zona de interacţiune a suprafeţelor sculei şi piesei, datorită prezenţei unui lichid de lucru special, mişcării relative a sculei faţă de piesă şi presiunii exercitate între acestea, atunci cînd piesa este legată la polul pozitiv, iar scula la polul negativ al unei surse de curent continuu cu tensiunea de 20...30 V (fig. 1).

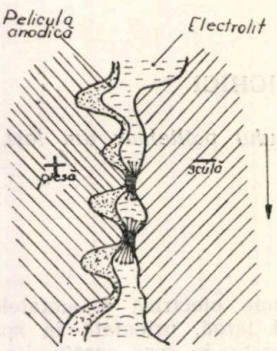


Fig. 1. — Schema de principiu a prelucrării anodomecanice.

Proprietatea deosebită a electroliţilor utilizaţi ca lichid de lucru (soluţii apoase de silicat de sodiu sau suspensii de caolin în apă) constă în formarea, la valori relativ mari ale densităţii de curent, a unei pelicule pasive tari, insolubilă, electroizolantă pe suprafaţa anodului. În consecinţă, la valori mici ale densităţii de curent acţionează mecanismul dizolvării anodice, deoarece pelicula pasivă se formează foarte lent. La densităţi mari de curent, cînd pelicula pasivă se formează intens, dizolvarea anodică este împiedicată şi acţionează mecanismul prelevării prin eroziune electrică în descărcările electrice nestaţionare de tipul intermediar scînteie-arc amorsate între anod şi catod prin îndepărtarea mecanică de către sculă a peliculei anodice la nivelul vîrfurilor microasperităţilor piesei [1]. În condiţiile obişnuite ale debitării metalelor, la care se urmăreşte obţinerea unei productivităţi maxime, predomină prelevarea prin eroziune electrică.

Pentru a determina productivitatea debitării este necesar să se cunoască cantitatea de metal G prelevată de anod în unitatea de timp (g/min) :

$$G = G_d + G_e, \tag{1}$$

unde G_d şi G_e sînt cantităţile de metal prelevate prin dizolvare anodică şi respectiv prin eroziune electrică în g/min [5].

Se remarcă faptul că, din punct de vedere fizic, prelevarea prin dizolvare anodică se realizează simultan cu prelevarea prin eroziune electrică, însă în afara suprafeţei anodului afectată de descărcări elec-

trice. Curentul electric total stabilit între catod și anod se concentrează în cea mai mare parte în descărcări electrice, prin restul suprafeței anodului, pe care are loc dizolvarea anodică, repartizîndu-se o parte mai mică.

Pentru a calcula cantitatea de metal prelevat în ipoteza unei densități de curent electric constantă pe întreaga suprafață a anodului este necesar ca la determinarea lui G_d să se țină seama de o suprafață redusă echivalentă S_d:

$$S_d = \xi_d S, \tag{2}$$

unde S este suprafața anodului, iar G_d — un coeficient adimensional cu valori între 0 și 1. Această ipoteză este justificată fizic prin aceea că dizolvarea anodică este mult mai intensă pe vîrful asperităților unde pelicula pasivă este mai subțire, iar cîmpul electric mai puternic [10].

Rezultă pe baza legii lui Faraday

$$G_d = jS_d\,\alpha = k_1 jS, \tag{3}$$

unde $k_1 = \xi_d \alpha$, cu α — echivalentul electrochimic, g/A min; j — densitatea curentului electric, A/cm²; S — suprafața anodului, cm².

Cantitatea de metal prelevată din anod în unitatea de timp prin eroziune electrică este

$$G_e = \frac{V\gamma}{t_0}, \tag{4}$$

unde V este volumul total de metal prelevat prin eroziune electrică de pe suprafața S a anodului pe durata unei descărcări, cm³; γ — greutatea specifică a metalului prelevat, g/cm³; t_0 — durata mijlocie a unei descărcări electrice în min.

Experiențele efectuate de autori, precum și observațiile altor cercetători [3], [4], atestă faptul că în condițiile procedeului de prelucrare electroeroziv anodomecanic există simultan mai multe descărcări electrice nestaționare.

Acest fenomen este determinat de prezența unei tensiuni electrice constante între electrozi și probabilitatea realizării unor condiții identice de amorsare a descărcărilor în mai multe puncte ale suprafeței.

Dacă n_0 este numărul mijlociu de descărcări electrice simultane ce apar pe unitatea de suprafață, pe întreaga suprafață prelucrată vor fi n descărcări:

$$n = n_0 S. \tag{5}$$

Numărul de descărcări electrice dezvoltate în unitatea de timp pe toată suprafața anodului va fi

$$N = \xi_n \frac{n_0 S}{t_0}, \tag{6}$$

unde ξ_n este un coeficient de simultaneitate al descărcărilor, ce ţine seama de gradul de suprapunere în timp al acestora, cu valoare cuprinsă între 0 şi 1.

Din [4] rezultă

$$n_0 = \alpha_0 \left\{ 1 - \alpha_2 \gamma_s^2 \left[p - \left(\alpha_3 - \frac{\alpha_4}{\gamma_s} \right) \right]^2 \right\}, \tag{7}$$

în care α_0, α_2, α_3, α_4 sînt constante; γ_s — greutatea specifică a lichidului de lucru, g/cm^3; p — presiunea exercitată de sculă asupra piesei, g/cm^2.

Rezultă

$$N = \frac{S}{t_0} \alpha_1 \left\{ 1 - \alpha_2 \gamma_s^2 \left[p - \left(\alpha_3 - \frac{\alpha_4}{\gamma_s} \right) \right]^2 \right\}, \tag{8}$$

unde $\alpha_1 = \xi_n \alpha_0$.

Ţinînd cont de existenţa simultană a mai multor descărcări electrice relaţia (4) devine

$$G_e = \frac{VN\gamma}{t_0}, \tag{9}$$

unde V este volumul de metal prelevat din anod la o descărcare electrică.

Cercetătorii fenomenului de eroziune electrică acceptă unanim natura electrotermică a acestuia [11].

Descărcarea electrică prin impuls produce pe suprafaţa anodului o sursă de căldură care în primă analiză poate fi considerată punctiformă şi instantanee.

Procesul transmiterii căldurii de la această sursă în interiorul materialului anodului, considerat omogen şi cu proprietăţi termofizice independente de temperatură, este descris de ecuaţia

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = a \nabla^2 \tau, \tag{10}$$

unde τ este temperatura, $a = \lambda / c\gamma$ — coeficientul de transmitere a căldurii, cm^2/min; λ — coeficientul de conductibilitate termică, cal/cm grad sec; c — căldura specifică, cal/g grad.

În condiţiile de mai sus va putea fi îndepărtat de pe suprafaţa anodului volumul de material cuprins în interiorul suprafeţei izoterme $\gamma = \gamma_{top}$ de formă sferică,

$$V_0 = \frac{2}{3} \pi r_{max}^3, \tag{11}$$

unde r_{max} este valoarea maximă în raport cu timpul a razei suprafeței izoterme $\tau=\tau_{top}$; ea se obține din rezolvarea ecuației (10) sub forma

$$r_{max}=\sqrt{\frac{1}{\pi e}}\sqrt[3]{\frac{Q}{\tau_t c\gamma}}, \tag{12}$$

unde e este baza logaritmilor naturali, Q — cantitatea de căldură transmisă anodului la o descărcare electrică.

Înlocuind (12) în (11) rezultă

$$I=\frac{2}{3}\pi\left(\frac{1}{\pi e}\right)^{3/2}\frac{Q}{\tau_t c\gamma}. \tag{13}$$

Cantitatea de căldură Q produsă la o descărcare electrică prin impuls și absorbită de materialul anodului este egală cu suma cantităților de căldură produse prin bombardament electronic Q_b și prin efect Joule-Lenz, Q_j în asperitățile bombardate:

$$Q=Q_b+Q_j. \tag{14}$$

Q_b reprezintă cota parte a energiei cinetice a electronilor frînați pe anod, care se transformă în căldură,

$$Q_b=0{,}24\,W_b. \tag{15}$$

W_b a fost determinat în [5] obținîndu-se expresia

$$W_b=\xi_s\frac{S_a q t_0^3 j E_s^2}{2m_e}, \tag{16}$$

în care ξ_s este un coeficient care arată cît din energia dezvoltată prin bombardament electronic se transformă în căldură; S_a — secțiunea petei anodice, cm²; m_e, q — masa, respectiv sarcina electrică a electronului; E_s — intensitatea cîmpului electric între electrozi, V/cm.

Rezultă:

$$Q_b=0{,}24\frac{\xi_s S_a q t_0^3 j E_s^2}{2m_e}=k_2 j E_s^2. \tag{17}$$

Căldura produsă prin efectul Joule-Lenz în asperitățile bombardate se poate exprima [5] prin relația

$$Q_j=0{,}24\,W_j, \tag{18}$$

$$W_j=I^2 R t_0=j^2\varrho\, V_a t_0. \tag{19}$$

Rezultă:

(20) $$Q_j = k_3 j^2 \varrho V_a,$$

unde $k_3 = 0{,}24\, t_0$; ϱ — rezistivitatea metalului anodului, Ω cm; V_a — volumul asperității, cm^3.

Înlocuind (17) și (20) în (14) rezultă

(21) $$Q = j(k_2 E_s^2 + k_3 j \varrho V_a)$$

și respectiv înlocuind (21) în (13) se obține

(22) $$V_0 = \frac{2}{3}\pi\left(\frac{1}{\pi e}\right)^{3/2} \frac{j(k_2 E_s^2 + k_3 j \varrho V_a)}{\tau_t c \gamma}.$$

În realitate se constată experimental că nu întreg volumul de metal adus în stare de topire, respectiv vaporizare, în faza cvazistatică a fenomenului de eroziune electrică este îndepărtat de pe suprafața anodului în faza dinamică a acestuia.

În craterele de eroziune formate pe anod și pe marginile acestuia se observă întotdeauna o cantitate de material topit și resolidificat, fapt remarcat și de alți cercetători [12].

Volumul de metal prelevat într-o descărcare electrică va fi deci

(23) $$V = \xi_e V_0,$$

unde ξ_e este un coeficient de evacuare a metalului topit.

Ținînd seama de (22) și (23) se poate scrie

(24) $$V = k_4 \frac{j(k_2 E_s^2 + k_3 j \varrho V_a)}{\tau_t c \gamma},$$

în care $k_4 = (2\pi/3)(\pi e)^{-3/2} \xi_e$.

Cantitatea de metal prelevată din anod prin eroziune electrică în unitatea de timp (9) va fi:

(25) $$G_e = k_5 j s \frac{1 - \alpha_2 \gamma_s^2 [p - (\alpha_3 - \alpha_4/\gamma_s)]^2}{\tau_t c t_0^2} [k_2 E_s^2 + k_3 j \varrho V_a],$$

unde $k_5 = k_4 \alpha_1$.

Cantitatea totală de metal prelevat din anod în unitatea de timp (1) va fi

(26) $$G = j s \left\{ k_1 + k_5 \frac{1 - \alpha_2 \gamma_s^2 [p - (\alpha_3 - \alpha_4/\gamma_s)]^2}{\tau_t c t_0^2} (k_2 E_s^2 + k_3 j \varrho V_a) \right\}.$$

În cazul debitării metalelor nu interesează atît cantitatea de metal îndepărtată prin debitare G (g/min), cît suprafața debitată în unitatea de timp S_{dm} (cm^2/min). G se poate exprima și prin intermediul lui S_{dm} sub forma

(27) $$G = S_{dm}\, h\, \gamma,$$

în care h este grosimea stratului de metal îndepărtat prin debitare. Rezultă

(28) $$S_{dm} = \frac{jS}{h\gamma}\left\{k_1 + k_5 \frac{1 - \alpha_2 \gamma_s^2 [p - (\alpha_3 - \alpha_4/\gamma_s)]^2}{\tau_t\, c t_0^2} (k_2 E_s^2 + k_3 j \varrho V_a)\right\}.$$

Ţinînd cont de modul de prelevare a metalului la debitarea electroerozivă anodomecanică se poate scrie din punct de vedere formal că :

(29) $$S_{dm} = S_{dm\,da} + S_{dm\,e},$$

în care $S_{dm\,da}$ este suprafaţa debitată în unitatea de timp corespunzătoare prelevării prin eroziune electrică.

La rîndul său, $S_{dm\,e}$ se poate descompune formal în

(30) $$S_{dm\,e} = S_{dm\,be} + S_{dm\,e},$$

unde $S_{dm\,be}$ corespunde căldurii degajate prin bombardament electronic, iar $S_{dm\,j}$ corespunde căldurii efectului Joule-Lenz în asperităţi.

Rezultă deci :

(31) $$S_{dm} = S_{dm\,da} + S_{dm\,be} + S_{dm\,j},$$

în care

(32) $$S_{dm\,da} = k_1 \frac{js}{h\gamma},$$

(33) $$S_{dm\,be} = k_2 k_5 \frac{jS}{h\gamma} \frac{1 - \alpha_2 \gamma_s^2 [p - (\alpha_3 - \alpha_4/\gamma_s)]^2}{\tau_t\, c t_0^2} E_s^2,$$

(34) $$S_{dm\,j} k_3 k_5 \frac{j^2 S \varrho\, v_a}{h\gamma} \frac{1 - \alpha_2 \gamma_s^2 [p - (\alpha_3 - \alpha_4/\gamma_s)]^2}{\tau_t\, c\, t_0^2}.$$

3. Cercetări privind productivitatea debitării electroerozive anodomecanice pe maşina de debitat cu bandă MAMB—1

Cercetările de mai sus împreună cu datele întîlnite în literatura de specialitate şi cele obţinute în laboratorul de prelucrări anodomecanice de la I.P.T. au stat la baza construirii primei maşini anodomecanice cu bandă din ţara noastră în anul 1961 [6].

Schema de principiu a maşinii este reprezentată în fig. 2.

Maşina MAMB—1 este destinată încercărilor de laborator pentru debitarea semifabricatelor cu diametrul maxim de 100 mm. Ca electrod

sculă se utilizează o bandă din oţel laminat la rece, cu conţinut mic de carbon, cu lăţimea de 20 mm şi grosimea de 0,8 mm. Viteza mişcării relative între sculă şi piesă este de 20 m/sec.

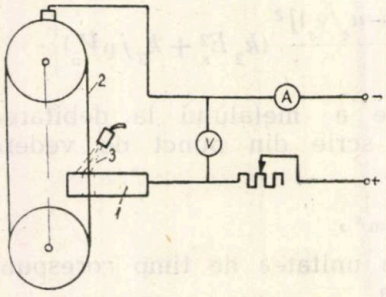


Fig. 2. — Schema de principiu a maşinii de debitat cu bandă prin procedeul electroeroziv anodomecanic.

Maşina este prevăzută cu un sistem de avans manual. Ca sursă de energie electrică se foloseşte un grup convertizor destinat încercării bateriilor de acumulatori, modificat corespunzător.

Pentru verificare experimentală a ecuaţiei debitării electroerozive anodo-mecanice (28), dedusă mai sus, au fost ridicate experimental principalele caracteristici tehnologice ale maşinii MAMB—1, în cazul debitării unor semifabricate din aliaje frecvent folosite în industrie şi anume : oţeluri nealiate (OLC—60, OSC—10), oţeluri aliate (RW 180,13 CN 25, Arc 4,20 C 130), fontă nodulară şi cupru [7].

Ca lichid de lucru s-a utilizat o soluţie apoasă de silicat de sodiu (sticlă solubilă) cu greutate specifică de 1,28 g/cm^3 şi modulul de 2,8.

Curbele de variaţie ale productivităţii debitării $S_{dm} = f(j)$, caracteristice pentru fiecare din aceste categorii de materiale, sînt prezentate în fig. 3.

Din analiza alurii acestor curbe se observă că productivitatea debitării este proporţională cu densitatea de curent j, ceea ce este în concordanţă cu ecuaţia (28). În acelaş timp alura curbelor corespunde calitativ şi cu dependenţa prelevării metalului de densitatea de curent indicată în literatură [1].

Faţă de cele trei zone distincte ale prelevării în funcţie de valoarea densităţii de curent (dizolvare anodică, prelevare prin eroziune electrică în descărcări nestaţionare şi prelevare prin eroziune electrică în descărcări staţionare) indicate în [1], regimurile electrice utilizate de autori plasează curbele $S_{dm} = f(j)$ în porţiunile corespunzătoare prelevării maxime prin dizolvare anodică şi prelevării prin descărcări nestaţionare. Domeniul corespunzător descărcărilor electrice staţionare, caracterizat prin instabilitatea procesului şi scăderea productivităţii, a fost evitat prin alegerea corespunzătoare a presiunii dintre electrozi.

Materialele debitate se plasează din punct de vedere al productivităţii debitării într-o gamă relativ restrînsă, existînd diferenţe mici ale lui S_{dm} pentru aceeaşi densitate de curent.

Se observă o prelevare mai mică la OLC 60 şi oţelul 13 CN 25 şi o prelevare maximă la cupru şi la oţelul rapid. În continuare se vor explica aceste fenomene.

Relaţia (32) arată că suprafaţa debitată în unitatea de timp corespunzătoare numai dizolvării anodice pentru aceeaşi secţiune S a mate-

rialului și aceeași densitate de curent j este invers proporțională cu greutatea specifică a materialului debitat. Rezultă că dizolvarea anodică este mai puțin activă la cupru ($\gamma = 8{,}9$ g/cm^3) decît la categoria oțelurilor și fontelor. În procesul debitării electroerozive anodomecanice este preponderentă dizolvarea anodică numai la densități mici de curent (fig. 3). Pentru densități de curent $j > 2{,}2\,10^2$ A/cm^2, deci în domenii în care prelevarea prin scîntei electrice este preponderentă, se constată că la aceleași densități de curent, oțelurile aliate — cu excepția oțelului rapid — și fonta prezintă productivități apropiate.

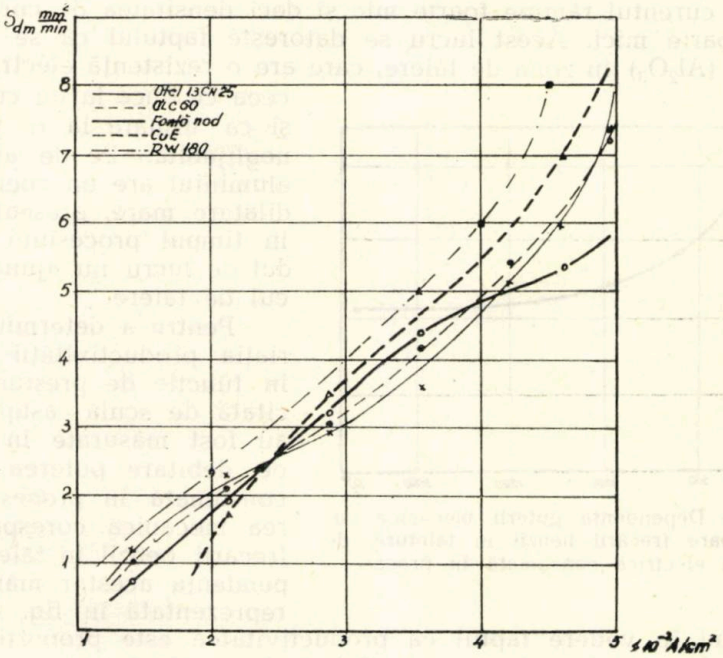


Fig. 3. — Dependența suprafeței debitate în unitatea de timp, de densitatea de curent în zona de lucru, pentru diferite categorii de material.

Acest lucru se datorește elementelor de aliere care formează carburi simple, duble sau complexe și care au temperaturi de topire în jur de 2 000 °C. În fonta nodulară există grafit liber cu temperatura de topire de 4 000 °C.

La oțelul rapid cantitatea de carburi e mai mare decît la celelalte oțeluri aliate ce s-au studiat. Experiența arată că prelevarea oțelului rapid, la aceeași densitate de curent, este totuși mai mare. Acest lucru se datorește faptului că deși $S_{dm\,be}$ e mai mic, deoa-

rece τ_t este mai mare, totuşi componenta $S_{dm\,j}$ este mai mare pentru că ϱ este mult mai mare datorită cantităţii mari de W şi Cr din aliaj (v. relaţiile (33) şi (34)); în consecinţă creşte $S_{dm\,e}$ (v. (30)).

În cazul cuprului unde productivitatea creşte de asemenea în raport cu oţelul situaţia e inversă faţă de oţelul rapid. Aici τ_t şi c sînt mici şi din acest motiv creşte $S_{dm\,be}$, creştere mai importantă decît scăderea în acelaş timp a lui $S_{dm\,j}$ datorită valorii mici a lui ϱ.

Încercările de a debita aluminiu au arătat că acesta se taie deosebit de greu prin procedeul anodomecanic. Indiferent de tensiunea aplicată, curentul rămîne foarte mic şi deci densitatea de curent j are valori foarte mici. Acest lucru se datoreşte faptului că se formează alumină (Al_2O_3) în zona de tăiere, care are o rezistenţă electrică mare, ceea ce duce la un curent mic şi ca urmare la o prelevare neglijabilă. Pe de altă parte aluminiul are un coeficient de dilatare mare, presează banda în timpul procesului şi lichidul de lucru nu ajunge la locul de tăiere.

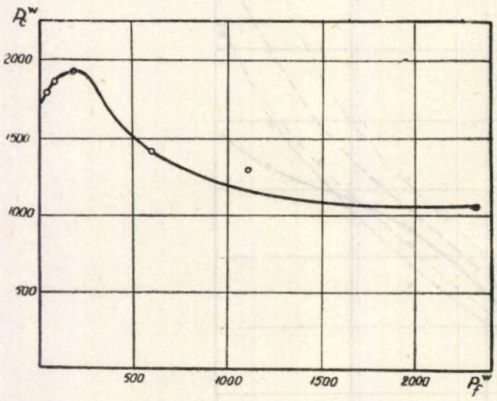


Fig. 4. — Dependenţa puterii mecanice corespunzătoare frecării benzii în tăietură, de puterea electrică consumată în proces.

Pentru a determina şi variaţia productivităţii debitării în funcţie de presiunea exercitată de sculă asupra piesei au fost măsurate în procesul de debitare puterea electrică consumată în proces şi puterea mecanică corespunzătoare frecării benzii în tăietură. Dependenţa acestor mărimi este reprezentată în fig. 4.

Avînd în vedere faptul că productivitatea este proporţională cu puterea electrică introdusă în spaţiul de lucru şi că puterea mecanică consumată prin frecarea benzii în tăietură

$$P_f = \frac{p s \mu v}{102} \text{ kW}, \tag{35}$$

(unde S este suprafaţa de contact între sculă şi piesă, cm^2; μ — coeficientul de frecare între suprafeţele în contact, ţinînd seama de influenţa peliculei anodice; v — viteza mişcării relative a sculei faţă de piesă, m/sec) este proporţională cu presiunea p, rezultă că la o altă scară, curba din fig. 4 reprezintă dependenţa productivităţii debitării de presiunea dintre sculă şi piesă.

Din analiza acestei curbe se evidențiază existența unei presiuni optime pentru care productivitatea debitării obține o valoare maximă, fapt remarcat și în literatură [1] pentru cazul general al prelucrării anodomecanice.

Depășindu-se această valoare puterea consumată prin frecarea benzii crește foarte mult, însă productivitatea scade. Fenomenul este explicabil dacă se ține seama de faptul că prin mărirea presiunii peste valoarea optimă pelicula anodică electroizolantă este îndepărtată de pe suprafețe mari și prin aceasta caracterul de impuls al procesului este anihilat, trecîndu-se în domeniul descărcărilor electrice staționare.

Productivitățile realizate la debitarea electroerozivă anodomecanică pe mașina MAMB—1 se plasează la nivelul rezultatelor din literatura de specialitate [13], [14] pentru regimuri de prelucrare și materiale similare.

4. Probleme de bază ale automatizării mișcării de avans la debitarea electroerozivă anodomecanică

În procesul debitării electroerozive prelevarea de material este determinată de puterea electrică introdusă sub formă de impulsuri de curent în zona de interacțiune sculă—piesă, respectiv de valorile medii ale curentului și tensiunii din această zonă.

Corespunzător variației acestora prelevarea de material se modifică și în consecință se modifică și viteza liniară de eroziune exprimată în mm/min.

În procesul reglării automate a avansului este firesc să se opereze cu viteza liniară de eroziune și nu cu suprafața debitată în unitatea de timp, așa cum s-a făcut în cazul productivității debitării, întrucît mișcarea de avans este rectilinie și interesează în primul rînd spațiul parcurs în unitatea de timp de organul care execută mișcarea de avans.

La fiecare dimensiune de material există anumite valori ale curentului și tensiunii pentru care viteza de eroziune este maximă (viteza de eroziune optimă).

Asigurarea debitării semifabricatelor într-o gamă mare de dimensiuni în condiții de productivitate maximă poate fi realizată numai cu ajutorul reglării automate a mișcării de avans.

Întrucît, la tensiune constantă pe spațiul de lucru, viteza de eroziune este determinată de curentul electric, rezultă ca mărime fundamentală, din punct de vedere al reglării, valoarea medie a curentului prin spațiul de lucru. Alegerea ca mărime fundamentală din punct de vedere al reglării a valorii medii a curentului nu înseamnă minimalizarea importanței celorlalți parametri ai procesului ca presiunea între sculă și piesă, viteza periferică a sculei, natura lichidului de lucru etc. În fond, la o analiză microscopică a fenomenelor din pro-

cesul de prelucrare, curentul electric în spaţiul de lucru este determinat de toţi parametrii enunţaţi şi în special de presiune, care determină distanţa fizică dintre sculă şi piesă.

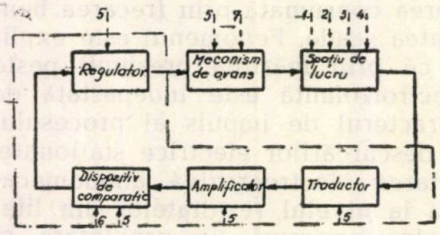


Fig. 5. — Schema bloc a reglării automate a mişcării de avans la debitarea electroerozivă: – – – – – circuit de transmitere a informaţiilor; – – ·– – surse de perturbaţii; *1* — modificarea tensiunii de alimentare cu curent continuu; 2 — modificarea lungimii de tăiere; 3 — modificarea curentului de scăpări; *4* — variaţia proprietăţilor lichidului de lucru; 5 — variaţia tensiunii de alimentare cu curent alternativ; o – o sistemul de reglare a avansului; 6 — valoarea impusă a mărimii de avans; 7 — mărimea de comandă.

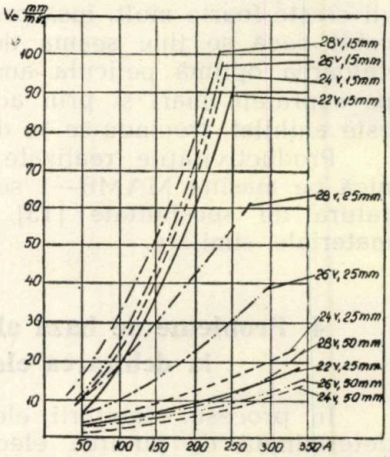


Fig. 6. — Dependenţa de curent a vitezei liniare de eroziune.

Pe baza celor de mai sus se propune următoarea schemă bloc a reglării avansului la debitarea electroerozivă (fig. 5) [9].

În vederea concretizării schemei bloc a regulatorului de avans a fost necesară determinarea, în primul rînd, a caracteristicilor de bază ale obiectului de regulat şi anume: a) variaţia vitezei de eroziune v_e în funcţie de curent, la tensiune între sculă şi piesă şi lungime a tăieturii constante; b) variaţia vitezei de eroziune v_e în funcţie de tensiune, la curent şi lungime a tăieturii constante.

Pentru aceasta s-au debitat semifabricate din oţel nealiat OL 38 cu lungimea tăieturii de 15, 25 şi 50 mm, la tensiuni electrice variind între 22...28 V şi curenţi medii între 100...300 A. Ca lichid de lucru s-a utilizat o suspensie de caolin în apă cu compoziţia 40% caolin, 0,3% CO_3Na_2 şi apă [8].

Rezultatele obţinute sînt reprezentate în fig. 6 şi 7.

Utilizînd aceste date s-au determinat prin calcul grafic funcţiile de transfer corespunzătoare

$$C_{vt} = \frac{\partial v_e}{\partial I} \tag{36}$$

şi

(37) $$C_{vu} = \frac{\partial v_e}{\partial U},$$

ca tangente trigonometrice ale unghiurilor formate de tangentele geometrice în punctul de funcţionare şi sensul pozitiv al axei absciselor. Rezultatele sînt reprezentate în fig. 8 şi 9.

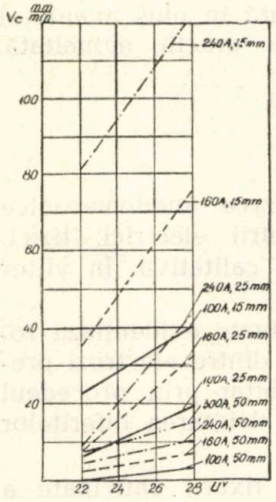


Fig. 7. — Dependenţa de tensiune a vitezei liniare de eroziune.

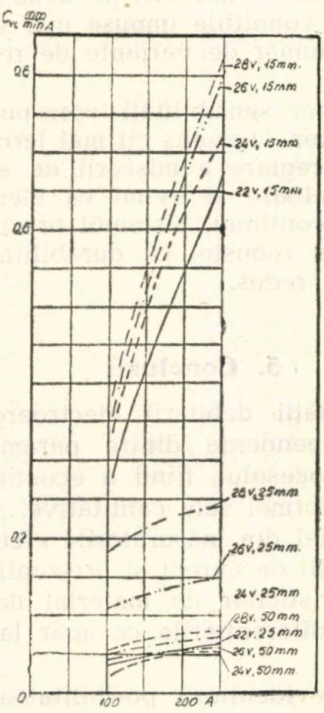


Fig. 8. — Dependenţa de curent a coeficientului C_{vi}.

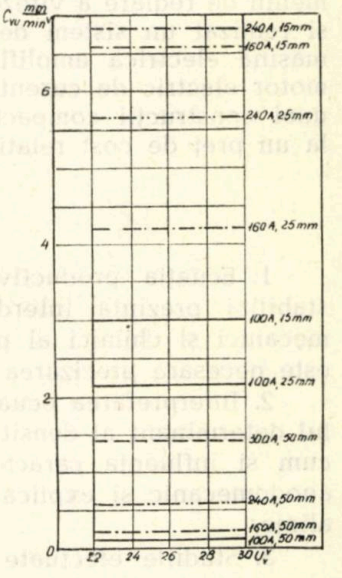


Fig. 9. —Dependenţa de tensiune a coeficientului C_{vu}.

În acest mod a putut fi determinat domeniul de variaţie a vitezelor de avans astfel încît pentru toată gama de dimensiuni a semifabricatelor (15...100 mm) să se realizeze debitarea în condiţii optime (tabelul 1).

Tabelul 1

Dimensiunea semifabricatului, mm	15	25	60	80	90	100
Viteza optimă de avans, mm/min	110	70	15	10	8	6

Schema de reglare a avansului trebuie să realizeze deci în permanenţă condiţia

$$v_{avans} = v_{eroziune\ optimă}. \tag{38}$$

În vederea găsirii unei soluţii de principiu şi constructive pentru sistemul de reglare automată a mişcării de avans la debitarea electroerozivă, care să satisfacă condiţiile impuse mai sus, a fost analizat în profunzime [9] un mare număr de variante de reglare recomandate în literatura de specialitate.

Pentru asigurarea unei sensibilităţi corespunzătoare într-un domeniu de reglare a vitezelor de avans cît mai larg a fost ales, proiectat şi realizat un sistem de reglare a mişcării de avans comandat cu o maşină electrică amplificatoare şi avînd ca element de execuţie un motor electric de curent continuu. Sistemul prezintă în plus avantajul unei construcţii compacte, robuste, cu durabilitate practic nelimitată, la un preţ de cost relativ redus.

5. Concluzii

1. Ecuaţia productivităţii debitării electroerozive anodomecanice stabilită prezintă interdependenţa dintre parametrii electrici, fizici, mecanici şi chimici ai procesului, fiind o ecuaţie calitativă. În viitor este necesară precizarea formei sale cantitative.

2. Interpretarea ecuaţiei din măsurătorile efectuate evidenţiază rolul determinant al densităţii de curent şi presiunii dintre electrozi precum şi influenţa caracteristicilor de material debitat prin procedeul anodomecanic şi explică diferenţierile ce apar la debitarea diferitelor aliaje.

3. Studiile efectuate evidenţiază posibilitatea fixării anticipate a parametrilor electrici şi mecanici în scopul realizării unor parametri tehnologici impuşi ai debitării.

4. Determinarea variabilelor fundamentale ale automatizării duce la optimizarea debitării.

Institutul politehnic, Timişoara

BIBLIOGRAFIE

1. Гусев В, Н., *Анодно-механическая обработка металлов.* Машгиз, М.,1952.
2. Попилов Л. Я., *Электрические методы обработки металлов.* Машгиз, М., 1958.
3. Круглов А. И., Круглова С. К., *Некоторые сведения о механизме разряда при электроискровом разрезании металлов.* В *Проблемы электрической обработки металлов.* Изд. АН СССР, 1962.
4. Singer M., *Productivitatea şi calitatea suprafeţei în prelucrarea anodomecanică a metalelor.* Autoreferatul tezei de dizertaţie, Lit. Înv., Braşov, 1956.

5. Nanu A., *Fundamentarea teoretică a principalelor fenomene constatate experimental la prelucrarea anodomecanică a metalelor.* Bul. şt. şi tehn. al Inst. polit. Timişoara, 1961, **VI (XX)**, 2, pp. 133—145.
6. Nanu A., Nichici A., Popovici V., *Maşina anodomecanică de tăiat cu bandă MAMB—1.* St. şi cerc. şt., Şt. tehn., Acad. R.P.R., Baza cerc. şt. Timişoara, 1963, **X**, 2, pp. 377—389.
7. — *Cercetări teoretice şi experimentale asupra productivităţii debitării electroerozive anodomecanice la maşina MAMB—1.* St. şi cerc. şt., Şt. tehn., Acad. R.P.R., Baza cerc. şt. Timişoara, 1963, **X**, 2, pp. 391—400.
8. Popovici V., *Utilizarea suspensiilor de caolin în apă la debitarea electroerozivă anodomecanică.* Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Timişoara, 1964.
9. Nanu A., Popovici V., Nichici A., Achimescu N., *Determinarea condiţiilor de reglare automată a avansului la debitarea electroerozivă.* Bul. şt. şi tehn. al Inst. polit. Timişoara, 1964, **IX (XXIII)**, 2, pp. 419—430.
10. Popilov L. I., *Tehnologia lustruirii electrolitice a metalelor.* I.D.T., Buc., 1955 (trad. din l. rusă).
11. Зингерман А. С., Лившиц А. Л., *О физической природе электроэрозионной обработки металлов.* ИВУЗ, Электромеханика, 1959, *7*, стр. 78 — 93.
12. Могилевский И. З., Кутсар А. Р., *Исследование продуктов эрозии, получающихся при электроискровой обработке металлов.* В *Проблемы электрической обработки металлов*, Изд. АН СССР, 1962.
13. Космачев И. Г., *Обработка металлов анодномеханическим способом.* Машгиз, М., 1961.
14. Попилов Л. Я., *Электрическая и ультразвуковая обработка.* Машгиз, М., 1962.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СРЕЗКИ МЕТАЛОВ АНОДОМЕХАНИЧЕСКИМ ЭЛЕКТРОЭРОЗИВНЫМ СПОСОБОМ

(Резюме)

Устанавливается уравнение производительности срезки металлов анодомеханическим электроэрозивным способом, а также и экпериментальная проверка его. Указывается возможность оптимизации етого способа при помощи автоматизации.

Обьяснение рисков

Рис. 1. — Принципиальная схема анодомеханической обработки.

Рис. 2. — Принципиальная схема ленточной машины дхя срезки анодомеханическим электроэрозивным способом.

Рис. 3. — Зависимость срезанной поверхности в единицу времени от плотности тока в рабочей зон , для различных сортов материала.

Рис. 4. — Зчвисимость механической мощности соответствующей трению ленты в резке от израсходованной электрической мощности.

Рис. 5. — Блок-схема автоматического регулирования движения поступления при электроэрозивной срезке: ——— цепь передачи информации; - - - - - - источники возмущения; *1* — изменение напряжения питания постоянным током; *2* — изменение длины резки; *3* — изменение тока утечек; *4* — вариация свойств рабочей жидкости; *5* — вариация напряжения питания переменным током; -·- -·-· регулирующая система поступления; *6* — заданное значение величины поступления; *7* — величина управления.

Рис. 6. — Зависимость линейной скорости эрозии от тока.

Рис. 7. — Зависимость линейной скорости эрозии от напряжения.

Рис. 8. — Зависимость коэффициента C_{vi} от тока.

Рис. 9. — Зависимость коэффициента C_{vu} от напряжения.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C.Z. 669—15

NORMALIZRREA CU FLACĂRĂ GAZ METAN A OŢELURILOR SUDATE DE TIP Cr-Mo-V

DE

GH. IONESCU, DOINA COSTESCU şi LUCIAN SCOROBEŢIU

1. Utilajul termocentralelor se realizează din oţeluri complex aliate pentru a corespunde condiţiilor de funcţionare cu parametri termomecanici foarte ridicaţi (265 °C, 140 ata).

Realizarea acestor utilaje utilizează pe scară largă tehnica sudării. Or sudabilitatea acestor aliaje este condiţionată şi implică o serie de măsuri tehnologice pentru a obţine suduri de calitate. Printre măsurile preconizate sînt preîncălzirea şi tratamentul termic după sudare pentru a elimina condiţiile generatoare de tensiuni şi fisuri, obţinînd astfel structuri apropiate de echilibrul structural [1]. Tratamentele frecvent folosite după sudare sînt recoacerea de detensionare sau normalizarea. În urma încercărilor făcute de autori se consideră mai eficientă normalizarea, mai ales la oţelurile aliate [2].

Dintre oţelurile folosite la construcţia utilajelor în cauză se consideră bune cele de tip Cr-Mo-V care pentru aceeaşi parametri termomecanici prezintă o sudabilitate mult mai bună, permiţînd executarea lucrărilor de sudare mai simplu, şi sînt mai ieftine [3].

Oţelurile considerate au compoziţia : 0,09...0,15% C, 0,15...0,35% Si, 0,45...0,65% Mn, 0,4...0,65% Cr, 0,4...1% Mo, 0,20...0,35% V, materialele utilizate avînd grosimea 10...40 mm.

Pentru încălzire s-a adoptat procedeul cu flacără gaz metan pentru că prezintă o serie de avantaje faţă de încălzirea prin inducţie. Printre avantajele instalaţiei cu gaz metan se consideră forma constructivă simplă, uşor manevrabilă, sigură în exploatare, uşurinţa de obţinere a gazului metan în condiţiile noastre, timpul de preîncălzire şi încălzire mult redus faţă de procedeul electric, mai ales în cazul pieselor groase.

În ceea ce priveşte încălzirea prin inducţie instalaţiile sînt de putere relativ mare şi fiind monofazate conduc la un grad de dezechilibrare mare a reţelei electrice, sînt mult mai scumpe şi complexe, cu putere reactivă consumată mare.

2. Se consideră necesară o instalaţie de încălzire care să asigure realizarea încălzirii tehnologice a sudurii. Se prevede pe baza consideraţiilor arătate o instalaţie de încălzire cu flacără gaz metan-aer. Instalaţia s-a conceput pentru tratamentul termic al conductelor cu diametre 45...426 mm şi grosimi 4...10 mm la conductele mici şi 10...40 mm la cele mari. Corpul încălzitor realizat poate fi adaptat însă şi în funcţie de configuraţia piesei de încălzit, atît pentru secţiuni circulare cît şi plane, el fiind un încălzitor circular, ce permite încălzirea locală şi continuă în planul cusăturii. Încălzirea piesei se realizează convectiv local şi difuziv prin convecţie.

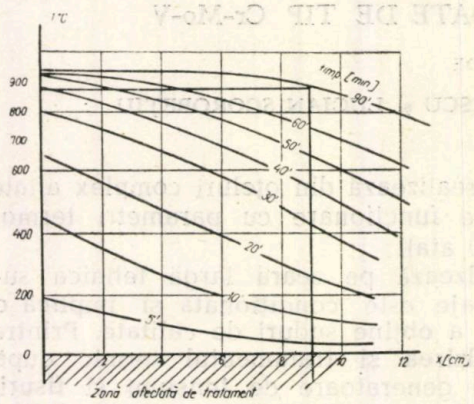


Fig. 1. — Regimul tranzitoriu al încălzirii locale a conductelor ∅ 219 × 32 mm

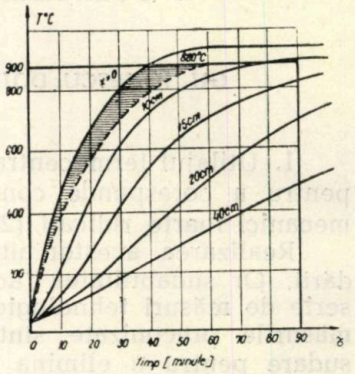


Fig. 2. — Regimul termic al încălzirii locale la conducta ∅ 219 × 32 mm.

Temperaturile care trebuie realizate pentru tratamentul termic de normalizare sînt 880...920 °C. Temperatura punctului de transformare pentru cîteva oţeluri frecvent folosite s-a stabilit prin metoda dilatometrică sau utilizînd diagramele de descompunere continuă a austenitei în cazul cînd erau disponibile, obţinîndu-se astfel temperaturile de austenitizare θ_a între 860 °...900 °C. Parametrii tratamentului termic prin normalizare s-au determinat prin calculul termodinamic al procesului de încălzire a unui corp cilindric (conductă) cu pereţi groşi din oţel Cr-Mo-V. În acest scop s-au calculat şi elementele corpului încălzitor care asigură condiţiile de încălzire a conductelor atît în vederea normalizării cît şi a altor procedee de tratament termic sau a încălzirilor tehnologice necesare unei bune sudabilităţi a aliajelor. În aceste calcule s-a ţinut seama de ecuaţiile transmiterii căldurii pe elementele de conductă.

Soluţia generală a acestor ecuaţii, ţinînd seama şi de bilanţul termic al încălzirii, se prezintă sub forma de integrală dintr-o funcţie Bessel, dată grafic în fig. 1, în care se reprezintă regimul tranzitoriu al încălzirii locale în cazul unei conducte ∅ 219 × 32 mm.

Legea repartizării căldurii este reprezentată prin curbele din fig. 2, de unde rezultă variația căldurii necesare normalizării în timp. Variația căldurii se aplică numai unei zone înguste în jurul sursei cum indică fig. 3, în care sînt figurate izotermele procesului de încălzire. Variația și repartizarea izotermelor transmiterii căldurii dată de sursă în jurul cusăturii și pe adîncimea materialului s-au dedus din diagramele regimului tranzitoriu al încălzirii, date în fig. 1. S-a avut în vedere că la distanțe mari de axa sursei variația temperaturii este aproape liniară și paralelă cu axa cusăturii. În imediata apropiere de axa sursei variația temperaturii este reprezentată prin curbe înclinate la 45°, iar pe măsura îndepărtării de axa sursei spre zone mai reci tangenta acestor izoterme crește după cum se indică în fig. 3.

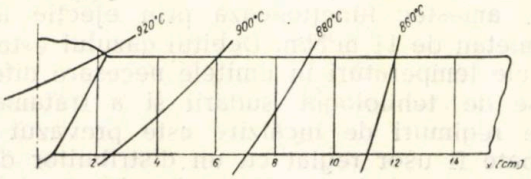


Fig. 3. — Izotermele încălzirii.

Relativ la realizarea regimului de echilibru, cînd se ajunge la temperatura necesară normalizării, repartizarea izotermelor din fig. 3 denotă că temperatura normalizării de 880 °...920 °C se întinde pe o zonă de 9 cm de axa sursei. Această zonă încălzită la temperatura normalizării cuprinde atît zona de trecere de la cusătură spre metalul de bază cît și cea influențată termic (ZIT) precum și metalul de bază.

Lățimea încălzită rezultată din fig. 3 corespunde scopului urmărit și se încadrează în normele prescrise de furnizorii echipamentelor sudate ale centrelor termoelectrice și în normele interne ale întreprinderii de montaj a utilajelor, care prevăd că lățimea zonei de încălzire la tratamentele termice de o parte și alta a axei cusăturii să fie cel puțin de două ori grosimea peretelui piesei sudate sau de trei ori lățimea cusăturii [4]. Această prevedere este întocmai îndeplinită cînd se obține debitul de amestec de gaz metan-aer reglat pentru încălzirea piesei date.

3. În vederea tratamentelor termice și a necesităților de preîncălzire și încălzire tehnologică la sudare s-a realizat o instalație de încălzire care asigură condițiile de încălzire prescrise (fig. 4 și fig. 5).

La calculul corpului încălzitor s-a ținut seama de temperatura flăcării arzătoarelor de gaz metan deschise, care asigură condițiile de ardere completă și cinetica de reacție în frontul flăcării la valori care limitează : a) excesul de aer la 1,2...1,4, ceea ce impune dozajul și camera de amestec ; b) temperatura flăcărilor la 1 200...1 400 °C ; c) vite-

zele de curgere în frontul de flacără, corelate de desfăşurarea reacţiilor la temperatura de ardere, 0,6...1,2 m/s.

Pe baza acestor consideraţii s-a dimensionat camera de amestec şi secţiunile arzătorului circular pentru a corespunde debitului necesar prevăzut de procesul tehnologic al încălzirii.

Instalaţia realizată în acest scop se caracterizează prin corpul încălzitor cu 3 rînduri de fante avînd în total 90 de orificii cu secţiunea fiecărei fante de 0,33 cm^2, necesare asigurării debitului de amestec de ardere. Orificiile sînt izolate unul de altul prin mortar refractar. Sectorul inelar cu fante este articulat sistem cleşte cum rezultă din fig. 4, pentru a fi adaptabil la încălzirea conductelor. Instalaţia de încălzire este prevăzută cu o suflantă proprie care asigură debitul aerului la p_{aer} = 80...100 mm col. apă şi a gazului la p_{gaz} = 120...150 mm col. apă. Camera de amestec funcţionează prin ejecţie laminară, cu un debit a gazului metan de 11 m^3N/h. Debitul gazului este reglabil pentru a asigura diferitele temperaturi în limitele necesare diferitelor regimuri termice prescrise de tehnologia sudării şi a tratamentelor termice. Pentru diferitele regimuri de încălzire este prevăzut debitul de gaz necesar, care poate fi uşor reglat cu un distribuitor de gaz şi aer ce permite realizarea acestui lucru. Se mai asigură stabilitatea flăcării realizînd viteza maximă de încălzire de 20 °C/min. Instalaţia este uşor manevrabilă, avînd 30 kg, şi este adaptabilă în orice poziţie.

4. S-a aplicat normalizarea după sudare pe diferite dimensiuni de conducte. Tratamentul termic s-a aplicat pe un oţel avînd 0,1...0,15% C, 0,15...0,25% Si, 0,45...0,65% Mn, 0,4...0,5% Cr, 0,9...1,00% Mo, 0,20... 0,35% V. Regimul de normalizare a constat din încălzirea cu flacără gaz metan-aer la 880...920 °C, timp de 1 oră, cu menţinere de 30 min, urmată de o răcire în aer. Durata tratamentului este mai redusă decît a celui prin inducţie, care necesită un timp dublu.

S-au prelevat epruvete pentru verificarea caracteristicilor mecanice în urma normalizării. Pentru comparaţie s-au executat şi încercări de recoacere. În urma acestor tratamente termice s-au obţinut rezultatele din tabelul 1. Rezultatul îndoirii aplicată pe epruvete prelevate din diferite zone dă valoarea medie $\alpha = 128{,}5^0$.

Din datele obţinute se constată că rezultatele sînt favorabile, mai ales contracţia şi rezilienţa, care confirmă omogenitatea şi tenacitatea sudurii în urma normalizării cu flacără gaz metan.

Tabelul 1

Tratamentul termic	σ_r, kgf/mm²	δ_{10}, %	ψ, %	KCU, kgfm/cm²
Netratat	89	7	30	8,7
Recopt	65	15	54	12,8
Normalizat	73	10,5	37	23

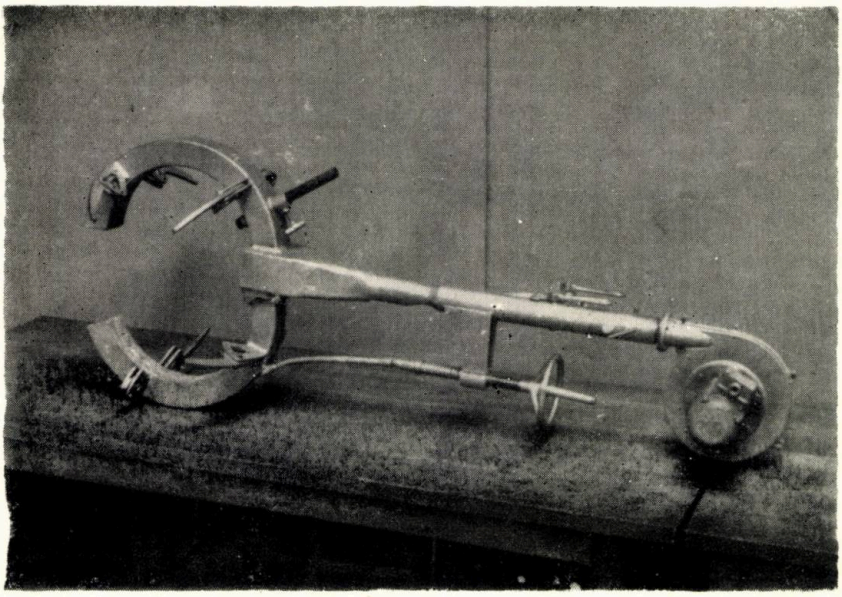


Fig. 4. — Instalaţia de încălzire cu corpuri încălzitoare sistem cleşte deschise.

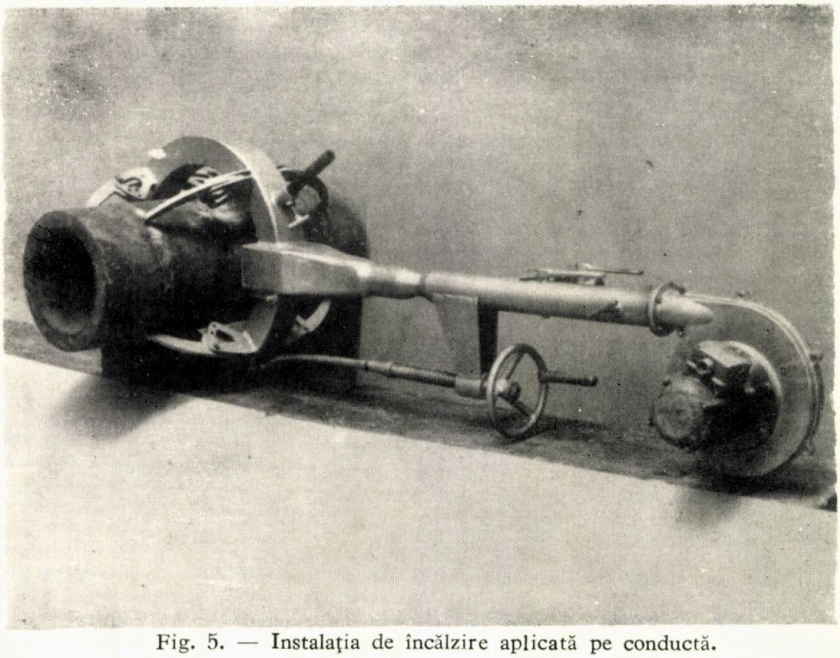


Fig. 5. — Instalaţia de încălzire aplicată pe conductă.

S-a cercetat și variația durității pe trei zone în sudura netratată (fig. 6...8). Se constată că duritatea în sudura netratată are vîrfuri peste 330 HV, în sudura recoaptă duritatea variază pe diferite zone între 160...185 HV cu variații pronunțate, iar în sudura normalizată între 160...145 HV, cu o repartizare mai uniformă. Cum duritatea în sudura netratată depășește limitele admise de norme iar sudura normalizată se încadrează în aceste norme [1], duritatea mărită în zona influențată termic favorizează formarea fisurilor în sudura netratată.

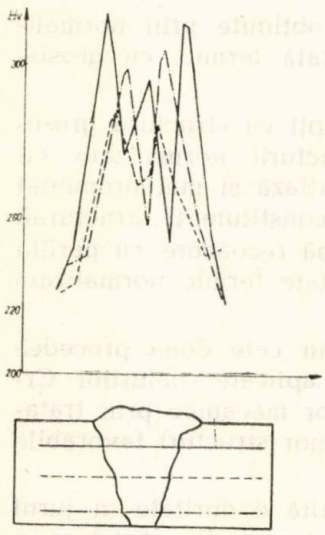


Fig. 6. — Variația durității pe sudura netratată.

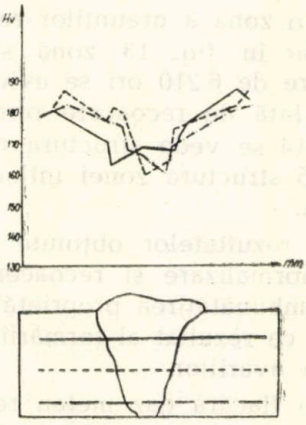


Fig. 7. — Variația durității pe sudura normalizată.

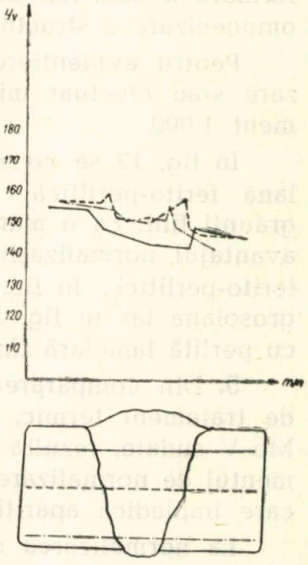


Fig. 8. Variația durității pe sudura normalizată.

Micrografiile recoltate din diferitele zone caracteristice ale sudurii netratate, recoapte și normalizate sînt reproduse în fig. 9...15 la diferite măriri. Sudura netratată în cusătură (fig. 9 *a*) se caracterizează prin structură Widmannstätten, zona influențată termic (fig. 9 *b*) se caracterizează printr-o structură neuniformă cu variații mari ale cristalelor de ferită și perlită în insule de grăunți de ferită care variază între punctajul 4...5; macrostructura cusăturii (fig. 9 *c*) indică o bună pătrundere a sudurii.

În fig. 10 se vede influența recoacerii, micrografia cusăturii recoapte (fig. 10 *a*) cu o structură formată din cristale de ferită cu granulație variată mărită între punctajul 4...5 prezentînd dispersii fine de carburi; zona influențată termic (fig. 10 *b*) are o structură feritoperlitică cu un punctaj între 5...6 și o repartizare diferențiată și neuniformă a grăunților; fig. 10 *c* reprezintă macrostructura cusăturii omogenizate, fără a fi vizibilă distinct zona influențată termic.

În fig. 11 sînt date micro și macrostructurile sudurii normalizate, cu structura caracteristică avînd grăunți foarte fini de ferită, punctaj 6...8 în sudură (fig. 11 *a*), structura zonei influențate termic (fig. 11 *b*) și macrostructura cusăturii (fig. 11 *c*). Structura prezintă uniformitate și omogenitate pronunțată a structurii caracteristice normalizării pentru îmbunătățirea caracteristicilor mecanice. Structura omogenă fină împreună cu duritatea scăzută uniformă asigură eliminarea condițiilor de formare a fisurilor. Se evidențiază în macrografie buna pătrundere și omogenizare a structurii.

Pentru evidențierea structurii avantajoase obținute prin normalizare s-au efectuat micrografii în zona influențată termic, cu grosisment 1 000.

În fig. 12 se vede o zonă a grăunților recopți cu structură grosolană ferito-perlitică, iar în fig. 13 zona structurii normalizate cu grăunți fini. La o mărire de 6 210 ori se evidențiază și mai pronunțat avantajul normalizării față de recoacere prin constituienți structurali ferito-perlitici ; în fig. 14 se vede structura după recoacere cu perlită grosolană iar în fig. 15 structura zonei influențate termic normalizată cu perlită lamelară fină.

5. Din compararea rezultatelor obținute prin cele două procedee de tratament termic, normalizare și recoacere aplicate oțelurilor Cr-Mo-V sudate, rezultă îmbunătățirea proprietăților mecanice prin tratamentul de normalizare, ca rezultat al formării unor structuri favorabile care împiedică apariția avariilor.

La normalizarea cu flacără gaz metan rezultă o duritate în jurul lui 145...160 HV, care asigură proprietăți plastice sudurii ; structura în zona influențată termic este fină și uniformă cu un punctaj 5...8, prevăzut de beneficiar.

Calculul de similitudine termică a permis stabilirea a patru tipuri de corpuri încălzitoare ce satisfac gama dimensiunilor de utilaje folosite în montaje. Timpul total al tratamentului termic prin normalizare este redus. Nu se constată o decarburare sau carburare a zonei normalizate.

Ținînd seama de prețul actual al energiei electrice și al gazului metan, de durata încălzirii și a tratamentului termic în cazul încălzirii prin inducție și cu gaz metan, de rezultatele favorabile obținute calitativ structural precum și de avantajele tehnologice, conchidem că tratamentul prin normalizare cu flacără gaz metan este un procedeu avantajos, la nivel corespunzător, adecvat materialelor sudate cu dimensiuni și grosimi mari.

Primit la 31 I 1966

Institutul politehnic, Brașov

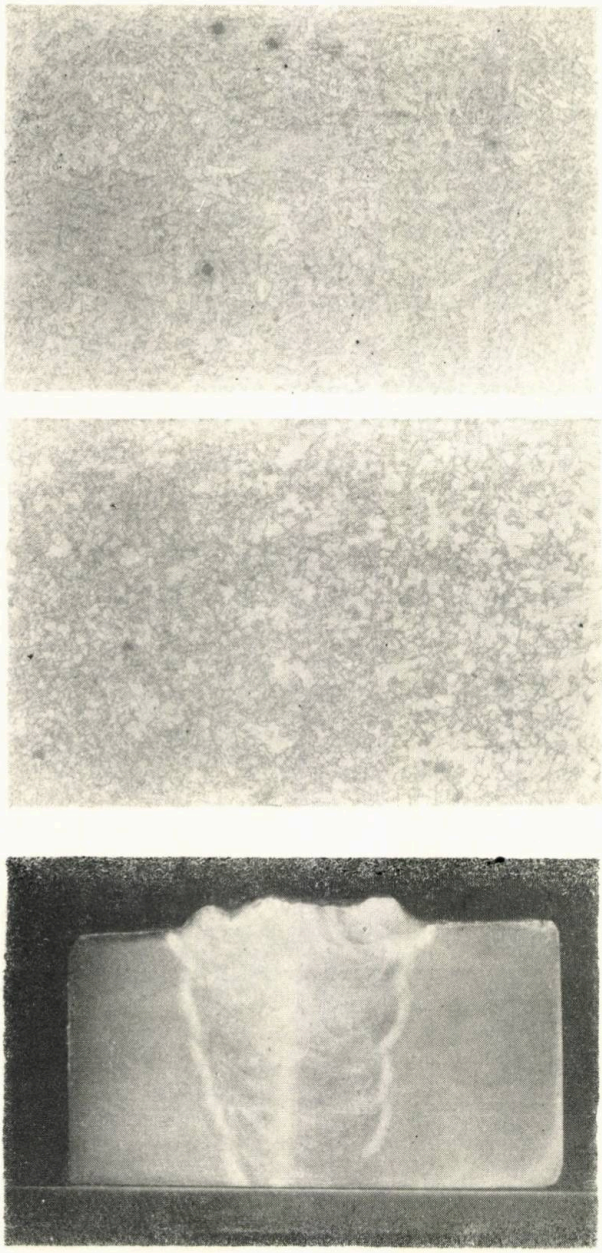


Fig 9. — Micrografia și macrografia sudurii netratate: *a* — × 200; *b* — × 200; *c* — × 1.

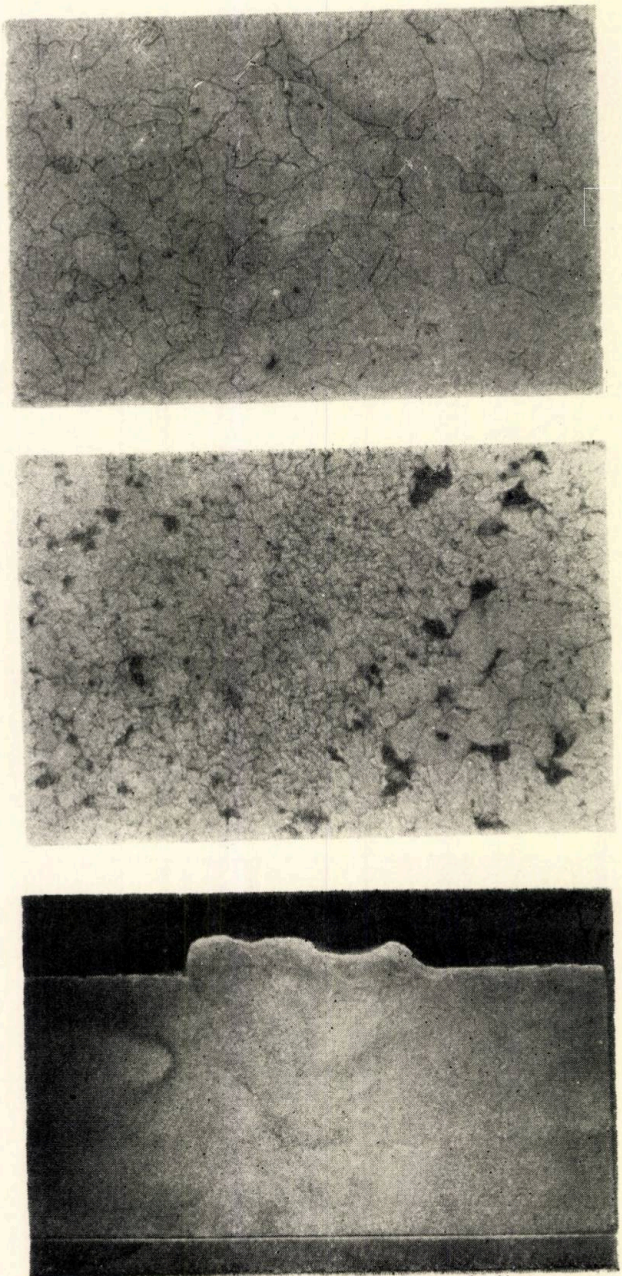


Fig. 10. — Micrografia şi macrografia sudurii recoapte: *a* — × 200; *b* — × 200; *c* — × 1.

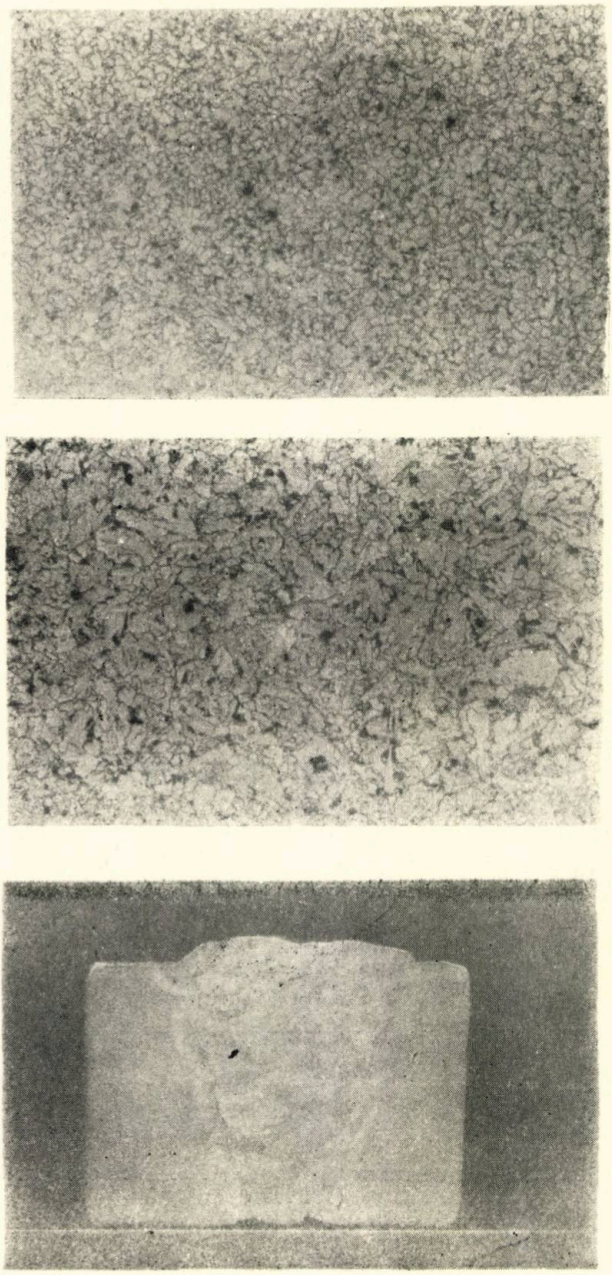


Fig. 11. — Micrografia şi macrografia sudurii normalizate: *a* — × 200; *b* — × 200; *c* — × 1.

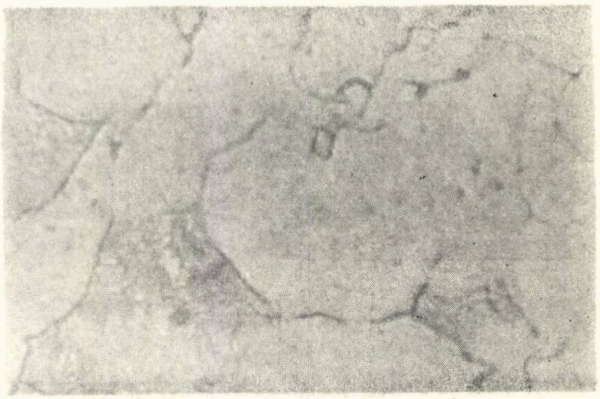


Fig. 12. — Structura zonei de influenţă termică recoaptă (× 1 000).

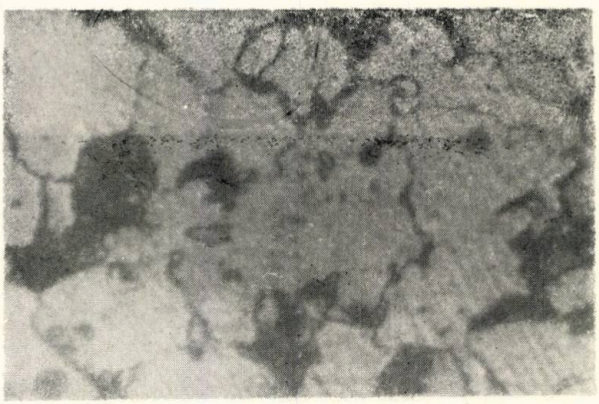


Fig. 13. — Structura zonei influenţate termic normalizată (×1 000).

Fig. 14. — Structura zonei influenţate termic recoaptă (×6210).

Fig. 15. — Structura zonei influenţate termic normalizată (× 6210).

BIBLIOGRAFIE

1. Seferian D., *La Métallurgie de la soudure.* Dunod, Paris, 1959.
2. Ionescu Gh. şi colab., *Utilaj pentru tratamentul termic prin flacără gaz metan.* Comunicările celei de a V-a Conferinţe de sudură şi încercări de metale, Baza de cerc. şt. a Academiei Republicii Socialiste România, filiala Timişoara, septembrie 1965.
3. Forje Al. şi colab., *Criterii pentru determinarea sudabilităţii unor oţeluri speciale folosite în montajul centralelor termoelectrice.* Comunicările celei de a V-a Conferinţe de sudură şi încercări de metale, Baza de cerc. şt. a Academiei Republicii Socialiste România, filiala Timişoara, septembrie 1965.
4. *** *Normative interne, privind procesul tehnologic de sudare şi control a sudărilor pe şantierele de Montaj Centrale Electrice.* I.M.C.E., Buc., 1965.

НОРМАЛИЗАЦИЯ ГАЗОВЫМ ПЛАМЕНЕМ СВАРЕНЫХ СТАЛЕЙ ТИПА Cr-Mo-V

(Резюме)

Предлагается способ термической обработки для нормализации сварки легированной стали Cr-Mo-V, пользуемой в монтажных работах термо-электрических станций.

Установка для нагрева реализирована авторами.

Анализируется выгодность нормализации газовым пламенем после произведенной сварки по сравнению с отжигом другими способами.

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Переходной режим местного нагрева труб размером 219×32 мм.
Рис. 2. — Тепловой режим местного нагрева труб размером 219×32 мм.
Рис. 3. — Изотермы нагрева.
Рис. 4. — Установка для нагрева способом нагревающих тел.
Рис. 5. — Установка для нагрева способом приложения к трубам.
Рис. 6. — Изменения жесткости на необработанной сварке.
Рис. 7. — Изменения жесткости на отоженной сварке.
Рис. 8. — Изменения жесткости на нормализированной сварке.
Рис. 9. — Микрография и макрография необработанной сварки: *a* — × 200; *b* — × 200; *c* — × 1.
Рис. 10. — Микрография и макрография отоженной сварки: *a* — × 200; *b* — × 200; *c* — × 1.
Рис. 11. — Микрография и макрография нормализированной сварки: *a* — × 200; *b* — × 200; *c* — × 1.
Рис. 12. — Строение термически отоженной зоны влияния (× 1 000).
Рис. 13. — Строение термически нормализированной зоны влияния (× 1 000).
Рис. 14. — Строение термически отоженной зоны влияния (× 6 210).
Рис. 15. — Строение термически нормализированной зоны влияния (× 6 210).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3—4, 1966

Construcţii. Hidrotehnică

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XII (XVI), вып. 3—4, 1966

Строительство. Гидротехника

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XII (XVI), 3—4, 1966

Constructions. Hydrotechnics

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C Z. 512.38

REZOLVAREA SISTEMELOR DE n ECUAŢII ALGEBRICE LINIARE CU n NECUNOSCUTE PRIN UTILIZAREA „OPERATORULUI DE ELIMINARE"

DE

N. TUTOŞ şi ADRIAN VULPE

Comunicare prezentată la Conferința de Mecanică, organizată de Academia Republicii Socialiste România în colaborare cu Ministerul Învățământului, București, 27—30 septembrie 1965

1. Operatorul de eliminare

Fie dat sistemul de n ecuaţii liniare cu n necunoscute

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik} x_k + d_i = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

astfel ordonat încît peste tot să avem îndeplinită condiţia $c_{ii} \neq 0$.

Explicitînd din fiecare ecuaţie necunoscuta principală x_i sistemul (1) devine

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k + b_i, \tag{2}$$

în care evident putem avea $a_{ii} = 0$ şi atunci

$$a_{ik} = -\frac{c_{ik}}{c_{ii}} \quad \text{şi} \quad b_i = -\frac{d_i}{c_{ii}}.$$

Mai general însă în (2) coeficienţii principali a_{ii} pot fi diferiţi de zero. Ne vom referi în continuare la această situaţie, întrucît aşa cum ulterior se va constata, ea intervine curent în diversele etape ale rezolvării sistemului prin metoda ce constituie obiectul acestei Note.

Scriem sistemul (2) sub forma

$$X = AX + B, \tag{3}$$

unde $X = \| x_i \|$ este matricea coloană a necunoscutelor $A = \| a_{ik} \|$ — matricea coeficienților iar $B = \| b_i \|$ — matricea coloană a termenilor liberi.

Fie transformarea liniară

$$E_s X = (A_s E^s_{a_{ss}})(E_s X) + E^{a_{ss}}_s B, \tag{4}$$

unde

$$E_s = \left\| \begin{array}{c} 1\ 0 \ldots 0 \ldots 0 \\ 0\ 1 \ldots 0 \ldots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \hline 0\ 0 \ldots 1 \ldots 0 \\ \hline \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0\ 0 \ldots 0 \ldots 1 \end{array} \right\|$$

reprezintă matricea cu $n-1$ linii și n coloane ce se obține din matricea unitate prin eliminarea liniei s;

$$A_s = \left\| \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1s} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2s} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ii} & \ldots & a_{in} \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ni} & \ldots & a_{nn} \end{array} \right\|$$

este matricea obținută din A prin eliminarea liniei s;

$$E^s_{a_{ss}} = \left\| \begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{a_{s1}}{1-a_{ss}} & \dfrac{a_{s2}}{1-a_{ss}} & \ldots & \dfrac{a_{ss}}{1-a_{ss}} & \ldots & \dfrac{a_{sn}}{1-a_{ss}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{array} \right\|$$

reprezintă matricea obținută din matricea unitate prin înlocuirea elementelor liniei s cu elementele liniei s a matricei A împărțite prin $1 - a_{ss}$ și apoi eliminarea coloanei s;

$$E_s^{a_{ss}} = \left\| \begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \dots & \frac{a_{1s}}{1-a_{ss}} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \frac{a_{2s}}{1-a_{ss}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{a_{ss}}{1-a_{ss}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{a_{ns}}{1-a_{ss}} & \dots & 1 \end{array} \right\|$$

este matricea obținută din matricea unitate prin înlocuirea elementelor din coloana s cu elementele corespunzătoare din coloana s a matricei A împărțite prin $1 - a_{ss}$ și apoi eliminarea liniei s.

Prin transformarea liniară a cărei matrice este E_s componenta x_s a vectorului X este eliminată, obținîndu-se vectorul $\| x_i \|_{i \neq s}$. Deci $E_s X = \| x_i \|_{i \neq s}$.

Sistemul (4) se mai poate deci scrie

$$\| x_i \|_{i \neq s} = A_s E^s_{a_{ss}} \| x_i \|_{i \neq s} + E_s^{a_{ss}} B. \tag{5}$$

Considerăm sistemul (4), (5), ca rezultat al aplicării unui operator liniar $\frac{\delta}{\delta x_s}$ sistemului (3), deci (4) este rezultatul transformării

$$\frac{\delta}{\delta x_i} [X = AX + B]. \tag{6}$$

Teoremă. *Rădăcinile sistemului* (4) *sînt și rădăcini ale sistemului* (3).

Demonstrație. Transformarea liniară din (4) conduce la sistemul

$$\| x_i \| = \| \alpha_{ik} \| \cdot \| x_i \| + \| \beta_i \|, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n; \; i, k \neq s), \tag{7}$$

unde evident

$$(8)\qquad \alpha_{ik} = a_{ik} + \frac{a_{is}a_{sk}}{1-a_{ss}}, \qquad (9)\qquad \beta_i = b_i + \frac{a_{is}}{1-a_{ss}}b_s.$$

Din (7) se obţine expresia $x_i = \sum_{k=1}^{n(\neq s)} \alpha_{ik}x_k + \beta_i$, de unde utilizînd (8) şi (9) rezultă

$$(10)\qquad x_i = \sum_{k=1}^{n(\neq s)} a_{ik}x_k + a_{is}\left[\frac{1}{1-a_{ss}}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{sk}x_k + b_s\right)\right].$$

Dar $\left(\sum_{k=1}^{n} a_{sk}x_k + b_s\right)/(1-a_{ss}) = x_s$, rezultat evident din (3)

Putem deci scrie $x_i = \sum_{k=1}^{n(\neq s)} a_{ik}x_k + a_{is}x_s = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k$, expresie ce rezultă şi din sistemul (3).

Numim operatorul $\Delta_s = \frac{\delta}{\delta x_s}$ *operator de eliminare a necunoscutei* x_s.

Prin aplicarea consecutivă de p ori a operatorului (5) se obţine un sistem de $n-p$ ecuaţii cu $n-p$ necunoscute

$$(11)\qquad \Delta_s\Delta_r \ldots \Delta_t = \underbrace{\frac{\delta^p}{\delta x_s\,\delta x_r \ldots \delta x_t}}_{p \text{ necunoscute}} [X = AX + B],$$

Rezultatul din (11) este independent de ordinea aplicării transformărilor Δ_i, adică de ordinea în care se face produsul operatorilor.

2. Matricea de influenţă

Sînt foarte frecvente situaţiile în care este necesar de rezolvat de un număr mare de ori sistemul (3), numai termenii liberi fiind de fiecare dată alţii.

Determinarea unor coeficienţi c_{ik} care să exprime măsura influenţei termenului liber b_k asupra mărimei necunoscute x_i, numiţi de altfel coeficienţi de influenţă, rezolvă avantajos această problemă.

Necunoscuta x_i a sistemului (3) are expresia

$$(12)\qquad x_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}b_k, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Putem scrie :

$$X = CB, \tag{13}$$

unde X este matricea necunoscutelor din (3), B — matricea termenelor liberi din (3) iar $C = \| c_{ik} \|$ — matricea coeficienților de influență.

Matricea $C = \| c_{ik} \|$ se mai numește *matrice de influență*.

Prin eliminarea a $n-1$ necunoscute din (3), deci prin aplicarea pr dusului transformărilor Δ_s cu $s = 1, 2, ..., n$ $(s \neq i)$ obținem ecuația

$$x_i = t x_i + \sum_{k=1}^{n} r_{ik} b_k,$$

unde t reprezintă coeficientul la care se reduce matricea A în urma transformărilor aplicate, b_k — termenii liberi din (3) iar r_{ik} — coeficienți ce se obțin în procesul de eliminare a celor $n-1$ necunoscute.

Rezultă

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_{ik}}{1-t} b_k, \quad \text{sau cu} \quad \frac{r_{in}}{1-t} = c_{ik},$$

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} b_k. \tag{14}$$

S-au obținut astfel elementele liniei i din matricea de influență.

Restul coeficienților se obțin cu totul analog utilizînd însă sistemele cu $2, 3, ..., n-1$ necunoscute obținute prin operațiile precedente.

3. Interpretarea transformării liniare în teoria grafelor de flux

Fie graful de flux [1], [2] asociat sistemului (3). Utilizînd operațiile cunoscute în teoria grafelor de flux [1], [2], și anume eliminarea unei autobucle, eliminarea unui arc, compunerea arcelor în serie și paralel, putem defini simplu operația de eliminare a unui nod „s" din graf.

În urma eliminării nodului „s" din graful de flux G corespunzător sistemului (3) obținem un graf de flux cu $n-1$ noduri și resursele b_i modificate, anume graful G_s. Se constată cu ușurință că cel de al doilea graf de flux corespunde sistemului obținut din (3) prin transformarea (4).

Putem deci scrie simbolic

$$\frac{\delta}{\delta x_s} G = G_s. \tag{15}$$

În concluzie, transformării liniare (4) îi corespunde operația de eliminare a nodului „s" din graful de flux G asociat sistemului (3).

4. Concluzii

Sistemele de n ecuații liniare cu n necunoscute intervin frecvent în rezolvarea problemelor puse de practică. Menționăm în primul rînd rezolvarea sistemelor multiplu static nedeterminate, care implică pînă la urmă obținerea soluțiilor unor astfel de sisteme de ecuații.

Utilizarea operatorului liniar de eliminare E_s pentru rezolvarea acestora, conduce la evidențierea unor interesante aspecte din domeniul respectiv. În fiecare caz în parte, operatorul E_s are o semnificație fizică clară ce conduce în numeroase ocazii chiar la simplificări în procesul de aplicare a lui.

Astfel, la rezolvarea structurilor static nedeterminate prin metoda momentelor active [3], [4], aplicarea operatorului E_s constituie expresia matematică a deblocării nodului „s" sau înlăturării legăturii „s" Aceasta permite studierea cu mare ușurință a unor aspecte care sînt altfel greu de urmărit în problema tehnică respectivă.

Programarea transformării liniare Δ_s la mașini cifrice de calcul — programare simplă — permite rezolvarea foarte rapidă a sistemelor cu un număr mare de necunoscute.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de statică și rezistența materialelor

BIBLIOGRAFIE

1. Robichaud L., Boisvert M., Robert J., *Graphes de fluence*. Eyrolles, Paris, 1961.
2. Feng C. Chuan, Benton D., *Flow Graph of Moment Distribution*. J. of the Am. Soc. of Civil Eng. April, 1964.
3. Șesan A., Bul. Inst. polit. Iași, 1958, **IV (VIII)**, *3—4*, pp. 353—358.
4. — Bul. Inst. polit. Iași, 1958, **IV (VIII)**, *3—4*, pp. 375—380.

THE SOLVING OF n LINEAR ALGEBRAIC ECUATIONS WITH n UNKNOWNS BY MEANS OF THE „ELIMINATING OPERATOR"

(Summary)

The problem of solving systems of algebraic equations — n equations in n unknowns — is treated. One defines the matricial operator Δ_s, which maps the given system in another one, in $n-1$ unknowns, by eliminating the unknown x_s.

One associates to the given system the influence-matrix, that is the matrix of the coefficients which connect the unknowns to the free terms.

The linear transformation Δ_s corresponds to the elimination of the point s from the fluence graph, corresponding to the system.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 539.214

ASUPRA FORMĂRII ARTICULAŢIILOR PLASTICE LA CADRE METALICE

DE

C. AMARIEI, N. ORLOVSCHI, ELENA NEACŞU, ADRIAN VULPE
şi LUIZA TANASACHI

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Proiectarea structurilor în domeniul plastic impune cunoaşterea comportării lor în cadrul intervalului de adaptare statică, întrucît acesta se poate modifica, atît ca mărime, ca ordine de formare a articulaţiilor plastice, cît şi ca intervale parţiale dintre articulaţiile plastice succesive (fig. 1), acestea fiind criterii esenţiale în aprecierea gradului de siguranţă şi a modului de cedare a structurilor.

Cauzele acestor modificări sînt stările de autotensiuni, rezultate fie independent de acţionarea cu sarcini, fie din încărcări repetate în cursul cărora a fost depăşită limita elastică a structurii. Rezultă că este importantă atît cunoaşterea efectelor pe care stările de autotensiuni le au la încărcările următoare, cît şi studierea posibilităţilor de îmbunătăţire a intervalului de adaptare, prin realizarea unui interval corespunzător, ca mărime şi ca poziţie a articulaţiilor plastice. Deseori sînt importante îndeosebi intervalele parţiale dintre articulaţiile succesive, referitoare la sarcini sau la deformaţii.

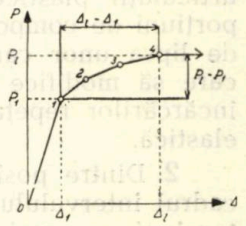


Fig. 1.

Relaţiile de echilibru scrise pentru încărcări la care se depăşeşte limita elastică [1] permit determinarea distribuţiei şi mărimilor eforturilor remanente şi indică, de asemenea, posibilităţile de folosire a autotensiunilor, în vederea realizării unei mai raţionale comportări ulterioare a structurilor.

Aceste relaţii sînt de forma:

$$\sum_{1}^{n} \bar{m}_{ik} Y_k = \alpha_i M_{\lim} - m_i P.$$

Numărul de ecuaţii este în general $n + 1$, egal cu numărul de secţiuni critice care prin plasticizare transformă sistemul în mecanism, iar necunoscutele sînt Y_k (mărimile care determină stările de autotensiuni) şi parametrul de sarcină P sau valoarea momentului capabil al secţiunii de referinţă ($M_{\lim}$). La structuri mai com-

plexe este necesară scrierea şi rezolvarea sistemului de ecuaţii pentru fiecare din mecanismele posibile. Se poate, evident, apela la simplificările proprii metodei forţelor, pentru anularea sau uşurarea determinării atît a coeficienţilor $\bar{m}_{ik}$ (coeficienţii de influenţă ai necunoscutelor Y_k în secţiunile critice), cît şi a valorilor m_i (momente din secţiunile critice produse de $P = 1$ în ipoteza comportării elastice a structurii). Este necesară de asemenea cunoaşterea rapoartelor α_i dintre momentele din secţiunile critice şi momentul maxim de referinţă.

Cu valorile Y_k, folosind diagramele acţiunilor unitare, se determină distribuţiile eforturilor remanente

$$\bar{M}_i = \bar{m}_{ik} Y_k .$$

Pentru o nouă încărcare, se stabilesc secţiunile critice corespunzătoare şi se determină mărimea sarcinii şi secţiunea pentru prima articulaţie plastică, egalînd momentele $M_i = \bar{M}_i \pm m_i P$ cu valoarea momentului limită şi alegînd secţiunea care dă valoarea minimă a parametrului de sarcină P.

Rezultă că în funcţie de distribuţia şi mărimile $\bar{M}_i$ corespunzătoare stărilor de autotensiuni, o aceeaşi structură, la acelaşi tip de încărcare, poate avea comportări diferite, distribuţia elastică pînă la prima articulaţie plastică (deci coeficienţii m_i) rămînînd aceiaşi.

Pentru calculul structurilor cu autotensiuni este foarte indicată folosirea metodelor statice, deoarece acestea dau posibilitatea găsirii distribuţiei potrivite a stărilor de eforturi remanente care să conducă la o diagramă finală de momente raţională, cu respectarea condiţiei de curgere plastică. La structuri mai complicate este practică metoda combinării mecanismelor elementare, autotensiunile intrînd în calcul cu valori de momente cunoscute. Folosirea metodei distribuirii momentelor impune cunoaşterea momentelor plastice ale secţiunilor, deci o predimensionare. Calculul biografic presupune o extrapolare a calculului elastic dincolo de limita corespunzătoare formării primei articulaţii plastice, cu intervalul de adaptare statică fragmentat în porţiuni de comportare liniară. Valabilitatea acestei ipoteze este legată de lipsa unor cauze perturbatoare (cum sînt stările de autotensiuni) care să modifice distribuţiile de eforturi, ceea ce, mai ales în cazul încărcărilor repetate, nu are loc decît la prima acţionare peste limita elastică.

2. Dintre posibilităţile de modificare a comportării structurilor în cadrul intervalului de adaptare statică, determinate de stările de autotensiuni, se prezintă cîteva şi anume :

1. *Crearea de autotensiuni locale* în diferite secţiuni, prin încărcări individuale de bare peste limita elastică. Aceste stări de autotensiuni, la încărcarea cu sarcinile ulterioare, conduc la grăbirea sau întîrzierea formării articulaţiilor plastice din secţiunile respective.

În fig. 2 este prezentată comportarea unui cadru supus la acţiuni repetate în acelaşi sens, avînd drept consecinţă tendinţa de omogenizare şi deci mărirea sarcinii elastice, dar în acelaşi timp o restrîngere a intervalului de adaptare. Prin acţionarea prealabilă a unui stîlp ca o consolă, peste limita elastică, se crează o stare locală de autoten-

siuni, care întîrzie mult formarea articulației plastice din secțiunea de la baza stîlpului respectiv. Se obține un interval de adaptare mărit, în special ca deformații.

Se vede din grafic că sarcina limită rămîne practic aceeași.

2. *Folosirea de încărcări prealabile de alt tip,* conducînd la stări de autotensiuni care, la suprapunerea cu eforturile din acțiunile ulterioare, produc modificarea ordinii de formare a articulațiilor plastice și decalaje între sarcinile de plasticizare a diferitelor secțiuni. Rezultatul este important în special pentru structuri la care, în lipsa autotensiunilor, articulațiile plastice se formează grupat (structuri simetrice încărcate simetric sau antisimetric) și la care cedarea se produce fără o prealabilă avertizare.

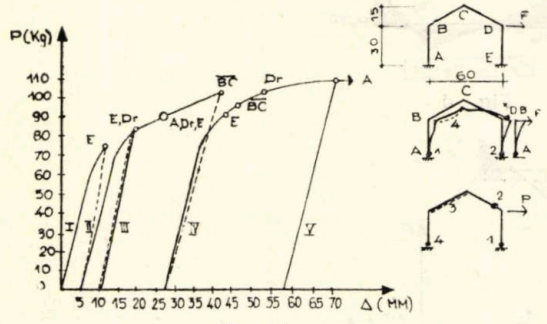


Fig. 2

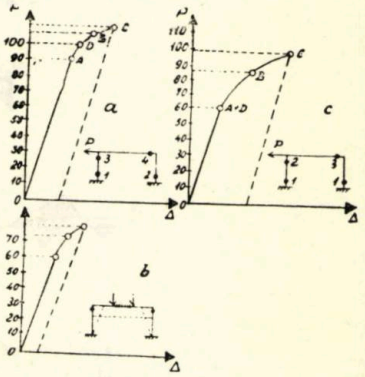


Fig. 3

Astfel, la un cadru încărcat cu o sarcină orizontală, articulațiile plastice se formează două cîte două (fig. 3 *a*). Încărcînd inițial cadrul cu sarcini verticale simetrice (fig. 3 *b*), la încărcarea ulterioară cu sarcină orizontală (fig. 3 *c*) ordinea de formare a articulațiilor plastice este modificată. Intervalul dintre ultimele două articulații plastice a crescut de circa patru ori, ceea ce prezintă interes, întrucît informațiile asupra apropierii cedării sînt furnizate mai devreme.

Rezultate similare s-au obținut și pentru cadre care au fost acționate la sarcini verticale și la care, dintr-o încărcare prealabilă orizontală, a rezultat o stare de momente ce a modificat ordinea de formare a articulațiilor plastice, creîndu-se decalaje între articulațiile succesive.

Explicarea rezultatelor se poate urmări în diagramele din fig. 4, unde se arată — pentru ambele situații — suprapunerile de eforturi care conduc la diferențierea valorilor momentelor din secțiunile critice și deci la plasticizarea acestor secțiuni la valori diferite față de structura fără autotensiuni.

3. *Încărcări de același tip, dar alternînd ca sens,* la care, datorită suprapunerii succesive a stărilor de eforturi remanente cu cele din

încărcările ulterioare se produc de asemenea modificări atît în ordinea de formare a articulaţiilor plastice, cît şi în mărimile sarcinilor corespunzătoare acestora.

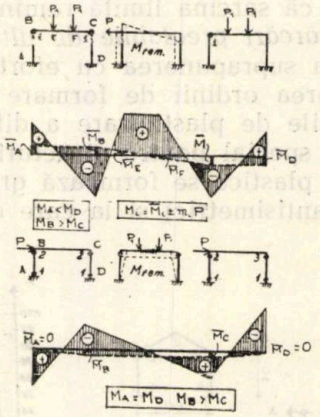


Fig. 4

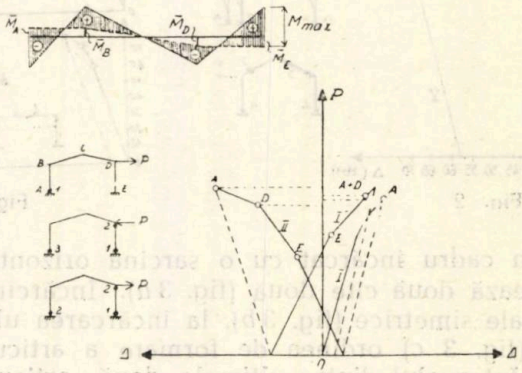


Fig. 5

În fig. 5 este prezentată diagrama forţă-deformaţie pentru un cadru acţionat în sensuri alternînde. Datorită stării de autotensiuni rezultată din încărcarea în sensul *II*, la a doua acţionare în sensul *I* se formează întîi articulaţia plastică din *E* (deci în această secţiune au existat autotensiuni mai mari, de acelaşi sens cu eforturile din reîncărcare), iar articulaţiile din *A* şi *D* apar simultan (datorită egalizării momentelor din aceste secţiuni).

Rezultatele experimentale au fost comparate cu datele teoretice obţinute pentru scheme similare cu modelele încercate: cadre cu una şi două deschideri de 60 cm, 120 cm şi 300 cm, cu riglă dreaptă sau frîntă, confecţionate din oţel pătrat 10×10 mm, 20×20 mm şi oţel profilat I_{10} şi I_{12}.

3. Din cercetările experimentale pe modele și verificările teoretice făcute, se pot desprinde următoarele concluzii :

a) deși pentru o anumită structură și o anumită schemă de încărcare starea limită (ca mărime a sarcinilor și mecanism de cedare) este unică, comportarea structurii în cadrul intervalului de adaptare statică se poate modifica datorită stărilor de autotensiuni rezulta e din încărcări anterioare, în care s-a depășit limita elastică ;

b) stările de autotensiuni se pot folosi pentru realizarea unor cerințe practice legate de mărirea sarcinii elastice de exploatare, mărimea totală a intervalului de adaptare statică și intervalele parțiale dintre formarea articulațiilor plastice succesive ;

c) în cazul stărilor de autotensiuni create local, mărimile momentelor remanente sînt de ordinul a 30...45% din valoarea momentului capabil al secțiunii și depind, evident, de coeficientul de adaptare al secțiunilor respective ;

d) datorită stărilor de autotensiuni locale, are loc o creștere sau scădere a intervalului de adaptare, care poate ajunge pînă la 20% din valoarea sarcinii elastice inițiale ;

e) stările de autotensiuni rezultate din încărcări prealabile de alt tip au valori reprezentînd 5...15% din mărimea momentului capabil la încărcarea cu sarcini verticale și de cca. 25% la încărcarea cu sarcini orizontale ;

f) în cazul stărilor de autotensiuni care se datoresc unor încărcări anterioare de alt tip, intervalul de adaptare statică, referitor la sarcini, crește sau scade de 4...5 ori față de cel al structurii fără autotensiuni ;

g) distribuțiile de autotensiuni avînd aceleași caracteristici de simetrie ca și cele din încărcări, se pot combina cu acestea din urmă (combinări de distribuții simetrice cu distribuții antisimetrice) astfel incît articulațiile plastice să nu se mai formeze grupat, ci cu decalaje între ele ;

h) la încercările experimentale au rezultat comportări neliniare înaintea formării primei articulații plastice, precum și pe intervalele dintre formarea articulațiilor plastice succesive, iar uneori s-au înregistrat întîrzieri ale procesului de omogenizare datorită plasticizării unor zone mari din barele cadrelor ;

i) s-a remarcat și faptul că rezultatele experimentale obținute sînt mai omogene cu cît modelele încercate sînt realizate la scară mai mare.

Experimentările au fost extinse și pentru cadre multiple.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de statică și rezistența materialelor

BIBLIOGRAFIE

1. Куприанов В. В., *Метод расчета рам из упруго-пластического материала.* В *Вопросы теории пластичности и прочности строительных конструкций,* ЦНИСК, М., 1961.
2. Baker J. F., *The Steel Skeleton.* Cambridge, 1956.
3. Neal B. G., *The Plastic Methods of Structural Analysis.* London, 1956.
4. Ржаницын А. Р., *Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов.* М., 1954.
5. *** *Studiul rezervelor de capacitate portantă a unor structuri uzuale.* Referat cu concluzii, INCERC, Filiala Iaşi, 1962.
6. *** *Studiul rezervelor de capacitate portantă a unor structuri uzuale.* Studiu şi referat parţial cu concluzii, INCERC, Filiala Iaşi, 1964.
7. *** *Studiul rezervelor de capacitate portantă a unor structuri uzuale.* Studiu de sinteză, INCERC, Filiala Iaşi, 1965.
8. Orlovschi N., Dumitraş Al., Amariei C., Ungureanu N., *Studiul în domeniul plastic al cadrelor metalice pe modele la scară redusă.* Bul. Inst. polit. Iaşi, 1966, **XII (XVI)**, *1—2.*

SUR L'APPARITION DES ROTULES PLASTIQUES DES OSSATURES MÉTALLIQUES

(Résumé)

On présente des considérations théoriques et des résultats expérimentaux à propos des modifications qui ont lieu dans l'intervalle d'adaptation statique des structures métalliques, causées par les états d'efforts rémanents, résultées des charges qui dépassent la limite élastique. Ces modifications se réfèrent à l'extension de l'intervalle d'adaptation statique et aussi à l'ordre d'apparition des rotules plastiques et de leur position dans cet intervalle (fig. 1).

Les essais effectués sur modèles de portiques métalliques à divers échelles (fig. 2, 3, 5) ont indiqué l'invariabilité pratique de l'état limite et la possibilité d'utiliser les états d'efforts rémanents pour réaliser un comportement amélioré des structure à charges d'exploitation.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

c. Z. 539.4

SIMPLIFICĂRI ÎN REZOLVAREA GRINZILOR PE MEDIU ELASTIC, CU MOMENT DE INERŢIE VARIABIL ÎN TREPTE

DE

N. UNGUREANU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Considerăm o grindă cu moment de inerţie variabil în trepte (pe un tronson momentul de inerţie este constant); grinda reazemă pe un mediu continuu, elastic, deformabil şi este acţionată de sarcini transversale. Planul de acţiune al forţelor este un plan de simetrie, deci grinda este solicitată la încovoiere cu forţă tăietoare.

Menţinem ipotezele de la grinzile cu rezemare obişnuită şi adăugăm ipoteza coeficientului de pat a lui Winkler, adică

(a) $$p'(x) = -ky,$$

în care $p'(x)$ este reacţiunea mediului elastic în kg/cm,

(b) $$k = k'b,$$

k' — coeficientul de pat sau de tasare în kg/cm³, b — lăţimea de contact a grinzii cu mediul pe care reazemă iar y — săgeata grinzii în punctul considerat.

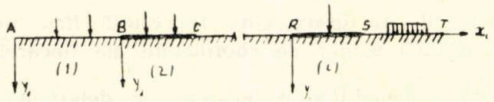


Fig. 1

Sarcina distribuită care acţionează pe grindă va fi

(1) $$p(x) = q(x) + p'(x) = g(x) - ky,$$

în care $q(x)$ este intensitatea sarcinii aplicate.

Vom considera grinda compusă dintr-un număr de grinzi egal cu cel al tronsoanelor şi vom scrie pentru fiecare grindă componentă ecuaţia diferenţială a fibrei elastice.

Originea sistemului de coordonate se alege (fig. 1) pentru fiecare grindă componentă într-unul din capete; axele y_i se aleg în jos, iar axele x_i la stînga, sau la dreapta.

Cu convențiile stabilite, ecuațiile diferențiale ale fibrelor elastice ale grinzilor componente vor avea aceeași formă generală

$$EI_i y_i^{IV} = q(x_i) - k_i y_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Dacă lățimile b_i diferă mult între ele, $k_i = b_i k_i'$.

Sistemul (2) se mai poate scrie și sub forma

$$y_i^{IV} + 4\beta_i^4 y_i = \frac{q(x_i)}{EI_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2'}$$

în care

$$\beta_i = \sqrt[4]{\frac{k_i}{4EI_i}}. \tag{c}$$

Folosind o variabilă adimensională

$$\xi_i = \beta_i x_i, \tag{d}$$

ecuațiile diferențiale (2') se transformă în

$$y_i^{IV} + 4y_i = \frac{4q(x_i)}{k_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Soluția generală a ecuațiilor omogene din (3) are evident forma

$$y_{0i} = \sum_{m=1}^{4} \lambda_m^i f_m(\xi_i), \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

în care $f_m(\xi_i)$ sînt funcțiile fundamentale ale lui Krîlov

$$\begin{cases} f_1(\xi_i) = \operatorname{ch}\xi_i \cos\xi_i, & f_2(\xi_i) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\xi_i \sin\xi_i + \operatorname{sh}\xi_i \cos\xi_i), \\ f_3(\xi_i) = \frac{1}{2}\operatorname{sh}\xi_i \sin\xi_i, & f_4(\xi_i) = \frac{1}{4}(\operatorname{ch}\xi_i \sin\xi_i - \operatorname{sh}\xi_i \cos\xi_i), \end{cases} \tag{5}$$

iar λ_m^i sînt parametri de integrare care reprezintă fizic deformațiile, respectiv eforturile reduse în originea axelor de coordonate ale fiecărei grinzi (i reprezintă notația indicială).

Soluția particulară a ecuațiilor neomogene se determină cu ajutorul regulei lui Cauchy (toate derivatele pînă la ordinul $n-2$ și funcția să fie nule în origine, iar derivata de ordinul $n-1$ să aibă în origine valoarea unu).

Funcția $f_4(\xi_i)$ satisface aceste condiții

$$f_4(0) = 0, \quad f_4'(0) = 0, \quad f_4''(0) = 0, \quad f_4'''(0) = 1 \tag{e}$$

și deci se poate folosi pentru determinarea soluției particulare

$$\bar{y}_i = \Phi_i(\xi_i) = \frac{4}{k_i}\int_0^{\xi_i} f_4(\xi_i - t)\, q(t)\, dt, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Soluțiile sistemului (3) vor fi

$$y_i = \sum_{m=1}^{4} \lambda_m^i f_m(\xi_i) + \Phi_i(\xi_i), \quad (i = 1, 2, .., n). \tag{7}$$

Soluțiile particulare $\Phi_i(\xi_i)$ se găsesc determinate în literatură pentru diferite tipuri de încărcări.

Dacă numărul tronsoanelor este n vom avea n grinzi și deci $4n$ parametri inițiali. Pentru determinarea acestor λ_m^i se utilizează condițiile de continuitate ale deformațiilor și condițiile de echilibru ale unui element la granița dintre două tronsoane componente.

2. Prin alegerea convenabilă a originii fiecărei grinzi componente

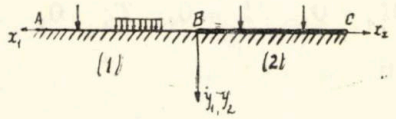


Fig. 2

și a direcției axei x_i numărul parametrilor inițiali se poate reduce la jumătate, adică $2n$.

a) *Grindă alcătuită din două tronsoane* (fig. 2). Alegem originea în B, comună pentru cele două grinzi componente; deci axele y_1 și y_2 coincid, iar x_1 și x_2 sînt la stînga respectiv la dreapta.

Ecuațiile fibrei elastice (7) sînt acum:

$$\begin{cases} y_1 = \lambda_1^1 f_1(\xi_1) + \lambda_2^1 f_2(\xi_1) + \lambda_3^1 f_3(\xi_1) + \lambda_4^1 f_4(\xi_1) + \Phi_1(\xi_1), \\ y_2 = \lambda_1^2 f_1(\xi_2) + \lambda_2^2 f_2(\xi_2) + \lambda_3^2 f_3(\xi_2) + \lambda_4^2 f_4(\xi_2) + \Phi_2(\xi_2). \end{cases} \tag{8}$$

Pentru determinarea parametrilor λ_m^i punem condițiile de continuitate și de echilibru ale unui element, la granița dintre cele două tronsoane, adică în origine, și obținem:

$$\begin{aligned} y_1(0) &= y_2(0), & \beta_1 y_1'(0) &= \beta_2 y_2'(0), \\ -EI_1 \beta_1^2 y_1''(0) &= -EI_2 \beta_2^2 y_2''(0), & -EI_1 \beta_1^3 y_1'''(0) &= -EI_2 \beta_2^3 y_2'''(0). \end{aligned} \tag{9}$$

Ținînd seama că

$$f_1(0) = 1, \quad f_2(0) = 0, \quad f_3(0) = 0, \quad f_4(0) = 0 \tag{f}$$

și

$$\text{(g)} \qquad \begin{aligned} f_1'(\xi_i) &= -4\beta_i f_4(\xi_i), \quad f_2'(\xi_i) = \beta_i f_1(\xi_i), \\ f_3'(\xi_i) &= \beta_i f_2(\xi_i), \quad f_4'(\xi_i) = \beta_i f_3(\xi_i), \end{aligned}$$

condițiile (11) dau

$$\text{(9')} \qquad \lambda_1^1 = \lambda_1^2, \quad \lambda_2^1 = \frac{\beta_2}{\beta_1}\lambda_2^2, \quad \lambda_3^1 = \frac{I_2}{I_1}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^2 \lambda_3^2, \quad \lambda_4^1 = \frac{I_2}{I_1}\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^3 \lambda_4^2.$$

Din opt parametri au rămas de determinat patru, care se obțin din condițiile de rezemare la capete. Cînd capetele A și C sînt libere parametrii λ_m^i se determină din ecuațiile

$$\text{(10)} \qquad M_A = 0, \quad M_C = 0, \quad T_A = 0, \quad T_C = 0,$$

care conduc respectiv la

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} \sum_{m=1}^{4} a_{1m}\lambda_m^1 + a_{10} = 0, & \sum_{m=1}^{4} a_{2m}\lambda_m^1 + a_{20} = 0, \\ \sum_{m=1}^{4} a_{3m}\lambda_m^1 + a_{30} = 0, & \sum_{m=1}^{4} a_{4m}\lambda_m^1 + a_{40} = 0. \end{cases}$$

Coeficienții se obțin din scrierea dezvoltată a ecuațiilor (11), de exemplu :

$$a_{11} = [-4f_4(\xi_1)]_{x_1=l_1}, \quad a_{10} = [\Phi_1''(\xi_1)]_{x_1=l_1},$$

$$a_{13} = [f_1(\xi_1)]_{x_1=l_1}, \qquad a_{32} = \left[\frac{\beta_2}{\beta_1} f_2(\xi_2)\right]_{x_2=l_2} \quad \text{etc.}$$

b) *Grindă alcătuită din trei tronsoane* (fig. 3). Pentru tronsoanele AB și BC se ia originea în B rezultînd astfel patru parametri ; pentru tronsonul CD se ia originea în D și avem doi parametri, întrucît doi din ei rezultă din condițiile de rezemare ale capătului D.

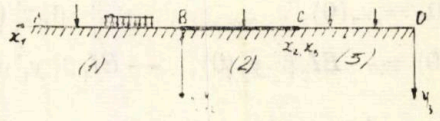


Fig. 3

Cei șase parametri se vor deduce din condițiile de rezemare în A și cele de continuitate în C. Se obțin ecuațiile

$$
(12)\quad \begin{cases}
M_A = 0, & \sum_{m=1}^{4} a_{1m}\lambda_m^1 + a_{10} = 0,\\
T_A = 0, & \sum_{m=1}^{4} a_{2m}\lambda_m^1 + a_{20} = 0,\\
(y_C)_{(2)} = (y_C)_{(3)}, & \sum_{m=1}^{4} a_{3m}\lambda_m^1 + a_{35}\lambda_1^3 + a_{36}\lambda_2^3 + a_{30} = 0,\\
(\theta_C)_{(2)} = (\theta_C)_{(3)}, & \sum_{m=1}^{4} a_{4m}\lambda_m^1 + a_{45}\lambda_1^3 + a_{46}\lambda_2^3 + a_{40} = 0,\\
(M_C)_{(2)} = (M_C)_{(3)}, & \sum_{m=1}^{4} a_{5m}\lambda_m^1 + a_{55}\lambda_1^3 + a_{56}\lambda_2^3 + a_{50} = 0,\\
(T_C)_{(2)} = (T_C)_{(3)}, & \sum_{m=1}^{4} a_{6m}\lambda_m^1 + a_{66}\lambda_1^3 + a_{65}\lambda_2^3 + a_{60} = 0.
\end{cases}
$$

Analog se poate proceda și pentru grinzile alcătuite dintr-un număr mai mare de tronsoane.

Deci *prin alegerea adecvată a originii sistemului de coordonate pentru fiecare tronson numărul parametrilor inițiali se reduce la jumătate.*

După determinarea parametrilor inițiali, fiecare tronson se tratează independent, rezultatele finale obținîndu-se prin alinierea (recompunerea) tronsoanelor.

3. Sistemele de ecuații obținute se pot scrie sub formă matricială:

$$(13)\qquad A\lambda + A_0 = 0,$$

în care $A = \| a_{km} \|$ este matricea patratică a coeficienților, λ — matricea coloană a necunoscutelor, A_0 — matricea coloană a termenilor liberi.

Soluția ecuației (13) este atunci $\lambda = -A_0 A^{-1}$.

Procedeul propus permite rezolvarea unor probleme ce intervin în domeniul construcțiilor hidrotehnice sau al construcțiilor industriale.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de statică și rezistența materialelor

BIBLIOGRAFIE

1. Filonenko-Borodici M. M. ș.a., *Curs de rezistența materialelor.* Vol. **II,** Ed. Tehn., Buc., 1952 (trad. din l. rusă).
2. Heteny M., *Beams on Elastic Foundations.* Michigan, 1956.

SIMPLIFICATIONS DANS LA RÉSOLUTION DES POUTRES SUR UN MILIEU ÉLASTIQUE AVEC MOMENT D'INERTIE VARIABLE EN ÉCHELLES

(Résumé)

On présente une méthode de résolution des poutres sur un milieu élastique avec le moment d'inertie variable en echelles, en employant l'hypothèse de Winkler. Pour la solution on utilise un système d'équations différentielles — une équation pour chaque tronson — dont les solutions sont données par les fonctions fondamentales de Krîlov.

On choisit l'origine du systhème de coordonées pour chaque tronson de la poutre, afin que le nombre des paramètres de l'origine se reduise à la moitié ; ensuite, chaque tronson est traité comme une poutre libre.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 526.96

CONTRIBUŢII LA DETERMINAREA COORDONATELOR PUNCTELOR TOPO-GEODEZICE INACCESIBILE

DE

V. TARASOV, CALISTRU APREUTESEI şi GH. GAVRILOV

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Relaţiile de calcul

Determinarea coordonatelor unui punct topo-geodezic inaccesibil trebuie efectuată prin observaţii din cel puţin trei puncte cu coordonatele cunoscute.

În practică se întîlnesc şi cazuri cînd unul din cele trei puncte de sprijin nu poate fi staţionat.

Cazul I. Fie trei puncte de sprijin A, B, C, cu coordonatele cunoscute, — B fiind nestaţionabil — urmînd ca din aceste puncte să se determine coordonatele punctului inaccesibil P (fig. 1).

Pe teren se efectuează observaţii numai în punctele A şi C măsurînd unghiurile α şi β.

Utilizînd coordonatele punctelor A, B, C, se determină lungimile laturilor $AB = a$ şi $BC = b$ precum şi unghiurile γ şi $\widehat{APC} = \psi$.

$$(1) \qquad \begin{cases} \gamma = \theta_{\overrightarrow{BC}} - \theta_{\overrightarrow{BA}}. \\ \psi = 400 - (\alpha + \beta + \gamma). \end{cases}$$

Latura $BP = k$ se obţine din cele două triunghiuri

$$(2) \qquad k = \frac{a}{\sin \varphi} \sin \alpha = \frac{b}{\sin (\psi - \varphi)} \sin \beta.$$

Dezvoltînd pe $\sin(\psi - \varphi)$ şi împărţind prin $\cos\varphi$ se obţine

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a \sin\alpha \sin\psi}{b \sin\beta + a \sin\alpha \cos\psi},$$

care după împărţirea prin $a \sin\alpha$ devine

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\psi}{(b \sin\beta)/(a \sin\alpha) + \cos\psi}. \tag{3}$$

Cunoscînd unghiul φ, se determină unghiul $\psi - \varphi$, iar în funcţie de acestea şi unghiurile γ_1 şi γ_2:

$$\begin{cases} \gamma_1 = 200 - (\alpha + \varphi), \\ \gamma_2 = 200 - (\beta + \psi - \varphi). \end{cases} \tag{4}$$

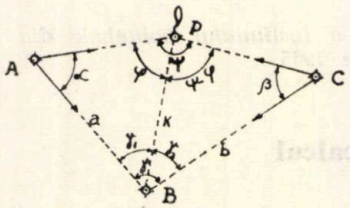


Fig. 1

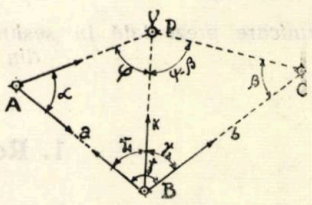


Fig. 2

Pentru calculul coordonatelor punctului P se determină orientarea laturii comune $\overline{BP} = k$,

$$\theta_{\overline{BP}} = \theta_{\overline{BA}} + \gamma_1 = \theta_{\overline{BC}} - \gamma_2, \tag{5}$$

precum şi lungimea ei, utilizînd (2).

Coordonatele punctului P se calculează cu

$$\begin{cases} X_P = X_B + k \cos\theta_{\overline{BP}}, \\ Y_P = Y_B + k \sin\theta_{\overline{BP}}. \end{cases} \tag{6}$$

Pentru controlul determinării coordonatelor punctului P este necesar un al patrulea punct cunoscut care să fie vizat din A şi C măsurîndu-se unghiurile α' şi β'. Cu ajutorul acestora se efectuează o nouă determinare a punctului P — independentă de prima — utilizînd aceleaşi relaţii. Valorile cele mai probabile ale coordonatelor punctului P rezultă prin media aritmetică a celor două determinăli.

Cazul II. Fie punctele A şi B staţionabile şi punctul C nestaţionabil (fig. 2).

Pe teren se staționează în punctele A și B măsurînd unghiurile α, γ_1 și γ_2. Utilizînd coordonatele punctelor A, B, C, se determină lungimile laturilor $AB = a$ și $BC = b$ precum și unghiul $\gamma = \theta_{\overrightarrow{BC}} - \theta_{\overrightarrow{BA}}$ care trebuie să fie egal cu suma $\gamma_1 + \gamma_2$.

Unghiurile φ și ψ se calculează cu relațiile :

$$(7) \qquad \begin{cases} \varphi = 200 - (\alpha + \gamma_1), \\ \psi = 400 - (\alpha + \varphi + \gamma_1 + \gamma_2). \end{cases}$$

Procedînd în mod analog ca în cazul I, se obține pentru $\operatorname{tg}\beta$ expresia

$$(8) \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\psi}{(b \sin\varphi)/(a \sin\alpha) + \cos\psi},$$

iar coordonatele punctului P se calculează de asemenea cu (6).

2. Concluzii

1. Relațiile stabilite pentru calculul unghiurilor φ și β sînt simple conținînd fie elemente măsurabile direct, fie elemente ce se pot deduce din coordonatele punctelor cunoscute. Funcțiile trigonometrice sinus și cosinus avînd în condițiile considerate domeniul de variație mic, interpolarea pentru anumite argumente se efectuează cu suficientă precizie, conducînd la determinarea valorilor celor mai probabile ale unghiurilor.

2. În cazul II, chiar dacă lipsește viza către unul din punctele de sprijin — cum se întîmplă uneori în producție — unghiul γ poate fi determinat prin diferența dintre unghiul dedus din orientări și unghiul măsurat direct.

3. Prin nestaționarea în unul din punctele de sprijin se realizează o economie substanțială de timp reducînd totodată volumul operațiilor din teren.

4. Determinarea indirectă a unghiurilor necesare calculului are loc într-un timp relativ scurt, cu suficientă precizie, astfel încît productivitatea muncii luată în ansamblu — teren și calcule — crește sensibil.

5. Rezultatele calculelor efectuate pe baza noilor relații au fost confruntate cu valorile măsurate direct pe teren, obținîndu-se o foarte bună concordanță.

6. Rezultatele obținute în determinarea coordonatelor rectangulare ale punctelor inaccesibile recomandă folosirea noului procedeu de calcul în toate cazurile cînd staționarea unuia sau a două puncte prezintă anumite inconveniente (punct prea îndepărtat, drum greu accesibil pînă la punctul de stație, lucrări urgente, timp nefavorabil etc.).

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de drumuri și poduri,
Laboratorul de topografie

BIBLIOGRAFIE

1. Apreutesei C., Barbălată I., Tudor C., *Geodezia*. Buc., 1962.
2. Чеботарев А. С., *Геодезия*. Геодезиздат, М., 1949.
3. Jordan-Eggert-Kneissel, *Handbuch der Vermessungskunde*. Stuttgart, 1958—1961.
4. Tardi P., Laclavère J., *Traité de gèodésie*. Gauthier-Villars, Paris, 1954.
5. Голгский В. С., *Геодезия в городском строительстве*. Геодезиздат, М., 1958.

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КООРДИНАТ НЕДОСТУПНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ТОЧЕК

(Резюме)

Вводится новый метод определения координат недоступных триангуляционных точек. С этой целью предлагается установить на поле работы две точки A и C и измерить углы α и β.

В зависимости от измеренных, а также и выведенных из координат (углы и расстояния) элементов, устанавливаются соотношения выявляющие угол φ для случая I (рис. 1) и, соответственно, угол β для случая II (рис. 2) необходимые для расчета координат недоступной точки P.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

D. K. 624

ANWENDUNGEN ELEKTRONISCHER RECHENAUTOMATEN IM BAUWESEN

VON

HORST MATZKE

Der Einsatz elektronischer Rechenautomaten hat im vergangenen Jahrzehnt in verschiedenen Ländern einen ungeheuren Aufschwung genommen. Auf vielen Gebieten der mathematischen, naturwissenschaftlichen, technischen und vor allem auch wirtschaftlichen Forschung und Planung ist die Anwendung der modernen Rechenautomaten nicht mehr fortzudenken, wobei der gewonnene volkswirtschaftliche Nutzen eine mitbestimmende Rolle spielt.

Es soll berichtet werden über Erfahrungen, die wir beim Aufbau eines Wissenschaftlichen Rechenzentrums an der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar gemacht haben, welches insbesondere von den verschiedenen Bereichen des Bauwesens und damit zusammenhängender Gebiete wie der Regionalplanung ausgelastet wird.

In vielen Ländern existieren heute bereits Ingenieurbüros mit eigenen elektronischen Rechenanlagen, die zum Teil auch für fremde Benutzer aus dem Bereich des Bauwesens die erforderlichen Berechnungen durchführen. Die Bauingenieure, insbesondere die Statiker, haben für die schnelle und sichere Bearbeitung ihrer Aufgaben schon immer mathematische Geräte und Maschinen benutzt. Am häufigsten ist wohl die Verwendung des Rechenschiebers, der sich für viele Routinearbeiten im Büro wie auf der Baustelle infolge seiner bequemen Handhabung und der Tatsache, dass er sich in jeder Rock-und Hosentasche mitnehmen lässt, ausserordentlicher Beliebtheit erfreut und auch weiterhin erfreuen wird. Erinnert sei an dieser Stelle, dass es ein Berliner *Bauingenieur*, Konrad Z u s e, gewesen ist, der über die für baustatische Berechnungen erforderlichen zeitraubenden numerischen Auswertungen auf den Gedanken kam, diese zu mechanisieren. Die modernen Rechenanlagen sind bekanntlich nicht nur in der Lage, konventionelle Aufgaben rationeller als bislang zu bearbeiten, sondern sie tragen in massgebender Weise mit dazu bei, dass zum Beispiel die Planungs- und Entwurfsmethoden wirtschaftlicher und zweckmässiger werden. Die Anwendung verbesserter Berechnungsverfahren hat weiterhin die Herabsetzung der Sicherheitsfaktoren zu Folge, was zur Materialeinsparung ausgenutzt wird. Ferner legt es der bei neuartigen Konstruktionen stark gestiegene Umfang der statischen Berechnungen nahe, die Vorteile der Rechenautomaten auszunutzen. Zur Zeit sind für fast alle vorhandenen Automaten auch die in der Statik gebräuchlichen Kraft- und Formänderungs-Grössenverfahren programmiert. Sie dienen bekanntlich dazu, Durchlaufträger und Rahmensysteme statisch zu berechnen. Dabei sind lineare Gleichungssysteme aufzustellen, zu lösen und die Lösungen auszuwerten.

Durch die von S. Falk, Braunschweig, betriebene Entwicklung kam das sogenannte Reduktionsverfahren für die elektronische Berechnung der oben genannten Systeme zur Anwendung. Bei diesen Verfahren geht man z. B. von der Lösung der Differentialgleichung für die Balkenbiegung aus und führt als Integrationskonstanten die vier mechanisch sinnvollen Schnittgrössen: Durchbiegung, Neigung, Moment und Querkraft ein. Die Lösung der Differentialgleichung und die Rand- und Übergangsbedingungen lassen sich übersichtlich in Matrizenschreibweise formulieren. Die wichtigste mathematische Operation ist demnach die Matrizenmultiplikation, die sich für die Anwendung von elektronischen Rechenautomaten bestens eignet. Auch bei der Berechnung offener und geschlossener räumlicher Rahmentragwerke ist dieses Reduktionsverfahren mit Erfolg anwendbar, ebenso bei Knick- und Schwingungsproblemen von Balken, die — wie die Biegung — von linearen Differentialgleichungen 4. Ordnung beherrscht werden.

Ferner erleichtert der Einsatz von Rechenautomaten die statische Berechnung von Flächentragwerken; die Entwicklung und Ausarbeitung geeigneter Rechenverfahren ermöglicht ihren Einsatz und damit ein wirtschaftlicheres Rechnen. Besonders komplizierte Aufgaben, wie die Ermittlung der Beanspruchungen schiefer Platten, ausgesparter Scheiben oder Platten auf Einzelstützen sind, vom rechentechnischen Standpunkt her betrachtet, nicht mehr so aufwendig. Auch wird die Erleichterung der numerischen Berechnungen die Schwierigkeiten überwinden, die einer *breiteren* Anwendung der ausserordentlich wirtschaftlichen und eleganten Schalenkonstruktionen noch gegenüberstehen; gegebenenfalls können nichtlineare Spannungs- Dehnungs-Gesetze berücksichtigt werden.

Andere Anwendungsbereiche sind dynamische Untersuchungen komplizierter Maschinenfundamente oder die Ermittlung von Eigenschwingungszahlen von Abraumförderbrücken.

Im Bereich des Stahlbaues sei an den Einsatz von Rechenanlagen im Behälterbau, bei der Berechnung von Knotenpunktkoordinaten und Stablängen grosser Fachwerkkuppeln erinnert. Auf die Möglichkeiten des Automateneinsatzes in den mit dem Bauwesen zusammenhängenden Bereichen der Vermessungskunde, der Landvermessung, dem Strassenbau und der Verkehrsplanung sei an dieser Stelle nur hingewiesen.

Wegen der besonderen Aktualität der Verwendung moderner Rechenautomaten auf bauökonomischem und technologischem Gebiet möchte ich dazu einige Bemerkungen machen:

Bei der Erforschung des Bauprozessablaufes oder bei genauen Planungsanalysen, die von riskanten, gefühlsmässigen Kalkulationen frei sein sollen, muss man zur mathematischen Formulierung der Aufgabenstellungen kommen, was oftmals für die aus den Ansätzen nachfolgenden Berechnungen zum Einsatz eines Automaten führen wird. Zwar steht man in vielen Belangen noch am Beginn einer mathematischen Durchdringung der Probleme, jedoch hat sich bei den bereits erfassen Aufgaben erwiesen, dass der Einsatz von Rechenautomaten bei wirtschaftlichen Entscheidungen von grossen Nutzen für die Volkswirtschaft sein kann. Sehr fruchtbar sind auch hier die Methoden der „linearen Programmierung" zur Erzielung optimaler Lösungen (CPM, PERT, RAMPS).

Es ist heute möglich, dass rechtzeitig exakte Ermittlungen für die Baustoffversorgung zum Beispiel aufgrund der Forderung eines Transportkostenminimums angestellt werden. Die Untersuchungen von Standortvarianten neu zu schaffender Industriebetriebe in Bezug auf die Austauschbeziehungen mit anderen Produktionszentren und die durch die Transportleistung entstehenden Ausgaben können maschinell durchgeführt werden. Die Durchrechnung von vielen konstruktiven Varianten bei Berücksichtigung einer optimalen Lösung nach dem Gesichtspunkt der bestmöglichen Materialausnutzung oder der geringsten Gesamtkosten bereitet der Maschine keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Technologische Vorgänge des Bauablaufes an einer Grossbaustelle können mit ihrer Hilfe eingehend auf ihre Zweckmässigkeit hin studiert werden. Nicht zuletzt erkennt man hieraus, dass ein Rechenzentrum für das Bauwesen ungemein vielfältige Aufgaben zu erfüllen hat. Dabei stellen die ökonomischen Aufgaben wesentlich höhere Anforderungen an die elektronischen Rechenau-

tomaten als zum Beispiel statisch-konstruktive Aufgaben. Die momentan gebräuchlichen Rechenautomaten reichen dabei in Einzelfällen zur Bearbeitung ökonomischer Aufgaben in ihrer Speicherkapazität noch nicht aus, und man ist gezwungen, Vereinfachungen durch Zusammenfassungen auf Kosten der optimalen Lösung vorzunehmen.

Es seien noch einige Bemerkungen zum Einsatz eines Automaten im Bereich der Baustoffindustrie bzw.-forschung gemacht. Es ist durchaus denkbar, dass bei der Automatisierung von Betonwerken die Verarbeitung der Daten des Ausgangsmaterials durch eine elektronische Rechenmaschine eine entsprechende Steuerung des Produktionsprozesses bewirkt. Ferner können statistische Auswertungen bei der Produktion von Ziegeln, Beton oder Zement systematisch durchgeführt werden und zur Erhöhung der zulässigen Beanspruchungen der Baustoffe bei Einhaltung einer geringeren Streuung der Festigkeitswerte der Baustoffe beitragen. Die theoretische Forschung in der Baustoffkunde eröffnet für den Rechenautomaten ein reichhaltiges Programm. Es können Kristallstrukturuntersuchungen vorgenommen oder schwierige thermodynamische Prozesse und Regelungsprobleme numerisch durchgerechnet werden.

Die aufgeführten Beispiele dürften zumindest bereits soviel zeigen, dass der Einsatz von modernen Grossrechenanlagen auch im Bauwesen — wie in vielen anderen Industriezweigen — mit dazu beitragen kann, unsere Konstruktions-, Berechnungs- und kaufmännischen Büros wesentlich zu entlasten, die Arbeiten insgesamt ökonomisch rationeller zu gestalten und die Arbeitsproduktivität nicht unbeträchtlich zu erhöhen.

In Erkenntnis der volkswirtschaftlichen Bedeutung der Einführung des maschinellen Rechnens hat der Akademische Senat der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar im Herbst 1959 beschlossen, ein mittleres Rechenzentrum im Institut für Mathematik aufzubauen. Dieses Rechenzentrum ist nicht allein für die verschiedenen Institute und Lehrstühle der Hochschule, sondern es wird für die gesamte Bau- und Baustoffindustrie der DDR und die am Bauwesen massgeblich beteiligten Institutionen wirksam und durch diese ausgelastet. Hinzu kommen Aufgaben aus der Industrie und Wirtschaft des Bezirkes Erfurt und der örtlichen Industrie der Stadt Weimar.

Das Wissenschaftliche Rechenzentrum ist zunächst mit dem programmengesteuerten Digitalrechner ZRA 1 des VEB Carl Zeiss, Jena, ausgestattet worden und wird durch einen Kleinstrechner, einen Analogrechner 1964 und elektronische datenverarbeitende Anlagen ergänzt. Im einzelnen vollzog sich der Aufbau in den üblichen Stufen. Zunächst wurde im Jahre 1960 mit einer kleinen Gruppe von Mitarbeitern ein Rechenbüro im Institut für Mathematik eingerichtet. Sinn und Zweck dieses Rechenbüros war, so schnell wie möglich Anschluss an die moderne Entwicklung der Berechnungsmethoden zu erhalten, den Aufbau eines Rechenzentrums in organisatorischer und fachlicher Hinsicht vorzubereiten, die erforderlichen Mitarbeiter und Fachkräfte zu qualifizieren und vor allem auch die späteren Kunden durch verschiedene Aufklärungskampagnen zu werben. In diesem Rechenbüro konnten mit den herkömmlichen elektrischen Tischrechenmaschinen verschiedene Aufträge durchgeführt werden, die keinen allzu grossen numerischen Aufwand hatten. Im Hinblick auf den späteren Einsatz des ZRA 1 wurden vorbereitend Probleme aus den verschiedensten Gebieten des Bauwesens bearbeitet, die zugehörigen Flussdiagramme aufgestellt und teilweise bereits programmiert. Die Programme sind ab 1961 in verschiedenen Rechenzentren, die bereits über einen ZRA 1 verfügten, als Forschungs- und Kundenaufträge gelaufen.

Eine weitere, sehr wichtige Aufgabe des Rechenbüros war es, in der seit 1957 von mir gehaltenen Vorlesungsreihe über *Praktische und numerische Mathematik* mit Maschinenpraktikum und maschineller Rechentechnik bei der Ausbildung der Studenten verstärkt mitzuhelfen, wobei die zukünftigen Diplom- Bauingenieure mit der Bedienung und den Anwendungsmöglichkeiten der Rechenmaschinen und -auto-

maten vertraut gemacht werden. Die Maschinen des Rechenbüros standen und stehen darüber hinaus den Studenten für die Durchrechnung ihrer Beleg- und Diplomarbeiten zur Verfügung.

So leistete das Rechenbüro eine sehr fruchtbare Aufbauarbeit für das Wissenschaftliche Rechenzentrum (RZ), wobei die organisatorischen Erfahrungen nicht zu unterschätzen waren. Entsprechend den drei Hauptaufgaben eines an einer Technischen Hochschule untergebrachten RZ, nämlich der Ausbildung der Studenten im Maschinellen Rechnen und damit zusammenhängenden Problemen, der Entwicklung der Forschungstätigkeit unter Ausnutzung der zur Verfügung stehenden Anlagen und der Erledigung der Kundenaufträge vollzog sich der weitere Aufbau. Besonders dringend für eine breite Anwendung der digitalen Rechentechnik in der Volkswirtschaft war zunächst die Heranbildung von aufgeschlossenen Fachkräften, die in der Lage sind, die gegebenen Hilfsmittel zu nutzen.

Nach der viersemestrigen mathematischen Grundausbildung erhalten die Studenten der Fakultät Bauingenieurwesen in Weimar in zweisemestriger obligatorischer Vorlesung unter anderem Einblick in die maschinelle Rechentechnik, wobei im einzelnen über digitale und analoge Rechenhilfsmittel, über Dualzahlen, Verschlüsselungen, Schaltalgebra, über Bauelemente und Strukturen der Automaten und über Programmierung Grundkenntnisse vermittelt werden. (*Programmierungssprachen* — fakultativ 4. und 5. Studienjahr). Besonderer Wert wird vor allem in den Übungen und dem Maschinenpraktikum auf die mathematische Aufbereitung der technischen Probleme gelegt, was erfahrungsgemäss die meisten Schwierigkeiten bereitet. Ausgehend vor der Zielstellung über die mathematische Analyse und die Formulierung — zum Beispiel Aufstellen einer algebraischen oder Differentialgleichung — wird der Student auf die Auswahl einer geeigneten Lösungsmethode in Verbindung mit der Möglichkeit des Automateneinsatzes vorbereitet. Bei nicht zu umfangreichen Aufgaben werden danach die zugehörigen Programm aufgestellt.

1963 hat der Rat der Fakultät Bauingenieurwesen die Einführung einer Vertiefungsrichtung *Grundlagen—Wissenchaften* beschlossen. Für diese Ausbildung ist ein gesonderter Studienplan mit erhöhten mathematischen Anforderungen ausgearbeitet, in dem die mathematischen Disziplinen: Partielle Differentialgleichungen, Integralgleichungen, Variationsrechnung, Tensorrechnung, Differentialgeometrie, Lineare und nichtlineare Optimierung und Mathematische Statistik aufgenommen wurden.

Weiterhin ist für diese Vertiefungsrichtung ein grosses mathematisches Praktikum vorgesehen. Dem Rechenzentrum obliegt zur Zeit auch die Ausbildung von technischen Rechnern, die als unentbehrliche Helfer erst die reibungslose Arbeit in diesen und ähnlichen Institutionen garantieren.

An der erweiterten Schiller- Oberschule in Weimar wurde mit Beginn des Schuljahres 1963 eine Spezialklasse mit 21 ausgewählten Schülern gegründet, die im Rahmen des polytechnischen Unterrichts die Facharbeiter- Ausbildung eines technischen Rechners erhalten, 1964 trat eine weitere Spezialklasse mit 25 Jungen und Mädchen hinzu.

Hervorgehoben werden muss, dass diese Schüler wöchentlich einmal ein mathematisches Praktikum am RZ durchführen, wo sie durch praktische Methoden mit der Handhabung der Maschinen und dem Technischen Zeichnen vertraut gemacht werden. Weiterhin sind sie jährlich zu einem sechswöchigen Praktikum im RZ, wo sie auch mit einfachen — meist datenverarbeitenden — Aufgaben nach der Auffassung einer Lehrlingsbetätigung beschäftigt werden. Gleichzeitig mit dem Abitur erhalten sie den Facharbeiterbrief *Technischer Rechner*. Ihr Einsatz kann in mathematischen Laboratorien erfolgen. Ein grosser Teil wird ein Studium aufgreifen, wobei diesem die intensive mathematische Vorbereitung von Nutzen sein dürfte.

Die Technischen Rechner können in einem weiteren zweijährigen Lehrgang zum mathematisch-technischen Assistenten ausgebildet werden. Auch dieser Lehrgang kann in unserem RZ im Abendstudium durchgeführt werden. Der mathematisch-technische Assistent kann als Programmierer und zur Aufbereitung kleiner mathematischer Analysen und Aufgaben eingesetzt werden.

Gleichzeitig werden am Institut für Mathematik seit 1962 in regelmässigen Abständen Programmierungskurse im Rahmen einer postgradualen Ausbildung für in der Praxis tätige Diplomingenieure durchgeführt. Dabei wird angestrebt, einen möglichst grossen Kreis zu gewinnen und diese in die Grundbegriffe der maschinellen Rechen- und Teilweise auch der Programmierungstechnik einzuführen. Es handelt sich dabei nicht um reine Programmierungskurse, sondern es wurde gerade bei diesen Lehrgängen sehr breiter Raum für die Aufbereitung der Probleme gelassen.

Darüber hinaus lernen die Ingenieure kennen, für welche Problemstellungen sich der ZRA 1 besonders eignet und in welchen Fällen nach wie vor z.B. der bewährte Rechenschieber sinnvoller und ökonomischer ist. Diese meist einwöchigen Kurse werden für Statiker und Bauwirtschaftler entsprechend den verschiedenen Anwendungsgebieten getrennt durchgeführt. Sie werden nicht von den Mathematikern des Institutes für Mathematik allein, sondern auch von erfahrenen Ingenieuren betreut, die bereits erfolgreich mit elektronischen Rechenanlagen gearbeitet haben.

Die Forschungstätigkeit im Institut für Mathematik orientiert sich im wesentlichen auf baustatische, bauökonomische und gebietsplanerische Anwendungen der Mathematik und auf numerische Stabilitätsuntersuchungen. Dementsprechend sind auch die wissenschaftlichen Mitarbeiter ausgewählt. Sie setzen sich aus Diplom-Mathematikern, Diplom-Wirtschaftsmathematikern, Diplom-Bauingenieuren und Diplom-Ökonomen zusammen und arbeiten auch in den Anwendungsmöglichkeiten entsprechenden Arbeitsgruppen innerhalb des RZ zusammen.

Es ist ganz selbstverständlich, dass ein solches Rechenzentrum nicht allein mit Mathematikern besetzt werden kann, die etwa die Hälfte der Gesamtmitarbeiterzahl unter den wissenschaftlichen Kräften ausmachen. Die intensive Zusammenarbeit mit der Entwurfs- und Baupraxis vermittelt uns wertvolle Rückschlüsse für die Zusammensetzung eines möglichst wirkungsvoll und den Kundenansprüchen gewachsenen Mitarbeiterkollektivs. Die Auswirkund von Forschung und Zusammenarbeit mit der Praxis auf die Lehre erweist sich bereits heute jedoch von unschätzbarem Nutzen.

Es wurde zunächst unter Berücksichtigung der vielfältigen Aufgaben in Lehre und Forschung mit einer einschichtigen Auslastung des Automaten für den Kundendienst gearbeitet. (Seit Januar 1964 1 1/2 Schichtbetrieb). Ab Januar 1965 ist ein Zwei- und später ein Dreischichtenbetrieb nach dem endgültigen personellen und maschinellen Aufbau geplant.

In den Jahren 1961 und 1962 sind bereits über zwanzig unterschiedliche, zum Teil umfangreiche Aufträge aus den verschiedensten Bereichen der Baupraxis im Rechenzentrum unseres Instituts bearbeitet und zum grossen Teil auch programmiert worden, wobei die Rechnung selbst noch ausserhalb Weimars in anderen Rechenzentren durchgeführt worden sind. (Dezember 1962 ZRA 1 im Institut für Mathematik installiert). Es seien einige Aufträge aus dem baustatischen Bereich angeführt, die für den ZRA 1 programmiert und auf ihm durchgerechnet worden sind:

Für den Lehrstuhl für Stahlbeton- und Massivbau wurden Rechnungen zum Problem der linienförmig gestützten Platten durchgeführt. Dabei waren unter anderem Reihenglieder zu berechnen, die aus umfangreicheren rationalen Ausdrücken in Hyperbelfunktionen bestehen. Mit einem etwa 360-zeiligen Programm wurden innerhalb von drei Stunden ca. 11 000 Ergebnisse ausgedruckt.

Bei einem Auftrag des Lehrstuhls für Festigkeitslehre und Stahlbau handelt es sich um die Berechnung von Kugelschalen über polygonalen Grundrissen, d. h. um Schalen mit gleichseitigem Grundriss und gleichmässiger Vertikalbelastung. Neben den Eingangswerten sollen alle Schnittkräfte und Normalspannungen berechnet und ausgedruckt werden. Das sind ungefähr 5 600 Druckwerte. Ausserdem sollen noch die Schubspannungen berechnet werden. Bei der Berechnung der Querkräfte treten schlecht konvergierende Reihen auf, die mit 500...1 000 Gliedern die geforderte Genauigkeit liefern.

Ferner ist ein Programm zur elektronischen Berechnung von Bemessungstafeln im Stahlbetonbau nach dem Doppelbiegungs-Traglastenverfahren entwickelt worden, das 1 040 Programmzeilen umfasst und zur Zeit für verschiedene Stahlsorten angewendet wird.

Für den Lehrstuhl für Stahlbeton und Massivbau wurden nach dem Verfahren von Jakobsen mit Hilfe des ZRA 1 Berechnungen für die Verbesserung von Spannbetonträgern durchgeführt. Die Ergebnisse wurden zur Aufstellung von Tabellen benutzt und sind für den Lehrbetrieb gedacht. Nach den Verfahren von Brendel wurde die Verbesserung im Spannbetonbau ebenfalls elektronisch im Auftrage von Industrieprojektierung Berlin durchgeführt. Beim letzten Programm werden vom Automaten unter verschiedenen Querschnitten bei verschiedenen Spannungskombinationen günstige Fälle ausgesucht.

Im letzten Jahr sind im Auftrage des VEB Industrieprojektierung Jena Standardprogramme entwickelt worden, die zur ständigen Verwendung in den Projektierungsbetrieben geeignet sind. In einem Fall handelt es sich um die Durchrechung eines Systems vor horizontal belasteten Querwänden, das zum Beispiel bei einem Hochbau realisiert wird. Erfasst werden dabei Querwände, die von einer bzw. zwei Öffnungsreihen geschwächt sind oder keine Öffnungsreihe besitzen. Es werden dabei neben den Durchbiegungen an den Oberkanten der Querwände die Schnittkräfte an einer äquidistanten Folge von Punkten längs der Querwandhöhe ausgerechnet und ausgedruckt. Für die Lösung des dem Problem zugeordneten Randwertproblems wird dabei ein Näherungsansatz mittels einer trigonometrischen Reihe verwendet. Dem Verfahren liegt eine Arbeit von R. Rosman zugrunde. Die elektronische Berechnung mit *fünf* Querwänden erfolgte in ca. 6 Minuten.

Bei einem zweiten Programm geht es um die Berechnung eines elastisch gebetteten mehrfeldrigen Balkens nach dem Bettungsziffernverfahren. Für dieses Programm ist ein fünffeldriger elastisch gebetteter Balken mit elastischen Stützen und feldweise konstanter Biegesteifigkeit zugrunde gelegt. Die Feldgrenzen sind an den Stellen zu setzen, wo sich die Biegesteifigkeit ändert oder wo sich elastische Stützen befinden. Als Belastungsgrössen sind Einzelkräfte, Einzelmomente und trapezförmige Streckenlasten einsetzbar, die innerhalb eines Feldes addiert werden und in einer Lastspalte in die Feldmatrix eingeführt werden.

Als mathematischer Ansatz ist die bekannte lineare Differentialgleichung 4. Ordnung verwendet worden. Als Lösungsmethode wird das bereits erwähnte Reduktionsverfahren benutzt. Es können Zustandsvektoren (Durchbiegung $w(x)$, Neigung $\varphi(x)$, Biegemoment $M(x)$, Querkraft $Q(x)$) an 250 beliebigen Zwischenstellen berechnet und ausgedruckt werden.

Die Übermittlung der geometrischen und Lastgrössen an das Rechenzentrum geschieht durch ausgearbeitete Formblätter. Das Programm ist bereits in 200 Fällen für die Praxis angewendet worden.

Weiterhin ist ein Standardprogramm für Flächengründungen nach Ohde-Kany aufgestellt worden. Berechnet werden Kraft- und Deformationsgrössen von streifenförmigen Platten auf einer elastischanisotropen Halbebene. Das elastische Verhalten des Baugrundes wird durch die Berücksichtigung der geologischen Vorbelastung und der horizontalen Schichtung mit unterschiedlichen Schichtdicken und Steifeziffern spezifiziert. Im vergangenen halben Jahr sind damit rund 300 Lastfälle berechnet worden.

Ein weiteres Programm dient der Stabkraftberechnung in statisch bestimmten, räumlichen Fachwerken. Eingegeben werden die Koordinaten der Knotenpunkte, die Anschlussknotennummern eines Stabes und die Lasten. Berechnet werden Länge, Richtungsvektor und Reaktionskraft für jeden Stab. Die begrenzten Speichermöglichkeiten des ZRA 1 gestatten es, allgemeine Fachwerke bis zu 60 Stäben, einfache Fachwerke bis zu 180 Stäben zu berechnen. Bisher wurden etwa 40 verschiedene Systeme mit jeweils mehreren Lastfällen bearbeitet, die zum Teil auch schon als Kragdächer oder als Gewächshäuser Stabnetz bauweise gebaut worden sind.

Es wurde ferner ein Standardprogramm zur Berechnung orthogonaler Rahmentragwerke entwickelt, die Riegelsprünge enthalten. Als Berechnungsverfahren ist das Drehwinkelverfahren angewendet worden, das entstehende Gleichungssystem wird nach Gauss-Banachiewicz gelöst.

Als Eingabewerte sind die Geometrie und die Steifigkeit des Tragwerkes und die Belastungen (Einzel- und Streckenlasten) anzugeben. Die Volleinspannmomente werden in einem Vorprogramm von Automaten selbst berechnet. Ausgabewerte sind Momente und Querkräfte an den Stabenden — getrennt für jeden Lastfall. Für verschiedene statische Konstruktionen sind seit Fertigstellung dieses Programms zu Beginn dieses Jahres für 14 Projektierungsbüros mehr als 1 000 Lastfälle gerechnet worden.

Aus den Bereichen der Gebietsplanung, Standortermittlung und der Bauwirtschaft konnten u. a. folgende Probleme behandelt werden: Mit dem VEB Talsperrenbau Weimar wird über statistische Untersuchungen von Baustoffen zusammengearbeitet. Es sollen für die Eingangskontrolle der Bindemittel Kontrollkarten eingeführt werden. Von mathematischer Seite sind einige Korrelationsuntersuchungen durchzuführen, wobei die Berechnung der Korrelationskoeffizienten auf dem Rechenautomaten erfolgt.

Zur Transportplanung: Von einem grosseren Bauausführungsbetrieb, der Bau-Union Hoyerswerda, wurde uns unter anderen folgendes Problem gestellt: die Zahl der insgesamt gefahrenen km beim Berufsverkehr ist zu minimieren. Dabei ist zu beachten, dass die Arbeiten sich auf ca. 10 verschiedene Berufsgruppen verteilen und zwischen diesen auch nicht ausgetauscht werden dürfen.

In die Rechnung mussten 11 verschiedene Baustellen und 62 verschiedene Wohnorte einbezogen werden. Das Problem wurde durch Kombination eines einfachen Transportproblems mit einem speziellen Näherungsverfahren gelöst. Der im Ergebnis der Rechnung aufgestellte Plan de Buslinien besitzt nur noch etwa 35% der Länge der Linienführung *vor* der Berechnung. Daraus ergibt sich *erstens* eine Senkung der Ausgaben für den Berufsverkehr und *zweitens* bekommt der Kraftverkehr eine grosse Anzahl von Bussen für andere wichtige Verwendungswecke **frei.**

Die gleiche Aufgabenstellung ist jetzt für den neu gegründeten VEB Wohnungsbau Hoyerswerda durchgerechnet worden. Es ergab sich die Resultaten von Tabelle 1.

Tabelle 1

	Ist	Nach der Rechung
Insgesamt täglich zurückgelegte km (2 Fahrten täglich)	1 3 6 km	614 km (~45%)
Davon *Leer*kilometer	626 km	272 km (~45%)
Tägliche Kosten in MDN[1])	2 295 MDN	810 MDN (~40%)

Die Bezirksplankommission beim Rat des Bekirkes Erfurt übergab unserem Institut das Problem der Kohletransportoptimierung zur Bearbeitung. Ziel war die Minimierung der Transportkilometer.

Im Bezirk Erfurt sollen 35 Eisenbahnentladepunkte für Kohle gebildet werden. Von diesen 35 Bahnhöfen soll dann der Transport zu den eigentlichen Verbrauchern mit Lastkraftwagen erfolgen. Diese Transporte sollten optimal festgelegt werden.

[1]) Mark der Deutschen Notenbank.

Aufgrund der beschränkten Speicherkapazität beim ZRA 1 machte sich eine Zusammenfassung der Verbraucher erforderlich. Grundlage der Berechnung war eine Tabelle der Entfernungen von *allen* Bahnhöfen zu *allen* Verbrauchern sowie die von den Verbrauchern benötigten Mp Kohle. Für schlechte Wegstrecken oder bedeutende Steigungen wurden darin bestimmte prozentuale Zuschläge berücksichtigt. Es wurde deshalb ein fiktiver Verbraucher eingeführt, dem die Differenzkapazität zugeordnet wurde.

Für die VEB Baustoffversorgung Erfurt und Magdeburg wurden optimale Transportwege für Mauerziegel und Kies ermittelt.

Eine weitere Problemstellung war die Optimierung der Verteilung von Fleisch, Butter und Eiern von den Anlieferern (z.B. Molkerein, Schlachthöfe, Erfassungsstellen, Grenzbahnhöfe), auf die Kühlhäuser der Bezirke Erfurt und Suhl und von dort auf die Verbraucher (repräsentiert durch die Grosshandelsgesellschaften — GHG — in den Kreisstädten) hinsichtlich der Transportkosten. Dabei sollte insbesondere der geplante Neubau eines Kühlhauses mit den zur Auswahl stehenden Standorten Nordhausen und Mühlhausen Berücksichtigung finden, um der endgültigen Entscheidung über den Standort eine reale Grundlage zu bieten.

Bekannt sind die Entfernungen der Lieferanten bzw. Verbraucher von den Kühlhäusern sowie die geplanten Liefer- und Verbraucherkapazitäten. Man geht von der Tatsache aus, dass die Transportkosten den gefahrenen „Tonnenkilometern" etwa proportional sind und verlangt eine solche Verteilung der Waren, die eine möglichst kleine Gesamtzahl der Tonnenkilometer zur Folge hat. Da die Kapazitäten der Kühlhäuser gross genug waren, konnten wir die Verteilung der Waren getrennt behandeln. Es liegt hier eigentlich ein zweistufiges Transportproblem vor. Wir haben uns entschlossen, auf die Erreichung des absoluten Optimums zu verzichten und zerlegten das zweistufige in zwei gewöhnliche Transportprobleme. Den GHG wurden diejenigen Kühlhäuser zugeordnet, die jeweils am nächsten lagen. Die Verteilung der Waren von den Bezugsorten auf die Kühlhäuser, deren „Kapazitäten" nunmehr festlagen, wurden dann als einfaches Transportproblem behandelt und optimiert. Die Durchrechnung erfolgte nach Stepping-Stone bzw. der ungarischen Egervary-Methode.

In Zusammenarbeit mit dem Lehrstuhl für Gebiets- und Städteplanung unserer Hochschule wurde für die Kühl- und Lagerwirtschaft eine Optimierung für die Kooperationsbeziehungen der in den Kühlhäusern der DDR gelagerten Waren: Butter, Fleisch und Eier (das sind fast 80% aller Kühlhauswaren) durchgeführt. Hierbei wurde die Anlieferung zu den Kühlhäusern und die Auslieferung an die Verbraucher betrachtet.

Vorbereitend für die eigentliche Rechung machte sich — bedingt durch die relativ geringe Speicherkapazität des ZRA 1 — eine Zusammenfassung der Daten erforderlich. Die eigentliche Durchrechung erfolgte nach der Stepping-Stone-Methode auf dem ZRA 1. Danach wurde mittels manueller Verfahren die Zusammenfassung der Daten wieder rückgängig gemacht. Der optimierte Transportplan ergab gegenüber dem Ist- Plan eine mögliche Einsparung an Transportkosten von ca. 300 TMDN [2]) pro Jahr.

Ein weiterer Auftrag ist die Kapazitätsoptimierung der Kühlflächen der Kühlhäuser in der DDR. Die Einlagerungsmengen in die einzelnen Kühlbetriebe sollen so erfolgen, dass die Gesamttransportkosten für die An- und Auslieferung ein Minimum bilden. Es ist vorgesehen, die beiden Probleme, vom „absoluten" Minimum ausgehend, mittels der Veränderungen an den fiktiven Verbraucher und Lieferanten zu koppeln. Ob dies möglich ist bzw. sich ein mathematisch eindeutiges Verfahren ergibt, soll untersucht werden. Zur Bearbeitung dieses Problems ist die Verwendung des ZRA 1 nötig und angebracht.

Das Staatliche Getränkekontor beauftragte uns letzthin, eine Transportoptimierung für die Belieferung der Brauereien mit Braumalz von den Malzfabriken in der DDR durchzuführen. Dabei muss jede Brauerei aus Qualitätsgründen von min-

---

2) Tausend Mark der Deutscher Notenbank.

destens 2 Malzfabriken beliefert werden. Der Aufwand vor der Rechnung betrug 24,24 Mill. tkm für 196 000 t. Ein Mitarbeiter des Staatlichen Getränkekontors konnte aufgrund eigener Überlegungen nach *halbjähriger* Tätigkeit diesen Aufwand auf 19,266 Mill. tkm für 192 000 t senken. Nach unseren Berechnungen ermittelten wir den Aufwand von 17,47 Mill. tkm für 199 500 t. Es ergab sich somit *noch immer* eine Einsparung von ca. 12% gegenüber der per Hand ermittelten.

Für den Volkswirtschaftsrat — Abteilung Lebensmittel-industrie — und die VVB Öl- und Margarineindustrie wurden die Margarinetransporte von den acht in der DDR bestehenden Margarinefabriken zu allen Verbrauchern — hier reduziert auf sämtliche Kreisstädte — optimiert. Die Einsparung betrug 23,4% der bisherigen Wege, was rund 1,6 Mill. MDN im Jahr an Einsparungen der Transportkosten erbringt.

Im Auftrag der Stadt Dessau wurde von dem Wissenschaftlichen RZ die Bevölkerungsentwicklung für diese Stadt bis zum Jahre 1980 berechnet. Ausgegangen wurde von der Verteilung der Bevölkerung auf die einzelnen Altersklassen des Jahres 1962. Für den Übergang von einer Altersklasse zur nächstfolgenden wurde die Überlebenswahrscheinlichkeit der jeweiligen Altersklasse zugrunde gelegt. Diese Wahrscheinlichkeiten wurden als relative Häufigkeiten für das Gebiet der DDR geschätzt. Bei dieser Berechung wurde somit vorausgesetzt, dass die Überlebenswahrscheinlichkeiten von Dessau nicht wesentlich von den Durchschnittswerten der DDR abweichen. Diese Berechnungen werden benötigt, um über die Entwicklung des Verkehrs dieser Stadt in den nächsten Jahrzehnten gewisse Voraussagen machen zu können.

Ebenfalls in den letzten Wochen wurde im Auftrag des Milchforschungsinstituts Oranienburg für die Milchwirtschaft der Stadt Weimar ein Rundreiseproblem behandelt, wobei günstige Fahrtrouten für die Verteilung der Flaschenmilch in Weimar und den umliegenden Gemeinden ermittelt werden sollten.

Nach der Neuaufstellung der Ortsmenge für je eine Rundreise ergaben sich statt bisher 16 Touren von 247 km Länge nur noch 14 Touren von 187 km Länge. Es muss gesagt werden, dass das Rundreiseproblem noch nicht streng gelöst ist und hier auch nur Näherungslösungen angegeben sind, die aber eine erhebliche Einsparung erbringen.

Demnächst wird dieses Verfahren für alle Städte im Bezirk Erfurt ausgewertet werden.

Im Auftrage des Bezirkswirtschaftsrates Erfurt wurde ein Zuschnittsproblem für einen Gothaer Betrieb bearbeitet. Es ging darum, ein vorgegebenes Sortiment von rechteckigen Blechen mit möglichst geringem Abfall aus grossen Tafeln auszuschneiden, wobei gewisse technologische Vorschriften zu berücksichtigen waren. Das Problem wurde als lineares Programmierungsmodell formuliert und mit einem Programm der Simplex-Methode bearbeitet. Der Abfall von etwa 5% vor der Optimierung konnte dadurch auf rund 2% reduziert werden, d.h. eine Verringerung des Abfalls um 60%.

Ausgehend von den gesammelten Erfahrungen und der Notwendigkeit des Austausches und der Vermittlung dieser Erfahrungen führte im Sommer 1961 das Institut für Mathematik ein Erstes Internationales Kolloquium über Anwendungen der Mathematik in den Ingenieurwissenschaften in Weimar durch. Das Rahmenthema lautete: *Anwendungen elektronischer Rechenanlagen in der Bau- und Baustoffindustrie.* Der Veranstalter hatte es sich zur Aufgabe gemacht, über dieses aktuelle Thema eine breite Diskussion anzuregen. Die Teilnahme von ca. 150 Wissenschaftlern und 50 begleitenden Ehefrauen aus 6 Staaten zeigte das Interesse, das die Veranstaltung über ein relativ enges, doch bedeutsames Spezialgebiet, hervorgebracht hat.

Von den 25 Vorträgen waren einige richtungsweisend für die Entwicklung und Anwendung des maschinellen Rechnens in der Baumechanik und der Bauökonomie. Es wurde auch über die Verwendung von Analogrechnern in einigen Vorträgen berichtet. Dieses Kolloquium diente zunächst einem weiten Erfahrungsaustausch auf den genannten Gebieten; es wurde aber auch von den in der Praxis tätigen Ingenieuren, die zum Teil manche Zweifel gegenüber dem Einsatz von Rechen-

MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA BUDAPEST 1845

automaten hatten, stark beachtet. Das Zweite Internationale Kolloquium dieser Art fand in der Zeit vom 25.8. bis 1.9.1963 in Weimar statt. (100 Fachvorträge mit 500 Teilnehmern aus 16 Ländern). Wir hoffen, damit einen bescheidenen Beitrag durch Erfahrungsaustausch und — vermittlung über Anwendung der Mathematik, besonders im Bauwesen, zu leisten. Die grosse Resonanz während und nach dem I. und II. Kolloquium gibt uns Veranlassung zu der Annahme, dass wir auch im Juni 1965 beim III. IKM mit einem guten Gelingen rechnen können, was sicher und letzten Endes zu einer weiteren Verbesserung der Zusammenarbeit zwischen Ingenieuren und Mathematikern beitragen wird. Sonderhefte der Wissenschaftlichen Zeitschrift der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar enthalten die Beiträge dieser Kolloquien.

Der Entwicklung des maschinellen Rechnens und seiner beschleunigten Anwendung im Bereich des Bauwesens ist dabei von den zuständigen staatlichen Stellen grosse Aufmerksamkeit geschenkt worden. So ist im Anschluss an das I. IKM 1961 ein Zentraler Arbeitskreis *Elektronisches Rechnen im Bauwesen* auf Anregung des Ministeriums für Bauwesen gegründet worden, der sich aus erfahrenen Förderern des maschinellen Rechnens aus der Entwurfspraxis, der Bauausführung, der Technischen Hochschulen, der Deutschen Bauakademie und der zuständigen Behörde zusammensetzt.

Die Leitung wurde dem Verfasser übertragen. Der Arbeitskreis ist als koordinierendes Gremium anzusehen. Die fachlichen Probleme werden von Arbeits- und Forschungsgruppen bearbeitet, deren Anleitung vom Arbeitskreis erfolgt.

Entsprechend den vorliegenden Erfahrungen haben sich zunächst folgende vier arbeitsfähige Gruppen gebildet: *1.* Baustatisch-Mathematische Arbeits- und Forschungsgruppe (AFG); 2. Bauökonomisch-Mathematische AFG; 3. Gebietsplanerisch-Mathematische AFG; *4.* Technologisch-Mathematische AFG.

Die Aufgaben der *Baustatisch-Mathematischen AFG* sollen in diesem Rahmen darin bestehen, die mit der Aufstellung programmgesteuerter Rechenautomaten verbundenen Vorteile in der Baustatik nutzbar zu machen. In regelmässigen Beratungen werden die Erfahrungen in der Aufstellung und der Anwendung der Programme ausgetauscht, die Forschungs- und Bearbeitungsthemen sinnvoll koordiniert und die Einführung der Programme in die Praxis der Entwurfsbüros und Prüfstellen vorgenommen. Ferner wird die Verbindung mit den in der DDR vorhandenen RZ angeleitet, wobei Massnahmen und Erfahrungen zwischen der anfallenden Arbeitsteilung der Rechenzentren und der Entwurfsbüros vorgeschlagen werden. Die vorgeschlagenen Forschungsthemen und die Aufstellung von Programmen werden nach einer systematischen Bedarfsermittlung koordiniert und den zentralen Stellen zur Bereitstellung eventuell erforderlicher finanzieller Mittel vorgetragen.

Weiterhin werden Qualifizierungs- und Ausbildungsfragen und Probleme der Publikation und Information behandelt.

Gemeinsam mit einem vom Ministerium für Bauwesen benannten Leitindustrieprojektierungsbüro für die Anwendung des maschinellen Rechnens in der Baustatik werden regelmässig Informationen über den derzeitigen Stand der fertigen Programme für alle Interessenten herausgegeben. Zur Zeit können etwa 70 Standardprogramme verwendet werden, die grösstenteils für den ZRA 1 entwickelt worden sind.

Für die Standardprogramme sind meistens Formblätter entwickelt worden, in die der in der Praxis tätige Ingenieur die jeweiligen geometrischen und Belastungsgrössen einträgt und die dem Rechenzentrum zur Ablochung übergeben werden.

Bei der Einführung dieser Programme war das Prüfverfahren noch ungelöst. Bekanntlich müssen nach den gesetzlichen Bestimmungen alle statischen Berechnungen von einer unabhängigen Prüfstelle geprüft werden. Da beim elektronischen Rechnen nicht jeder Schritt der Berechnung prüfbar ist und bei weiten nicht alle Zwischenergebnisse ausgedruckt werden können, mussten für das Prüfen von statischer Berechnungen, die auf modernen Automaten durchgeführt werden, neue Richtlinien erarbeitet werden. Dabei ist berücksichtigt, dass die Prüfinstanz letzten

Endes darauf zu achten hat, dass die Endergebnisse richtig sind, die für die Konstruktion und damit für die Standsicherheit des Bauwerkes massgebend sind. Bei den derzeitigen Möglichkeiten wird dabei für Standardprogramme folgender Weg beschritten. Nach Aufstellung des Programmes, welches die mechanischen Ansätze und die mathematische Formulierung des Problems (das Flussdiagramm und die vollständige Befehlsreiche, Prüfinstanz, zugelassene Rechenstelle, Anwendungsbereich, Bedeutung der Eingabe- und Ausgabewerte), die Formblätter für die Eingabewerte und ein vollständiges Zahlenbeispiel enthalten muss, erfolgt die *grundsätzliche Prüfung* des Programmes von einem zugelassenen Bausachverständigen.

In besonderen Fällen — etwa bei Berechnungen, die nur einmal oder wenige Male zur Anwendung kommen — können fachliche Gutachten die Grundsatzprüfung des Programms ersetzen.

Die Rechnung darf nur an den Rechenstellen durchgeführt werden, die in den Richtlinien über die Anwendung des Programmes aufgeführt sind. Die ausgedruckten Zahlenwerte unterliegen nach jeder Rechnung einer *Ergebnisprüfung*, zu deren Durchführung jeder Prüfingenieur für Statik berechtigt ist. Die Art und Weise der Ergebnisprüfung wird in der Richtlinie durch die Grundsatzprüfung zuvor bestätigt.

Die *Bauökonomisch Mathematische AFG* ist das Beratungsgremium auf dem Gebiet der Anwendung mathematischer Verfahren und des elektronischen Rechnens in der Bauökonomie. Ihr obliegt die Koordinierung aller auf diesem Gebiete in der DDR betriebenen Forschungs- und Entwicklungsarbeiten. Ein besonderes Problem dieser Arbeitsgruppe ist, dass sie bisher kaum auf in der Praxis erprobte mathematische Verfahren zurückgreifen kann, die nur noch für moderne Rechenanlagen zu programmieren wären. Deshalb sind hier in besonders starken Masse auch die mathematischen Methoden zu entwickeln und in die Praxis der Bauwirtschaft einzuführen. Dabei ist die Heranbildung geeigneter Fachkräfte von hervorragender Bedeutung. Das Ziel der Arbeitsgruppe ist es, durch verschiedene Lehrgänge sowie durch Herausgabe von geeignetem Lehrmaterial zu erreichen, dass in jedem wissenschaftlichen Institut des Bauwesens, in jedem Bezirksbauamt und in jedem grösseren Bau- und Baustoffbetrieb mindestens *ein* Mitarbeiter ausreichende Kenntnis über die Möglichkeiten zur Anwendung der Mathematik und des maschinellen Rechnens besitzt.

Folgende Hauptaufgaben werden von einzelnen Institutionen unter anderem bearbeitet: *1.* Bestimmung und Anwendung optimaler Transportnetze für den Transport von Baustoffen; 2. Aufstellung optimaler Fahrzeugeinsatzpläne für den Transport von Baustoffen; *3.* Bestimmung optimaler Produktionsvarianten und optimaler technologischer Pläne; *4.* Anwendung mathematischer Methoden bei der Aufstellung von Betriebsplänen; 5. Bestimmung der günstigsten Reihenfolge von Baumassnahmen.

Mithin beschäftigt sich diese Arbeitsgruppe mit Aufgaben, die *etwas* über die Anwendung des maschinellen Rechnens hinausgehen.

Zur Unterstützung der Einführung mathematischer Methoden bei bauwirtschaftlichen Belangen, vor allem bei der immer noch sehr aufwendigen Datenbeschaffung, sind drei Leitbetriebe für optimale Einsatzpläne, für ökonomische Probleme im Wohnungsbau und für ökonomische Probleme im Industriebau benannt worden.

Die *Gebietsplanerisch-Mathematische AFG* arbeitet bisher nach den Erfahrungen, die besonders von dem Lehrstuhl für Geibiets-und Städteplanung in Verbindung mit dem Institut für Mathematik der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar bei der Lösung einiger Probleme gemacht worden sind. Hervorgehoben sei, da für diese AFG wie bei der vorgenannten AFG die dort angeführten Problematik bezüglich der Entwicklung mathematischer Methoden erst recht und in erhöhtem Masse gilt.

Folgende Themen sind in Bearbeitung: 1. Standortund Transportoptimierung in der Kühl- und Lagerwirtschaft; 2. Standort- und Transportoptimierung für Gewächshäuser; 3. Strassennetzoptimierung; 4. Standort- und Transportoptimierung für Objekte des Gross- und Einzelhandels; 5. Vorausberechnungen der Bevölkerungsstruktur für gebietsplanerische und städtebauliche Aufgaben der Perspektivplanung.

In den letzten Monaten ist eine *Bautechnologische-Mathematische Arbeits- und Forschungsgruppe* ins Leben gerufen worden. Sie wird sich mit technologischen Prozessen der Planung und des Bauablaufes beschäftigen. Es sind Programme für die Produktions- und Kostenplanung aufgestellt und zur Anwendung gekommen.

Mit der Erkenntnis, dass alle numerisch erfassbaren Probleme maschinell berechnet werden können, ist zugleich eine der wichtigsten Aufgaben der Arbeitsgruppe verbunden, nämlich die Aufbereitung der praktischen Methoden der Technologie und deren Darstellung in mathematischen Modellen.

Die Fähigkeit, diese Aufgaben von einem grossen Kreis in der Praxis tätigen Fachleuten zu lösen, stellt ein Kriterium der breiten Anwendung elektronischer Rechenautomaten in der Technologie dar.

Eingegangen am 30 X 1964

Hochschule für Architektur und Bauwesen, Weimar, DDR

APLICAREA MAŞINILOR ELECTRONICE DE CALCUL ÎN CONSTRUCŢII

(Rezumat)

Autorul, director al Institutului de matematică al Şcolii superioare de arhitectură şi construcţii din Weimar, expune, din experienţă proprie, o serie de probleme relative la aplicarea maşinilor electronice de calcul în tehnica construcţiilor.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 691.328.2

SISTEME NOI DE PANOURI PRECOMPRIMATE DUPĂ DOUĂ DIRECŢII CU ARMĂTURA DISPUSĂ DUPĂ TRASEE POLIGONALE

DE

ANATOLIE MIHUL, DAN ZĂICESCU şi ANDREI ERDELYI

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

A. Consideraţii asupra folosirii planşeelor din beton armat precomprimat

În ultima vreme, o dată cu extinderea mare pe care au căpătat-o construcţiile din panouri mari precum şi cele executate în cofraje glisante, au fost experimentate o serie de planşee sub formă de panouri de dimensiunea unei camere, cu rezemarea pe întreg conturul.

Astfel au fost executate în străinătate panouri de planşeu cu secţiunea constantă şi armătura din corzi cu trasee drepte (simplu şi dublu armate) precum şi panouri ştanţate avînd nervuri dispuse ortogonal şi armătura (realizată din bare groase sau corzi) dispusă de asemenea rectiliniu.

Lipsurile esenţiale ale acestor panouri constau în distribuţia neraţională a tensiunilor artificial introduse în zonele de contur, care la partea superioară a plăcilor rezultă de acelaşi sens cu eforturile produse de acţiunea sarcinilor exterioare (cu care se încarcă plăcile după realizarea continuităţii). Din acest motiv, în cazul cînd precomprimarea se face numai cu armătura dispusă la partea inferioară a plăcii, efectul tensiunilor introduse artificial grăbeşte apariţia fisurilor în zona de contur a plăcii, avînd o influenţă negativă asupra modului de comportare a betonului în această zonă. Introducerea unei armături pretensionate în partea superioară îmbunătăţeşte comportarea unor astfel de sisteme în ceea ce priveşte preluarea eforturilor de întindere ce apar (la partea superioară a plăcilor) în zona de contur, însă conduce la sporirea consumului de armătură şi reduce în mare măsură, în general, eficienţa precomprimării.

O altă lipsă pe care o prezintă sistemele de panouri precomprimate după două direcţii, executate în străinătate, constă în modul de blocare a corzilor, care se face individual, ceea ce conduce la necesitatea folosirii unui număr mare de blocaje. De asemenea, aceste panouri de planşee prezintă marele dezavantaj că nu pot fi executate cu buclele necesare realizării continuităţii şi prinderii lor în elementele de rigidizare, ceea ce le face inutilizabile în regiunile cu grad ridicat de seismicitate precum şi în construcţiile executate în cofraje glisante cu planşee alcătuite din panouri prefabricate.

Avînd în vedere aceste lipsuri, precum şi necesitatea găsirii unor soluţii eficiente pentru planşeele construcţiilor de panouri mari, a celor executate în cofraje glisante cu planşee prefabricate, precum şi a construcţiilor executate din elemente spaţiale, Catedra de beton armat a Facultăţii de construcţii de la Institutul politehnic din Iaşi şi ISCM din oraşul Gh. Gheorghiu-Dej au întreprins o serie de studii şi încercări pentru stabilirea unor sisteme de panou precomprimat pe două direcţii cu armătura dispusă după trasee poligonale, capabil de a fi realizat cu o tehnologie simplă, care se pretează, cu mici modificări, la producţia de serie.

Panourile precomprimate, realizate după sistemul studiat, au fost folosite la alcătuirea elementelor spaţiale executate în cadrul şantierului ISCM „Gh. Gheorghiu-Dej", la alcătuirea blocurilor de locuinţe pe zidărie portantă din Piatra-Neamţ, urmînd să fie extinse la construcţiile din panouri mari şi la construcţiile cu pereţii executaţi cu cofraje glisante.

B. Elemente de concepţii noi în alcătuirea panourilor mari precomprimate după două direcţii

Obiectul urmărit a constat în elaborarea unor prototipuri noi de panouri precomprimate pe două direcţii, la care:

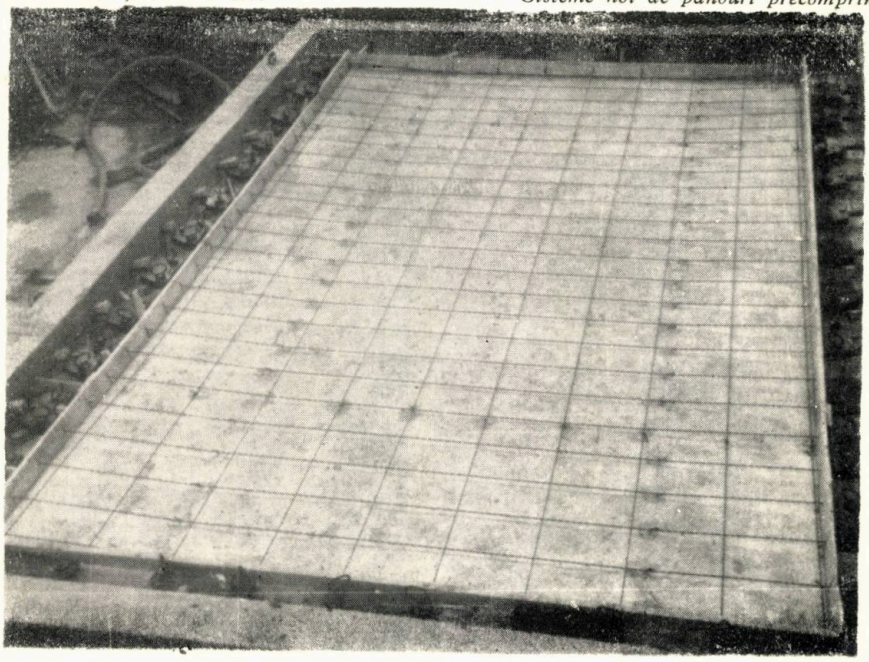
a) tensiunile din precomprimare să fie mai raţional distribuite în tot cuprinsul elementului faţă de sistemele similare folosite în străinătate;

b) să fie asigurată posibilitatea realizării continuităţii pe reazeme;

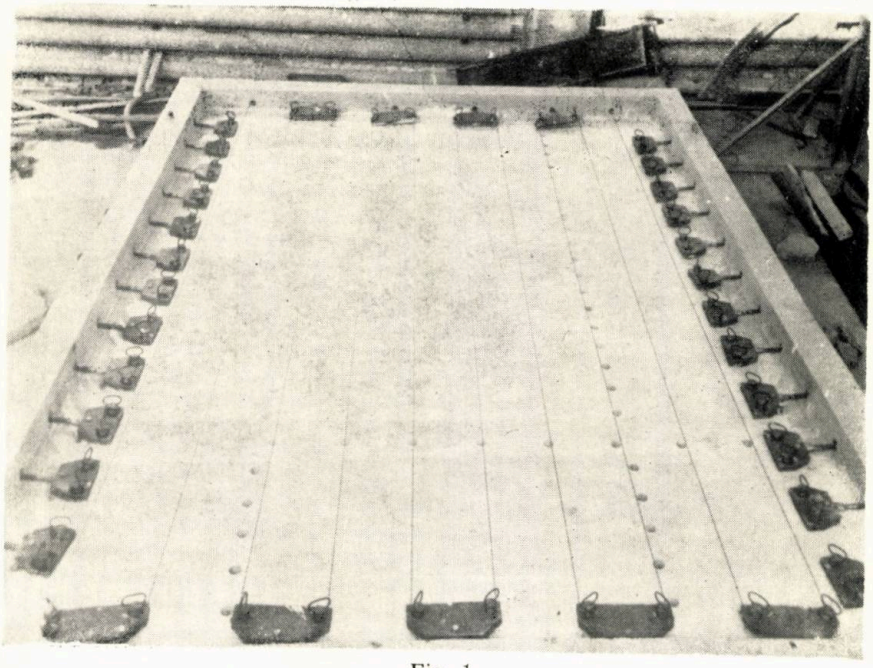
c) să fie simplificată pretensionarea sîrmelor prin eliminarea numărului mare de blocaje.

Astfel, faţă de panourile precomprimate după două direcţii folosite în străinătate, panourile experimentate şi aplicate în practică în cadrul şantierului din oraşul Gh. Gheorghiu-Dej, se caracterizează prin modul de dispunere a armăturilor pretensionate, care se face după trasee poligonale obţinute prin devierea sîrmelor preîntinse de la o distanţă de marginea panoului egală cu 1/5 din deschidere, cît şi prin modul de alcătuire a mustăţilor necesare realizării continuităţii, care au forma de bucle şi sînt formate din însăşi sîrmele pretensionate (fig. 1 şi fig. 4).

Precomprimarea zonelor de margine a panourilor cu armătura preîntinsă, ridicată, permite preluarea în bune condiţiuni a momentelor negative ce apar în zona reazemelor, după realizarea continuităţii panourilor, fapt care elimină apariţia fisurilor, întîrzie formarea articulaţiei plastice din vecinătatea conturului de rezemare şi sporeşte în mare măsură, fără consum suplimentar de armătură, capacitatea de rezistenţă a plăcilor. Practic, prin sistemul prezentat, se poate obţine o reducere importantă a consumului de oţel, fiind asigurată totodată



a)



b)

Fig. 1

Fig. 2

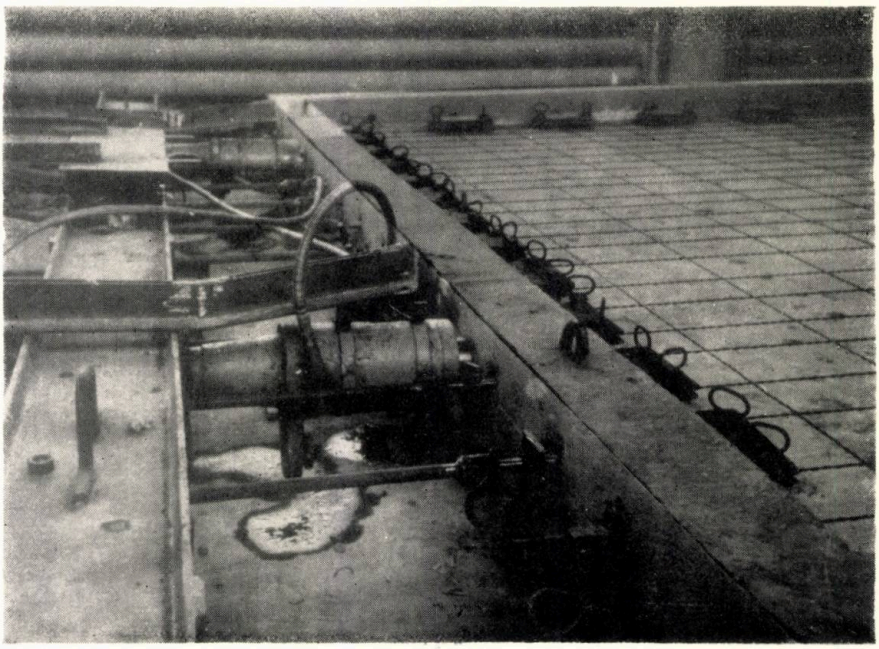


Fig. 3

o comportare superioară a zonelor de reazem ale plăcilor la acțiunea încărcărilor exterioare.

Buclele distribuite pe tot conturul panoului asigură realizarea continuității pe reazem a panourilor, ceea ce deschide perspective largi de folosire a acestui sistem în regiunile cu grad ridicat de seismicitate și permite executarea unor planșee cu plăci continue.

C. Tehnologia de confecționare a panourilor (în matrițe de beton)

Față de o serie de tehnologii analizate pentru realizarea panourilor precomprimate, sistemul experimentat se caracterizează prin modul de desfășurare a sîrmelor preîntinse care se dispun continuu (fig. 1 *a* și *b*), folosind drept ancoraje sisteme de role (în jurul cărora se petrec sîrmele, fig. 2) care sînt acționate în prima fază, fiecare în parte, pentru compensarea eforturilor, prin intermediul tijelor filetate și apoi în bloc, cu prese, pentru întinderea întregii rețele de armătură; blocarea se efectuează cu piulițe prin care se montează tijele filetate de rebordul matriței (fig. 3).

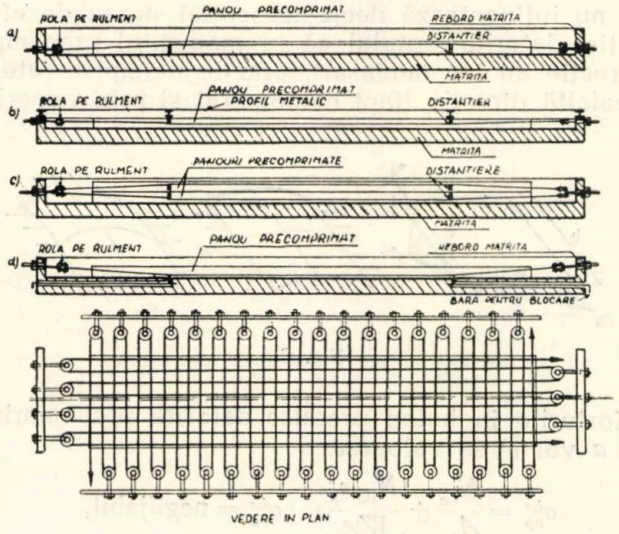


Fig.4

Deflectarea armăturilor (fig. 4) a fost studiată în următoarele variante:

a) turnarea întoarsă a panoului, devierea traseului fiind realizată cu ajutorul unor purici de beton rezemați de fundul matriței;

b) turnarea normală a panoului, devierea traseului fiind realizată cu distanţieri (purici) din beton, rezemaţi de elementele dispuse deasupra matriţei şi fixate la capete;

c) turnarea consecutivă a două panouri, unul dispus în poziţie normală de lucru iar celălalt răsturnat, devierea fiind realizată cu distanţieri dubli care îndepărtează sîrmele în dreptul frînturii [1];

d) turnarea normală a panoului, devierea traseului fiind realizată cu ancore din sîrmă fixate provizor în matriţe de beton.

Pentru realizarea panourilor experimentate s-a folosit tehnologia de tipul d). Modul în care a fost deviat traseul corzilor (după ce au fost pretensionate) rezultă din fig. 5; în fig. 4 *d* se indică sistemul de blocaj al corzii în stare deflectată.

D. Calculul plăcilor

Pentru calculul plăcilor precomprimate pe două direcţii s-a urmărit obţinerea unei metode simplificate care să poată fi aplicată fără a se recurge la un volum important de operaţii şi care totodată să prezinte un grad suficient de precizie.

Ipoteza care a stat la baza calculului admite că precomprimarea pe o direcţie nu influenţează decît neesenţial starea de eforturi de pe cealaltă direcţie, datorită faptului că în momentul precomprimării plăcii după o direcţie au loc deplasări, practic neîmpiedicate, ale secţiunilor după cealaltă direcţie (fapt demonstrat şi prin experienţele efectuate).

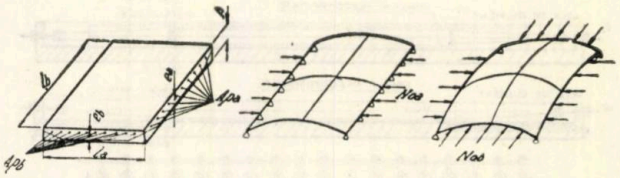


Fig. 6

Astfel, eforturile în beton produse datorită precomprimării (fig. 6) după direcţia *a* vor avea valoarea

$$\sigma_{ap}^{i,s} = \frac{N_{0a}}{A_{ia}} \pm \frac{N_{0a} e_a}{W_{ia}^{i,s}}, \quad \sigma_{bp}^{i,s} = \text{neglijabil},$$

iar datorită precomprimării după direcţia *b*,

$$\sigma_{bp}^{i,s} = \frac{N_{0a}}{A_{ib}} \pm \frac{N_{0b} e_b}{W_{ib}^{i,s}}, \quad \sigma_{ap}^{i,s} = \text{neglijabil},$$

[1] Înscris la Oficiul de Stat pentru Invenţii, Dosar Nr. 49451/65.

Fig. 5

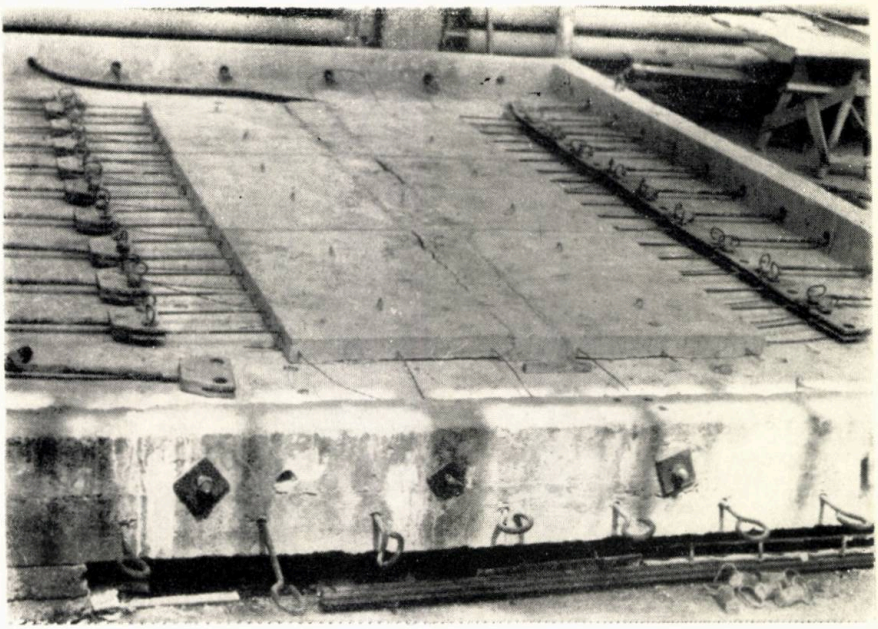


Fig. 7

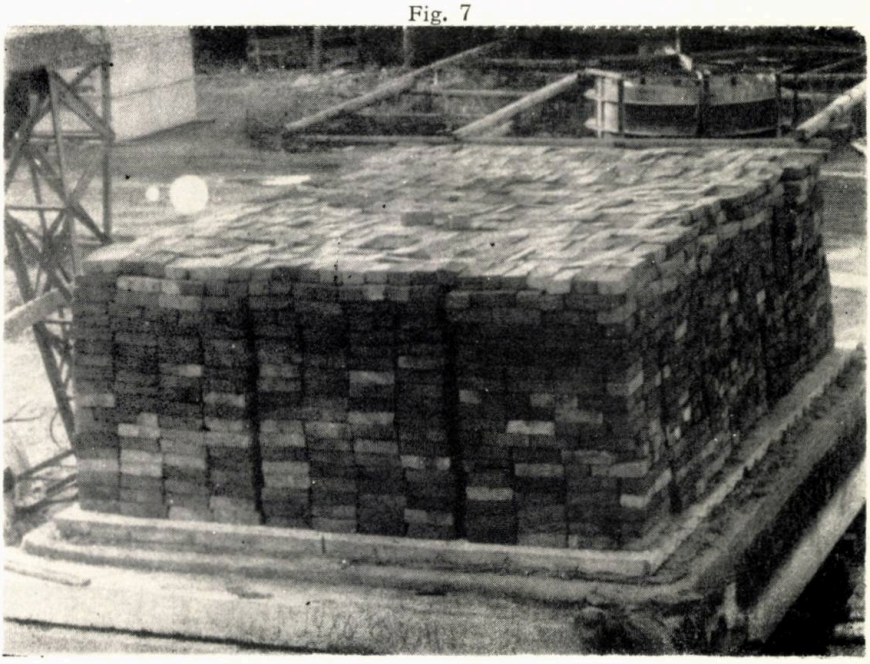


Fig. 8

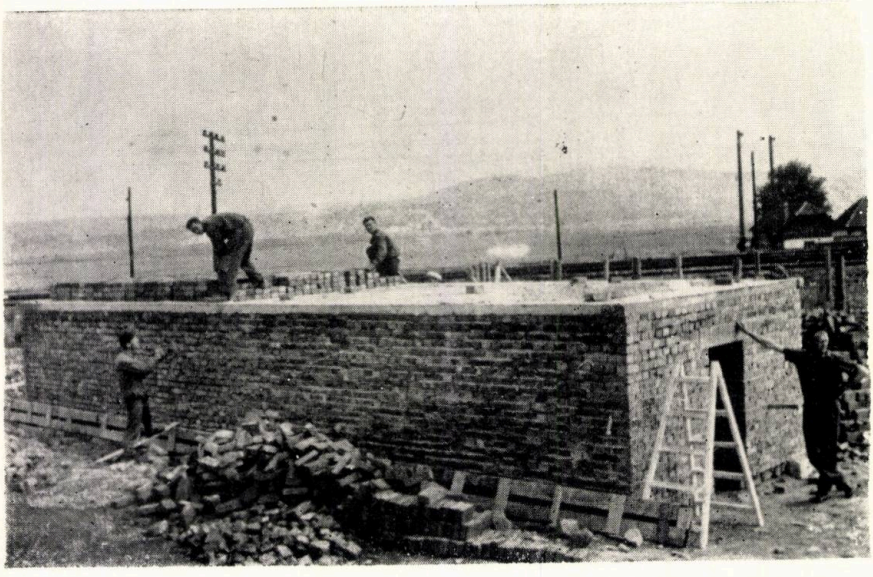


Fig. 9

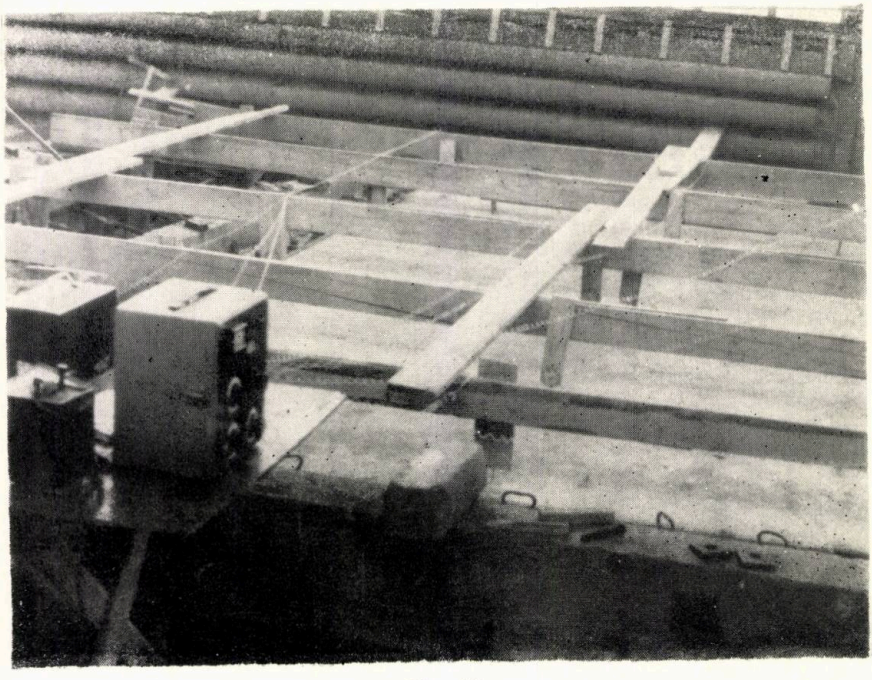


Fig. 10

în care

$$A_{ib,a} = h l_a, l_b + n_p A_{pa,b}, \quad W^i_{ia,b} = \frac{I_{ia,b}}{h - x}, \quad W^s_{ia,b} = \frac{I_{ia,b}}{x},$$

unde l_a și l_b sînt latura scurtă și respectiv latura lungă a plăcii, h — înălțimea plăcii, $e_{a,b}$ — excentricitatea, $N_{0a,b}$ — forțele de precomprimare.

Sub efectul forțelor de precomprimare placa se va curba după două direcții și va rezema final în cele patru colțuri.

În această nouă situație se vor produce o serie de eforturi datorită greutății proprii a plăcii, a căror valoare se poate determina folosind tabelele existente în literatură pentru plăci dreptunghiulare rezemate în patru colțuri și încărcate cu sarcini uniform distribuite [1].

Astfel eforturile din greutatea proprie vor avea valorile:

după direcția a, $\sigma^{s,i}_{ag} = \frac{M^g_{ia}}{W^{i,s}_{ia}}$; după direcția b, $\sigma^{i,s}_{bg} = \frac{M^g_{ib}}{W^{i,s}_{ib}}$,

unde M^g_{ia} și M^g_{ib} sînt momentele încovoietoare produse de greutatea proprie după direcția a și b considerînd placa simplu rezemată în cele 4 colțuri și care se determină cu relațiile

$$M^g_{ia,b} = \alpha_{ia,b} l^2_b g,$$

în care $\alpha_{i,ab}$ este un coeficient [1] dat în funcție de raportul între a și b.

Final, eforturile din placă după transfer vor avea valorile:
după direcția a, $\sigma^T_a = \sigma^{i,s}_{ap} - \sigma^{i,s}_{ag}$; după direcția b, $\sigma^T_b = \sigma^{i,s}_{bp} - \sigma^{i,s}_{bg}$.

Calculul plăcii în continuare se face cu relațiile cunoscute corespunzător sistemului de legătură realizat la rezemare și luînd în considerație, la determinarea stării de tensiuni, eforturile produse de precomprimarea pe cele două direcții.

Săgețile ce iau naștere în urma precomprimării pe două direcții au fost stabilite pe baza acelorași ipoteze folosite la determinarea eforturilor.

Astfel, săgeata datorită precomprimării s-a calculat folosind relația cunoscută a lui Mohr-Maxwell, obținînd

pentru direcția a, $Y_{ap} = \int_0^{l_a} \frac{mM_a}{EI} ds$; pentru direcția b, $Y_{bp} = \int_0^{l_a} \frac{mM_b}{EI} ds$.

Săgeata datorită greutății proprii acționînd asupra plăcii rezemate pe cele 4 colțuri s-a determinat folosind tabelele existente în literatură [1].

Astfel, pentru centrul plăcii, ea este dată de relația

$$Y_{0bg} = Y_{0ag} = W_{0ba} \frac{gl_b^4}{D},$$

în care $D = Eh^3/12$, iar $W_{0b,a}$ fost extras din tabele funcţie de $\gamma = b/a$.

Săgeata finală după precomprimare în centrul plăcii va avea valoarea

$$Y_{0b} = Y_{0a} = Y_{ap} + Y_{bp} - Y_{0ag}.$$

Calculul la starea limită de apariţie a fisurilor a fost efectuat în continuare considerînd placa ca un element static determinat exterior şi diminuînd momentul de fisurare din sarcini exterioare cu cel produs de precomprimare.

E. Experimentarea panourilor

Prin încercările efectuate s-a urmărit să se determine comportarea panourilor la forţele din precomprimare, comportarea îmbinărilor

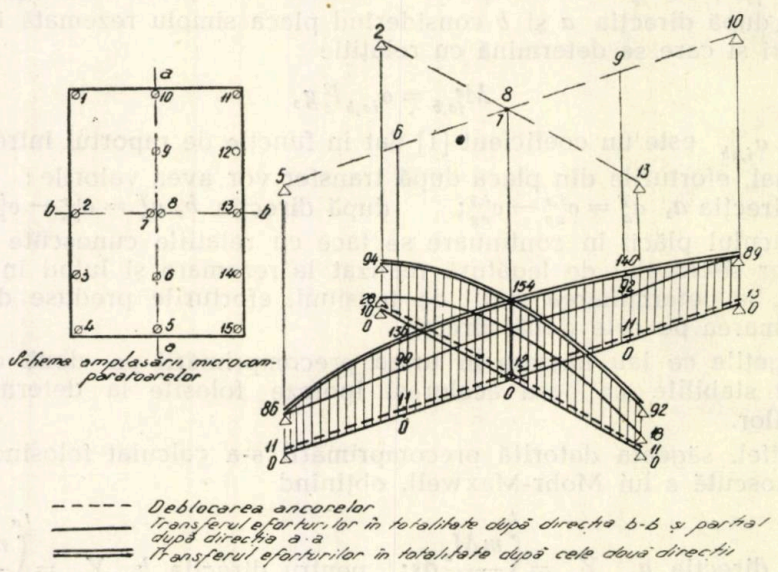
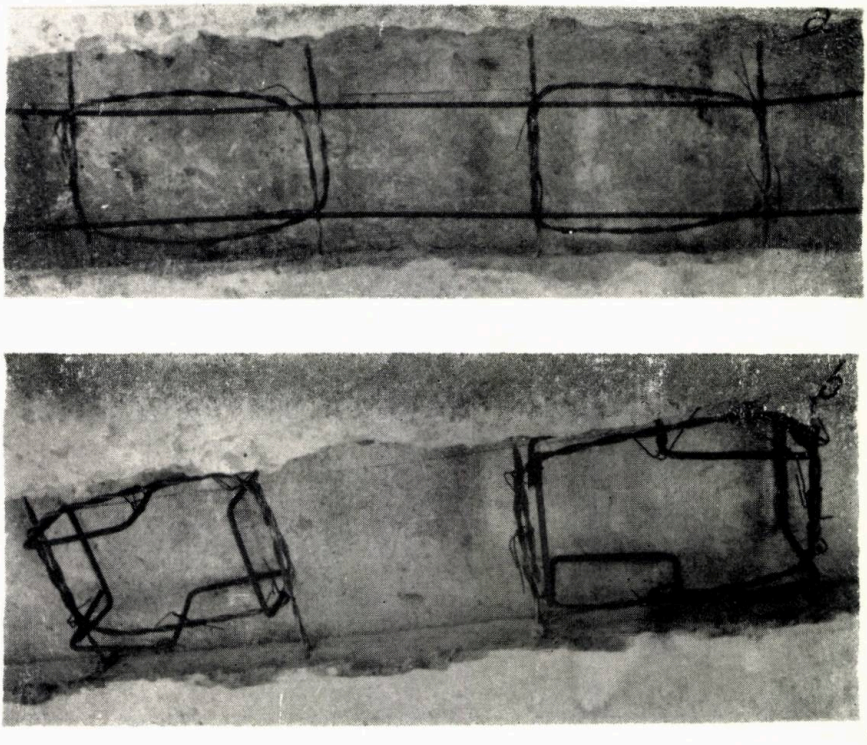


Fig. 11

la acţiunea forţelor orizontale (fig. 7), comportarea pînă la pierderea capacităţii de rezistenţă a unor panouri singulare simplu rezemate pe



a)

b)

c)

Fig. 12

contur (fig. 8) și comportarea pînă la limita de rezistență a unor planșee alcătuite din panouri precomprimate, la care s-a realizat continuitatea după laturi adiacente (fig. 9).

Din datele experimentale obținute prin măsurarea eforturilor cu ajutorul traductorilor cu fir rezistiv și corzilor vibrante și a deformațiilor cu ajutorul comparatoarelor și flexometrelor (fig. 10) a rezultat

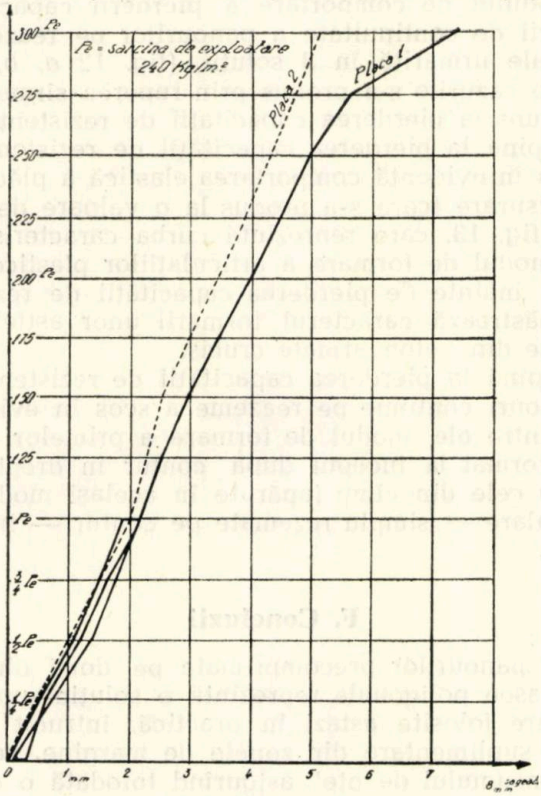


Fig. 13

evident modul de deformare a plăcii care poate fi practic considerat independent pentru efectul de precomprimare după o direcție și pentru efectul de precomprimare după cealaltă direcție (fig. 11). Ipoteza secțiunilor plane și legea proporționalității poate fi aplicată fără erori importante pentru calculul eforturilor din precomprimare (starea de tensiuni rezultată imediat după transfer). Astfel, eforturile normale se pot obține prin însumarea algebrică a celor produse de efectul precomprimării după direcția respectivă cu cele rezultate din efectul greutății proprii (placa fiind considerată rezemată în 4 colțuri). Săgeata la mijlocul plăcii se poate obține prin însumarea deformației produse

de precomprimarea după o direcţie cu deformaţia produsă de precomprimarea după cealaltă direcţie, minus săgeata produsă de efectul greutăţii proprii, determinată în ipoteza plăcii rezemate în 4 colţuri şi încărcată cu sarcina din greutatea proprie. Rezultatele experimentale au fost în concordanţă cu cele stabilite teoretic pe baza ipotezelor enunţate.

Analiza modului de comportare a pierderii capacităţii de rezistenţă a îmbinării de continuitate a panourilor pe reazem, la acţiunea forţelor orizontale urmărită în 3 soluţii, (fig. 12 *a, b, c)*, denotă că cedarea în toate cazurile s-a produs prin ruperea sîrmelor fără ca îmbinarea să fi ajuns la pierderea capacităţii de rezistenţă.

Încercarea pînă la pierderea capacităţii de rezistenţă a panourilor singulare a scos în evidenţă comportarea elastică a plăcii pînă aproape de sarcina de fisurare (care s-a produs la o valoare de cca. 2 ori sarcina normată) (fig. 13, care reprezintă curba caracteristică încărcare-deformaţie) şi modul de formare a articulaţiilor plastice (fig. 14 *a, b*), care s-a produs înainte de pierderea capacităţii de rezistenţă a sistemului şi fare păstrează caracterul formării unor astfel de articulaţii, întîlnit la plăcile din beton armate crucis.

Încercarea pînă la pierderea capacităţii de rezistenţă a planşeului alcătuit din panouri continue pe reazeme a scos în evidenţă conlucrarea panourilor între ele, modul de formare a primelor articulaţii plastice care s-au format la început după contur în dreptul îmbinării şi au continuat cu cele din cîmp (apărute în acelaşi mod ca şi în cazul panourilor singulare — simplu rezemate pe contur — însă la o sarcină mult mai mare).

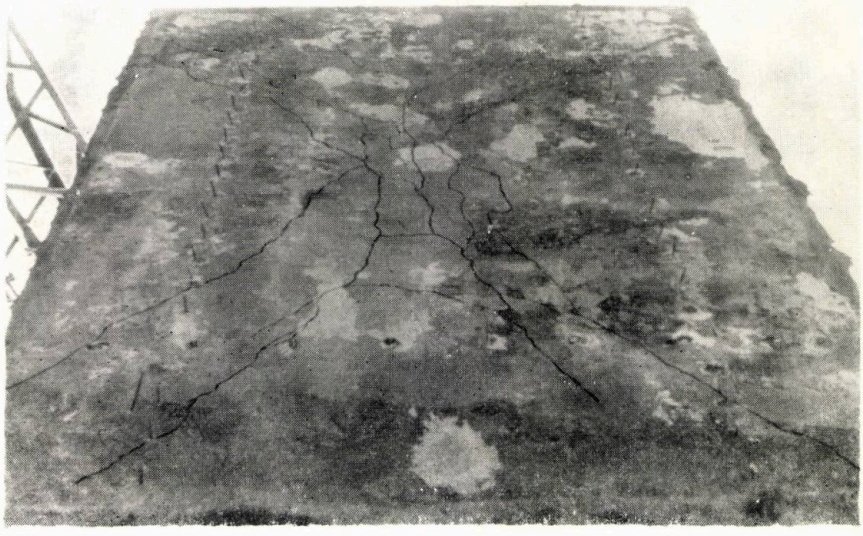
F. Concluzii

1. Armarea panourilor precomprimate pe două direcţii cu sîrmă dispusă după trasee poligonale reprezintă o soluţie superioară faţă de sistemele similare folosite astăzi în practică, întrucît permite eliminarea armăturii suplimentare din zonele de margine, ceea ce conduce la reducerea consumului de oţel, asigurînd totodată o comportare mai bună a panoului la acţiunea sarcinilor exterioare.

2. Realizarea buclelor de contur permite dispunerea armăturii pretensionate continuu, simplificîndu-se astfel tehnologia de pretensionare a sîrmelor şi asigurîndu-se totodată realizarea continuităţii pe reazem a plăcilor, ceea ce deschide perspective largi de folosire a panourilor precomprimate pe două direcţii în regiuni seismice.

3. Ipoteza secţiunilor plane, legea de proporţionalitate între efort şi deformaţie şi faptul că precomprimarea pe o direcţie nu influenţează decît neesenţial starea de tensiuni după cealaltă direcţie, verificate de rezultatele experimentale, permit fără dificultate stabilirea mărimii tensiunilor şi a deformaţiilor din precomprimare, ceea ce poate constitui o bază de calcul pentru proiectarea panourilor.

a)



b)

Fig. 14

4. Pierderea capacității de rezistență a îmbinărilor realizate prin intermediul buclelor la acțiunea forțelor orizontale se produce prin ruperea sîrmelor, ceea ce asigură folosirea în regiuni seismice a planșeelor realizate din panouri precomprimate de tipul celor experimentate.

5. Comportarea panourilor singulare simplu rezemate pe contur și a planșeelor realizate din panouri la care a fost realizată continuitatea în dreptul reazemelor a arătat că se dispune de mari rezerve de rezistență, obținute datorită modului favorabil de conlucrare în ansamblu a armăturii pretensionate cu betonul.

6. Articulațiile plastice se formează similar cu cele întîlnite la plăcile armate cruciș, apariția fisurilor în zona întinsă fiind mult întîrziată.

7. Folosirea panourilor precomprimate pe două direcții, cu armătura dispusă după trasee poligonale, prezintă avantaje tehnico-economice deosebite, în special în ceea ce privește reducerea substanțială a consumului de oțel, fapt care conduce, în condițiile unei producții corespunzătoare, la importante reduceri ale prețului de cost.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de beton armat
și
ISCM, orașul Gh. Gheorghiu-Dej

BIBLIOGRAFIE

1. Mihul A., *Construcții speciale din beton armat.* Ed. Ped., Buc., 1964.

DES NOUVEAUX SYSTÈMES DE PANNEAUX EN BÉTON ARMÉ PRÉCONTRAINT D'APRÈS DEUX DIRECTIONS AVEC ARMATURE DISPOSÉE SELON DES TRACÉS POLYGONAUX

(Résumé)

On présente la conception, la technologie de l'exécution, les résultats expérimentaux et le calcul pour les panneaux précontraints d'après deux directions avec armature de fils disposée selon des tracés polygonaux.

Ce qui caractérise les panneaux ce sont les armatures déflectées à 1/5 de la portée par rapport au bord, ce qui permet d'obtenir une distribution rationelle des tensions d'après les deux directions sur l'entière longueur et largeur des panneaux ; en méme temps les armatures sont continues, en formant des boucles sur le contour qui assurent la continuité sur l'appui.

Admettant l'hypothèse que la précontrainte d'après une direction a une moindre influence sur l'état des tensions selon l'autre direction et le schéma d'appui après le transfert (pour établir l'effet du poids propre) étant le panneau appuié sur les quatres coins, ont résulté des efforts provenus du calcul, verifiés par les résultats expérimentaux.

L'épreuve jusqu'à l'épuisement de la capacité de resistence des panneaux uniques, de ceux assemblés et des jointes a relevé une réserve importante de résistance, réalisée grace au travail d'ensemble de l'armature précontraine et du béton. Les articulations plastiques sur le contour et sur la porté se forment en croix ainsi que celles de la plaque de beton armée d'après deux directions, l'apparition des fissures dans la zone tensionée étant bien retardée.

Les panneaux précontraints d'après deux directions avec armature disposée selon des tracés polygonaux, introduits en pratique à la constructions des blocs de logements (à l'ISCM, ville de Gh. Gheorghiu-Dej), ont des avantages tant techniques qu'économiques, surtout en ce qui concerne la diminution substancielle de la consomation d'acier.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 551.1

CONTRIBUŢIE LA STUDIUL STABILITĂŢII VERSANŢILOR DIN RAZA ORAŞULUI IAŞI

DE

AUREL CERNĂTESCU, C. MARTINIUC, TUDOR SILION,
VICTOR CIUBOTARU şi C. MIHĂILESCU

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Relieful oraşului Iaşi

Din punct de vedere geologic, baza reliefului pe care e aşezat oraşul Iaşi este alcătuită din depozite marine de vîrstă sarmatică, argile cenuşii slab marnoase, cu intercalaţii subţiri de nisipuri în care apar uneori şi strate acvifere captive. Aceste argile sînt sub aspect litologic prăfoase şi uşor nisipoase, compacte, plastice şi aproape impermeabile. Suprafaţa lor superioară este sinuoasă datorită eroziunii şi denudaţiei subaeriene, care au îndepărtat în mod neuniform o mare parte din grosimea lor iniţială. De asemenea, aceste argile, datorită caracteristicilor lor litologice, au contribuit şi contribuie şi în prezent într-o largă măsură la evoluţia rapidă a reliefului. Ele constituie suportul alunecărilor de teren din cadrul oraşului şi împrejurimi.

Partea superioară a reliefului este alcătuită dintr-o cuvertură de depozite fluviatile şi deluviale cuaternare, nisipuri cu lentile de pietrişuri în bază, cu bogate pînze de apă freatice, peste care urmează luturi loessoide şi aluviuni argilo-nisipoase. Grosimea acestor depozite variază între 10...12 m în regiunea şesului Bahluiului şi a teraselor inferioare (terasa Palat, terasa Tătăraşi, terasa 7 Oameni) şi 12...25 m în terasele Copou, Şorogari şi Ciric.

În zona versanţilor depozitele cuaternare variază foarte mult, atît ca grosime cît şi ca componenţă petrografică. Astfel, în regiunile versanţilor de racord dintre podurile de terase (Universitate, Biblioteca centrală universitară, cimitirul „Eternitatea", strada Ion Creangă), depozitele predominante lut-nisipoase apar cu o stratificaţie specifică coluviilor datorită proceselor de spălare şi acumulare deluvială. În schimb, în zonele de versanţi cu predominarea alunecărilor (Ţicău, Tg. Copou, Bogdan, Galata) cuvertura deluvială este alcătuită dintr-un amestec foarte neuniform de luturi nisipoase, argile şi cu lentile de nisipuri şi uneori chiar cuiburi de pietrişuri surpate şi alunecate din zona cornişelor teraselor mai înalte.

Din punct de vedere geomorfologic, oraşul este aşezat în cea mai mare parte pe podurile teraselor cuaternare ale Bahluiului, etajate în trepte (de la 160...170 pînă la 20 m deasupra albiei Bahluiului), a căror altitudine scade de la nord către sud. Astfel sînt terasele de la Breazu, Copou şi Piaţa Tineretului — Palatul Culturii

pe dealul Copou; terasele Cîrlig, Şorogari şi Tătăraşi pe dealul Şorogari şi terasele Aroneanu, Ciric şi 7 Oameni din dealul Ciricului.

A doua parte a oraşului este aşezată pe şesul Bahluiului şi a afluenţilor săi, care împreună cu terasele reprezintă un teren corespunzător pentru construcţii din punctul de vedere al geologiei inginereşti.

În sfîrşit, o a treia parte a oraşului este aşezată atît pe versanţii de racord dintre terase cît şi pe versanţii văilor afluente ale Bahluiului, în mare parte cu terenuri nestabile datorită proceselor de pantă, cu predominarea alunecărilor şi a eroziunilor areolare.

Relieful oraşului este puternic fragmentat de către afluenţii Bahluiului şi anume valea Rediului, Podgoria Copou, Calcaina, Ciric, Valea Lungă, Nicolina, Vămeşoaia. Adîncimea fragmentării atinge şi valori ce trec de 100 m (de exemplu valea Calcaina în dreptul căminelor studenţeşti ale Institutului agronomic, separînd interfluvii relativ înguste sub formă de coline-platouri, coline şi dealuri (D. Copou, D. Şorogari, D. Ciric, D. Miroslava, D. Cetăţuia, D. Socola, D. Căpriţa şi altele).

În lucrarea de faţă se studiază numai categoriile de terenuri din zona versanţilor, care manifestă tendinţe de instabilitate creînd multe greutăţi în construcţiile oraşului şi îndeosebi se insistă asupra regiunilor expuse alunecărilor şi surpărilor. În această categorie de terenuri intră suprafeţe destul de întinse, circa 20% din arealul oraşului.

2. Terenurile din zona versanţilor

Zona versanţilor de racord direct între podurile de terase este oarecum mai stabilă. Acest fapt se datoreşte prezenţei unei cuverturi groase de deluvii lut-nisipoase, cu apa subterană în general la adîncimi de peste 10 m şi cu profilul morfologic al versantului în curs de echilibrare.

În aceste terenuri apar doar fenomene de „creep" ce se înregistrează şi în cadrul clădirilor mai masive prin fisuri specifice (Universitate, Biblioteca centrală). Zona versanţilor de racord dintre terasele inferioare ale Bahluiului şi şesul său, cît şi versanţii văilor afluente, constitue cele mai instabile terenuri din punct de vedere al construcţiilor (cartierele Ţicău, Bogdan, Aurora, Rîpa Galbenă, Galata). În unele sectoare alunecările sînt în plină dezvoltare (într-o etapă de tinereţe), cu cornişe abrupte, foarte bine exprimate în relief şi cu un corp de alunecare cu microrelief de monticuli, valuri şi trepte de alunecare separate de microdepresiuni (padine) umede, uneori chiar cu ape stagnate sub formă de bălţi şi mlaştini. Aceste alunecări se datoresc în primul rînd fragmentării adînci a reliefului de către văi, energiei mari a pantelor şi condiţiilor hidrogeologice favorabile (existenţa unor bogate pînze de apă subterană din baza teraselor deschise la zi sub formă de izvoare), la care se mai adaugă şi cauze locale determinate de utilizarea neraţională a terenurilor de către om.

Dezvoltarea alunecărilor în timp se face în moduri diferite. În majoritatea lor mişcările de alunecare sînt lente şi din cînd în cînd, în perioadele bogate în precipitaţii, alunecările capătă un caracter violent, combinîndu-se cu surpări, provocînd distrugerea a sute de case, a in-

stalațiilor de alimentare cu apă și canalizare, electrice, a drumurilor și străzilor etc., așa cum s-a petrecut în anii 1932—1934 și 1941 în cartierul Țicău, sau alunecările de mică importanță din 1961 de pe versantul drept al văii Calcaina și Tîrgușorul Copou.

Cuvertura de versant a deluviului de alunecare, cu grosimi ce oscilează în medie între 3...10 m, are o structură geologică foarte frămîntată, cu un amestec predominant de roci loessoide (luturi nisipoase) la care se adaugă nisipuri și cuiburi mici de pietriș. Întreg complexul deluvial este îmbibat cu apă subterană care în zonele micro-depresiunilor de alunecare apare la suprafață iar în cadrul monticulilor și valurilor de alunecare se găsește între 1...5 m adîncime, avînd și mari fluctuații ale nivelului hidrostatic pe verticală în funcție de ritmicitatea sezonieră a umidității și uscăciunii climatului nostru temperat-continental.

Dacă avem în vedere că în general la pămînturile argiloase coeziunea și unghiul de frecare internă scad o dată cu creșterea umidității pămîntului și că în seria litologică a versanților respectivi avem argile prăfoase galbene, fin stratificate, cu nisip la baza pachetului de strate din cuaternarul mai nou, rezultă că aceste fenomene de alunecare au loc în stratul mai sus menționat, fie în momentul în care el vine în contact cu o cantitate mai mare de apă din precipitațiile atmosferice mai abundente, fie prin suprimarea posibilității de scurgere a precipitațiilor obișnuite, acumulate în straturile de nisip de la suprafața acestei argile (Copou—Păcurari).

3. Rezultatele cercetării

Determinări făcute în laborator privind scăderea coeziunii și unghiului de frecare internă, au arătat că prin inundarea acestui pămînt, avînd în mod normal un grad de saturație variind între 60...70%, se obțin rezultatele din tabelul 1.

Tabelul 1

Versant	Frecare în plan obligat				Triaxial			
	neinundat		inundat		neinundat		inundat	
Tg. Copou spre valea Calcaina	13°	0,30	5°	0,25	17°	0,40	2°	0,40
Tătărași spre rîul Bahlui	24°	0,55	11°30′	0,20	—	—	—	—
Anastasie Panu spre rîul Bahlui	30°	0,20	21°30′	0,20	—	—	—	—
Păcurari (str. Văscăuțeanu)	26°	0,05	11°	0 20	—	—	—	—

Aceste rezultate explică apariția fenomenelor de alunecare de pe versanți.

În scopul soluționării practice a problemei, colectivul a trecut la zonarea teritoriului orașului Iași, întocmind o hartă în care sînt delimitate raioanele periculoase din acest punct de vedere.

Stabilirea limitelor acestor zone, precum și a caractersiticilor lor principale, s-a efectuat în baza calculelor de stabilitate și a observațiilor de ordin geologic, geomorfologic, hidrologic și geotehnic, asupra dinamicii proprii fenomenelor de alunecare cît și a efectelor lor asupra clădirilor și construcțiilor.

Rezultatele acestor calcule, informațiile și observațiile de teren asupra stării diferitelor construcții, precum și considerentele de ordin geologic, geomorfologic, hidrologic și geotehnic, au permis elaborarea hărții din fig. 1, în care se deosebesc 6 raioane :

1. *Raionul cornișelor de alunecare și surpare*, alcătuit din zone de desprindere a alunecărilor, constituite în principal din straturi loessoide, cu nisipuri și pietrișuri în bază, la nivelul cărora apar izvoare. Înălțimea acestor cornișe oscilează între 5...15 m.

În cadrul lor au fost deosebite cornișe foarte active (zonele 1 *a* de pe hartă) care sînt improprii pentru construcții și prezintă un pericol și pentru zonele învecinate avînd în vedere sensul regresiv de avansare a fenomenului. Zonele 1 *b* sînt cornișe cu o energie de relief mai mică și a căror activitate este mai redusă, dar care prezintă aceleași caracteristici ca și zonele precedente.

2. *Raionul de alunecări active și foarte active*, are o largă răspîndire pe versanții văii Calcaina (Tg. Copou, Țicăul de sus și de jos, Albineț, Brîndușa, cartierul Bogdan, Aurora, versanții văii Ciricului etc.). Acest raion se caracterizează printr-un microrelief de monticuli și valuri de alunecare în mișcare, alcătuit dintr-un deluviu lutos-argilos, cu intercalări de nisipuri și pietrișuri prin care circulă o bogată pînză de apă, repartizată neuniform, care apare la zi în microdepresiuni. Grosimea deluviului de alunecare care îmbracă versantul variază între 3...10 m.

În cea mai mare parte, datorită deplasărilor lente și din cînd în cînd violente, străzile, casele și dotările suferă avarii grave. În sectoarele unde au fost executate lucrări de drenare a apelor, s-a constatat o ameliorare simțitoare a acestora.

Datorită acestor caracteristici, aceste zone trebuie evitate în cea mai mare parte pentru construcții.

3. *Raionul de versanți pe care predomină eroziunile areolare, în parte torențiale, combinate cu fenomenul de creep și chiar cu alunecări locale.* Aceste zone se extind în preajma zonelor de alunecări mai intense și pot constitui uneori o etapă premergătoare alunecărilor active (zona Păcurari) sau sînt zone de stingere a alunecărilor și deci de stabilizare treptată (versanții din cursul inferior al Ciricului).

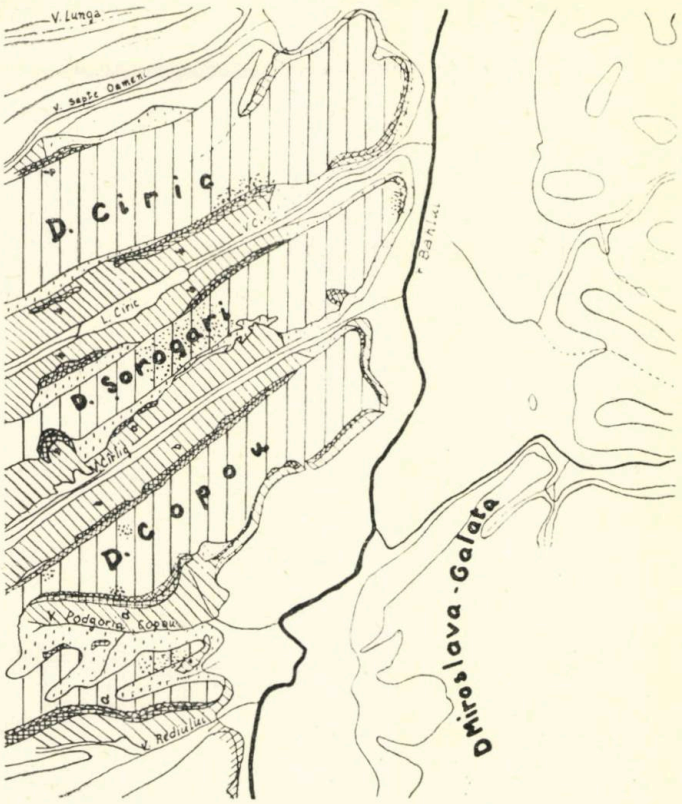


Fig. 1. — Harta terenurilor afectate de alunecări şi surpări de pe teritoriul oraşului Iaşi :

1. zone de desprindere a alunecărilor şi surpărilor (cornişe de alunecare şi surpare) care trebuie evitate complet pentru construcţii ; *a.* cornişe active şi foarte active, în cea mai mare parte a traseului lor ; *b.* cornişe afectate de surpări şi alunecări cu caracter local dar cu posibilităţi de extindere.

2. zone de alunecări active şi foarte active care în cea mai mare parte trebuie evitate pentru construcţii.

3. zone de eroziuni areolare în parte torenţiale combinate cu fenomene de creep ; în unele puncte apar şi semne de alunecări cu caracter local.

4. zone de tranziţie între *2* şi *3* ,la care pentru delimitare precisă sînt necesare studii geotehnice speciale.

5. zone subminate subteran prin exploatări de nisipuri.

6. zone de margine de platouri la contactul cu versanţi de alunecare şi surpări în care stabilitatea generală a terenului este condiţionată de energia terenului, de panta medie a versantului, de factori hidrogeologi şi de felul construcţiilor care se amplasează ; pentru delimitarea precisă a zonei şi posibilitatea de construcţie sînt necesare studii speciale.

7 terenuri de terasă cu stabilitatea asigurată (cu excepţia unor amplasamente nedepistate de hrube subterane şi nisipării).

8. şesuri şi glacisuri aluvio-coluviale stabile, bune pentru construcţii.

Alcătuirea acestora cuprinde un complex loessoid în suprafață, de grosime variabilă 10...12 m, cu unele intercalații de nisipuri și pietrișuri în bază, după care urmează o argilă prăfoasă de tranziție spre argila cenușie slab marnoasă. În zona de contact dintre argila sarmațiană și deluviul de pantă, datorită circulației apei subterane, apar oglinzi de fricțiune ca în zona cvartalului Păcurari.

În zonele cu construcții grele, datorită acestor caracteristici, pot apărea fisuri cu dezvoltare lentă în corpul clădirilor.

La folosirea acestor terenuri pentru construcții se impune luarea de măsuri corespunzătoare pentru asigurarea stabilității, inclusiv fixarea cornișelor de desprindere de la periferie.

4. *Raionul terenurilor de tranziție dintre raioanele 2 și 3*, care se caracterizează prin procese intermediare și a cărui delimitare poate fi făcută numai pe bază de studii geotehnice speciale (zona de trecere Păcurari—Aurora și Țicăul de jos).

5. *Raionul terenurilor subminate subteran prin exploatări de nisipuri*, are o răspîndire insulară. Aproape pe toate terasele Bahluiului se întîlnesc vechi exploatări de nisipuri ce s-au făcut sub formă de puțuri și galerii a căror extindere exactă nu este cunoscută în întregime.

Ele constituie cauza unor tasări deosebit de mari (cazul cartierului Dumbrava Roșie), situîndu-se din punctul de vedere al geologiei inginerești în categoria terenurilor degradate prin lucrări miniere.

6. *Raionul terenurilor de margine* a platourilor de terase la contact cu versanții cu alunecări și surpări, a cărui stabilitate este condiționată de energia reliefului, de panta medie a versantului, de factorii geo-hidrogeologici și de felul construcțiilor care se amplasează.

Pentru delimitarea precisă a zonei și stabilirea posibilităților de construire, sînt necesare studii speciale privind stabilitatea generală a terenului.

4. Concluzii

a) Rezultatele obținute prin raionarea prezentată sînt luate deja în considerație la stabilirea amplasamentelor construcțiilor în raza orașului Iași.

b) Metodica folosită la zonarea teritoriului orașului Iași poate fi aplicată în continuare pentru stabilirea gradului de siguranță pe care-l prezintă versanții învecinați precum și în alte cazuri similare.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de geotehnică și fundații,
Catedra de drumuri și poduri
și
Universitatea „Al. I. Cuza", Iași

BIBLIOGRAFIE

1. Tîtovici N. A., *Mecanica păminturilor.* E.S.A.C., Buc., 1965 (trad. din l. rusă).
2. Lehr H., *Fundaţii.* Vol. **I,** E.S.A.C., Buc., 1954.
3. Taylor D. W., *Fundamentals of Soil Mechanics.* N.Y.—London, 1964.
4. Бабков В. Ф., Гербург-Губович А. В., *Осковы грунтоведенця и механики грунтов.* Госстройиздат, М., 1956.
5. *** *Проблемы инженерной геологии,* 1960, **II,** *Ч.* **III.**
6. Sevastos R., *Descrierea geologică a împrejurimilor oraşului Iaşi.* An Inst. geologic român, Buc., 1940, **V.**
7. Atanasiu I., *Contributions a la géologie des pays Moldaves.* An. Inst. geologic român, Buc., 1940, **XX.**
8. Atanasiu I., Macarovici N., *Les sédiments miocènes de la partie septentrionale de la Moldavie.* An. du comité géol., Buc., 1950, **XXIII.**
9. Martiniuc şi colab., *Contribuţie la studiul hidrologic al regiunii Iaşi.* Probleme de geografie, Buc., 1956, **III.**
10. Martiniuc C., Băcăuanu V., *Harta geomorfologică a oraşului Iaşi.* Anal. şt. ale Univ. „Al. I. Cuza" Iaşi, 1959, s. 3, **V.**

BEITRAG ZUM STUDIUM DER STABILITÄT VON NATÜRLICHEN BÖSCHUNGEN IM UMFANG DER STADT IAŞI

(Zusammenfassung)

Auf Grund von geologischen, geomorfologischen und hidrogeologischen Forschungen wie auch von erdstatischen Berechnungen wird eine Karte über die Stabilitätsbedingungen der natürlichen Böschungen im Umfang der Stadt Iaşi gegeben.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C Z 691

ROCILE CALCAROASE DIN LUNGUL RÎULUI PRUT — SURSĂ DE MATERIE PRIMĂ PENTRU FABRICAREA CIMENTULUI

DE

AL. CHELĂRESCU, GH. BÎGU, ELISABETA PĂUNEL, OREST NICHITA şi GH. BOŢOMAN

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

Încă din anul 1960 au intrat în studiu unele depozite de calcare şi marne de la Stînca Ştefăneşti-Prut ca materie primă pentru ciment [4]. În ultimii ani, cerîndu-se conturarea în nordul Moldovei a unor rezerve cu parametri calitativi corespunzători fabricării cimentului, pe baza lucrării mai sus amintite I.S.E.M.-Cîmpulung a început exploatarea în acest scop a unui perimetru situat pe teritoriul satului Stînca din comuna Ştefăneşti, raionul Botoşani. Forajele şi galeriile pe care le-a executat în această regiune ne-au permis să aprofundăm studiul zăcămîntului ca atare şi al rocilor care-l alcătuiesc. Cercetările noastre s-au extins şi asupra depozitelor din vecinătate.

În lucrarea de faţă prezentăm succint rezultatele la care am ajuns.

2. Consideraţii geologice

De-a lungul rîului Prut, în nord-estul Podişului Moldovenesc, pe o lungime de cca. 50 km (fig. 1), începînd din satul Stînca-Ştefăneşti (raionul Botoşani) şi pînă în satul Liveni (raionul Dorohoi), se găsesc mari rezerve de roci calcaroase (calcare şi marne), care apar frecvent la zi.

Din studiile efectuate asupra acestei regiuni [6], [15]...[17], [1]... [3], [7], precum şi a explorărilor (prin foraje) efectuate în cursul anului 1963, s-a ajuns la concluzia că fundamentul acestei regiuni este format din roci precambriene peste care urmează discordant depozite siluriene ($>$ 600 m grosime). Peste acestea, transgresiv şi discordant, se

găsesc sedimente cretacice şi apoi depozitele Mediteranianului II (Tortonian, Sarmaţian), cu grosimi pînă la 250 m. Precambrianul şi Silurianul au fost întîlnite în foraje ; Cretacicul şi Mediteranianul II apar la zi între Mitoc, Crasnalenca, Miorcani şi Ivăncăuţi.

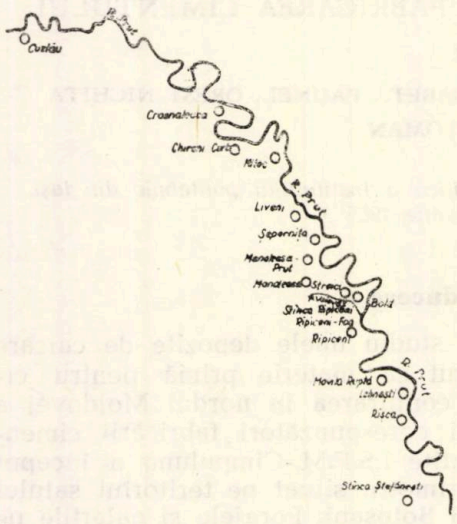


Fig. 1. — Depozite de roci calcaroase din lungul rîului Prut.

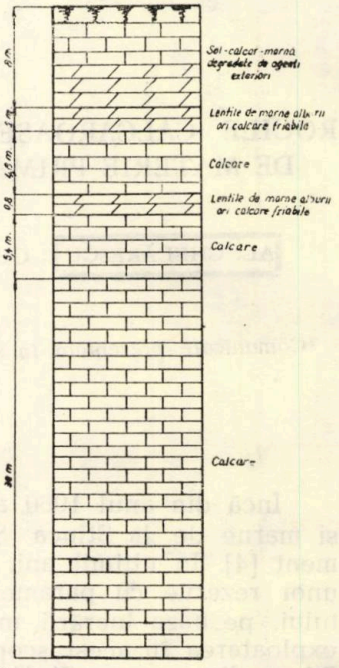


Fig. 2. — Coloană stratigrafică — Stînca-Ripiceni (Prut).

Între Stînca-Ştefăneşti şi Liveni formaţiunile sarmaţiene apar cu un facies recifal în majoritate format din calcare organogene şi marne calcaroase puternic fosilifere (cu Madiola sarmatica, Cardium ruthenicum etc.).

Urmărind depozitele calcaroase de la Mitoc spre Ştefăneşti (fig. 1) se constată :

La *Manoleasa-Prut* se întîlnesc calcare bugloviene compacte, care par a avea continuitate pînă la Stînca-Ştefăneşti.

La *Ripiceni* aceleaşi calcare apar la zi sub forma unui masiv cu înălţimea peste 50 m şi suprafaţă de cca. 700×300 m, care se întinde între Prut şi şoseaua Ripiceni—Stroici, la cca. 1,5 km nord de comuna Ripiceni. Aici calcarele se află în bancuri stratiforme (fig. 2) cu grosimi variabile (0,80 şi 30 m), cu structuri şi grade de compac-

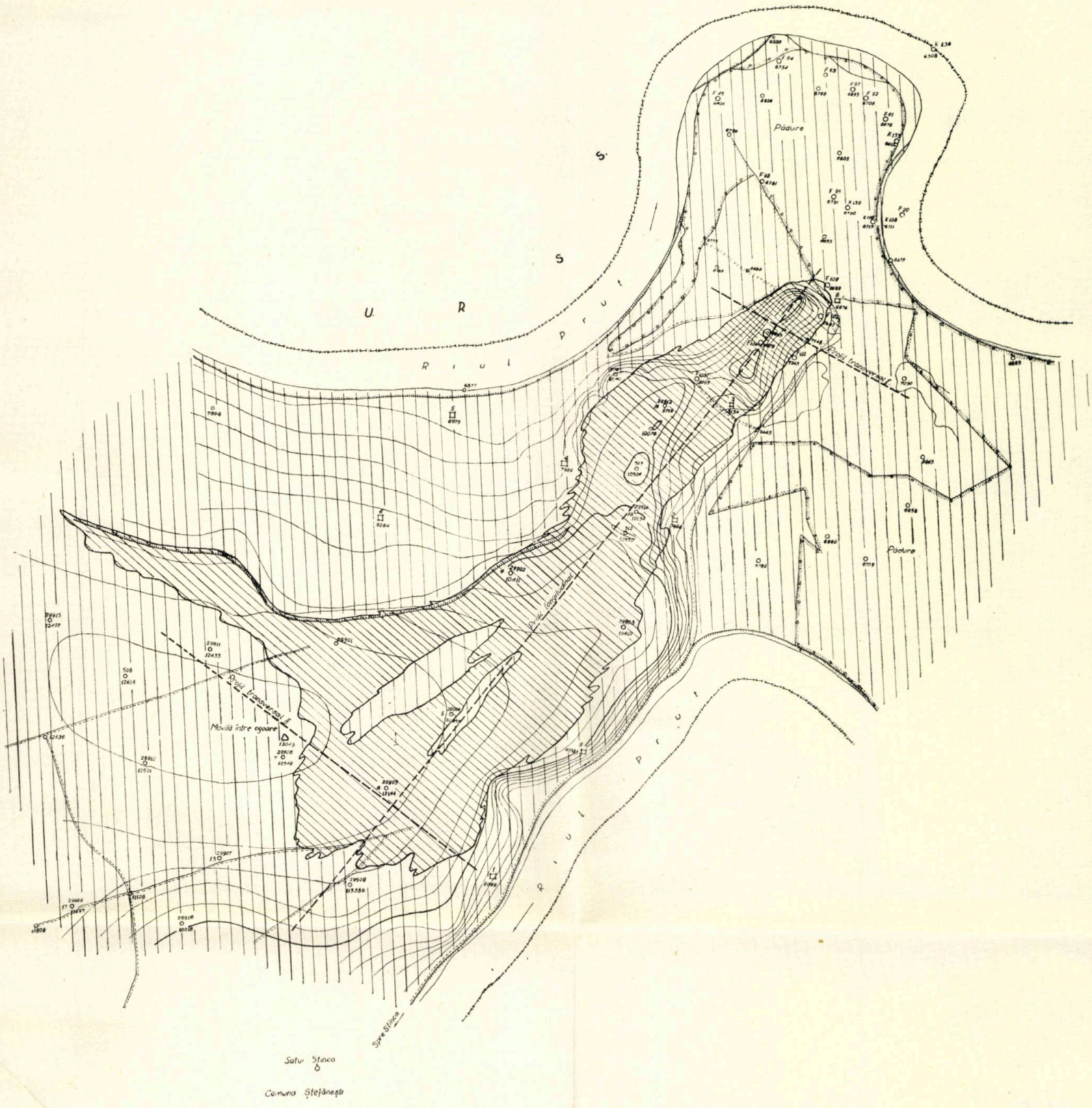


Fig. 3. — Zăcămîntul de roci calcaroase de la Stînca–Ştefăneşti (Prut) — Schiţă geologică la nivelul Prutului (cota + 63): *1* — calcare; *2* — marne.

titate diferite. Sub formă de intercalație, ca o variație a sedimentării, se află marnele alburii.

La *Movila-Ruptă*, calcarele recifale, compacte, apar sub depozitele cuaternare la cca. 20 m adîncime; lateral trec în marne calcaroase albe.

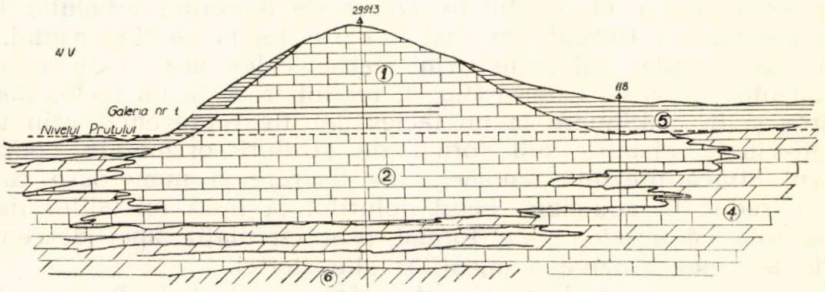


Fig. 4. — Profil transversal (I) prin zăcămîntul de roci calcaroase de la Stînca-Ștefănești:
1 — calcare exploatabile în carieră; 2 — calcare sub nivelul Prutului; *4* — marne sub nivelul Prutului; 5 — argile loessoide; *6* — formațiuni tortoniene.

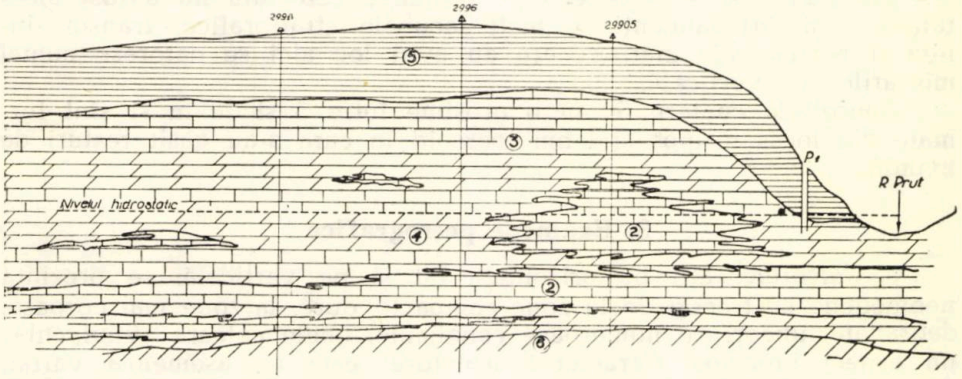


Fig. 5. — Profil transversal (II) prin zăcămîntul de roci calcaroase de la Stînca-Ștefănești:
1 — calcare deasupra nivelului hidrostatic; 2 — calcare sub nivelul hidrostatic; *3* — marne deasupra nivelului hidrostatic; *4* — marne sub nivelul hidrostatic; 5 — argile loessoide; *6* — formațiuni tortoniene.

În regiunea *Stînca-Ștefănești*, rocile calcaroase aparțin sarmațianului inferior și au la bază marne cenușii verzui, compacte, cu mici intercalațiuni gresoase și prezintă o bogată faună reprezentată prin Ervilia podolica, Ervilia dissita, Serpuli etc. Aici se ridică o serie de creste calcaroase, resturi ale unor recife barieră, care se continuă și peste Prut în U.R.S.S. Calcarele de la Stînca-Ștefănești (fig. 3...6)

se găsesc sub forma unei coline cu pereţii abrupţi şi cu versanţii parţial acoperiţi de depozite cuaternare. Anomaliile stratigrafice care caracterizează acest masiv se datoresc atît sedimentării recifale cît şi eroziunii post-sarmatice. În fig. 4...6 se pot urmări caracteristicile zăcămîntului atît deasupra cît şi sub nivelul hidrostatic. De la extremitatea de nord-est a aflorimentului, la 1 km spre nord-vest, în forajele executate (fig. 6), stratul de calcar de deasupra nivelului hidrostatic s-a găsit întrerupt, iar mai departe redus ca dimensiuni. Calcarele sînt treptat înlocuite prin marne calcaroase, care ajung la grosimi pînă la 60 m. Lateral (fig. 3) reciful trece la un facies marnos-calcaros şi în continuare la un facies detritic reprezentat prin marne cenuşii-vinete dispuse sub formă de straturi orizontale compacte. Masivul Stînca prezintă fenomene de fisurare şi numeroase caverne care se reduc în adîncime. Felul golurilor şi lipsa cristalilor de calcită denotă că acestea s-au format prin circulaţia apei descendente şi prin acţiunea erozivă a agenţilor atmosferici.

Pe baza determinărilor paleontologice şi paleobotanice s-a stabilit că organismele care au luat parte la formarea depozitelor calcaroase de aici au fost reprezentate în cea mai mare parte prin alge (Lithotamnium romagisimum şi Lithotamnium numuliticum) şi prin organisme cu schelet calcaros : Gasteropode, Briozoare, Serpulide etc.

Din punct de vedere tectonic regiunea cercetată nu a fost afectată de mişcări tangenţiale, încît lacunele stratigrafice, transgresiunile şi regresiunile marine care au avut loc aici se datoresc numai mişcărilor pe verticală.

Depozitele cuaternare au o grosime între 5 şi 20 m şi sînt formate din loess nisipos şi lehm loessoid în care s-au găsit resturi de mamifere.

3. Examene petrografice

a. *Calcarele*, atît pe orizontală cît şi pe verticală, se prezintă neomogene cu treceri de la zone compacte, dure, la zone mai poroase, degradate, uneori cu numeroase canalicule, unele calcare avînd chiar un aspect breccios. Caracterul structural este de asemenea variat, prezentînd treceri de la structura granulară organogenă la structura granulară cristalină. Textura este masivă, culoarea cenuşie-alburie, cu tente de galben pînă la brun.

La stereomicroscop aceste roci apar în genere fin cristalizate şi din loc în loc se văd cuiburi de calcită. La microscop apar sub forma unor mase compacte, fin cristalizate, adesea cu goluri lăsate de fosile în care ulterior a cristalizat calcita. Se găsesc şi calcare compacte cu numeroase fosile (fig. 7). Unele calcare prezintă un pronunţat caracter marnos.

b. *Marnele* au granulaţie fină şi culoarea de la alb cenuşiu la gri albăstrui ; unele prezintă aspect gras lucios, altele sînt mate, cu

suprafața aspră, toate cu grad accentuat de stratificație, ceea ce face ca în ruptură să prezinte un aspect foiletat.

La stereomicroscop se văd din loc în loc cavități în care a cristalizat calcita. La microscop se prezintă sub forma unei mase amorfe cu sau fără incluziuni și cu urme de fosile : în marnele de la Ripiceni s-a întîlnit Rolalia Sp, Spiculi de Spongieri, Ostracode etc. În marnele de la Stînca-Ștefănești s-a întîlnit Serpula Gregalis, Eichw, Madiola sarmatica Gat, Cardium off obsoletiformis Kol etc. [1]).

4. Analize chimice

În cadrul explorărilor de la Stînca-Ștefănești a fost posibil să se recolteze probe pentru analiza chimică din întreaga coloană stratigrafică [2]). Rezultatele sînt cuprinse în tabelul 1.

În masivul Stînca-Ștefănești calcarele au un conținut redus de SiO_2 (0,82...1,56%), MgO este cuprins între 0,40...1,6% iar Al_2O_3 și Fe_2O_3 numai sub formă de urme. Conținutul elementelor care intră în alcătuirea marnelor variază cu adîncimea (conținutul maxim de MgO este 2,18%).

Tabelul 1 prezintă și compoziția chimică pe o serie de probe din afloriment precum și rezultatele medii pe straturi. Rezultă că în afloriment, alături de calcar apare calcarul marnos ; SiO_2 și MgO variază în limite mai mari (SiO_2 1,75% ...0,41% iar MgO 1,60%...0,40%.)

Pentru restul regiunii luată în studiu se dau (tabelul 1) rezultatele analizelor chimice din lucrările noastre anterioare [13], pentru o serie de calcare și marne de la Ripiceni (afloriment și sondaj), Movila-Ruptă și Drăcșăniță. Se constată la Ripiceni o compoziție chimică apropiată de cea găsită la Stînca-Ștefănești (chiar pe probe izolate luate la același nivel.

5. Calitatea rocelor calcaroase de la Stînca-Ștefănești ca materie primă pentru ciment

Pe baza rezultatelor analizelor chimice și mineralogice s-au stabilit 3 posibilități de valorificare a acestor roci la fabricarea cimentului : din marne calcaroase, care prezintă avantajul că nu necesită decît oarecare corecții ; din calcar + marnă calcaroasă ; din calcar + marnă + argilă.

La examenul mineralogic s-au întîlnit mai rar în masa calcarelor macrocristali de calcită, ceea ce ne face să contăm pe o bună aptitudine de legare a calcei, și deci pe o bună constanță de volum a cimentului care ar rezulta. Cristalii rari de silice liberă ne fac să

1) Identificare făcută de tov. șef de lucrări Natalia Paghida de la Universitatea „Al. I. Cuza" din Iași, căreia îi aducem mulțumirile noastre.

2) Pentru stabilirea exactă a compoziției chimice, s-au efectuat sute de analize, parte în cadrul laboratorului „Rarău"-Cîmpulung iar parte de către colectivul nostru.

contăm pe o reacție satisfăcătoare a silicei la ardere [8]. Conținutul în MgO variază în limite mari în procesul de ardere ; se știe că pe măsura legării calcei crește concentrația în MgO [8]. Faptul că prezintă însă și rol pozitiv, activînd ca fondant în procesul de ardere și că nu intervine în raportul dintre ceilalți oxizi, separîndu-se singur sub formă de cristali de periclas ori sub formă de masa sticloasă, ne permite să considerăm că poate fi acceptat în amestecurile medii ale materiei prime ; trebuie excluse numai acele zone care conțin MgO în procente mari.

Au fost urmărite și o serie de proprietăți fizice care influențează procesul tehnologic de fabricare a cimentului și anume : capacitatea de dispersie în apă, gradul de vîscozitate a pastei, rezistența la măcinare ca consecință a durității și a modului de angrenare a mineralelor. Absența concrețiunilor silicioase, a intercalațiilor gresoase ori a incluziunilor nisipoase de pietriș, ușurează procesul de măcinare.

6. Date economice

a) *Aprecieri asupra rezervelor*

La *Stînca-Ștefănești*, calcarele apar la zi sub pătura loessoidală, au o grosime de peste 60 m (din creastă pînă la nivelul hidrostatic) și se întind pe o suprafață de 1 400 × 460 m (determinată prin foraje) iar în afloriment se află pe o suprafață de 1 000 × 100 m și au o grosime de 40 m.

Calcarele de la *Stînca-Ripiceni* se întind pe o suprafață de 700 × × 300 m și au grosimea de 60 m.

Marnele calcaroase de la *Movila-Ruptă* și cele de la *Drăcșănița* acoperă o suprafață de cca. 300 × 600 m și au o grosime medie de cca. 40 m (aproximată pînă la nivelul hidrostatic).

Calculîndu-se rezervele de calcare, marne și argile, prin metoda suprafețelor paralele, s-au stabilit următoarele cantități exploatabile :

Calcare : cca. 180 mil. t din care 130 mil. t la Ștefănești, 30 mil. t la Ripiceni, 20 mil. t la Movila-Ruptă și Drăcșănița.

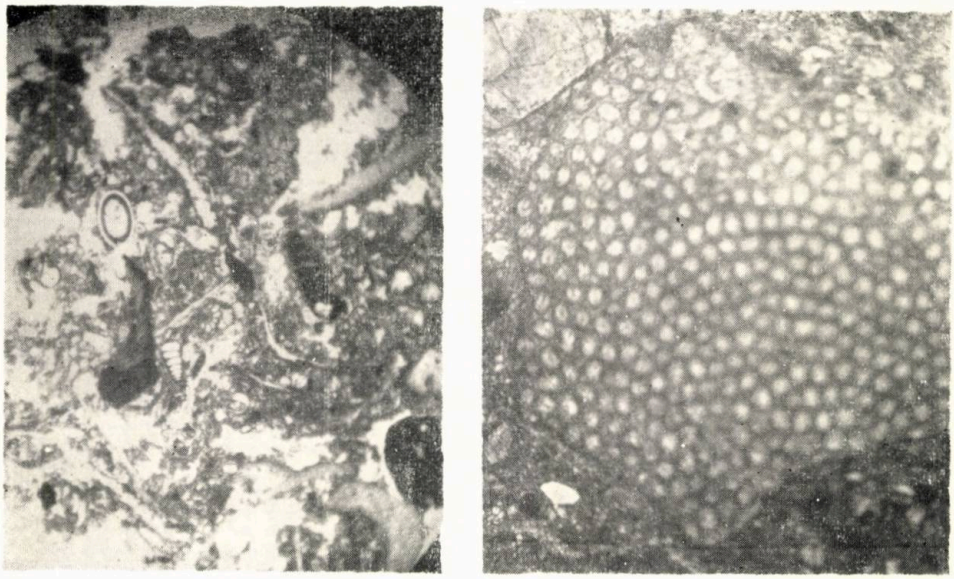
Marne : cca. 310 mil. t din care 220 mil. t la Ștefănești, 60 mil. t la Ripiceni și 30 mil. t la Movila-Ruptă și Drăcșănița.

Argilă : cca. 71 mil. t din care 56 mil. t la Ștefănești, 11 mil. t la Ripiceni și 4 mil. t la Movila-Ruptă și Drăcșănița.

Rezultă că rezervele de materii prime pentru ciment sînt de cca. 561 mil. tone.

b) *Condiții de exploatare*

Deoarece formațiunile calcaroase care se întind între Stînca-Ștefănești și Liveni apar la zi iar stratul acoperitor de loess are grosime redusă, ele se pot exploata în carieră, pe un front larg, cu un



a) *b)*

Fig. 7. — Calcare bogate în fosile.

Tabelul 1

Analiza chimică a rocilor calcaroase din principalele depozite existente în lungul rîului Prut

	Probe medii pe variaţii faciale întîlnite la													Probe medii din depozitele mai mari de roci calcaroase din lungul Prutului			
	Stînca-Ştefăneşti						Movila-Ruptă			Stînca-Ripiceni				Drăc-şăniţa	după cotul Prutului	Stînca-Ripiceni	
SiO_2	1,56	0,82	35,82	19,56	21,48	4,68	11,71	1,95	1,34	1,87	0,86	3,64	1,80	21,80	13,95	11,49	21,10
Al_2O_3	urme	urme	4,11	1,96	2,05	2,15											
Fe_2O_3	urme	urme	1,57	0,78	0,85	0,79	1,75	1,05	0,45	0,64	0,12	0,40	0,76	8,98	4,16	1,49	1,94
CaO	53,48	53,96	29,10	39,28	39,78	49,42	47,10	53,72	54,41	54,32	52,36	52,88	53,94	34,77	45,06	47,21	41,74
MgO	0,88	0,81	2,01	2,18	1,23	0,89	0,43	0,46	0,38	0,33	0,06	0,03	0,72	2,31	2,18	0,98	0,28
P. C.	43.12	43,70	26,70	35,12	34,44	41,92	38,89	42,76	43,30	42,52	43,30	39,34	43,03	30,16	35,45	37,40	34,80
Total	99,04	99,29	99,31	98,88	99,83	99,85	99,88	99,94	99,98	99,68	96,70	96,29	100,23	98,02	98,80	98,57	99,86
$CaCO_3$	95,44	96,29	51,93	70,10	70,99	89,97	84,74	96,65	97,89	97,73	94,20	95,14	97,05	62,02	80,36	84,19	74,44
$MgCO_3$	1,84	1,69	4,20	4,58	2,57	1,86											
Tip rocă pe baza analizelor chimice	calcar			marnă		calcar marnos (la limita cu marnă)	marnă calca-roasă	calcar compact		calcar friabil				marnă	marnă calcaroasă		marnă

	Probe [1]) din aflorimentele de la Stînca-Ştefăneşti													Probe medii [1]) pe sorturi [2])			
														A	*B*	*C*	
SiO_2	1,31	1,54	1,30	1,42	1,73	0,41	0,41	0,75	1,92	1,05	1,41	0,84	0,45	10,50	27,04	10,50	
Al_2O_3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4,06	10,07	4,06	
MgO	0,40	0,60	1,60	0,60	1,01	0,38	0,38	1,82	0,40	—	0,40	1,41	—	4,33	0,95	4,06	
$CaCO_3$	95,13	93,41	95,13	96,61	92,90	94,72	94,72	95,10	95,61	97,61	96,61	94,61	96,62	73,31	47,72	55,41	
Tip rocă pe baza analizelor chimice	calcar	calcar marnos	calcar		calcar marnos		calcar		calcar marnos	calcar		calcar marnos	calcar	marnă calca-roasă	marnă		

Limitele de $CaCO_3$ (%): calcar, 100...95; calcar marnos, 95...90; marnă calcaroasă, 90...75; marnă, 75...40; marnă argiloasă, 40...20; argilă marnoasă, 20...6; argilă, 5...0.

[1]) Analize chimice efectuate de către Laboratorul regional „Rarău"-Cîmpulung.

[2]) *A* — Formaţiuni calcaroase (media pe grosime 36 m); *B* — argilă strat acoperitor (media pe grosime 32 m); *C* — formaţiuni de marne (media a 200 probe).

randament maxim. Concomitent cu exploatarea calcarelor se pot exploata marnele și argilele. Este necesar să se aplice o exploatare selectivă.

Accesul în regiune se face pe calea ferată Iași—Dorohoi, stația CFR cea mai apropiată fiind Trușești, legată de satul Ștefănești (la 17 km) printr-un drum comunal. De la Ștefănești pînă la zăcămînt accesul se face pe un drum de cca. 5 km, care necesită unele amenajări.

7. Concluzii

Atît din punct de vedere cantitativ cît și calitativ, rocile calcaroase existente în lungul rîului Prut pot forma materia primă pentru fabricarea cimentului.

1. Se recomandă exploatarea selectivă, avînd în vedere diferențele de compoziție de la un strat la altul și atenție în special asupra zonelor în care MgO apare în cantități mai mari.
2. Exploatarea se poate face la zi pe un front larg.
3. În procesul de exploatare se poate aplica hidromecanizarea, folosind în acest scop apa rîului Prut.
4. Rîul Prut poate fi utilizat drept cale de transport.
5. Se recomandă construirea unei căi ferate care să lege stația Trușești de Stînca-Ștefănești.
6. Rezervele existente satisfac necesarul unei fabrici cu producție mare, pe un timp îndelungat.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de geologie și geotehnică

BIBLIOGRAFIE

1. Atanasiu I., *Le sarmatien du planteau moldave.* Ann. Acad. Roum., Buc., 1945, secț. *3*, **XX,** *5.*
2. Atanasiu I., Macarovici N., *Les sedimentis miocenes septentrionales de la Moldavie (districts Dorohoi, Botoșani et Iași).* Ann. Ist. Geol. de Roum., 1950, **XXIII.**
3. Albu C., Gheorghiu C., Popescu I., *Depozitele sedimentare de la Rădăuți-Prut.* În vol. Geologie-Geografie (1957-1959) al SSNG, Buc., 1960, pp. 9—23.
4. Chelărescu Al., Iaroșinschi-Drabic I., *Studiul depozitelor de calcare și marne de la Ștefănești (județul Botoșani).* Lucr. ses. șt. a Acad. R.P.R., 2—12 iunie 1950.
5. Dorsch K. E., *Chemie der Zement.* Julius Springer, Berlin, 1932.
6. Foetterle F., *Die Verbreitung der Sarmatisschen Stufe in der Bukovin und der nordichen Moldauwien.* 1870.
7. Gheorghiu C., Bîgu Gh., Radu O., *Date noi cu privire la stratigrafia depozitelor sedimentare din nordul Moldovei (reg.iunea Rădăuți-Prut).* Anal. Univ. „C. I. Parhon", Buc., ser. Geol.-Geogr., 1961, **27.**
8. Jung V. N., *Bazele tehnologiei lianților.* Buc., 1954 (trad. din l. rusă).
9. Kuhl H., *Zement Chemie.* Berlin, 1956.
10. Lea F. M., *The Chemistry of Cement and Concrete.* London.

11. Macarovici N., Jeanrenaud P., *Revue générale du néogène de la plateforme de la Moldavie*. An. şt. Univ. „Al. I. Cuza" Iaşi, 1958, sec. *II*, **IV**, *2*.
12. *** *Контроль фабрикации цемента*. **M.**, 1951.
13. Păunel E., Chelărescu Al., Nichita O., Cotruţ Gh., Mihul A., Boghian A., *Studiul calcarelor de la Ripiceni-Prut ca material pentru construcţii*, St. şi cerc. Acad. R.P.R., filiala Iaşi, Ser. şt. fiz. şi tehn., 1961, 2.
14. Solocalu Ş., *Chimia fizică a silicaţilor tehnici*. Ed. Tehn., Buc., 1957.
15. Simionescu I., *Contribuţiuni la geologia Moldovei dintre Siret şi Prut*. Acad. Rom., Publ. fond. „V. Adamachi", Buc., 1903.
16. — *Construcţia geologică a ţărmului Prutului din nordul Moldovei*. Acad. Rom., Publ. fond. „V. Adamachi", Buc., 1902.
17. Ştefănescu Gr., *Relaţiune sumară de lucrările biroului geologic în campania din 1885*. An. **III**, Buc., 1885.
18. Wit J. C., *Portland Cement Technology*. Chemical Publishing Co., NY, 1947.

ROCHES CALCAIRES DE LA VALLÉE DU PROUTH, SOURCE DE MATIÈRE PREMIÈRE POUR LA FABRICATION DU CIMENT

(Résumé)

Dans l'étude des dépôts de roches calcaires affleurant le long de la vallée du Prouth, les recherches furent axées sur la base des forages et des études de laboratoire, concernant surtout les dépôts de la Stînca-Ştefăneşti et ceux de la Stînca-Ripiceni, où se trouvent les plus grandes réserves de ces roches, présentant en même temps des conditions avantajeuses du point de vue de l'exploitation.

Sur la base des résultats obtenus par les analyses chimico-pétrographiques et physico-mécaniques, on est arrivé à la conclusion que les dépôts en question peuvent constituer d'importantes sources de matières premières pour la fabrication du ciment.

Explication des figures

Fig. 1. — Dépôts de roches calcaires au long du Prouth.

Fig. 2. — Colonne stratigraphique — Stînca-Ripiceni (Prouth).

Fig. 3. — Dépot de roches calcaires de Stînca-Ştefăneşti (Prouth) — Esquise géologique au niveau du Prouth (cote + 63) : *1* — calcaire ; 2 — marnes.

Fig. 4. — Profil transversal (I) à travers le dépôt de roches calcaires de Stînca-Ştefăneşti : *1* — calcaires exploitables en carrière ; 2 — calcaires au dessous du niveau du Prouth ; *4* — marnes au dessous du niveau du Prouth ; 5 — argiles loessoïdales ; 6 — formations tortoniennes.

Fig. 5. — Profil transversal (II) à travers le dépôt de roches calcaires de Stînca-Ştefăneşti : *1* — calcaires au dessus du niveau hydrostatiques ; 2 — calcaires au dessous du niveau hydrostatique ; *3* — marnes au dessus du niveau hydrostatique; *4* — marnes au dessous du niveau hydrostatique ; 5 — argiles loessoïdales ; 6 — formations tortoniennes.

Fig. 6. — Section longitudinale à travers le dépôt de roches calcaires de Stînca-Ştefăneşti : *1* — calcaires au dessus du niveau hydrostatiques ; 2 — calcaires au dessous du niveau hydrostatique ; *3* — marnes au dessus du niveau hydrostatique ; *4* — marnes au dessous du niveau hydrostatique ; 5 — argiles loessoïdales ; 6 — formations tortoniennes.

Fig. 7. — Calcaires riches en fossiles.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 691

STUDIUL ROCILOR CALCAROASE DIN MASIVUL RARĂU ÎN VEDEREA VALORIFICĂRII LOR CA MATERIALE PENTRU CONSTRUCŢII

DE

C. BRANIŞTE, ELISABETA PĂUNEL, GH. BÎGU, OREST NICHITA, AL. CHELĂRESCU, AURORA BORDEA, MARIA ROZMARIN şi GH. MOROI

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Consideraţiuni geologice asupra regiunii Rarău

Regiunea ocupată de masivul Rarău (fig. 1) aparţine din punct de vedere administrativ Raionului Cîmpulung Moldovenesc, Regiunea Suceava.

Ea face parte din lanţul munţilor Bistriţa din Carpaţii Orientali şi din punct de vedere geologic aparţine zonei cristalinomezozoică. Este acoperită cu păduri şi păşuni alpine.

Recentele lucrări miniere (puţuri şi galerii) executate în masivul Rarău de către Comitetul Geologic permit aprofundarea studiilor geologice începute încă din 1830 (A. Roth) şi continuate în timp de geologi cu renume mondial. Dăm mai jos rezultatele la care s-a ajuns.

Flancurile cuvetei Rarăului sînt formate din şisturi cristaline. Peste fundamentul cristalin urmează depozite sedimentare mezozoice începînd cu formaţiunile triasice şi terminînd cu cele cretacice superioare. Calcarele aparţin triasicului şi cretacicului inferior (baremian aptian). Triasicul este format în partea de vest dintr-un facies dolomitic, iar în partea de est dintr-un facies calcaros. Flancul de vest al sinclinalului Rarău prezintă o sedimentaţie normală. În fig. 2 este redată alcătuirea stratigrafică a triasicului din această zonă. Jurasicul nu apare în formaţiunile masivului Rarău, totuşi el este reprezentat în regiune prin cîteva clipe calcaroase (Fundul Pojorîtei). Erupţiile vulcanice care au avut loc în triasic sînt reprezentate aici prin diabaze şi melafire pe care se reazemă o parte din calcarele triasice şi din cretacicul inferior.

Calcarele baremian-aptiene, depuse peste calcarele triasice, au la bază un orizont subţire de microconglomerate calcaroase, care în sus trec în calcare recifale în care s-a găsit o faună coraligenă. Corpurile de calcare recifale sînt masive, compacte, pe unele zone diagenizate. Răspîndirea lor în masiv, în raport cu alte roci, este prezentată în schiţa geologică din fig. 2 şi în profilul geologic din fig. 3.

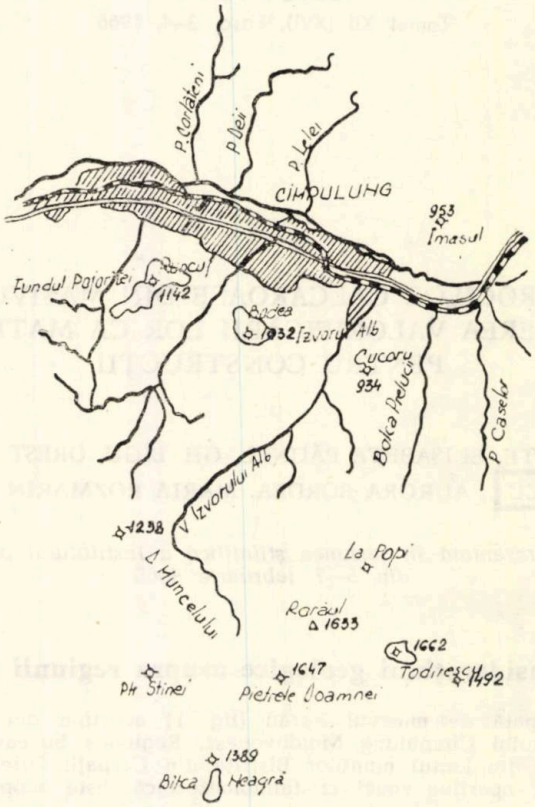


Fig. 1. — Amplasamentul regiunii Rarău.

2. Examenul petrografic şi micropaleontologic al rocilor calcaroase din masivul Rarău

Din examinarea macroscopică, stereomicroscopică şi microscopică a probelor de roci calcaroase recoltate din sectoarele Vîrful Rarău (21 probe), La Popi (15 probe), Pîrîul Limpede (4 probe), Pietrele Todirescu (16 probe), Tarniţa (11 probe), Piatra Zimbrului (4 probe) şi Pietrele Albe (3 probe) (fig. 2, unde s-au marcat punctele de recoltare), rezultă o serie de concluzii.

Examenul macroscopic. Toate probele sînt calcare compacte cu bobul fin încît par a fi în stare amorfă sau cel mult criptocristalină şi numai rareori apar cristali de calcită (în goluri sau crăpături). Culoarea predominantă este gri-gălbuie ; rar apare culoarea alburie (exemplu proba *1*, Tarniţa) şi gri-roşcată (proba *13*, Pîrîul Limpede). Calcarele în genere sînt dure. Cu ochiul liber nu se văd fosile.

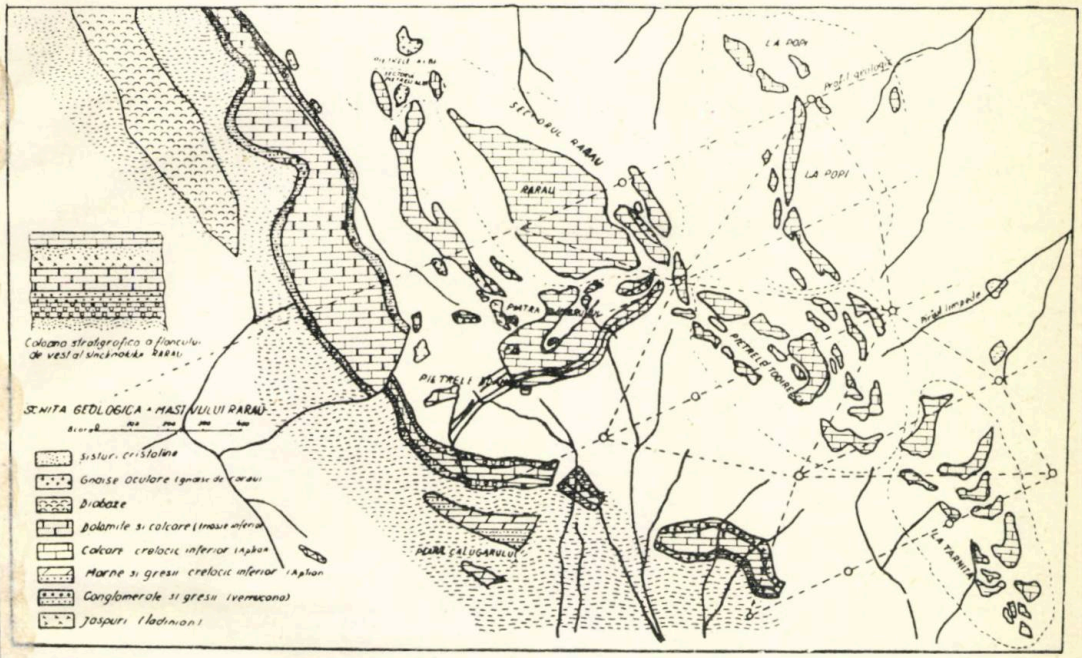


Fig. 2. — Schiţa geologică a masivului Rarău. Coloană stratigrafică prin formaţiunile triasice ale flancului de vest a sinclinalului Rarău.

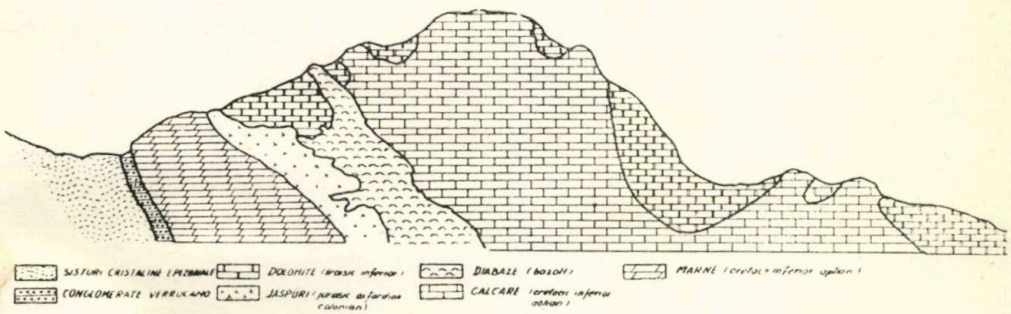


Fig. 3. — Profil geologic informativ (*I*) prin masivul Rarău.

Fig. 4. — Calcare cu rare fosile (fotografie la microscop).

Fig. 5. — Calcare bogate în fosile (fotografie la microscop).

Examenul stereomicroscopic (mărire de 40 ori). În genere probele apar fin cristalizate și numai unele conțin zone cu cristali mai mari de calcită.

Examenul la microscop. Rocile apar sub diferite aspecte și anume :

a) *calcarele* prezintă o structură fin granulară formată în majoritate din cristali de calcită ; mai rar se întîlnesc mase compacte constituite din cristali mari de calcită ;

b) *calcarele marnoase* prezintă o structură de la fin pelitică pînă la criptocristalină, unele sînt compacte, altele străbătute de numeroase canale în care a cristalizat calcita.

Atît la calcare cît și la calcarele marnoase se întîlnesc fosile, de la cazuri izolate (fig. 4), la cazuri cînd masa rocii este constituită pînă la 70...80% din schelete calcaroase (fig. 5) [1]).

3. Analize chimice

Analizele chimice s-au executat cu scopul de a stabili dacă rocile calcaroase din masivul Rarău pot constitui o bază de aprovizionare cu materii prime pentru fabricarea cimentului.

S-au luat probe atît de la suprafață cît și din galerii, din 5 în 5 m. Locul de recoltare a probelor și numărul lor (indicate pe fig. 2) a fost stabilit în funcție de gradul de omogenitate a rocilor în strat.

Din analizele chimice a probelor recoltate de la suprafață (tabelul 1) se constată că :

Sectorul Rarău (21 probe analizate) este constituit din calcare cu un conținut de 95...99,30% $CaCO_3$ cu excepția zonei NV (probele *10, 12, 13),* unde se întîlnesc calcare marnoase (93,10...94% $CaCO_3$). MgO, SO_3, MnO, Al_2O_3 se află în proporție redusă față de insolubile (respectiv SiO_2) care în unele probe ajung la 4,25% (proba *10*), ceea ce trebuie pus pe seama prezenței de SiO_2 liber.

În *sectoarele Todirescu :* (5 probe), *Pietrele Albe* (1 probă), *Tarnița* (3 probe), *Pîrîul Limpede* (3 probe), *La Popi* (3 probe) predomină calcarele cu 94,70% (proba *9*, Todirescu) — 98,50% $CaCO_3$ (proba *16*, La Popi) și numai zone puțin întinse sînt formate din calcare cu ușor caracter marnos (exemplu probele *2* Todirescu, *4* Pîrîul Limpede, *8* La Popi) ; rar apare calcarul cu caracter magnezian (proba *4*, Todi-

1) Examenul paleontologic a fost efectuat de către tov. șef de lucrări Natalia Paghida de la Universitatea „Al. I. Cuza" din Iași, căreia îi aducem mulțumirile noastre.

Citățm cîteva din principalele fosile întîlnite : *vîrful Rarău :* Foraminifere (Miliolidae), fragmente de Hexacoralieri, valve de Lamelibranchiate ; *sectorul Todirescu :* Foraminifere (Miliolidae), Textularia sp., Orbitolinopsis sp., Hexacolarieri, fragmente de valve Lamelibranchiate ; *sectorul Tarnița :* Foraminifere (Orbitolina sp.), hexacorali, fragmente de valve de Lamelibranchiate, alge calcaroase ; *sectorul Pîrîul Limpede :* Foraminifere (Textularia sp. Miliolidae), Spongieri, Hexacorali (Thamastrea sp.), Chetetopsis ; *sectorul La Popi :* Orbitolina sp., Textularia sp.

rescu); SO_3, MnO în probele în care s-a întîlnit este nedozabil, în schimb MgO este în proporţie mai mare ca în sectorul Rarău, frecvent fiind peste 1% (tabelul 1), în unele zone ajungînd la 2,8% (proba *4*, Tarniţa) şi chiar la 10...10,65% (proba *4*, Todirescu). Insolubilul (inclusiv SiO_2) variază ca proporţie de la o probă la alta, limitele întîlnite fiind 5% (proba *2*, Todirescu) pînă la 0,58% (proba *4*, Tarniţa).

Rezultatele analizelor chimice pe probele recoltate din adîncime, prin galerii [2]), arată (tabelul 2 şi fig. 2, 3) că în zăcămînt apar diferenţe din punct de vedere chimic chiar la mici distanţe (5...15 m), atît pe verticală cît şi în lungul straturilor. Astfel, sînt frecvente trecerile de la calcare la calcare marnoase ori la marnă calcaroasă. Excepţie face creasta Rarău, unde pe diferenţa de nivel de 240 m (tabelul 2) se întîlneşte numai calcar cu un conţinut în $CaCO_3$ de 98,10...94,40%. MgO în genere este sub 1% şi numai în unele zone ajunge la 2,1%. MnO este prezent, însă în proporţii foarte reduse (mai frecvent sub 0,02%) şi numai în cîteva zone (galeria IV, adîncimea 415...420 m) este 0,7%. SiO_2 în toate probele apare în excedent faţă de Al_2O_3. Considerînd că nu apare legat sub alte forme decît în silicaţi, rezultă că este prezentă silicia liberă (tabelul 2).

4. Forme de valorificare a calcarelor şi date economice

a) Rezultatele studiilor geologice, petrografice, chimice şi fizice asupra rocilor calcaroase existente în masivul Rarău ne-au permis să apreciem dacă sînt corespunzătoare din punct de vedere calitativ şi cantitativ ca materii prime pentru obţinerea cimentului.

Există rezerve considerabile (cca. 200 mil. tone) de roci calcaroase (calcare, calcare marnoase, marne) predominînd cantitativ calcarele ($CaCO_3 > 95\%$). Ca factor negativ însă se remarcă oarecare neomogenitate în zăcămînt (chiar pe sectoare) atît pe direcţia straturilor cît şi pe verticală (v. tabelele 1 şi 2). Faţă de raportul calcar-marnă sau calcar-argilă cerut pentru fabricarea cimentului (frecvent calcarul se ia 75...77% iar argila diferenţa 25...22%), în zăcămîntul studiat marna este deficitară faţă de calcar.

Calcarul de Rarău, în genere, este fin cristalizat. Atunci cînd este macrocristalin, ceea ce aici se întîlneşte pe zone reduse, asimilarea la ardere, în cuptor, este îngreuiată.

Dintre constituenţii dăunători s-a întîlnit SiO_2 liber în proporţii variabile (v. tabelele 1 şi 2). Se ştie că pe măsură ce proporţia de silice liberă din materia primă este mai mare, insolubilul din clincherul răcit creşte.

---

2) Aceste analize au fost executate în laboratorul „Rarău"-Cîmpulung Moldovenesc.

După cum se știe MgO apare în clincher în stare liberă ca soluție solidă ori cristali de periclas și are rol negativ în compoziția cimentului. În calcarul de Rarău MgO este în genere în proporții reduse, dar faptul că în unele zone apare pînă la 10% poate complica exploatarea și procesul tehnologic în fabrică.

Avînd în vedere și caracteristicile tehnologice la care trebuie să corespundă calcarul ca materie primă pentru ciment, duritatea, neuniformitatea din punct de vedere fizic (incluziunile), care duc la comportări diferite în procesul de măcinare, putem considera că rocile calcaroase din acest masiv nu sînt întru totul corespunzătoare pentru fabricarea cimentului. Așa cum s-a arătat mai sus și cum rezultă și din analize, există și zone lipsite de minerale dăunătoare, care totalizează o rezervă de cca. 20 mil. tone.

b) Pe baza cercetărilor de laborator și ținînd seama de normativele în vigoare, s-a stabilit că rocile calcaroase din masivul Rarău se pot valorifica astfel :

1. Pentru fabricarea varului aerian de construcții în care caz se cere ca procentul de $CaCO_3$ din rocă să fie $> 95\%$ iar $MgCO_3 < 5\%$, condiții pe care în genere le îndeplinesc calcarele din acest masiv. Probele tehnologice au dovedit și o comportare bună pentru coacere. În probele de laborator, prin arderea calcarului de Rarău la 1 200 °C, s-a obținut un var de calitatea I.

Calcarele care au $SiO_2 < 1{,}4\%$ (v. tabelele 1 și 2) pot fi utilizate la fabricarea varurilor industriale, a carbidului, cloratului de potasiu, clorurii de var, în industria lacurilor și în siderurgie. Ceilalți componenți nefavorabili Al_2O_3, Fe_2O_3, SO_3 se află în limitele admise.

2. Majorita'ea rocilor calcaroase din masivul Rarău pot constitui și un bun material de construcții atît ca piatră pentru zidărie, cît și ca agregat pentru betoane, avînd în vedere forma bună a granulelor rezultate prin concasare $b/a > 0{,}66$; $c/a > 0{,}33$; determinarea s-a făcut la calcarul de la Piatra Zimbrului pe care s-a obținut rezistențe mecanice satisfăcătoare.

Aceste roci nu sînt indicate pentru filere din cauza rezistenței mari pe care o opun la măcinare și a prezenței silicei libere. Încercări de acest fel s-au făcut atît în laborator cît și în stația Rarău pe calcarul dolomitic de la Valea Albă (4 km de masivul Rarău) care are : 55,86% $CaCO_3$, 38,91% $MgCO_3$, SiO_2 + insol. 3,22%, $Fe_2O_3+Al_2O_3$ 1,75%, SO_3 0,75%, K_2O+Na_2O 0,52%, P.C. 45,52, iar ca duritate se aseamănă cu calcarele de Rarău. Rezultă un filer de calitate inferioară (necorespunzător ca finețe granulară), productivitatea este redusă, din cauza timpului de măcinare prelungit, ceea ce ridică prețul de cost.

Pentru accesul în zona centrală a masivului Rarău de la staţia C.F.R. Cîmpulung există un drum carosabil pe o lungime de 14 km care urcă pînă la cota 1 500 m. Pentru a deveni practicabil în toate anotimpurile acest drum, pe unele zone, necesită amenajări.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de materiale de construcţii
şi
Catedra de geologie şi geotehnică

BIBLIOGRAFIE

1. Lill de Lillierbach, *Jurnal d'un voyage géologique en Bucovine, en Transilvanie en dans le Maramuresch.* Mém. de la Soc. Géolog. de France, P. *11*-eme, 1834.

ИССЛЕДОВАНИЯ ИЗВЕСТКОВЫХ ЗАЛЕЖЕЙ МАССИВА РАРЭУ В ВИДУ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИХ КАК СТРОИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ

(Резюме)

Исследуемые известковые залежи массива Рарэу, Восточных Карпат Сучавской области являются триасового и нижне-мелового происхождения. Залежи мергеля, извести и известкового мергеля в этой области определяются в 200 милл. тон.

Даются минераллогический и химический составы, а также палеонтологические данные проб взятых с поверхностей и из штреков.

Обсуждаются возможности использования этих материалов в производстве силикоцемента, как сырья строительного камня и различных строительных известей, а также и бетонных составов.

Устанавливается, что эти материалы не пригодны для филлера.

Обьяснение рисунков

Рис. 1. — Местоположение области Рарэу.

Рис. 2. — Геологическая схема массива Рарэу. Стратиграфическая колонна в триасовых формациях западного фланга синклинала Рарэу.

Рис. 3. — Геологический профиль (I) массива Рарэу.

Рис. 4. — Известковые породы с слабовыраженными ископаемыми (микроснимок).

Рис. 5. — Известковые породы богатые в ископаемых (микроснимок).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

Д. К. 691.324

СВОЙСТВА КЛИНКЕРА БЕЛОГО ПОРТЛАНДЦЕМЕНТА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ СОСТАВА ГАЗОВОЙ СРЕДЫ ПРИ ОБЖИГЕ

А. Н. ГРАЧЬЯН, П. П. ГАЙДЖУРОВ

В зависимости от характера гозовой среды в процессе обжига фазовый состав и структура портландцементного клинкера испытывают существенные превращения. На четвертом международном симпозиуме по химии цемента [1] особое внимание было обращено на необходимость исследования влияния газовой атмосферы в печи на железосодержащие соединения клинкера. Данное исследование симпозиумом определено перспективным, выполнение которого должно способствовать теоретическому и практическому развитию физико-химии цемента. Состав газовой среды в печи представляет особый интерес в технологии белого портландцемента.

В связи с этим нами проведены исследования влияния различных газовых сред (окислительной, нейтральной и восстановительной) на формирование клинкера белого портландцемента и его свойства.

Обжиг образцов производился в специально сконструированной платинородиевой трубчатой печи с регулируемой газовой атмосферой. Для фиксации фазового состава и структуры клинкера, соответствующих высоким температурам обжига (1420 °С), обожженные образцы подвергались быстрой закалке в воде.

Исследования влияния различных газовых сред на процесс обжига клинкера белого портландцемента (таблица 1) показали, что белизна клинкера, обожженного в нейтральной и восстановительной газовых средах соответственно на 3,1 и 5,3 % выше значения белизны клинкера, обожженного в обычной окислительной среде.

Образцы клинкеров, обожженные в неокислительных средах, имели светлоголубоватый оттенок, вместо обычного темно-зеленого цвета, характерного при обжиге в окислительной среде. Наблюдаемые изменения цветовых оттенков клинкеров в зависимости от характера газовой среды в печи выявляются особенно наглядно, если проанализировать характер их спектральных кривых диффузного отражения в видимой области оптического спектра, приведенных на рис. 1. Отражение измерялось с помощью автоматического спектрофотометра тепа СФ-2М.

Таблица 1

Белизна клинкеров (% по $BaSO_4$), обожженных в средах:		
окислительной	нейтральной	восстановительной
76,6	79,7	81,9

Сравнивая спектральные кривые отражения клинкеров, обожженных в трех газовых средах видно, что кривые клинкеров при неокислительных условиях обжига проходят выше кривых клинкеров, обожженных в окислительной среде, что характеризует их коэффициенты диффузного отражения по всей части видимого оптического спектра. На кривых отражения клинкеров, обожженных в окислительной среде, имеющиеся максимумы расположены в области зеленого цвета. Максимумы же кривых продуктов обжига в неокислительных средах (нейтральной и восстановительной) смещены в коротковолновую часть видимого спектра (в голубой его конец). Такой отличный тип кривой отражения свидетельствует о существенных превращениях железосодержащей фазы цементного клинкера, что предопределяет различную его отражательную способность в видимой области спектра.

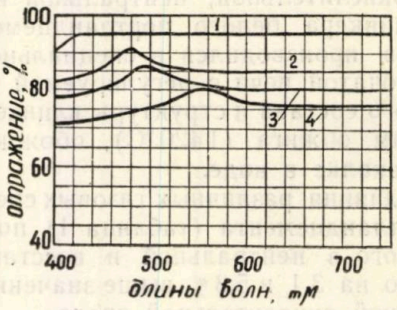


Рис. 1. — Кривые отражения: *1* — эталона; *2* — клинкера, обожженного в восстановительной среде; *3* — клинкера, обожженного в нейтральной среде; *4* — клинкера, обожженного в окислительной среде.

Рентгенографические исследования клинкеров, обожженных в указанных трех газовых средах, не позволили выявить какой либо разницы в их фазовом составе. Это объясняется тем, что в клинкере

белого портландцемента железистых соединений содержится незначительное количество — 1...2 %. Поэтому превращения, происходящие с алюмоферритами кальция, исследованиями клинкеров установить чрезвычайно затруднительно. В связи с этим нами исследовано влияние характера газовой среды на формирование в процессе обжига отдельно взятых аллюмоферритов кальция. Рентгенографическими и петрографическими исследованиями установлено, что восстановительный характер газовой среды в процессе обжига сырьевой смеси препятствует растворению алюминатов в алюмоферритах кальция, способствуя образованию высокожелезистых соединений, близких к составу C_6AF_2 и, наряду с этим, сохранению в большом количестве бесцветных „свободных" кристаллов алюминатов кальция. Кроме того, в результате восстановительного действия газовой среды в продуктах обжига образуются двухвалентные ионы железа Fe^{2+} со значительно меньшей красящей способностью, чем трехвалентные ионы железа Fe^{3+}. Отмеченные изменения в фазовом составе твердых растворов алюмоферритов кальция и обусловливают повышение диффузного отражения цементного клинкера при обжиге его в восстановительной газовой среде.

Физико-механические испытания клинкеров, обожженных в различных газовых средах показали, что прочность клинкера, обожженного в восстановительной среде и быстро охлажденного в воде, на 10% выше, чем у клинкера, обожженного в обычной окислительной среде и охлажденного в тех же условиях. При медленном же охлаждении на воздухе прочность клинкера, обожженного в слабовосстановительной среде ниже, чем у клинкера, обожженного в окислительной среде.

Объяснение отмеченным изменениям в показателях прочности клинкеров в зависимости от состава газовой среды в печи можно дать на основе работ Н. А. Торопова, Б. В. Волконского [2], Л. С. Когана [3] и Ф. М. Ли [4]. Авторами установлено, что закисное железо, внедряясь в кристаллическую решетку техкальциевого силиката подвергает его разложению с выделением свободной окиси кальция и в конечном итоге снижает прочностную характеристику. Двухкальциевый силикат растворяет закись железа до 4,6 % и образует с нею твердый раствор.

Анализируя результаты физико-механических испытаныий, мы устанавливаем, что вредное влияние закиси железа, образующейся в клинкере при обжиге в неокислительных газовых средах, на прочностные показатели цемента устраняется при быстром охлаждении клинкера в воде. Это препятствует растворению закиси железа в двухкальциевом и трехкальциевом силикатах и позволяет фиксировать ее в стекловидной фазе, что и обусловливает улучшение показателей механической прочности цемента.

Таким образом, для производства белого портландцемента следует рекомендовать проведение обжига в слабовосстановительной среде. Эта рекомендация авторами была проверена в производственных условиях и получила полное подтверждение ее целесообразности.

Поступила 27 IX 1965 г.

Новочеркасский политехнический институт, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Nurse R. W., *The Chemistry of Cement.* Cement, Lime and Gravel, 1963, **38**, *8*.
2. Торопов Н. А., Волконский Б. В., *Полиморфные превращения C_3S и влияние закиси железа на C_3S и другие клинкерные минерал.* Цемент, 1960, *6*.
3. Коган Л. С., *Зависимость прочностных свойств портландцемента от качества газовой среды в печах.* Цемент, 1958, *6*.
4. Ли Ф. М., *Химия цемента и бетона.* Госстройиздат, ИЛ, М., 1961.

PROPRIETĂŢILE CLINCHERULUI DE CIMENT PORTLAND ÎN FUNCŢIE DE COMPOZIŢIA MEDIULUI GAZOS LA ARDERE

(Rezumat)

Se studiază influenţa mediului gazos oxidant, neutru şi reducător asupra formării şi proprietăţilor clincherului pentru ciment Portland.

Explicaţia figurilor

Fig. 1. — Curbele reprezentative: *1* — etalon; *2* — clincher ars în mediu reducător; *3* — clincher ars în mediu neutru; *4* — clincher ars în mediu oxidant.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 631.5

CLASIFICAREA CERNOZIOMURILOR DIN MOLDOVA

DE

LEONIDA GUŞTIUC

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. In primele lucrări de cartare a solurilor din ţara noastră, efectuate de G. M. Murgoci şi colaboratorii săi P. Enculescu şi Em. Protopopescu Pache, sintetizate în prima hartă genetică de soluri, publicată în 1911 la scara 1/2 500 000, se prezintă ca soluri zonale de stepă în nordul Moldovei cernoziomul castaniu, cernoziomul ciocolatiu şi cernoziomul ordinar.

După primul război mondial (1925) a fost alcătuită harta agrogeologică la scara 1/2 500 000 tipărită în 1929 şi la scara 1/2 250 000 tipărită în 1938 în *Album statistique, Agriculture en Roumanie*. În ambele hărţi erau arătate aceleaşi soluri pentru Moldova de nord ca şi în harta de soluri anterioare.

Cu ocazia Conferinţei de Pedologie din septembrie 1958 a fost alcătuită harta solurilor R.P.R. la scara 1/2 500 000 în care cernoziomurile din nordul Moldovei erau grupate într-o singură grupă — cernoziomuri.

În anul 1961 în harta solurilor la scara 1/1 500 000 întocmită de N. Florea în *Monografia geografică*, nu apar cernoziomuri decît la linia Folteşti—Lieşti şi puncte izolate de cernoziomuri grase formate pe depozite argiloase. De asemenea, pe harta solurilor la scara 1/1 000 000 redactată de N. Cernescu, M. Popovăţ, N. Florea şi Ana Conea este indicat numai tipul genetic de sol — cernoziomuri — a căror răspîndire este la nord de cernoziomul carbonatic (linia Lascăr Catargi—Siviţa) şi pînă la nord de Dorohoi.

Această schematizare este legată pe de o parte de scara la care s-au întocmit hărţile de soluri respective, iar pe de altă parte şi de materialul ce a fost adunat şi consultat la întocmirea acestor hărţi.

Pe baza materialelor existente în urma ridicărilor pedologice întreprinse de Comitetul Geologic, colectivul de pedologie al Academiei Republicii Socialiste România, Secţia fondului funciar din Consiliul Superior al Agriculturii, precum şi de alte unităţi din ţară, nu se mai poate menţine existenţa cernoziomurilor castanii şi a cernoziomurilor ciocolatii în depresiunea Jijiei, Podişul Vasluiului şi Bîrladului şi dealurile Fălciului.

Datorită faptului că silvostepa din Moldova are un relief deluros cu energia maximă 100...150 m pentru depresiunea Jijiei, 250...350 m pentru Podişul Vasluiului şi 150...250 m pentru culmile deluroase ale Tutovei, iar substratul litologic este foarte eterogen — format adesea din argile, marne şi depozite loessoide — se formează soluri în diferite faze de evoluţie, care tind spre cernoziomuri obişnuite.

Aceste soluri în evoluție spre cernoziomuri obișnuite ocupă în prezent suprafețe mai mari decît cernoziomurile levigate.

De aceea în cadrul ridicărilor pedologice la scară mare, în legendele multor hărți de soluri, aceste soluri sînt trecute fie ca cernoziomuri castanii, fie ca cernoziomuri ciocolatii, făcîndu-se chiar confunzii între silvostepa cu aceste cernoziomuri formate pe diferite pante extrazonal și stepa semiuscată.

2. Pe baza ridicărilor pedologice efectuate între 1934—1942 în silvostepă și stepă cu N. Florov și ulterior între 1950—1958, precum și în urma unei serii de trasee de recunoaștere din ultimul timp, s-a adunat un material care permite o clasificare a cernoziomurilor din Moldova și totodată o orientare în alcătuirea hărților de soluri la scară mare.

Cernoziomurile sînt soluri ce s-au format sub vegetația perenă de stepă în zonele de stepă și silvostepă, în condițiile unui regim hidric nepercolativ sau alternopercolativ la limita nordică a acestei zone, în anii cu precipitații mai mari.

Caracteristice pentru cernoziomuri sînt acumularea humusului și a bazelor schimbabile în orizontul cu humus, structura glomerulară bună pentru cea mai mare parte a acestor soluri, absența alterării mineralelor secundare, repartiția constantă în întregul profil al solului a fracțiunii argiloase.

De asemenea, pentru cernoziomuri este tipică acumularea biogenă a carbonaților în profilul solului și migrarea lor în stratul înrădăcinat, în legătură cu aceasta procesele de transformare a substanțelor organice și minerale desfășurîndu-se în condițiile unei reacții a soluției solului, neutră sau slab alcalină.

Toate cernoziomurile au carbonați, însă distribuția lor în profilul solului este diferită în toate subzonele și faciesurile cernoziomurilor.

În zona cernoziomurilor din partea estică a țării noastre condițiile pedoclimatice se caracterizează printr-o iarnă nu prea aspră și relativ umedă, o vară călduroasă și o toamnă de cele mai multe ori secetoasă. În cursul iernii aceste soluri se umezesc, iar o dată cu venirea primelor zile călduroase de primăvară și începutul dezvoltării vegetației ierboase apar curenți ascendenți ai umidității, către suprafață, producîndu-se astfel separarea carbonaților în partea superioară a profilului solului.

În diferitele subzone ale acestor cernoziomuri, procesul se realizează diferit.

Astfel, în partea nordică a Moldovei, în condiții de umiditate mai mare, între 500...580 mm precipitații atmosferice, are loc o umezire mai profundă a solului toamna și iarna, iar primăvara ascensiunea umidității cu conținut de substanțe solubile nu poate ajunge pînă la suprafață, fiind folosită de vegetație, astfel că are loc și depunerea carbonaților sub formă de neoformațiuni nestabile în profilul solului la nivele mai coborîte.

În partea sudică, în condiții de umiditatea mai scăzută, între 400—500 mm precipitații atmosferice și cu o primăvară mult mai timpurie și mai caldă, are loc o încălzire mai intensă a solului, ascensiunea umidității producîndu-se în cea mai mare parte spre suprafață. Pe măsura dezvoltării vegetației, soluția solului este obsorbită de rădăcinile plantelor la o anumită adîncime de la suprafață și condiționează formarea neoformațiunilor de carbonat de calciu de forme nestabile la nivele mai apropiate de suprafață (25. . .50 cm).

În fine, în zona cu cantități de precipitații aproape de limita inferioară (400 mm), profilul solului se umectează și mai puțin și carbonații se pot menține la suprafața solului.

Această fluctuație a carbonaților în profilul cernoziomurilor are influență și asupra formelor de neoformațiuni de carbonat de calciu concreționare, care diferă din punctul de vedere al consistenței de la o zonă la alta, fiind specifică pentru subtipurile de cernoziomuri.

În literatura de specialitate a fost menționată de multă vreme această mare capacitate de migrare a carbonaților în profilul cernoziomurilor, în special în partea superioară, sub formă de eflorescențe, pseudomicelii și vinișoare [1]).

Aceste forme de neoformațiuni de carbonat de calciu nestabile reprezintă expresia exterioară a principalelor particularități ale regimului hidrotermic și biologic al cernoziomurilor.

3. De aceea în clasificarea propusă, în afară de întregul complex de particularități cunoscute ale cernoziomurilor (cantitatea de humus, structura, reacția, culoarea, orizonturile și suborizonturile, grosimea) ca sistem conducător în împărțirea cernoziomurilor în subtipuri genetice au fost alese formele de neoformațiuni nestabile și concreționare de carbonat de calciu din profilul solurilor.

Formele de neoformațiuni nestabile de carbonat de calciu se referă la orizontul *A* și suborizonturile de tranziție *AC*, iar concrețiunile la orizontul *C*.

În interfluviul Prut-Siret se disting 5 subtipuri genetice de cernoziomuri : obișnuit nordic, obișnuit sudic, ciocolatiu, castaniu și carbonatic (castaniu deschis) (fig. 1 și tabelul 1).

1. *Cernoziomul obișnuit nordic* se găsește în partea nordică a Moldovei — bazinele hidrografice ale Jijiei și Bahluiului.

Are profilul format din orizonturile *A*, *AC* și *C*. Orizontul *A* este cenușiu închis (negricios).

Carbonații se găsesc în partea inferioară a orizontului *A* (55...70) sub formă de eflorescențe fine și aglomerări de pseudomicelii a căror densitate crește în *AC*, iar în orizontul *C* se mai adaugă vinișoare

1) Propunerea de a lua în considerare forma carbonaților în clasificarea cernoziomurilor a fost făcută de către A. I. Nabokich la începutul secolului al XX-lea, și a fost ulterior lărgită și aplicată în cadrul ridicărilor pedologice de către N. Florov și L. Guștiuc în perioada 1933—1942.

de carbonat de calciu și concrețiuni de carbonat de calciu cimentate complet (belograzca cimentată).

Structura grăunțoasă măzărată stabilă. Cantitatea de humus 4...5%, descrește treptat spre profunzime.

2. *Cernoziomul obișnuit sudic* se găsește în podișul Vasluiului și Bîrladului și dealurile Fălciului pînă la limita nordică a cernoziomului ciocolatiu.

Profilul solului este format din orizonturile *A*, *AC* și *C* cu orizontul *A* ceva mai scurt (0...60...70) de culoare cenușie închisă (negricioasă).

Carbonații se găsesc în partea inferioară a orizontului *A* (50...60) sub forma de eflorescențe fine și pseudomicelii, a căror densitate crește în *AC*, iar în orizontul *C* se adaugă vinișoare și concrețiuni de carbonat de calciu făinoase în partea exterioară și slab consolidate în interior.

Structura grăunțoasă măzărată stabilă. Cantitatea de humus între 4...5%, descrește treptat spre profunzime imprimînd o trecere treptată între *A* și *AC*.

3. *Cernoziomul ciocolatiu* se extinde la sud de zona cernoziomurilor levigate sub formă de fîșie întreruptă pe alocuri de cernoziomuri levigate, cu limita nordică Oancea—Bujoru spre valea Gerului de unde coboară în jos pînă la Hanu Conachi. De asemenea se găsește pe terasele rîului Bîrlad și Prut pînă la linia Fălciu—Bîrlad. Spre sud este limitat printr-o linie tot sinuoasă ce trece la nord de Tulucești—Pechea pînă la confluența văii Gerului cu Siretul.

Solul are profilul format din orizonturile *A*, *AC* și *C* cu treceri treptate între ele. Orizontul *A* 0...50(60) cm are culoarea ciocolatie.

Carbonații se găsesc în partea inferioară a orizontului *A* (40...60 cm) sub formă de eflorescențe fine și pseudomicelii a căror intensitate crește în suborizontul *AC* apărînd și vinișoarele. Orizontul *C* are carbonații sub formele din orizonturile superioare și concrețiuni de carbonat de calciu de consistență făinoasă (beloglazcă moale).

Structura se menține grăunțoasă măzărată stabilă. Cantitatea de humus 3...4,5%, descrește cu adîncimea.

4. *Cernoziomul castaniu* ocupă o suprafață mică la sud de limita cernoziomului ciocolatiu, limitîndu-se spre sud printr-o linie sinuoasă, legată de formele de relief, care merge la nord de Galați—Lascăr Catargi—Independența. De asemenea, mai este răspîndit pe versanții văii Prutului și a afluenților acestuia aproape pînă la Fălciu.

Profilul este mai scurt format tot din orizonturile *A*, *AC* și *C*. Orizontul *A* 0...45(50) cm are culoarea castanie.

Carbonații se găsesc aproape de suprafață (25...30 cm) sub formă de eflorescențe și pseudomicelii, care se intensifică în suborizontul *AC* unde apar și sub formă de vinișoare. Orizontul *C* are carbonații sub formă de pseudomicelii, multe vinișoare și concrețiuni făinoase (beloglazca moale).

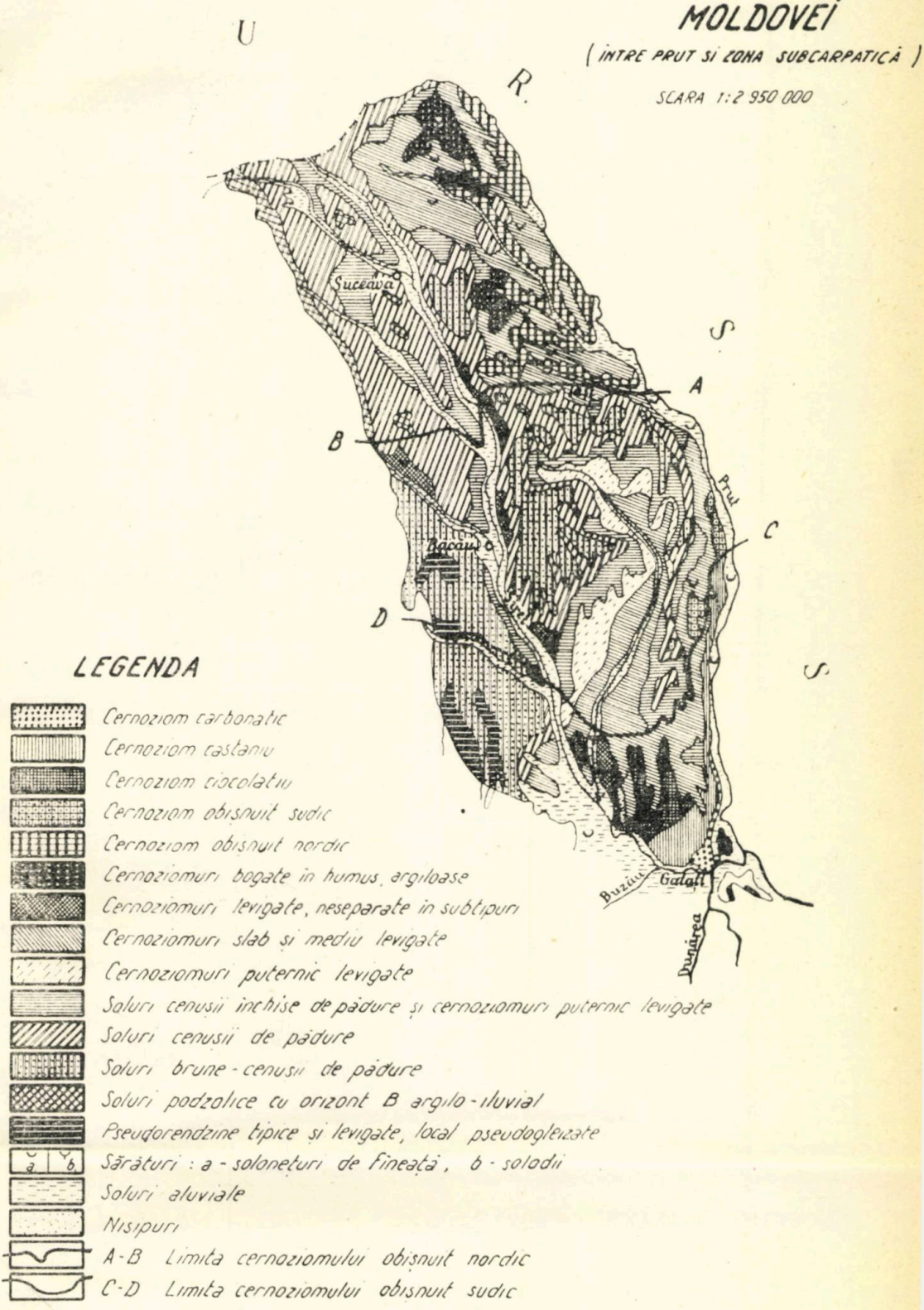

HARTA SOLURILOR MOLDOVEI
(ÎNTRE PRUT ȘI ZONA SUBCARPATICĂ)
SCARA 1:2 950 000
U
R.
S
A
B
C
D
S.
Suceava
Bacău
Prut
Buzău
Galați
Dunărea
LEGENDA
Cernoziom carbonatic
Cernoziom castaniu
Cernoziom ciocolatiu
Cernoziom obișnuit sudic
Cernoziom obișnuit nordic
Cernoziomuri bogate în humus, argiloase
Cernoziomuri levigate, neseparate în subtipuri
Cernoziomuri slab și mediu levigate
Cernoziomuri puternic levigate
Soluri cenușii închise de pădure și cernoziomuri puternic levigate
Soluri cenușii de pădure
Soluri brune-cenușii de pădure
Soluri podzolice cu orizont B argilo-iluvial
Pseudorendzine tipice și levigate, local pseudogleizate
a b
Sărături: a - soloneturi de fineață, b - solodii
Soluri aluviale
Nisipuri
A-B Limita cernoziomului obișnuit nordic
C-D Limita cernoziomului obișnuit sudic

Fig. 1

Tabelul

Clasificarea cernoziomurilor din Moldova

	Silvostepă şi stepă propriu zisă cu umiditate accentuată		Stepă propriu zisă	Stepă semiaridă	
Forma de acumulare şi distribuţia carbonaţilor în orizonturile					
A					eflorescenţe şi pseudomicelii şi vinişoare la suprafaţă
AC	aglomerări de pseudomicelii şi eflorescenţe	eflorescenţe şi pseudomicelii	eflorescenţe şi pseudomicelii	eflorescenţe şi pseudomicelii şi vinişoare frecvent la 30 cm	
C	beloglazcă cimentată	beloglazcă făinoasă în exterior şi slab consolidată în interior	beloglazcă făinoasă	beloglazcă făinoasă	beloglazcă făinoasă
Culoarea A	cenuşie închisă (negricioasă)	cenuşie închisă (negricioasă)	ciocolatie	castanie	castanie deschisă
Structura	grăunţoasă, măzărată, stabilă	grăunţoasă, măzărată, stabilă	grăunţoasă, măzărată, stabilă	grăunţoasă, destul de stabilă, cu aşezare afinată şi puţin praf	micro grăunţoasă slab precizată şi puţin stabilă, cu mult praf
Orizontul A	0...60 (70) cm	0...60 (70) cm	0...50 (60) cm	0...45 (60) cm	0...35 (45) cm
Efervescenţa la	55... 70 cm	50...60 cm	40... 60 cm	25...30 cm	suprafaţă
Orizontul A + AC	100...110 cm	90...100 cm	70... 90 cm	70...80 cm	60...75 cm
Humus, %	4...5	4...5	3...4,5	3...4	2,5...3,5
pH (A)	7...6,8	7...6,8	7...7,4	7,4...7,7	8,2...8,4
Denumirea	cernoziom obişnuit nordic	cernoziom obişnuit sudic	cernoziom ciocolatiu	cernoziom castaniu	cernoziom carbonatic (castaniu deschis)

Structura este grăunțoasă mai puțin stabilă, cu așezare afînată și cu puțin praf. Cantitatea de humus variază între 3...4%.

5. *Cernoziomul carbonatic* se găsește în partea sudică, limitat la nord prin cernoziomul castaniu iar la sud pînă la linia Siretului, Dunării și Prutului. De asemenea ocupă suprafețele cele mai joase de pe versanții Prutului și pe formațiunile mai tinere.

Profilul solului la suprafață are culoarea castanie deschisă în orizontul A 0...35(40) cm cu aceeași succesiune a orizonturilor *A*, *AC*, *C* fiind și mai scurt.

Carbonații se află obișnuit la suprafață sau aproape de suprafață (țelină 10...12 cm), sub formă de eflorescențe și pseudomicelii a căror intensitate crește spre partea inferioară a orizontului *A* și a suborizontului *AC* unde apar și sub formă de vinișoare. Orizontul *C* în afară de formele de carbonați amintite conține și concrețiuni făinoase (beloglazca moale).

Structura solului este micrograunțoasă slab precizată și puțin stabilă. Cantitatea de humus variază între 2,5...3,5%.

La aceste subtipuri de cernoziomuri se adaugă și *cernoziomurile bogate în humus* formate pe marne sau argile, sub formă de benzi întrerupte răspîndite în bazinul hidrografic al Jijiei și în special în partea nordică. Din punct de vedere morfologic se deosebesc de cernoziomul obișnuit nordic printr-o grosime mai mare a orizontului *A*, scurtarea orizontului AC și o cantitate mai mare de humus, 4,5...8%.

Încadrarea subtipurilor de cernoziom în clasificarea prezentată este mai evidentă în cazul cînd aceste soluri se formează pe loessuri sau luturi-loessoide. În cazul cînd cernoziomurile se formează pe roci cu o textură mai grea (marne, argile) atunci apar modificări în forma și consistența neoformațiunilor de carbonat de calciu și în special a celor concreționare.

4. Un criteriu de clasificare a cernoziomurilor în subtipuri ar fi cantitatea de humus în orizontul *A*, care completat ar scoate în evidență și mai mult diferențierile morfogenetice. Cantitatea de humus la cernoziomuri depinde în prezent de modul de folosință și agrotehnica aplicată, deoarece întreaga suprafață ocupată de acest tip de sol este luată în cultură.

În afară de aceasta, zonele ce au fost deosebite nu cuprind un areal mare, încît diferențele în cantitate de humus nu pot să apară atît de tranșante cum apar în stepele din U.R.S.S.

Cantitatea redusă de humus la cernoziomul obișnuit, precum și la cele din stepa sudică, față de cele din U.R.S.S., se explică printr-o descompunere mai activă a substanțelor organice în stepele noastre datorită condițiilor climatice mai favorabile și deci printr-o mineralizare mai activă a substanței organice. Aceasta s-ar datora probabil influenței lanțului munților Carpați, care atenuează într-o măsură asprimea climatului temperat continental.

În fiecare din subtipurile de cernoziomuri amintite se pot întîlni genuri și specii, legate de felul rocei mame, de forma de relief pe care a evoluat (de pantă) și de schimbările survenite în morfologie datorită fenomenului de eroziune.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de geologie și geotehnică

BIBLIOGRAFIE

1. Cernescu N., Fridland V. M., Florea M., *Solurile. Monografia geografică a R.P.R.* Ed. Acad. R.P.R., Buc., 1960.
2. Cernescu N., Popovăț M., Florea N., Conea A., *Harta solurilor R.P.R., scara 1/1 000 000.* Inst. Geologic, Buc., 1964.
3. Enculescu M. M. P., Protopopescu Pache M., Saidel T., Murgoci Gh., *Harta solurilor României, scara 1/2 500 000.* L'Agriculture en Roumanie. Album statistique. Ministère de l'Agriculture et des Domaines, Buc., 1929.
4. — *Harta solurilor României, scara 1/2 250 000.* L'Agriculture en Roumanie. Album statistique. Ministère de l'Agriculture et des Domaines, Buc., 1938.
5. Иванова Е. Н., Розов Н. Н., *Опыт систематики почв степной зоны СССР.* Почвоведение, 1958, *12.*
6. Murgoci Gh., *Zonele naturale de soluri în România.* Inst. Geologic al României, 1920, **IV**, *1.*

КЛАССИФИКАЦИЯ ЧЕРНОЗЕМОВ МОЛДОВЫ

(Резюме)

На основании существующих до сих пор карт почв в малом масштабе, анализируется распределение черноземов на территории Молдовы и указывается, что такое представление является весьма суммарным.

Благодаря такому представлению, в картографических работах на крупномасштабных картах, появляются несуразности в классификации черноземов Молдовы.

Представляются климатические условия различных зон восточной части страны в связи с динамикой растворимых веществ в профилях различных черноземов и предлагается в качестве ведущего фактора в классификации этих почв форма и глубина залегания карбонатов.

Принимая во внимание формы новообразований, миграционные и конкреционарные карбонаты кальция, различаются на территории Молдовы следующие подтипы черноземов: обыкновенный северный чернозем, обыкновенный южный чернозем, шоколадный чернозем, каштановый чернозем и карбонатный чернозем. Упоминается также присутствие тучного чернозема, связанного с образованиями на глинах и тергелях.

Автор дает некоторые объяснения в связи с существующими морфологическими различиями между черноземами Молдовы и остальными черноземами восточных степей европейской территории.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 622

CERCETĂRI DE LABORATOR ŞI APLICAREA STUDIULUI DE TRATARE A APEI SUBTERANE FERUGINOASE

DE

V. ZBEGAN, MIRCEA TELEGUŢ, V. MĂEREAN, CORNEL JURA, M. GIURCONIU, GH. CREŢU şi I. MIREL

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului Politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Probleme generale

Tratarea apelor subterane feruginoase este o problemă de mare importanţă tehnico-economică şi socială pentru colectivităţi reduse (S.M.T., cooperative agricole de producţie, grupuri sociale, comune, sate etc.) care dispun numai de astfel de ape pentru lucrările centrale de alimentare cu apă.

În cîmpia Banatului şi în special în lunca aluvionară a Timişului, Begheiului şi Mureşului apa obţinută atît din pînzele freatice cît şi din straturile acvifere de adîncime conţine fier şi mangan în cantităţi mari. Studiile efectuate în această direcţie au arătat că în aproape jumătate din oraşele şi comunele regiunii Banat se captează apă cu un conţinut în fier care depăşeşte întotdeauna valorile admise de normele tehnice, acestea permiţînd în mod curent 3...4 mg/l Fe, cu valori maxime de 8...17 mg/l Fe [1].

Cele mai mari cantităţi de fier se găsesc în apele exploatate din arialele situate în vecinătatea oraşului Timişoara, în special în direcţiile sud-vest şi nord-vest.

În apele subterane fierul se poate găsi sub formă de bicarbonaţi solubili sau sub formă de săruri ale acizilor sulfuric şi humic. Apele cu mult fier se tulbură la aer, au gust metalic, colorează în galben obiectele, rufele şi hîrtia şi pot produce depozite de hidroxid feric insolubil, care ia naştere prin oxidarea bicarbonatului solubil [2]...[4],

$$2\ Fe(HCO_3)_2 + O + H_2O = 2\ Fe(OH)_3 + 4\ CO_2.$$

În scopul deferuginării apei subterane captate la S.M.T. Freidorf, la cererea conducerii acestei unităţi au fost efectuate studii în laboratorul semiindustrial al Institutului politehnic din Timişoara, obţinîndu-se rezultate bune în linia tehnologică alcătuită dintr-o aerare eficientă şi filtrare rapidă. Pe baza rezultatelor obţinute la aceste cercetări s-a întocmit proiectul şi s-au executat instalaţiile de deferizare la această unitate.

Scopul lucrării de faţă este de a prezenta condiţiile tehnice de aplicare în practică a rezultatelor obţinute în laborator şi de a arăta modul şi precizia cu care acestea s-au confirmat cu ocazia aplicării lor la scară industrială.

2. Condiţiile tehnice de amenajare a staţiei de tratare

Apa de la fîntîna de alimentare a complexului S.M.T. Freidorf (fig. 1) conţine 4,5...6,5 mg/l Fe, valori ce depăşesc cu mult limitele admise de STAS 1 342—61. Încercările efectuate în instalaţiile de aerare şi filtrare ale laboratorului semiindustrial al Institutului politehnic din Timişoara, cu apă adusă cu cisterne de la sursă, au indicat o reducere substanţială a fierului de la 6 mg/l la 0,2 mg/l. Un rol deosebit l-a avut procesul de aerare, în urma căruia s-a redus aproape integral mirosul de hidrogen sulfurat existent, iar sărurile solubile ale fierului s-au transformat în săruri insolubile care au fost reţinute apoi prin filtrare.

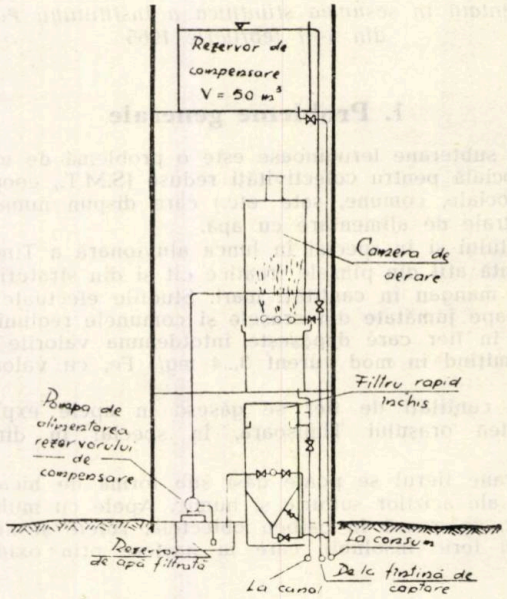


Fig. 2

În baza rezultatelor obţinute s-a trecut la proiectarea şi executarea construcţiilor şi instalaţiilor de deferizare la această unitate (fig. 2). Folosind castelul de apă existent (fig. 3) cu radierul rezervorului de compensare la înălţimea de 12,00 m de la sol, s-a modificat circuitul apei brute, s-a construit o cameră de aerare, un filtru rapid închis şi un rezervor de apă filtrată şi s-a prevăzut o pompă de ali-

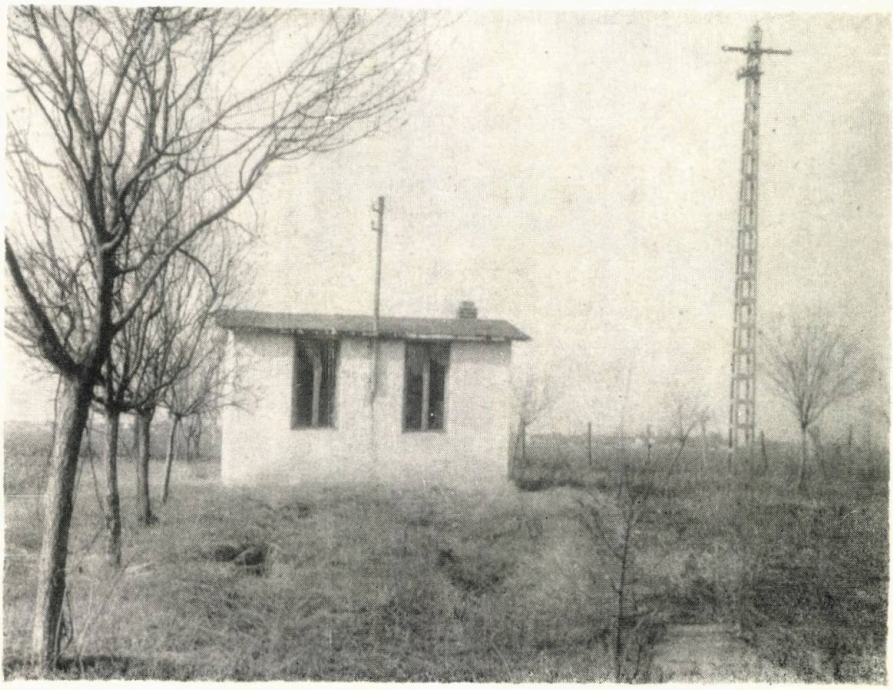


Fig. 1. — Construcția de captare.

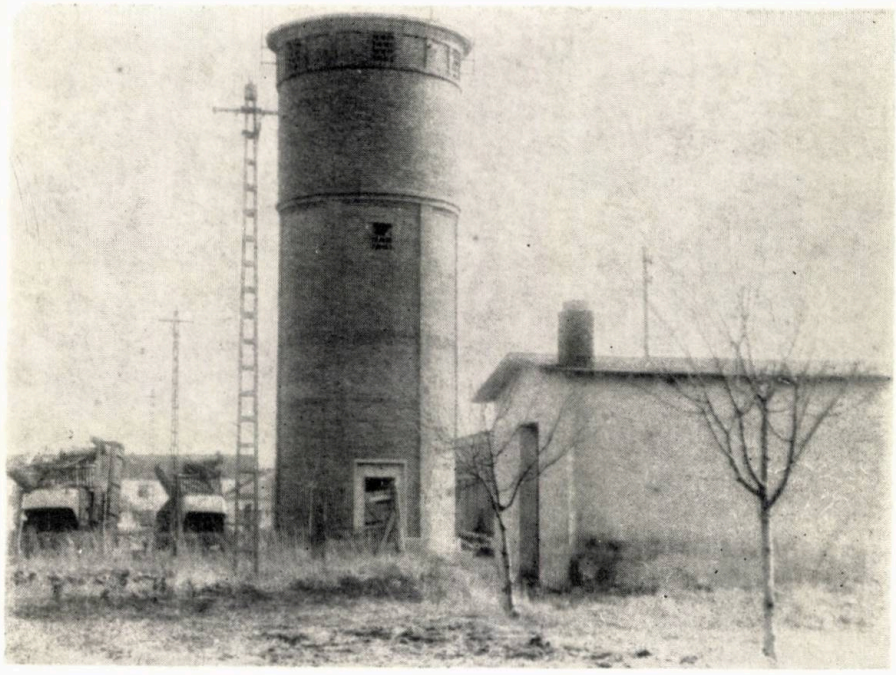


Fig. 3. — Castelul de apă şi construcţia de captare.

Fig. 4. — Canalul de ventilaţie al camerei de aerare.

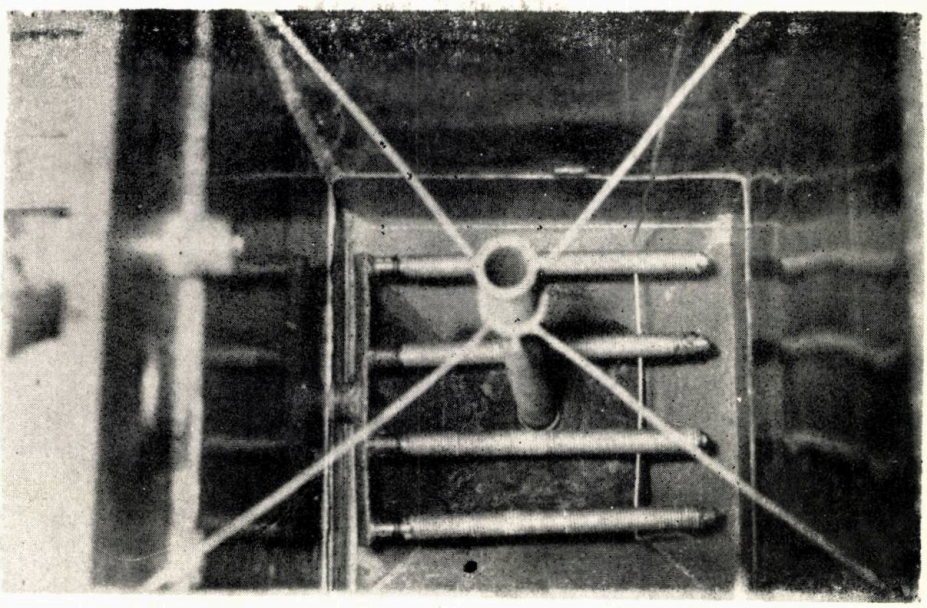


Fig. 5. — Drenajul filtrului.

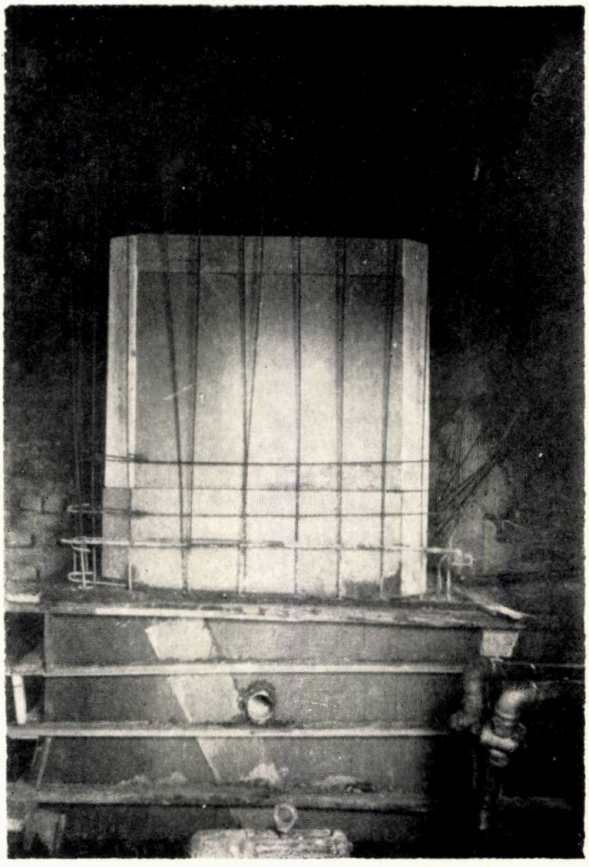


Fig. 6. — Filtrul în execuție.

mentare a rezervorului de compensare. Instalațiile au fost executate pentru un debit de 2,00 l/s.

Din conducta existentă prin care era trimisă apa brută direct de la sursă la rezervorul de compensare s-a făcut un racord la camera de aerare și după acest punct de racord, conducta s-a folosit în continuare pentru apa filtrată. Din acest punct s-au început modificările necesare pentru amplificarea rețelei, condiționate de aplicarea liniei tehnologice de tratare studiată.

Camera de aerare are secțiunea de 1,20×1,20 m și înălțimea de 2,50 m, fiind prevăzută cu 3 dispozitive de pulverizare. Secțiunea transversală a camerei corespunde unui debit specific de 1,4 l/s m^2.

Pentru asigurarea unei bune ventilații s-au prevăzut la baza camerei 6 orificii dreptunghiulare de 20 × 4 cm, iar la partea superioară o conductă de 20×30 cm (fig. 4) care trece în exterior prin peretele castelului de apă. Orificiile dreptunghiulare au prevăzute ștuțuri înclinate în formă de buzunare pentru împiedicarea scurgerii apei în exterior. Pereții camerei de aerare s-au executat din carton presat prins pe cadre de rigle de lemn de esență tare, dovedindu-și în măsură suficientă impermeabilitatea necesară.

Filtrul rapid închis are secțiune patrată de 1,20×1,20 m și înălțimea de 2,10 m, partea inferioară avînd forma unui trunchi de piramidă. S-a introdus în filtru pe o înălțime de 1,20 m nisip de cuarț cu granulația de 6,0...3,0 mm din cariera Făget (reg. Banat). Viteza de filtrare este de 5,00 m/h. Spălarea filtrului se face cu apă filtrată din rezervorul de compensare, operîndu-se în două faze. În faza I se trimite apa de spălare în contracurent prin drenajul filtrului (fig. 5), iar în faza a II-a se continuă cu trimiterea apei de spălare tot în contracurent prin ejectorul special al filtrului prevăzut la partea de jos. Pereții filtrului sînt construiți din beton armat (fig. 6).

Rezervorul de apă filtrată are o capacitate de 1,00 m^3 și înmagazinează apa ce trece prin filtru. Pereții rezervorului s-au construit din beton armat.

Pompa de alimentare a rezervorului de compensare aspiră apa din rezervorul de apă filtrată și o refulează în rezervorul de compensare. S-a prevăzut o pompă centrifugă tip Criș 50 cu debitul de 11 m^3/h și sarcina de 20 m. Rezervorul de compensare are înălțimea de 4,45 m.

Trebuie remarcat că linia procesului tehnologic este simplificată față de procedeul clasic, întrucît nu dispune nici de prefiltrul de cocs sau de alte materiale de contact și nici de bazin de decantare pentru limpezirea după acest prefiltru, înaintea filtrării finale.

3. Comportarea stației de tratare în exploatare

Stația de deferuginare de la S.M.T. Freidorf a fost dată în exploatare în luna noiembrie 1964 și de la această dată a fost urmărită tot timpul constatîndu-se că apa tratată corespunde calităților cerute de normele în vigoare.

Dispozitivele de pulverizare ce funcţionează în condiţii bune în camera de aerare transformă apa în picături fine. Lucrează de asemenea în condiţii foarte bune şi ventilaţia la această cameră.

Filtrul rapid închis de secţiune patrată se spală o dată la 2...3 zile în momentul în care apa pe care o conţine ajunge să curgă prin preaplin. Faza I de spălare durează 10 min iar faza a II-a în general 30 min.

În cadrul studiilor efectuate s-au analizat în laboratorul Institutului de igienă din Timişoara probe de apă brută, de apă aerată şi de apă filtrată. Rezultatele medii ale acestor analize sînt date în tabelul 1.

Comparativ se prezintă în tabelul 2 valorile medii ale probelor de apă brută, aerată şi filtrată recoltate în lunile XI, XII şi I (6 probe) la instalaţiile executate la S.M.T. Freidorf.

Din compararea rezultatelor analizelor din cele două tabele se constată că în instalaţiile proiectate şi executate, procesul de reducere a fierului are loc în mod identic ca în instalaţiile de cercetare din laboratorul hidrotehnic semiindustrial. Dacă apa brută a conţinut 6 mg/l (respectiv 5,5 mg/l), după trecerea sa prin camera de aerare conţinutul de fier s-a mărit la 6,3 mg/l (respectiv 6 mg/l), adică cu 5% (respectiv 9%). Apa aerată în laborator şi-a mărit în continuare pînă la intrarea în filtru, conţinutul în fier, acesta ajungînd de la 5,3 mg/l la 6,5 mg/l. După trecerea prin filtru cantitatea de fier din apă s-a redus la 0,20 mg/l (respectiv 0,15 mg/l), adică sub limitele excepţionale admise de STAS 1 342—61.

Filtrul rapid de la S.M.T. Freidorf funcţionează cu intermitenţă, în funcţie de necesităţile de apă şi de orele de serviciu ale personalului de exploatare, şi din această cauză apa filtrată la punerea sa în funcţiune conţine o cantitate de fier de 1,3 mg/l datorită proceselor de descompunere care au loc în masa de nisip în perioada de stagnare. Se recomandă montarea unei conducte de legătură de la drenajul filtrului la conducta de golire a acestuia prin care să se elimine prima apă filtrată care conţine fier în cantităţi mai mari decît cele prevăzute în norme.

Probele de apă luate de la S.M.T. Freidorf au fost analizate la 1 oră şi 24 ore de la recoltare pentru a se urmări mai bine eficienţa aerării şi efectul stagnării apei filtrate în rezervorul de compensare datorită funcţionării discontinue a instalaţiilor. După 24 ore de stagnare fierul din apa brută s-a redus cu 45%, din apa aerată cu 79%, din apa filtrată la pornirea filtrului cu 54%, iar în apa filtrată a rămas în aceeaşi proporţie. Rezultă că aerarea contribuie intens la procesul de formare a sărurilor insolubile de fier care sînt reţinute apoi în întregime în masa de nisip a filtrului. Acesta funcţionează în condiţii bune, dînd o apă care nu mai formează depozite de fier în rezervorul de compensare.

Din punct de vedere bacteriologic apa filtrată la S.M.T. Freidorf corespunde normelor în vigoare.

30 – Bul. Inst. Polit. Iaşi, XII (XVI), 3–4, 1966

Tabelul 1

Rezultatele medii pentru probele de apă recoltate în laboratorul semiindustrial

Proba de apă	pH	NH_3	NO_3	NO_2	Substanţe organice	Cl	Fe	Mn	După 24 ore		Coli	Germeni
									Fe	Mn		
		mg/l	mg/l	mg/l	$KMnO_4$/l	mg/l	mg/l	mg/l	mg/l	mg/l	la 1	la ml
Brută	6,5	3	—	0,002	33,9	15,4	6	0,7	0,8	0,7	130	50
După aerare	6,5	4	—	0,002	10,9	15,4	6,3	0,9	0,7	0,9	—	—
La intrarea în filtru	6,5	4	—	0,004	15,8	12,9	6,5	1,0	0,9	1,0	—	—
După filtrare	6,5	—	—	—	11,10	12,9	0,2	0,4	0,01	0,4	60	20

Tabelul 2

Rezultatele medii pentru probele de apă recoltate la instalaţiile executate la S.M.T. Freidorf

Proba de apă	pH	NH_3	NO_3	NO_2	Substanţe organice	Cl	Fe	Fe după 24 ore	Duritate	Coli	Germeni
		mg/l	mg/l	mg/l	$KMnO_4$/l	mg/l	mg/l	mg/l	grade	la 1	la ml
Brută	6,7	0,2	2,5	0	5,9	14,4	5,5	3	10,78	sub 45	2
Aerată	6,7	0,08	0,3	0	5,2	13,7	6	1,3	11,84	sub 45	5
La pornirea filtrului	6,7	0,04	0	0,002	5,9	13,7	1,3	0,6	11,79	sub 45	—
Filtrată	6,7	0	0	0,002	5,1	13,7	0,15	0,15	9,94	sub 45	2

4. Concluzii

1. S-a întreprins studiul deferuginării apei de la S.M.T. Freidorf în Laboratorul hidrotehnic al Institutului politehnic din Timişoara; cercetarea s-a efectuat cu apa adusă în cisternă de la sursă, supusă tratării în laboratorul semiindustrial.

2. În baza rezultatelor obţinute s-a proiectat şi realizat în trim. IV al anului 1964, la S.M.T. Freidorf, o instalaţie corespunzătoare, supusă timp de trei luni (IX—I) unui permanent control, cu verificarea continuă a factorilor de potabilitate (chimică şi bacteriologică) şi ai fierului. Apa astfel tratată corespunde întrutotul normelor sanitare în vigoare, prezentînd şi o îmbunătăţire a calităţilor organoleptice.

3. Rezultatele obţinute la scară industrială confirmă încă o dată eficienţa studiilor de laborator la scară semiindustrială.

4. Instalaţiile proiectate pentru deferuginarea apei de la S.M.T. Freidorf se pot extinde sub forma de proiecte tip la toate unităţile similare din regiunea Banat sau eventual din alte regiuni.

5. Se remarcă importanţa colaborării la aceste studii a unui număr cît mai mare de specialişti, toate operaţiile de studii, proiectare, execuţie şi exploatare fiind asigurate de colectivul temei.

Institutul politehnic, Timişoara

BIBLIOGRAFIE

1. Jura C., Giurconiu M., Mirel I., Teleguţ M., Măerean V., *Tratarea apei subterane feruginoase în condiţiile uzinelor pentru colectivităţi restrînse în regiunea Banat* (sub tipar).
2. Abramov N. N., Gheniev N. N., Pavlov D. I., *Alimentări cu apă*. Buc., 1953 (trad. din l. rusă).
3. Trofin P., *Alimentări cu apă*. Vol. **II**, Buc., 1961.
4. Pîslăraşu I., Rotaru L., Teodorescu M., *Alimentări cu apă*. Ed. Tehn., Buc., 1964.

ЛАБОРАТОРНЫЕ ИСПЫТАНИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ ИСЛЕДОВАНИЯ ПО ОБРАБОТКЕ ПОДЗЕМНОЙ ЖЕЛЕЗИСТОЙ ВОДЫ

(Резюме)

В условиях полупромышленной лаборатории исследуется процесс обработки подземной железистой воды, состоящий из аэрации и фильтрирования.

На основе полученных результатов определяется технологический процесс, в виду обезжелезивания воды, применение которого является наиболее подходящее в случае небольших колективностей снабжаемых от источников подземной воды.

Обьяснение рисунков

Рис. 1. — Водозабор.
Рис. 2. — Схема выполненой установки.
Рис. 3. — Водонапорная башня и водозабор.
Рис. 4. — Вентиляционный канал аэрационной камеры.
Рис. 5. — Дренаж фильтра.
Рис. 6. — Фильтр.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 631.6

LUCRĂRI DE IRIGAŢII ÎN ZONE CU CANTITĂŢI MARI DE PRECIPITAŢII, EXECUTATE CU POSIBILITĂŢI LOCALE

DE

VALERIU BLIDARU, C. CISMARU şi ALEXANDRINA LEO MIZA

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

În ţara noastră se găsesc întinse suprafeţe agricole în care precipitaţiile anuale cu valori peste 550. . .600 mm sînt acoperitoare faţă de evapo-transpiraţia anuală (în special în zonele de dealuri, podişuri, depresiuni, fig. 1).

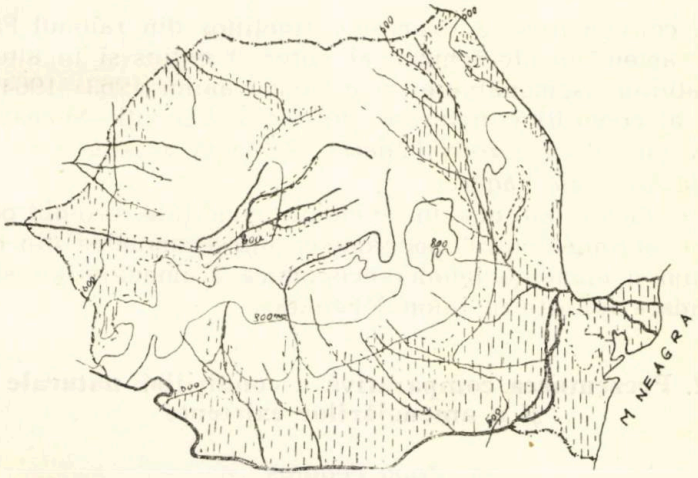


Fig. 1. — Zonele irigabile şi precipitaţiile medii anuale în Republica Socialistă România.

În aceste zone culturile agricole se dezvoltă satisfăcător în general, exceptînd situaţiile anilor cu precipitaţii mai reduse sau repartizate defectuos, ori cînd condiţiile locale determină secete pedologice.

Problema amenajării sistemelor de irigaţii în aceste zone cu precipitaţii satisfăcătoare a constituit în timp obiectul unor largi discuţii între specialişti, dintre care unii opinau pentru limitarea irigaţiilor la zonele cu precipitaţii medii anuale sub 500...550 mm şi mai rar 600 mm. Această limitare era bazată pe ideea necesităţii construirii şi în zonele cu cantităţi mari de precipitaţii a unor sisteme de irigaţii de tip ingineresc, asemănătoare celor din prima zonă (secetoasă), ceea ce ar fi condus la cote de amortizare ridicate, fiind folosite numai în anii deficitari pluviometric (variaţia normelor de irigaţii ar fi destul de pronunţată de la 0 la 4 000...5 000 m^3/ha).

Totuşi şi în aceste zone irigaţiile devin necesare faţă de sarcinile agro-economice impuse acestor terenuri prin planurile locale şi de stat, care cer producţii ridicate şi stabile, ce nu s-ar putea obţine în toţi anii fără irigaţii.

În condiţiile economico-organizatorice ale gospodăriilor agricole existente în aceste zone cu precipitaţii bogate — cu un pronunţat accent zootehnic şi pomicol — problema fundamentală ce condiţionează introducerea irigaţiilor este legată de efectuarea unor amenajări simple, cu posibilităţi locale, cu cote de amortizare reduse, cu tehnicitate minimă în exploatare, cu folosirea surselor de apă locale (pîrîuri, izvoare, apă scursă de pe versanţi) fără amenajări speciale, cu scurgere gravitaţională a apei etc.

Irigaţiile ce trebuie practicate în aceste zone nu cer aplicarea unui regim de irigaţie riguros; în mulţi ani aplicarea unei singure udări poate duce la sporuri de recoltă apreciabile. Ca metode de udare se pot folosi udarea prin rigole în spic, prin revărsare, nonoanuală prin mici bazine de acumulare.

Amenajările simple executate în prima etapă pot constitui un element stimulator în extinderea sistemelor inginereşti şi în aceste zone.

Faptul că irigaţiile sînt necesare şi în zone cu precipitaţii mari a fost demonstrat în ţara noastră de însăşi populaţia care a înţeles să întreprindă irigaţii cu posibilităţi locale, ca de exemplu în raionul Făgăraş. Studiul atent al acestor lucrări a fost iniţiat de prof. I. M. Gheorghiu de la Institutul agronomic din Bucureşti.

Avînd convingerea că exemplul irigaţiilor din raionul Făgăraş cu o serie de amendamente tehnice ar putea fi extins şi în alte zone cu condiţii naturale asemănătoare, în perioada anilor 1963—1964 s-a făcut un studiu al condiţiilor naturale din zona Rădăuţi—Suceava privite comparativ cu cele din zona Făgăraş. Pe lîngă acestea s-au studiat şi amenajările din zona Făgăraş.

Studiile făcute au pus în evidenţă condiţiile oro-hidrografice şi hidrologice, hidrogeologice, pedologice, agro-economice din cele două zone precum şi eficienţa tehnico-economică a amenajărilor şi a metodelor de udare folosite în raionul Făgăraş.

2. Prezentarea comparativă a condiţiilor naturale şi a amenajărilor existente

a) *Zona Făgăraş*

Suprafaţa irigată în raionul Făgăraş este de cca. 6 450 ha fîneţe şi livezi, fiind situată în zona dealurilor premontane cuprinsă între Berivoi, Arpaşul de sus (fig. 2). Înclinarea medie a dealurilor este de 2...5%.

Rețeaua hidrografică are o densitate mare, din munți scurgîndu-se o serie de pîraie cu cursuri aproape paralele : Arpașul Mare, Arpașul Mic, Ucea Mare, Vistea Mare, Vișțișoara, Sîmbăta, Breaza, Brescioara, Lisa, Dejani, Berivoi etc. Aceste pîraie sînt alimentate fie din apele freatice ieșite la zi sub formă de izvoare concentrate, fie din lacurile glaciale din zone muntoase.

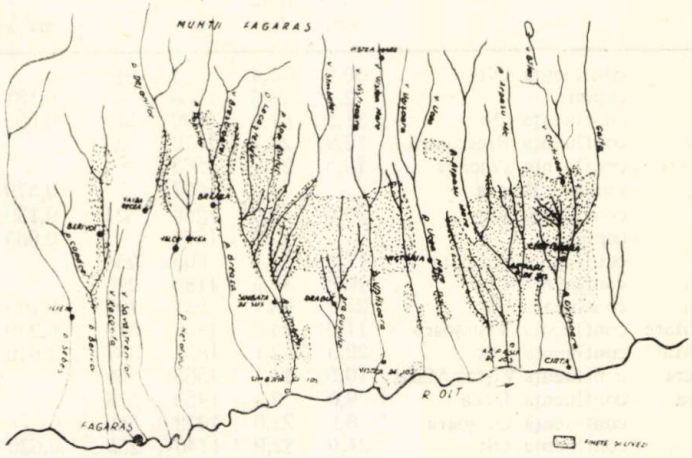


Fig. 2. — Situația hidrografică și repartiția fînețelor și livezilor în zona Făgăraș (scara 1/500 000).

Debitele medii lunare variază între 0,2...8 m^3/s, cu valori minime în lunile ianuarie-februarie și maxime, în mai-iunie ; debitul solid mediu reprezintă cca. 4% din debitul mediu lichid. Apa este de bună calitate, avînd pH-ul de cca. 7,4, iar temperatura medie în timpul verii de 15...18°C.

În tabelul 1 sînt date cîteva caracteristici morfometrice și hidrologice ale pîraielor utilizate pentru irigații (după D.G.A. Brașov — 1963).

Precipitațiile ce cad în zonă sînt relativ abundente, media anuală depășind 700 mm (la Făgăraș media anuală este de 691 mm pe cînd la Breaza, care-i situată la poalele munților, este de 771,8 mm.).

Evapo-transpirația potențială medie anuală la Făgăraș este de 606 mm, fiind inferioară valorii precipitațiilor anuale. Studiind corelația dintre precipitații și evapo-transpirație (valori medii) pe luni se constată un excedent de apă în lunile de iarnă și primăvară în valoare de 85 mm, precum și deficite de umiditate reduse în lunile iunie-septembrie (deficitul maxim se constată în luna septembrie și este de 20 mm).

Tabelul 1

Datele morfometrice şi hidrologice ale pîraielor cele mai utilizate pentru irigaţii în zona Făgăraş

Nr. crt.	Pîrîul	Punctul	Distanţa de la izvor km	Suprafaţa bazinului km²	H_{med} bazin m	I_{med} %	Debit min cu $p=80\%$ m³/s	Captări pentru combinate şi alte folosinţe
1	Berivoi	confluenţa Olt	30,5	84,4	911	217		
2	Dejani	captare	2	28,3	1500	—	0,181	
3	Dejani	confluenţa Olt	31,5	81,2	930	211	0,055	
4	Pojorîţa	confluenţa Brescioara	13,0	26,7	1570	523		
5	Brescioara	confluenţa Pojorîţa	10,5	22,9	1565	462		
6	Breaza	punctul Breaza		49,6	1607		0,379	
7	Breaza	confluenţa Olt	30,0	73,0	1266	321	0,130	
8	Lisa	captare		10,9	1375		0,065	
9	Lisa	confluenţa Sîmbăta	17,0	44,3	905	258		
10	Sîmbăta	confluenţa Lisa	19,0	35,9	1185	296		
11	Sîmbăta	confluenţa Olt	25,2	98,7	937	197	0,195	
12	Viştea Mare	confluenţa Vistişoara	11,0	34,6	1390	519	0,259	captat
13	Viştea Mare	confluenţa Olt	22,5	42,1	1858	337	0,010	
14	Viştişoara	confluenţa Viştea Mare	10,5	14,1	1565	560		
15	Ucişoara	confluenţa Ucea	9,0	9,0	1453	578		captat
16	Ucea	confluenţa Ucişoara	8,9	23,0	1473	550		captat
17	Ucea	confluenţa Olt	21,9	32,9	1146	255	0,620	
18	Arpaşul Mare	confluenţa Arpaşul	17,0	53,9	1130	318		captat
19	Arpaşul Mare	confluenţa Arpaşul Mare	15,7	23,1	1240	458		
20	Arpaşul Mare	confluenţa Olt	22,2	87,9	1008	276		

Rezultă că repartiţia şi cantitatea precipitaţiilor este corespunzătoare, putînd asigura în majoritatea anilor producţii satisfăcătoare.

Solurile constituie un factor natural important care i-a condus pe localnici spre folosirea irigaţiilor. Ele fac parte din categoria solurilor brune montane podzolite nediferenţiate, cu grosimi ale profilului variind între 0,40...1,20 m, aşezate pe orizonturi formate din material detritic (bolovănişuri, pietriş, prundiş). Reacţia solului este acidă cu pH = 4,5...5,5.

Caracterizate prin valori mari ale porozităţii şi coeficienţilor de infiltraţie şi valori mici ale capacităţii de cîmp, solurile au o capacitate redusă de reţinere a apei — situaţie ce explică secetele periodice de care suferă plantele. La aceasta mai contribuie şi drenajul natural excesiv al solului care face ca o bună parte din precipitaţiile căzute să se infiltreze imediat după ploaie.

Producţiile obţinute în condiţii normale, fără aplicarea irigaţiilor, sînt scăzute : 4 000...6 000 kg masă verde la ha şi 25...30 kg mere la

Fig. 3. — Rigolă şi brazde în spic pentru udarea livezii de pomi.

pom. Pe suprafețele irigate producțiile sînt de 15...20 mii kg/ha masă verde și cca. 6 000 kg mere (I. M. Gheorghiu — 1963).

Metoda de amenajare și irigație. Albiile pîraielor au adîncimi variabile, sectorul mijlociu fiind cel mai avantajos din punct de vedere al amplasării prizelor datorită albiei majore largi (60...200 m) care permite derivarea canalului de aducțiune cu ajutorul unor lucrări simple de priză (mici pinteni sau lease confecționate din materiale locale, trunchiuri de copaci, garduri împletite etc.).

Canalul de aducțiune fiind construit cu o pantă mică, în comparație cu panta pîrîului, după cca. 15 m iese din albie, irigînd terenul riveran prin intermediul rigolelor dispuse în spic sau prin revărsare laterală (fig. 3 și fig. 5 *a, b*).

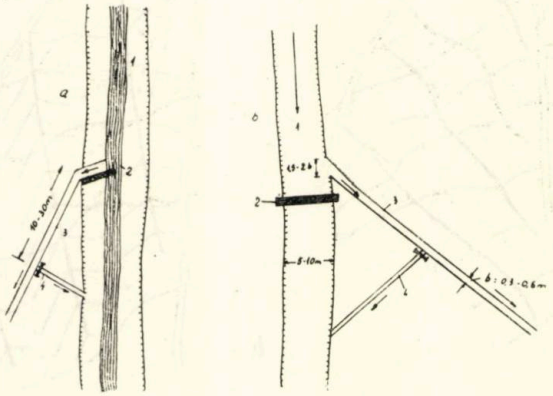


Fig. 4. — Tipuri de prize folosite frecvent în zona Făgăraș.

În fig. 4 se dau două scheme de prize folosite frecvent pe pîraiele din zona studiată. Pe terenurile în pantă mică este adoptată metoda de udare prin revărsare bilaterală din rigolă (fig 5 *a*). Pe terenurile cu pantă mai mare este folosită metoda de udare prin rigole și brazde dispuse în spic, distanța dintre rigole fiind de 20...25 m, iar între brazde de 5...7 m (fig. 5 *b*).

Întregul sistem de amenajare este simplu, executat de localnici, adaptat condițiilor terenului, fără construcții hidrotehnice speciale, dirijarea apei făcîndu-se cu ajutorul bolovanilor de rîu care închid sau deschi rigolele. Pentru execuția unei prize (o leasă de forma a două gărduleț — cu pietriș și bolovani între ele) sînt necesare cca. 5...6 cre de muncă.

Atît canalele de aducțiune cît și rigolele și brazdele se execută cu plugul reversibil în perioada de primăvară; canalul se finisează manual.

Irigaţia practicată în aceste zone are mai mult un rol de fertilizare şi aprovizionare, constînd, în general, din trei udări : prima udare se dă imediat după topirea zăpezilor cînd se înregistrează debitele lichide şi solide maxime ; a doua, după cositul ierbii în scopul stimulării creşterii otavei (plantaţiile de pomi servesc şi ca fîneţe), iar a treia udare se face toamna, cît mai tîrziu, cu rol de aprovizionare şi fertilizare. Durata udărilor este de 2...3 zile.

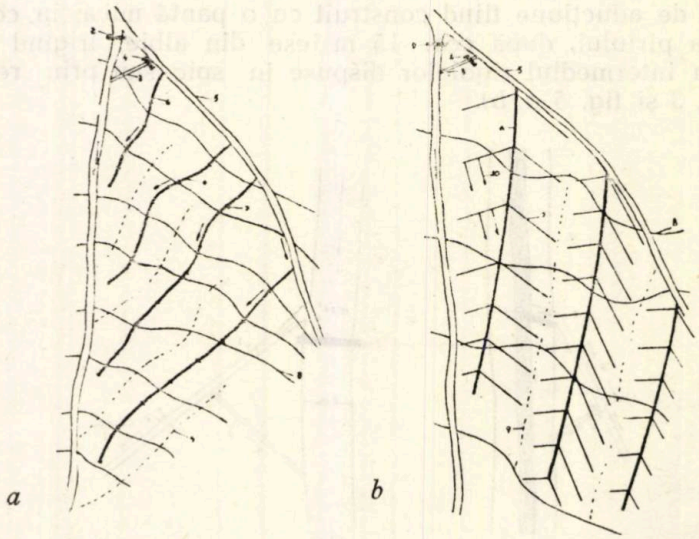


Fig. 5. — *a*. Udarea în spinări cu rigole lungi ; *b*. udarea în rigole şi brazde în spic.

Efectul irigaţiei asupra solului şi florei. Pe terenurile irigate se constată o evoluţie favorabilă a solurilor sub influenţa irigaţiilor, în special în ceea ce priveşte pH-ul şi conţinutul de elemente nutritive (azot, fosfor, potasiu).

Cercetările întreprinse în această zonă de Catedra de îmbunătăţiri funciare a Institutului agronomic din Bucureşti, indică la Breaza pe fîneaţa neirigată în pantă un pH al solului de 5,25, în comparaţie cu pH-ul solului irigat situat în vecinătate care are valoarea de 5,85.

Probele de sol analizate pun în evidenţă o creştere a cantităţii de humus cu 1...2% pe terenurile irigate. Creşterea humusului şi a azotului total sînt mai evidente în stratul de la suprafaţă (0...10 cm), datorită colmatărilor rezultate în urma udărilor pe profilul solului. Totodată se constată o mărire a profilului de sol pe terenurile irigate. Un aspect diferit îl prezintă cantitatea de potasiu schimbabil care are valori mai mici la solurile irigate, datorită spălării lui de către apa de

irigație și acumulării în părțile inferioare ale profilului (în adîncime cantitatea de potasiu crește de la 3 la 9 mg la 100 gr sol).

S-a constatat de asemenea că irigația produce modificări în compoziția floristică a fînețelor irigate, îmbunătățind calitatea fînețelor naturale din zona la care ne referim. În compoziția fînețelor irigate, gramineele dețin un procent important (cca. 70%), iar leguminoasele sînt reprezentate prin plante valoroase de nutreț (Trifolium pratensae și Trifolium repens).

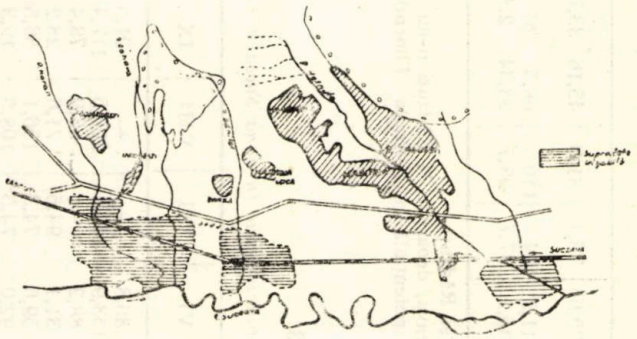


Fig. 6. — Rețeaua hidrografică și suprafețele irigabile cu apa pîraielor în zona Suceava — Rădăuți (scara 1/150 000).

Datorită caracteristicilor apei de irigat care are și rolul de amendament, de aerare a solului (fiind bogată în oxigen), de îmbunătățire a conținutului de substanțe nutritive precum și datorită subsolului bine drenat, procentul de Cyperaceeae și Juncaceae este redus pe solurile irigate în comparație cu cele neirigate. Această îmbunătățire a compoziției floristice contribuie la mărirea valorii în aprecierea eficacității irigațiilor.

În concluzie, prin multiplele efecte pozitive pe care le are asupra solului și producțiilor, irigațiile din raionul Făgăraș sînt pe deplin justificate și ne îndreptățesc să propunem extinderea acestor metode simple și în alte zone similare din țară, cum ar fi Rădăuți—Suceava.

b) *Zona Suceava—Rădăuți*

Pentru punerea în evidență a posibilităților de aplicare a irigațiilor în zona dintre Suceava și Rădăuți s-a luat în studiu suprafața cuprinsă în bazinul hidrografic al rîului Suceava pe malul stîng al acestuia între com. Dărmănești și Milișăuți, care ocupă cca. 3 000 ha între rîul Suceava și șoseaua Suceava—Siret (fig. 6).

Regimul umidității solului privit sub aspectul cantităților de precipitații medii lunare și al valorilor evapo-transpirației medii lunare este asemănător celui din Făgăraș (tabelul 2).

Tabelul 2

Precipitaţiile medii lunare, evapo-transpiraţia potenţială medie lunară şi deficitul de umiditate în zona Suceava—Rădăuţi

Luna	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	Anual
Precipitaţii*) (mm)	27,16	25,5	34,1	48,5	78,1	75,05	76,3	81,3	45,16	33,7	30,20	30,43	585,43
Evapotranspiraţia**) potenţială (mm)	0	0	2	38,5	84	111,5	124	110	68,5	36	9		583,5
Deficitul de umiditate	—	—	—	—	6,1	35,2	47,7	28,7	23,34	2,3	—	—	—

*) Precipitaţiile reprezintă media înregistrărilor între Suceava şi Rădăuţi.

**) Evapo-transpiraţia potenţială a fost luată şi la Staţiunea Suceava, deoarece la Rădăuţi n-au fost înregistrări suficiente ale temperarurii aerului şi nu s-a putut calcula evapo-transpiraţia potenţială cu formula Thornthwaite.

Tabelul 3

Exemple de ani cu variaţii mari ale regimului pluviometric în zona Suceava—Rădăuţi

Ani \ Luni	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1954	25,2	25,6	9,3	—	—	36,8	—	—	21,5	18,3	26,3	50,8
1955	35,7	52,7	55,8	124,4	172,9	153,9	164,4	226,5	117,4	24,1	49,0	38,4
1956	48,9	92,5	45,2	71,5	80,7	88,2	—	93,9	78,4	24,3	46,1	86,6
1957	20,0	28,5	8,9	52,8	80,3	31,1	94,5	71,6	28,2	18,1	54,7	50,2
1958	28,1	35,6	17,8	55,4	10,7	59,6	74,3	156,1	56,5	38,1	51,0	7,6
1959	32,6	21,9	17,5	22,1	74,2	92,0	74,5	108,5	19,3	15,6	41,1	30,3
1960	26,2	28,3	23,6	31,1	124,0	4,9	82,2	58,1	16,5	54,3	94,5	33,1
1961	34,9	15,9	21,4	91,5	109,4	50,5	65,1	58,3	2,2	9,6	17,7	22,0
1962	32,2	36,2	75,7	58,8	136,3	82,3	41,4	40,4	40,4	3,3	57,2	31,9
1963	78,4	28,8	28,8	27,3	93,4	31,2	118,4	78,7	21,8	44,0	13,3	57,7
1964	—	35,6	43,3	24,2	54,3	37,3	78,1	89,3	58,0	77,1	—	—

Cantitatea de *precipitații* este destul de mare, putînd asigura în condiții normale producții satisfăcătoare. Cantitatea cea mai mare de precipitații cade în lunile de vară; cu toate acestea în lunile de vară se înregistrează și unele deficite de umiditate, avînd valoarea maximă de 47,7 mm în luna iulie.

Spre deosebire de Făgăraș, în această zonă se constată o mai mare neuniformitate în distribuția precipitațiilor pe luni și ani. În tabelul 3 sînt date cîteva exemple de ani din care se pot vedea variațiile mari ale regimului pluviometric de la an la an pentru aceeași perioadă (de exemplu lunile IV și VII).

Rețeaua hidrografică este reprezentată, în afară de rîul Suceava, de o serie de pîraie ce se scurg aproape paralel din zona deluroasă, ca Horaițul, Rahova, Dănila, Ursului, Hatnuța ș.a., alimentate de apele freatice ieșite la zi sub formă de izvoare și din scurgerile de suprafață în perioadele cu precipitații abundente. Unele își au originea în zona deluroasă împădurită (Horaiț) în timp ce altele se formează în zona terenurilor arabile din dreptul comunelor Iacobești, Mărițeia, Dărmănești.

Tabelul 4

Datele morfometrice și hidrologice ale pîraielor din zona Suceava — Rădăuți

(după D.G.A. Siret-Prut)

Nr. crt.	Pîrîul	Punctul	Debitul m^3/s	Suprafața bazinului km^2	H_{med} bazin m	I_{med} %	Debit min cu $p=80\%$ m^3/s	Captări
1	Horaiț	confluența Suceava	23,0	52,7	625	72,8	0,218	Sanatoriul Iacobești, C.A.P. Românești
2	Rahova	confluența Horaiț	8,7	17,5	575		0,0196	C.A.P. Iacobești
3	Ursului	confluența Suceava	4,2	10,0	575		—	
4	Dănila	confluența Suceava	7,3	25,00	575		0,0410	C.A.P. Dănila grădina de zarzavat
5	Hatnuța	confluența Suceava	17,7	71,5	625	73,7	0,375	C.A.P. Dărmănești
6	Pătrăuți	confluența Horaiț	4,7	11,2	500		0,0156	

Debitele sînt luate pentru Horaiț și Hatnuța din planul de amenajare al bazinului hidrografic Siret—Călmățui (C.S.A.). Restul sînt întocmite pe baza planurilor cu izolinii de scurgere (și se referă la

scurgerile medii). Măsurătorile întreprinse de colectivul nostru în decembrie 1964, cînd terenul era îngheţat, au marcat următoarele debite: pîrîul Horaiţ Q = 25...30 l/s, pîrîul Rahova Q = 3 l/s, pîrîul Dănilei Q = 5 l/s, pîrîul Hatnuţa Q = 40 l/s. Studiile au font efectuate însă în continuare pe baza datelor din tabelul 4.

Pe lîngă aceste pîraie cu debite permanente, mai sînt altele ca pîrîul Ursului sau văile din zonă, care au apă numai din ploi.

Datorită faptului că în bazinele hidrografice nu s-au executat lucrări antierozionale şi de regularizare a scurgerii, aceste pîraie au caracter torenţial, ceea ce a impus îndiguirea unora din ele în zona dintre şoseaua Suceava—Rădăuţi şi rîul Suceava (pîrîul Horaiţ, pîrîul Dănilei). În partea inferioară a versanţilor în dreptul satului Dănila îşi fac apariţia puternice izvoare de coastă, care au condus la înmlăştinirea unei suprafeţe de cca. 45 ha lipsită de posibilitatea de scurgere a apei (canalul executat de C.F.R. pentru evacuarea apei nu este suficient de adîncit).

Solurile din zonă situate între rîul Suceava şi şosea se încadrează în complexul solurilor de luncă (lunca Sucevei), evoluţia lor găsindu-se atît sub influenţa revărsărilor pîraielor afluente Sucevei cît şi a construcţiilor cu caracter de barare din zonă (rambleul căii ferate Suceava—Rădăuţi).

Profilele şi forajele executate evidenţiază o serie de subtipuri (tabelul 5). Terenurile din această zonă au în primul rînd folosinţă arabilă, culturile principale în ordinea suprafeţei pe care o ocupă fiind porumbul, grîul, plantele furajere (trifoi, lucernă), cartofii etc.

Tabelul 5

Foraje executate

Nr. profilului	Sub bazinul	Distanţa pînă la confluenţa cu rîul Suceava km	Adîncimea forajului m	Nivelul hidrostatic al apei freatice	Solul	pH
1	Horaiţul	3	3	—	aluvial lutos humifer erodat	7
2	Dănilei	2	2	—	aluvial stratificat recent luto-nisipos	7,5...8
3	Dănilei	2	2	—	idem	

În zonă există încercări de introducere a irigaţiilor : în anul 1964 s-a irigat o suprafaţă de 0,5 ha în com. Iacobeşti, cu apă din pîrîul Rahova, obţinîndu-se o producţie de 6 450 kg/ha porumb boabe (uda-

rea pe brazde). Irigații pentru grădini de zarzavat se găsesc pe pîrîul Horaiț (5 ha) și Dănilei (3 ha).

Pe pîrîul Ursului în stînga șoselei Suceava—Siret există condiții de aplicat udări de aprovizionare — pe care localnicii au început să le valorifice (noiembrie 1964) ca și în zona Făgăraș, pîrîul Rahova fiind condus în rambleu între șosea și calea ferată pentru creierea posibilităților de irigații. Prin regularizarea debitului acestor pîraie, se pot iriga suprafețe relativ mari (fig. 6).

Din cele expuse rezultă unele asemănări și deosebiri între condițiile din zona Făgăraș și cele din zona Suceava—Rădăuți ;

a) cantitatea de precipitații este superioară mediei pe țară, variind în jurul a 600 mm/an ; în ultima zonă (Suceava—Rădăuți) repartiția este mai defavorabilă ;

b) rețeaua hidrografică prezintă multe caractere comune prin prisma irigațiilor (pîraie paralele ce străbat terenurile irigate, cu scurgere permanentă, etc.) deși în zona II, densitatea și debitele sînt mai mici ;

c) solurile sînt ușoare în ambele zone, cu capacitate mică de reținere a apei ; deosebirea constă în aceea că în zona Făgăraș subsolul este foarte permeabil, în timp ce la Dărmănești la cca. 3...4 m adîncime se întîlnesc straturi argiloase ;

d) la Făgăraș terenurile au ca folosință principală pășuni, fînețe, plantații pomicole, iar la Dărmănești — culturi agricole.

3. Concluzii și propuneri

Pentru extinderea irigațiilor cu amenajări simple în Podișul Moldovenesc, similare cu cele din Făgăraș, se impun o serie de măsuri.

1. Identificarea terenurilor și a surselor de apă ce permit aceasta (ca în zona Suceava—Rădăuți).

2. Îmbogățirea debitelor de apă ale pîraielor în perioadele secetoase prin acumulări locale anuale și sezoniere (exemplu pe pîrîul Ursului, pîrîul Horaiț) și prin captarea izvoarelor și conducerea apei lor la terenurile irigabile.

3. Introducerea irigațiilor de tip monoanual, mai ales pe terenurile înclinate.

4. Organizarea unor vizite în schimb de experiență a gospodarilor din aceste zone în zona irigată din Făgăraș.

5. Organizarea unor cîmpuri experimentale pe diferitele surse de apă, în scopul stabilirii metodelor celor mai simple și eficiente de amenajare, regimului de irigație optim adaptat condițiilor ce le oferă sursele locale limitate de apă, a culturilor cele mai indicate a se iriga aici ținînd seamă de deficitul de apă, a amendamentelor și îngrășămintelor necesare ș.a.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de hidroameliorații

ОРОШЕНИЕ В ЗОНАХ ИЗБЫТОЧНОГО УВЛАЖНЕНИЯ ОСУЩЕСТВЛЯЕМОЕ МЕСТНЫМИ СРЕДСТВАМИ

(Резюме)

Анализируется возможность расширения орошения в зоне Сучава — Рэдэуць и в зоне Фэгараш. Анализ базируется на сопоставлении натуральных условий в вышеуказанных зонах.

Объяснение рисунков

Рис. 1. — Зоны орошения и среднее количество осадков в Р.С.Р.
Рис. 2. — Гидрографическая ситуация и распределение сенокосов и садов в зоне Фэгараш.
Рис. 3. — Выводные и поливные борозды в форме колоса для орошения сада.
Рис. 4. — Типы водозаборов используемые в зоне Фэгараш.
Рис. 5. — Полив по длинным бороздам.
Рис. 6. — Гидрографическая сеть и орошаемые речной водой площади в зоне Сучава — Рэдэуць.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C.Z 629 I

UNELE ASPECTE ALE ORGANIZĂRII RAŢIONALE A TRANSPORTULUI PE ŞANTIERELE DE HIDROTEHNICĂ AGRICOLĂ

DE

ROMULUS MANDACHE şi AURORA DIMA

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. În ultimii ani, conform prevederilor Directivelor Congreselor al VIII-lea şi al IX-lea ale Partidului Comunist Român, industria construcţiilor a fost dotată cu maşini, mecanisme şi mijloace de transport noi şi moderne.

Eficienţa economică a mijloacelor de transport nu depinde însă numai de performanţele tehnice ci un rol hotărîtor în folosirea lor pe şantiere îl are organizarea raţională a transportului în concordanţă cu graficul calendaristic de eşalonare a lucrărilor.

În faza „schema generală de organizare" corespunzătoare proiectului de ansamblu, necesarul de mijloace de transport se calculează de către proiectant pe bază de indici tehnico-economici.

În faza a doua a proiectului de organizare pe care o întocmeşte constructorul pe baza schemei generale de organizare şi a proiectului de execuţie a lucrărilor, calculul necesarului de mijloace de transport se face prin „planul operativ al necesarului de utilaje şi mijloace de transport".

Din „planul operativ de aprovizionare cu materiale", corelat cu planul calendaristic al lucrărilor, se obţin cantităţile ce trebuie transportate pe diferite perioade.

Numărul de mijloace de transport necesare pe o anumită perioadă este

$$N = \frac{Q}{p}, \tag{1}$$

în care Q reprezintă cantitatea de materiale în tone ce trebuie transportată în perioada dată, p — productivitatea mijlocului de transport pentru acea perioadă.

Dacă ne referim la mijloacele de transport auto, a căror funcţionare este ciclică, atunci

$$p = \frac{T}{t_c} q_c \eta = n_c q_c \eta, \tag{2}$$

în care T este durata unui schimb în minute sau ore; t_c — durata unui ciclu de transport; $n_c = T/t_c$ — numărul de cicluri de transport; q_c — capacitatea mijlocului de transport în tone; η — coeficientul de utilizare a capacităţii mijloacelor de transport, care depinde de natura materialului ce se transportă.

Durata unui ciclu este compusă din:

$$t_c = t_1 + t_2 + 2\frac{l_m}{v_m} K, \tag{3}$$

în care t_1 este timpul de încărcare în minute sau ore; t_2 — timpul de descărcare în minute sau ore; l_m — distanţa de transport; v_m — viteza medie de transport, în ambele sensuri, în m/min sau în km/oră; K — coeficientul de timpi neproductivi, funcţie de numărul de km parcurşi de autocamion de la darea lui în exploatare.

t_1 şi t_2 se găsesc calculaţi în tabele funcţie de tipul mijlocului de transport şi de felul descărcării şi încărcării iar viteza medie şi capacitatea se obţin din caracteristicile tehnice ale mijlocului de transport; de asemenea K şi η se extrag din tabele.

Distanţa medie de transport l_m se calculează conform situaţiei reale de pe teren. Cea mai utilizată metodă de calcul a distanţei medii de transport, atunci cînd intervin mai multe puncte între care se transportă diferite cantităţi de materiale, este „fişa în şah". Metoda constă în întocmirea a două tabele unul pentru stabilirea distanţelor de transport între diferite puncte de pe şantier şi celălalt pentru determinarea fluxurilor de materiale.

În ambele tabele se trec pe orizontală şi pe verticală punctele probabile de transport, în primul trecîndu-se în rubricile de intersecţie corespunzătoare la două puncte distanţa de transport, iar în al doilea în mod similar cantităţile de transportat între aceste puncte. Distanţa de transport se calculează ca medie ponderată

$$l_m = \frac{\Sigma \text{ tone km}}{\Sigma \text{ tone}}.$$

2. În lucrarea de faţă propunem o metodă simplificată de calcul a distanţei medii pe baza unei singure tabele cu ajutorul căreia se poate face şi repartizarea numărului de mijloace de transport pe trasee sau grupe de trasee care au puncte comune de transport.

Această metodă pe lîngă că simplifică calculele, oferă şi date suplimentare pentru organizarea judicioasă a transporturilor, calculul greutăţii specifice a lucrului util pentru diferite trasee şi corespunzător calculul numărului de mijloace de transport.

Pentru exemplificare am luat o schemă oarecare de transport pe care am fixat traficul de materiale pe un schimb de 8 ore. Aşa cum reiese din fişa în şah (tabelul 1) distanţa medie de transport calculată ca medie ponderată este $l_m = 6{,}92$ km.

Pentru un autocamion basculant de 5 t ($q_c = 5$ t) şi o viteză medie $v_m = 25$ km/oră (în centre populate) avînd de transportat materiale grele (pămînt, pietriş etc.) rezultă la încărcarea mecanizată a pămîntului (din escavator) şi descărcare prin basculare $t_1 + t_2 = 13$ min sau 0,216 ore pentru $\eta = 0{,}8$ cu $K = 1$ şi $T = 8$ ore; utilizarea lui (3) dă $t_c = 0{,}768$ ore iar $n_c = T/t_c = 10{,}4$.

Tabelul 1

Fişa în şah pentru calculul distanţei medii de transport
de la . . . . la . . . .

Cantitatea în tone / Distanţa în km		Staţia de C.F.R.	Centrala de beton	Depozitul central	Depozit de lot	Obiectul *1*	Obiectul *2*	Obiectul *3*	Obiectul *4*		Σ tone × × km	G_s %	Necesar de autocamioane
	0	1	2	3	4	5	6	7	8				
Staţia de C.F.R.	1	— —	200 10						15 13		2 195	45,2	7
Centrala de beton	2		— —			50 5	75 6	90 5	30 3		1 240	25,5	4
Depozitul central	3			— —		5 2	20 4	10 8			170	3,5	1
Depozit de lot	4				— —	25 2	30 4	20 2,5	15 5		295	6,1	1
Obiectul *1*	5	40 15		16 2		— —					632	13,2	2
Obiectul *2*	6						— —	5 4			20	0,4	1
Obiectul *3*	7			15 3			15 4	— —			105	2,1	
Obiectul *4*	8				10 5	15 10			— —		200	4	
										Total	4857	100	16
Σ tone		40	200	31	10	95	140	125	60	701	$l_m = \frac{4857}{701} = 6{,}92$ km		

Atunci (2) $p = 41{,}6$ tone/schimb și (1) $N = Q/p = 701/41{,}6 = 16$. Sau utilizînd tabele pentru distanța de 6 km, grupa de materiale *1*, categoria le drum III, pentru autocamioane cu platforme basculante de 5 tone încărcare-descărcare mecanizată, rezultă productivitatea $p = 40{,}8$ tone/schimb.

3. Repartizarea pe trasee se face în funcție de greutatea specifică a lucrului util pe fiecare traseu sau grup de trasee. Utilizarea lui (2) și (3) dă

$$p = \frac{T}{t_1 + t_2 + 2kl/v_m} q_c \eta, \tag{4}$$

din care se observă că productivitatea unui anumit mijloc de transport este în ultimă analiză funcție de distanța de transport.

Pentru a evidenția acest lucru scriem relația care dă numărul de curse în cazul considerat sub forma $8/t_c = (0{,}08\, l_m + 0{,}216)$, iar lucrul util al autocamionului $P = q_c n_c l_m = 50{,}4\, l_m$.

În fig. 1 se dă graficul lui n_c și p. Din grafic se vede clar că utilizarea unei distanțe de transport improprii duce la repartizarea unui număr necorespunzător de autocamioane. La o distanță medie mai mică decît cea reală se obține din calcul un număr mai mic de autocamioane decît numărul necesar conform situației de pe teren, fapt ce duce la nerespectarea ritmului lucrării fie din cauza lipsei de materiale fie din cauza stagnării în lucrul utilajelor deservite de acestea.

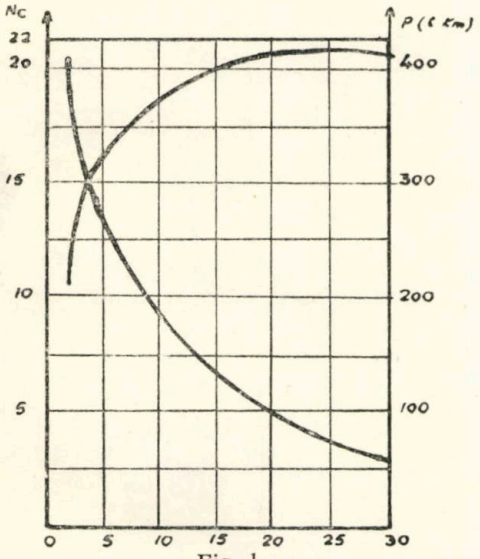


Fig. 1

Planificarea unui număr mai mare de mijloace de transport decît este necesar duce la mărirea cheltuielilor de transport. Planificarea numărului de mijloace de transport pe fiecare zi trebuie făcută corect deoarece pe șantiere se folosesc mijloace de transport închiriate de la IUT, astfel încît nu mai este posibilă o redistribuire a mijloacelor de transport în decursul zilei.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de organizare și planificare

BIBLIOGRAFIE

1. Ilana N. și colab., *Curs de organizarea și planificarea lucrărilor de construcții.* EDP, Buc., 1963.

2. Silion T., *Organizarea şi planificarea lucrărilor de construcţii.* Lit. Inv. Iaşi, 1957.
4. Heilpern P., Marin V., *Mecanizarea transporturilor pe şantierele de construcţii,* Ed. Şt. Arhit. şi Constr., Buc., 1954.

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ РАЦИОНАЛЬНОЙ ОРГАНИЗАЦИИ ТРАНСПОРТА НА ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ СТРОИТЕЛЬНЫХ ПЛОЩАДКАХ В СЕЛЬСКОМ ХОЗЯЙСТВЕ

(Резюме)

Предлагается упрощенный метод расчета среднего расстояыния при помощи единственной таблицы. Пользуя предлагаемую таблицу производится распределение числа способов транспорта по трассе или по группам трассы имеющим общие точки обслуживания.

Кроме упрощения расчета, способ этот помогает также делу расчета трудоемкости полезной работы на различных трассе, а также количества способов транспорта.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3—4, 1966

Industrie uşoară

ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
НОВАЯ СЕРИЯ
Том XII (XVI), вып. 3—4, 1966

Легкая промышленность

BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
NEW SERIES
Vol. XII (XVI), 3—4, 1966

Light Industry Engineering

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 677

REZOLVAREA UNEI PROBLEME DE PRODUCŢIE DIN ÎNTREPRINDERILE TEXTILE

DE

ANA TRIANDAF, MALCA BERCOVICI şi V. STOENESCU

Comunicare prezentată la colocviul „Aplicaţii ale matematicii în economie", Iaşi, 3—6 decembrie 1964

1. În cadrul „Întreprinderilor textile" — Galaţi s-a pus următoarea problemă: pentru două produse A şi B se cunosc datele:

1. în 24 ore din primul produs se obţin 13 000 unităţi, din al doilea produs 12 000 unităţi;

2. pentru realizarea primului produs sînt necesare 11 faze, pentru realizarea celui de al doilea, 13 faze;

3. primul produs aduce un beneficiu de 0,12 lei la unitate, al doilea produs o pierdere de 0,02 lei la unitate.

Se cere să se determine beneficiul maxim, ştiind că pentru obţinerea produselor posibilităţile de care dispune întreprinderea pentru desfăşurarea fazelor necesită ca variabilele x_1 şi x_2 să satisfacă sistemul de inegalităţi:

$$(1)\quad \begin{cases} 0{,}001\,x_1 + 0{,}0028\,x_2 \geqslant 0{,}0000027, \\ 0{,}001\,x_1 + 0{,}0014\,x_2 \geqslant 0{,}000013, \\ x_1 \leqslant 0{,}0007, \\ 0{,}003\,x_1 + 0{,}004\,x_2 \geqslant 0{,}000011, \\ 1{,}6\,x_1 + 2\,x_2 \leqslant 3{,}2, \\ 0{,}21\,x_1 + 0{,}2\,x_2 \leqslant 0{,}042, \\ 0{,}065\,x_1 + 0{,}0046\,x_2 \geqslant 0{,}000299, \\ x_2 \leqslant 0{,}0094, \\ x_2 \geqslant 0{,}0016, \\ 0{,}0018\,x_1 + 0{,}0016\,x_2 \leqslant 0{,}00000288, \\ x_1 + 0{,}04\,x_2 \leqslant 0{,}0013, \end{cases}$$

şi să maximalizeze funcţia

(2) $$f = 0{,}12\,x_1 - 0{,}02\,x_2 .$$

2. Pentru soluţionarea problemei formăm sistemul:

(3)
$$\begin{cases} x_{14} - 0{,}12\,x_1 + 0{,}02\,x_2 = 0, \\ -0{,}001\,x_1 - 0{,}0028\,x_2 + x_3 = -0{,}0000027, \\ -0{,}001\,x_1 - 0{,}0014\,x_2 + x_4 = -0{,}000013, \\ x_1 + x_5 = 0{,}0007, \\ -0{,}003\,x_1 - 0{,}004\,x_2 + x_6 = -0{,}000011, \\ 1{,}6\,x_1 + 2\,x_2 + x_7 = 3{,}2, \\ 0{,}21\,x_1 + 0{,}2\,x_2 + x_8 = 0{,}042, \\ -0{,}065\,x_1 - 0{,}0046\,x_2 + x_9 = -0{,}000299, \\ x_2 + x_{10} = 0{,}0094, \\ -x_2 + x_{11} = -0{,}0016, \\ 0{,}0018\,x_1 + 0{,}0016\,x_2 + x_{12} = 0{,}00000288, \\ x_1 + 0{,}04\,x_2 + x_{13} = 0{,}0013. \end{cases}$$

Prin introducerea variabilelor $x_i\,(i = 3, 4, ..., 14)$ s-a format o nouă problemă, în care trebuie găsit vestorul $\begin{pmatrix} X_{14} \\ X \end{pmatrix}$ ce satisface sistemul

(4) $$\left(-\frac{C}{A}\right)\begin{pmatrix} X_{14} \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}$$

şi să maximalizeze pe X_{14}.

Matricea $\left(-\frac{C}{A}\right)$ arată că coeficienţii funcţiei extremale iniţiale au fost introduşi în tabel şi formează prima linie. Matricea $\begin{pmatrix} X_{14} \\ X \end{pmatrix}$ arată că în noua problemă vectorul soluţie are drept primă componentă pe x_{14}, care în fiecare iteraţie egalizează valoarea funcţiei extremale. Variabila x_{14} intră întotdeauna în soluţie. Matricea $\begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}$ arată că vectorul de restricţie are drept componentă pe „0" care este valoarea iniţială a lui x_{14}.

Prin înmulţirea cu —1 a inegalităţilor (1_1), (1_2), (1_7) şi (1_9), după ce au fost transformate în egalităţi prin introducerea variabilelor x_3, x_4, x_9, x_{11}, se obţin vectori unitari, deci se formează matricea unitate a primei soluţii, dar în acelaşi timp se formează o soluţie neacceptabilă.

Tabelul pentru formarea iteraţiilor este cel întîlnit în metoda simplex-duală, cu deosebirea că în problemă există inegalităţi de sens

contrar și în tabel este introdusă funcția extremală. Notăm elementele din rîndul întîi cu c_j' și ele egalizează totdeauna cu negativul $c_j - z_j$ din tabelul simplex.

Pentru determinarea soluțiilor optime se marchează în tabel coloanele pentru care c_j este negativ și liniile pentru care b_i este negativ și se determină pentru fiecare coloană marcată

$$\theta_j = \min \frac{b_i}{a_{ij}}, \quad \text{cu} \quad b_i \geqslant 0, \quad a_{ij} > 0,$$

apoi se calculează $\gamma_j = \theta_j c_j'$ și se alege $\gamma_k = \min \gamma_j$.

Numitorul lui θ_k selectează coloana cheie.

Se determină apoi pentru fiecare linie marcată

$$\delta_i = \max \frac{c_j'}{a_{ij}}, \quad \text{cu} \quad c_j' \geqslant 0, \quad a_{ij} < 0,$$

se calculează apoi $\Phi_i = \delta_i b_i$ și se alege $\Phi_r = \max \Phi_i$.

Numitorul lui δ_r selectează linia cheie.

Elementul cheie al iterației se obține comparînd γ_k cu Φ_r. Dacă $|\gamma_k| > |\Phi_r|$, elementul cheie aparține coloanei k și indică schimbarea în problema primală. Dacă $|\Phi_r| > |\gamma_k|$, elementul cheie aparține liniei r și indică schimbarea în problema duală.

Valoarea soluției apropiate va fi

$$z' = z + \theta_k (c_k - z_k) = z - \theta_k c_k' = z - \gamma_k.$$

Cum $\gamma_k < 0$, rezultă $z' \geqslant z$.

Pe de altă parte printr-un raționament analog, dacă elementul cheie este selecționat în rîndul r valoarea lui z va fi egală sau va descrește.

Deoarece problema duală este o problemă de minim, o interpretare a celor de mai sus arată că dacă elementul cheie este selecționat într-o coloană, facem aprecierea maxim posibilă în valoarea program a problemei primale. Dacă însă elementul cheie este selecționat într-o linie atunci aprecierea maxim posibilă se face în valoarea program a problemei duale. Elementul cheie astfel obținut este folosit la formarea unui nou tabel. Rîndul întîi este inclus totdeauna în transformare.

Metoda folosită în această problemă pentru determinarea beneficiului optim a fost elaborată de profesor Robert Llewellyn de la Universitatea North Carolina [2].

Tabelul 1

Soluţii	B	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_1	P_2
x_{14}	0												−0,12	0,02
x_3	−0,0000027	1											−0,001	−0,0028
x_4	−0,000013		1										−0,001	−0,0014
x_5	0,0007			1									1	0
x_6	−0,000011				1								−0,003	−0,004
x_7	3,2					1							1,6	2
x_8	0,042						1						0,21	0,2
x_9	−0,000299							1					−0,065	−0,0046
x_{10}	0,0094								1				0	1
x_{11}	−0,0016									1			0	−1 (*)
x_{12}	0,00000288										1		0,0018	0,0016
x_{13}	0,0013											1	1 (**)	0,04
x_{14}	0,000156											0,12		0,0248
x_3	−0,0000014	1										0,001		−0,00276
x_4	−0,0000117		1									0,001		−0,00136
x_5	−0,0006			1								0		−0,04
x_6	−0,0000071				1							0,003		−0,00388
x_7	3,19792					1						− 1,6		1,036
x_8	0,041727						1					− 0,21		0,1916
x_9	−0,0002145							1				0,065		−0,002 (*)
x_{10}	−0,0094								1			0		1
x_{11}	−0,0016									1		0		−1
x_{12}	0,00000054										1	− 0,0018		0,01528
x_1	0,0013											1	1	0,04
x_{14}	−0,0025038							12,4				0,926		
x_3	0,00029461	1						−1,4				− 0,091		
x_4	0,00013416		1					−0,68				− 0,0432		
x_5	0,00369			1				−20				− 1,4		
x_6	0,00040903				1			−1,94				− 0,1231		
x_7	2,990284					1		968				61,32		
x_8	0,0201779						1	95,8				6,017		
x_2	0,10725							−500				−32,5		1
x_{10}	−0,09785							500	1			32,5		
x_{11}	0,10565							500		1		−32,5		
x_{12}	−0,00163338							7,64			1	0,4940		
x_1	−0,00299							20				2,3	1	

(*) Elementul „cheie“ în dual.
(**) Elementul „cheie“ în primal.

3. Rezolvarea problemei a condus la următoarele rezultate : pentru primul produs se realizează un beneficiu de 0,171 696 lei la unitate, pentru al doilea produs rezultă o pierdere de 0,017 855 lei la unitate. Calculele se pot urmări în tabelul 1.

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de matematici I
și
„Întreprinderile Textile"-Galați

BIBLIOGRAFIE

1. Mihoc Gh., Urseanu V., *Matematici aplicate în statistică*. Ed. Acad. R.P.R., Buc., 1962.
2. Llewellyn R. W., *Linear Programming*. Holt, Rinehart and Winston, 1964.
3. Dantzing G. B., Fulkerson D. R., Yohnson S. M., *On a Linear Programming Combinorial Approach to the Traveling Salesman Problem.*

LA RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE PRODUCTION CONCERNANT LES ENTREPRISES TEXTILES

(Résumé)

En utilisant la méthode „primal-dual" par un petit nombre d'itérations on résout un problème concernant les Entreprises Textiles de Galați. On a obtenu des résultats qui permettent par la modification de la production de réaliser un bénéfice de 0,171 696 lei à l'unité pour le premier produit et une perte de 0,017 865 lei à l'unité pour le seconde produit.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

D.C 677—16

THE CHARACTERISTICS OF THE RANDOM SLIVERS COMPOSED OF FIBRE BLENDS

BY

MIŞU ZEIDMAN

Paper presented at the Scientific Session of the Polytechnic Institute of Jassy, 5—7 February 1965

1. Introduction

The sliver model used in the present paper is a simple one, formed by superposition of several partial slivers (doubling). Let therefore be a random sliver formed by adjoining H elementary slivers, whose corresponding characteristics are stochasticaly independent (uncorelated). Each of the H slivers has:

a) fibres of length l_i and cross section a_i, constant both along each fibre and between fibres;

b) a mean number of fibres in the cross-section, n_i, (where everywhere $i = 1,2,...,H$); each elementary sliver has the fibres randomly placed, according to a Poisson scheme and will have the following characteristics (see Appendix 1);

c) the mean cross-section area

$$\bar{A}_i = \bar{n}_i a_i; \tag{1}$$

d) the variance of the cross-sections

$$D(A_i) = \bar{n}_i a_i^2; \tag{2}$$

e) the coefficient of variation of the cross-sections

$$V_i^2 = \frac{D(A_i)}{\bar{A}_i^2} = \frac{1}{\bar{n}_i}; \tag{3}$$

f) the covariance of cross-sections situated at a distance u of one another (autocovariance or the corelation function)

$$\varphi_i(u) = \bar{n}_i a_i^2 \left(1 - \frac{u}{l_i}\right). \tag{4}$$

2. The general irregularity

The sliver formed by the superposition of these H slivers, will have its cross-section area equal to the sum of the cross-section areas of the elementary slivers, i.e. $S(x) = \sum_{i=1}^{H} A_i(x)$, $S(x)$ and $A_i(x)$ beeing stationary (homogenous) stochastic functions of x (x = the abscissa of the cross-section measured along the sliver, from an arbitrary origin). The mean cross-section area of the final sliver will be

$$\bar{S} = \sum_{i=1}^{H} \bar{A}_i = \sum_{i=1}^{H} \bar{\eta}_i a_i . \tag{5}$$

Supposing a total loss of correlation between the elementary slivers, we can apply the principle of addition of the variances and covariances, so as we shall have:

a) the variance of the sections S

$$D(S) = \sum_{i=1}^{H} D(A_i) = \sum_{i=1}^{H} \bar{n}_i a_i^2; \tag{6}$$

b) the covariance of the sections S situated at a distance u apart

$$\Phi(u) = \sum_{1}^{H} \varphi_i(u) = \sum_{1}^{H} \bar{n}_i a_i^2 \left(1 - \frac{u}{l_i}\right); \tag{7}$$

c) the coefficient of variation of the sections in the resulting sliver

$$V_s^2 = \frac{D(S)}{\bar{S}^2} = \frac{\sum \bar{n}_i a_i^2}{(\sum \bar{n}_i a_i)^2} . \tag{8}$$

From this relationship we can reach, after transformations, the well known formula of M a r t i n d a l e [1]

$$V_s^2 = \frac{1 + v^2(a)}{\sum \bar{n}_i} = \frac{1 + v^2(a)}{N} , \tag{9}$$

where $v(a)$ represents the coefficient of variation of the fibre's cross sections in the final sliver and N the total number of fibres in its cross-section.

3. The external irregularity

The autocorrelation coefficient of the whole final sliver will be calculated from the covariances of the sections situated at a distance u of one another

$$(10) \qquad R(u) = \frac{\Phi(u)}{D(S)} = \frac{1}{\sum \bar{n}_i a_i^2} \sum \bar{n}_i a_i^2 \left(1 - \frac{u}{l_i}\right).$$

For simplification let us note

$$(11) \qquad \frac{\bar{n}_i a_i^2}{\sum \bar{n}_i a_i^2} = \tau_i$$

and $R(u)$ becomes

$$(12) \qquad R(u) = \sum_{i=1}^{H} = \tau_i \left(1 - \frac{u}{l_i}\right)$$

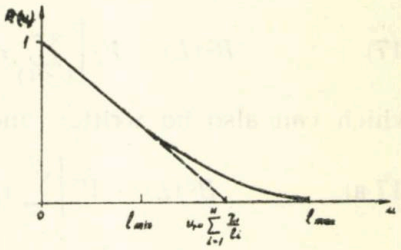


Fig. 1

(see Fig. 1). Under this form, the correlation coefficient will be used in the formula of the external irregularity $B(L)$ of Cox and Townsend [2], [3]. For the final sliver it will be

$$(13) \qquad B^2(L) = \frac{2 V_s^2}{L^2} \int_0^L (L - u) R(u) \, du,$$

which, after substitution of $R(u)$ from (12) becomes:

$$(14) \qquad B^2(L) = \frac{2 V_s^2}{L^2} \sum_{i=1}^{H} \frac{\tau_i}{l_i} \int_0^L (L - u)(l_i - u) \, du.$$

Whith regard to the relation between the lengths L and l_i there will be three distinct cases:

First case: when L is smaller than the minimum fibre length. Then, for any l_i it subsists the inequality $L < l_i$ and the integration will be made in the limits 0, L. The relationship (14) becomes thus

$$(15) \qquad B^2(L) = V_s^2 \sum_{1=i}^{H} \tau_i \left(1 - \frac{L}{3 l_i}\right).$$

Second case: when L is greater than the maximum fibre length. Then, for any l_i it subsists the inequality $L > l_i$ and the integration will be made between the limits 0 and l_i, because, for any $u > l_i$, the autocorrelation coefficient of any partial sliver is zero, and the integral will be zero too. In this case, the formula (14) becomes

$$(16) \qquad B^2(L) = V_s^2 \sum_{1}^{H} \tau_i \left(\frac{l_i}{L} - \frac{l_i^2}{3L}\right).$$

Third case: when L is comprised between the maximum and the minimum fibre lengths. Then, for the elementary slivers whose

fibre lengths are smaller than L ($l_i < L$) we shall apply formula (16) and for those whose fibre lengths are greater than L ($l_i > L$), the formula (15). We obtain therefore

$$B^2(L) = V_s^2\left[\sum_{(l_i<L)} \tau_i\left(\frac{l_i}{L} - \frac{l_i^2}{3L^2}\right) + \sum_{(l_i>L)} \tau_i\left(1 - \frac{L}{3l_i}\right)\right], \tag{17}$$

which can also be written under two other forms :

$$B^2(L) = V_s^2\left[\sum_1^H \tau_i\left(\frac{l_i}{L} - \frac{l_i^2}{3L^2}\right) + \sum_{(l_i>L)} \tau_i \frac{(l_i - L)^3}{3L^2 l_i}\right], \tag{17 a}$$

or

$$B^2(L) = V_s^2\left[\sum_1^H \tau_i\left(1 - \frac{L}{3l_i}\right) + \sum_{(l_i<L)} \tau_i \frac{(L - l_i)^3}{3L^2 l_i}\right]. \tag{17 b}$$

The above formulae for $B(L)$ can be obtained also by another way, using the Breny's relationships [4] for each elementary sliver having the characteristics specified above. Thus, for the slivers which have $l_i > L$,

$$B_i^2(L) = V_i^2\left(1 - \frac{L}{3L_i}\right) \tag{18}$$

and for these which have $l_i < L$,

$$B_i^2(L) = V_i^2\left(\frac{l_i}{L} - \frac{l_i^2}{3L^2}\right). \tag{19}$$

The external variances $\sigma^2{}_i(L)$, corresponding to the coefficients of variation $B_i(L)$, will have the form

$$\sigma_i^2(L) = B_i^2(L)\,\bar{A}_i^2 = B_i^2(L)\,\bar{n}_i^2\,a_i^2. \tag{20}$$

The sliver which results by adjoining the H elementary slivers will have an external coeficient of variation $B^2(L)$ and an external variance $\sigma^2(L)$, between which subsists the relationship

$$\sigma^2(L) = B^2(L)\,\bar{S}^2 = B^2(L)\left(\sum_1^H \bar{n}_i\,a_i\right)^2. \tag{21}$$

As the elementary slivers are considered stochasticaly independent, we can apply the rule of addition of the variances $\sigma^2(L) = \sum_1^H \sigma_i^2(L)$ or, after substitutions,

$$B^2(L) = \frac{1}{\left(\sum_1^H n_i a_i\right)^2} \sum_1^H B_i^2(L)\, \bar{n}_i^2 a_i^2 . \tag{22}$$

Here, there are also three cases :

First case : $L < l_{min}$ (i.e. all $l_i > L$). After replacing V_i^2 through $V_i^2 = 1/\bar{n}_i$, we get

$$B^2(L) = \frac{1}{(\sum \bar{n}_i a_i)^2} \sum \bar{n}_i a_i^2 \left(1 - \frac{L}{3 l_i}\right).$$

Multiplying and dividing by $\sum \bar{n}_i a_i^2$, and considering the relationships (8) and (11), it results finally the same formula (15).

Second case : $L > l_{max}$ (i.e. all $l_i < L$). After replacing V_i^2 it follows

$$B^2(L) = \frac{1}{(\sum \bar{n}_i a_i)^2} \sum \bar{n}_i a_i^2 \left(\frac{l_i}{L} - \frac{l_i^2}{3L^2}\right),$$

which reduces to (16) taking into account (8) and (11).

Third case : $l_{min} < L < l_{max}$. We get

$$B^2(L) = \frac{1}{(\sum n_i a_i)^2} \left[\sum_{(l_i < L)} \bar{n}_i a_i^2 \left(\frac{l_i}{L} - \frac{l_i^2}{3L^2}\right) + \sum_{(l_i > L)} \bar{n}_i a_i^2 \left(1 - \frac{L}{3 l_i}\right) \right],$$

which reduces to (17) or to one of the derivated forms (17 a) or (17 b).

Particular cases : 1. The fibres of all elementary slivers have the same fineness but different lengths ($a_i = \text{const.}$, $l_i \neq \text{const.}$). In this case, the ratio factors τ_i (11) become $\tau_i = \bar{n}/\sum \bar{n}_i$. But, as it follows from Appendix 2, $\bar{n}_i / \sum \bar{n}_i = \nu_i = \alpha_i l_i / \bar{l}$, where α are the ratio factors of the number of fibres of length l_i in the whole fibre mass and $\bar{l}$, the mean fibre length calculated with the ratios α_i. If $a_i = \text{const.}$, the relationship (15) becomes, after substitutions

$$B^2(L) = V_s^2 \left(1 - \frac{L}{3\bar{l}}\right). \tag{24}$$

This is similar (18) in which the single fibre length l_i was replaced by the mean lenght $\bar{l}$. So, it follows that in the case $L < l_{min}$ the external irregularity $B(L)$ does not depend on the fibre length's irregularity, but only on their mean. This is easy to understand, as long as the length L is entirely covered by any fibre, however short it would be. Another situation is in the case $L > l_{max}$ (16). Substituting here the τ_i by $\alpha_i l_i / \bar{l}$ it follows

$$B^2(L) = V_s^2 \sum_1^H \frac{a_i l_i}{\bar{l}} \left(\frac{l_i}{L} - \frac{l_i^2}{3L^2} \right).$$

But

$$\sum a_i l_i^2 = (\bar{l})^2 [1 + V^2(l)], \tag{25}$$

where $V(l)$ is the coefficient of variation of the fibre lengths in fibre mass, while

$$\sum a_i l_i^3 = (\bar{l})^3 [1 + 3 V^2(l) + A(l) V^3(l)]. \tag{26}$$

Here, in addition, $A(l)$ represents the assimetry index of the fibre length distribution, in mass. After substitutions, we get

$$B^2(L) = V_s^2 \left| \frac{\bar{l}}{L} - \frac{\bar{l}^2}{3L^2} + V^2(l) \left(\frac{\bar{l}}{L} - \frac{\bar{l}^2}{L^2} \right) - A(l) V^3(l) \frac{\bar{l}^2}{3L^2} \right|. \tag{27}$$

The above formula shows that, even if the fibres have the same fineness, the external irregularity does not come to its analogous (19) for a single sliver. Beside the mean fibre length, there appear here also other characteristics of the length's distribution (coefficient of variation, assimetry). The relationship (27) could be reduced to (19) only if the fibre length irregularity would be very small (e.g. man-made fibres). The greater the fibre length irregularity, the greater the sliver external irregularity. The influence of the last term in the right member of (27) is small as compared to the influence of other ones. In case of fibre length distributions with negative assimetry (cotton fibres), the last term becomes positive, and the external irregularity grows worse. In the same conditions ($a_i = \text{const}$), formula (17 b) becomes after transformations and substitutions

$$B^2(L) = V_s^2 \left| 1 - \frac{L}{3\bar{l}} + \frac{1}{\bar{l}L} \sum a_i (L - l_i)^3 \right|. \tag{28}$$

2. Another particular case, examined by J. Martindale and J. S. Rao [6] is that in which lengths l_i and finenesses a_i are uncorrelated. Supposing that the correlation coefficients between l and a, and also between their different powers, are equal to zero, we get the same relationships (24) and (27).

The $B(L)$ curve has three distinct sections, corresponding to the three above analysed cases, indicated by (15), (16) and (17 b) or (24), (27) and (28) (fig. 2).

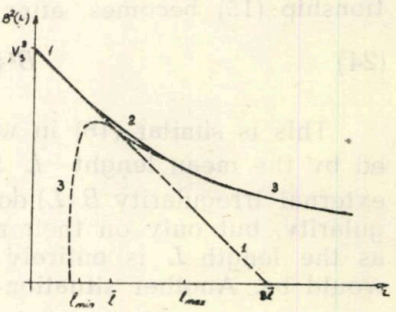


Fig. 2

The first section belongs to the straight line *1-1*, corresponding to equation (24). It joins the points of coordinates $(0, V_s^2)$ and $(3\bar{l}, 0)$, and subsists only in the interval between abscissae 0 and l_{min}.

The second section is a curve arc comprised between abscissae l_{min} and l_{max} (curve 2), corresponding to equation (28).

The third section belongs to the curve *3-3*, corresponding to the equation (27) and subsists everywhere $L > l_{max}$. The curve *3-3* intersects the x-axis in the point $\bar{l}/3$, has a maximum at $L = 2\bar{l}/3$, and an inflexion point at $L = \bar{l}$. In the same point, it intersects the straight line *1-1*. In Fig. 3, there are plotted the external irregularity curves for different values of the fibre length coefficient of variation. The first section of the $B(L)$ curve, for which $L < l_{min}$ is not affected by the fibre lenght irregularity, as are the two others. These latter show an increasing external irregularity $B(L)$ as the fibres have more irregular lengths.

4. The spectral function (or density)

The spectral density of a sliver formed by superposition of the H elementary slivers, may be calculated with the following relationship [7, p. [12]

$$g_s(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Phi(u)\cos\omega u\,du\,. \tag{29}$$

Since, on the other hand, $\Phi(u) = \sum_1^H \varphi_i(u)$ it follows, after substitution

$$g_s(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty [\sum \varphi_i(u)]\cos\omega u\,du\,,$$

or

$$g_s(\omega) = \frac{2}{\pi}\sum_1^H \int_0^\infty \varphi_i(u)\cos\omega u\,du\,. \tag{30}$$

But each term which compose the sum in the right member, represents the spectral density of any elementary sliver, i.e.

$$g_i(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \varphi_i(u)\cos\omega u\,du\,. \tag{31}$$

It follows therefore

$$g_s(\omega) = \sum_1^H g_i(\omega), \tag{32}$$

i.e. the spectral density of the resultant sliver cross-sections is equal to the sum of the elementary sliver's spectral densities. On the other hand, each elementary sliver has a spectral density (see Appendix 3)

$$g_i(\omega) = \frac{2}{\pi}\frac{\bar{n}_i a_i^2}{l_i}\frac{1}{\omega^2}(1 - \cos l_i\omega). \tag{33}$$

Then, for the resultant sliver

$$g_s(\omega) = \frac{2}{\pi\omega^2}\sum_1^H \frac{\bar{n}_i a_i^2}{l_i}(1 - \cos l_i\omega). \tag{34}$$

A particular case is that in which all the slivers have fibres of the same fineness ($a_i = a = \text{const}$) but of different lenghts. From (42) we get

$$g_s(\omega) = \frac{2a^2}{\pi\omega^2}\sum_1^H n_i \frac{(1 - \cos l_i\omega)}{l_i}.$$

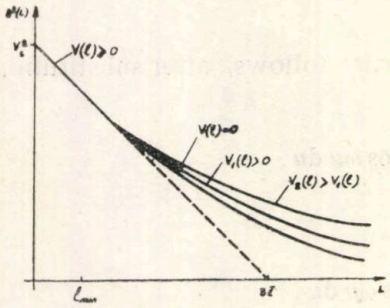


Fig. 3

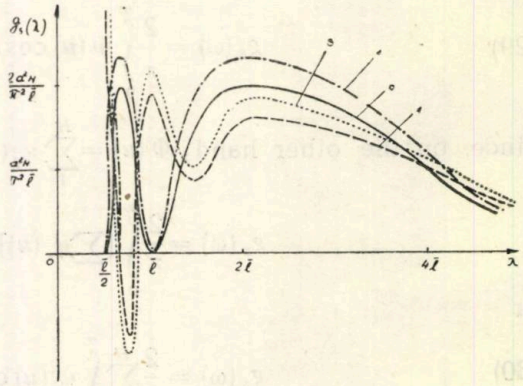


Fig. 4

But, from Appendix 1,

$$n_i = N\frac{\alpha_i l_i}{\sum \alpha_i l_i} = N\frac{\alpha_i l_i}{l},$$

and substituting it in the above relation, this becomes

$$g_s(\omega) = \frac{2a^2}{\pi\omega^2}\frac{N}{\bar{l}}\sum_1^H \alpha_i (1 - \cos l_i \omega),$$

or

$$g_s(\omega) = \frac{2a^2}{\pi\omega^2}\frac{N}{\bar{l}}\left[1 - \sum_1^H \alpha_i \cos l_i \omega\right]. \tag{35}$$

The sum from the brackets can be written in another form, if $\cos l_i\omega$ is developped in Taylor series, after putting $\cos l_i\omega = f(l_i) = f(\bar{l} + \delta_i)$:

$$f(\bar{l} + \delta_i) = f(\bar{l}) + \delta_i f'(\bar{l}) + \frac{\delta_i^2}{2} f''(\bar{l}) + \ldots,$$

$$\cos l_i \omega = \cos \bar{l}\omega - \delta_i \omega \sin \bar{l}\omega - \frac{\delta_i^2}{2}\omega^2 \cos \bar{l}\omega + \ldots$$

and

$$\sum_1^H \alpha_i \cos l_i \omega = \cos \bar{l}\omega - \frac{\omega^2}{2}\cos \bar{l}\omega \sum_1^H \alpha_i \delta_i^2 + \ldots,$$

or

$$\sum_1^H \alpha_i \cos l_i \omega = \cos \bar{l}\omega - \frac{\omega^2}{2}\cos \bar{l}\omega\, D(l) + \ldots.$$

Neglecting the terms of order higher than 2, we get finaly

$$g_s(\omega) = \frac{2a^2}{\pi\omega^2}\frac{N}{\bar{l}}\left[1 - \cos \bar{l}\omega + \frac{\bar{l}^2\omega^2}{2} V^2(l) \cos \bar{l}\omega\right]. \tag{36}$$

Another particular case is that in which the slivers have fibres of the same length ($l_i = l = \text{const}$) but of different finenesses. This case is more simple because $g_s(\omega) = [2/\pi\omega^2 l)](1 - \cos l\omega)\sum_1^H n_i a_i^2$ and the sum in the right member is $\sum_1^H n_i a_i^2 = N\sum_1^H \nu_i a_i^2 = N\bar{a}^2[1 + V^2(a)]$. Thus, the spectral density of such a sliver is

$$g_s(\omega) = \frac{2}{\pi}\frac{\bar{a}^2 N(1 - \cos l\omega)}{\omega^2 \quad l}[1 + V^2(a)]. \tag{37}$$

In a third particular case, neither the length nor the fineness of the fibres are constant, but these two variables are uncorrelated. An approximate solution of this case leads to the following expression, which we present bellow without demonstration :

$$(38) \qquad g_s(\omega) = \frac{2\bar{a}^2 N}{\pi\omega^2 \bar{l}}\left[1 - \cos \bar{l}\omega + \frac{\bar{l}^2 \omega_i^2}{2} \cos \bar{l}\omega \, V^2(l_j)\right][1 + V^2(a)].$$

Other forms for the above relationships can be obtained if we express the frequency ω in terms of the wave-length λ ($\lambda = 2\pi/\omega$). In general

$$(34') \qquad g_s(\lambda) = \frac{1}{\pi^2} \sum_1^H \frac{n_i a_i^2}{l_i}\left(1 - \cos \frac{2\pi}{\lambda} l_i\right).$$

The first particular case becomes (Fig. 4, curve *1*)

$$(36') \qquad g_s(\lambda) = \frac{a^2 N}{\pi^2 \bar{l}}\left[1 - \cos \frac{2\pi}{\lambda} \bar{l} + \frac{2\pi^2 \bar{l}^2}{\lambda^2} V^2(l) \cos \frac{2\pi}{\lambda} \bar{l}\right],$$

the second (Fig. 4, curve 2) :

$$(37') \qquad g_s(\lambda) = \frac{\bar{a}^2 N}{\pi^2 \bar{l}}\left(1 - \cos \frac{2\pi}{\lambda} l\right)[1 + V^2(a)]$$

and the third (Fig. 4, curve 3) :

$$(38') \qquad g_s(\omega) = \frac{\bar{a}^2 N}{\pi^2 \bar{l}}\left[1 - \cos \frac{2\pi}{\lambda} \bar{l} + \frac{2\pi^2 \bar{l}^2}{\lambda^2} V^2(l) \cos \frac{2\pi}{\lambda} \bar{l}\right][1 + V^2(a)].$$

From the above equations it results that the irregularity of fibre fineness makes the spectral density greater in all its points, at the same rate $[1 + V^2(a)]$ as the general irregularity of the sliver. The irregularity of the fibre length's makes greater only the small values of the spectral density, diminishing in the same time the great values.

APPENDIX 1. The characteristics of the elementary slivers composed of fibres of constant length and fineness

The model sliver has a length Z (in general large) and is composed of fibres of the same length l and the same fineness a (cross-section area). The sliver has S fibres situated on S distinct and independent lines, the position of a fibre along ist line beeing random.

If we note with $a(x)$ the fibre cross-section area in the point of abscissa x, then

$$a(x)\begin{cases} = a & \text{if } x_1 \leqslant x \leqslant x_1 + l, \\ = 0 & \text{if } x < x_1 \text{ or } x > x_1 + l, \end{cases}$$

where x is the abscissa of the fibre left end. The probability that the cross-section of the line will be not zero, is equal to the probability that abscissa x will be comprised between the two ends of the fibre, i.e. $P[a(x) = a] = l/Z$.

If $a(x+u)$ is the fibre cross-section in the point of abscissa $x+u$, then

$$a(x+u)\begin{cases} = a & \text{if } x_1 \leqslant x+u \leqslant x_1+l, \\ = 0 & \text{if } x+u < x_1 \text{ or } x+u > x_1+l \end{cases}$$

and $P[a(x+u)=a] = l/Z$. On the other hand, the product $a(x)\,a(x+u)$ will be

$$a(x)\,a(x+u)\begin{cases} = a^2 & \text{if } a(x)=a \text{ and } a(x+u)=a, \\ = 0 & \text{if } a(x)=0 \text{ or } a(x+u)=0. \end{cases}$$

The probability to realize simultanously the conditions $a(x)=a$ and $a(x+u)=a$ is equal to the probability that both the abscissae x and $x+u$ will be comprised between the fibre ends, i.e.

$$P\{[a(x)=a] \cap [a(x+u)=a]\} = \frac{l-u}{Z}.$$

Averaging along a line, we shall have succesively:

(A.1) $$M[a(x)] + M[a(x+u)] = a\frac{l}{Z},$$

(A.2) $$M[a(x)\,a(x+u)] = a^2\frac{l-u}{Z},$$

(A.3) $$M[a^2(x)] = a^2\frac{l}{Z}.$$

The variance of a line

(A.4) $$D[a(x)] = M[a^2(x)] - M^2[a(x)] = a^2\frac{l}{Z}\left(1-\frac{l}{Z}\right).$$

The autocovariance of a line

(A.5) $$\operatorname{cov}[a(x),\ a(x+u)] = M[a(x)\,a(x+u)] - M^2[a(x)] = a^2\frac{l}{Z}\left(1-\frac{u}{l}-\frac{l}{Z}\right).$$

Noting with $A(x)$ and $A(x+u)$ the sliver's cross-section area in the point of abscissa x respectively $x+u$, and taking into account that the sliver is formed by superposition of the S independent lines, we shall get $A(x) = \sum_1^S a_i(x)$ and

$$M[A(x)] = M\left[\sum_1^S a_i(x)\right] = \sum_1^S M[a_i(x)] = Sa\frac{l}{Z}.$$

On the other hand, the product Sl represents the cumulated length of all the fibres in the sliver. This length is also equal to the product between the sliver length Z and the fibre mean number in its cross-section, $\bar{n}$, so that

(A.6) $$\bar{n} = \frac{Sl}{Z}.$$

Hence

(A.7) $$M[A(x)] = \bar{n}a.$$

The variance of the sliver's cross-section will be equal to the sum of the line's variances, i.e.

$$D[A(x)] = \sum_{1}^{S} D_i[a(x)] = \bar{n}a^2\left(1 - \frac{l}{Z}\right) \tag{A.8}$$

and the corresponding coefficient of variation

$$V^2[A(x)[= \frac{D[A(x)]}{M^2[A(x)]} = \frac{1}{\bar{n}}\left(1 - \frac{l}{Z}\right) . \tag{A.9}$$

The autocovariance of the slivers cross-seections, u apart,

$$\operatorname{cov}[A(x),\ A(x+u)] = \sum_{1}^{S} \operatorname{cov}_i[a(x),\ a(x+u)] = \bar{n}a^2\left(1 - \frac{u}{l} - \frac{l}{Z}\right) \tag{A.10}$$

and the corresponding correlation coefficient

$$r(u) = \frac{\operatorname{cov}[A(x),\ A(x+u)]}{D[A(x)]} = 1 - \frac{u}{l}\left(\frac{1}{1 - l/Z}\right) . \tag{A.11}$$

If the sliver length Z is much larger than the fibre lenth l, the ratio l/Z can be neglected in comparison with the unity, and all the last formulae can be simplified by putting $l/Z. = 0$.

APPENDIX 2. The fibre distribution in the sliver cross-section and in the fibre-mass

Let be a sliver length Z (in general large) in which there are fibres of different lengths l_i, so as $l_i \ll Z$. In this fibre-mass there are S_i fibres of this length l_i, and in the sliver cross-section there are, on the average, n_i fibres of this length, so that (see Appendix 1)

$$n_i = \frac{S_i l_i}{Z} . \tag{A.12}$$

The total fibre mean-number in the sliver cross-section is

$$\sum n_i = \frac{1}{Z}\sum S_i l_i . \tag{A.13}$$

The ratio between n_i and $\sum n_i$ represents the share ratio (frecquency) of the of length l_i in the sliver cross-section

$$\nu_i = \frac{n_i}{\sum n_i} = \frac{S_i l_i}{\sum S_i l_i} . \tag{A.14}$$

Dividing both the numerator and the denominator of (A.14) to the general constant $\sum S_i$ and taking into account that the ratios

$$\alpha_i = \frac{S_i}{\sum S_i} \tag{A.15}$$

represents the share ratios of the fibres in mass, it results

(A.16) $$\nu_i = \frac{\alpha_i l_i}{\sum \alpha_i l_i} = \frac{\alpha_i l_i}{\overline{l}},$$

where $\overline{l} = \sum \alpha_i l_i$ is the fibre mean length in mass.

Observation: the share ratios of the fibre number in sliver cross-sections, are equal to the share ratios of the fibre length in fibre-mass [5].

APPENDIX 3. The spectral density of the slivers composed of fibres of constant length and fineness

For an elementary sliver composed of fibres of length l_i and fineness a_i, having n_i fibres in cross-section, there is the following relationship between the spectral density and the correlation function :

(A.17) $$g_i(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{cov}_i(u) \cos \omega u \, du$$

where (see also (A.10)) $\mathrm{cov}_i(u) = \overline{n}_i a_i^2 (1 - u/l_i)$.

By substitution it results

(A.18) $$g_i(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \overline{n}_i a_i^2 \left(1 - \frac{u}{l_i}\right) \cos \omega u \, du.$$

The upper integration limit in (A.18) may be replaced by l_i, because for any $u > l_i$, $\mathrm{cov}_i(u) = 0$. Therefore,

(A.19) $$g_i(\omega) = \frac{2\overline{n}_i a_i^2}{\pi} \int_0^{l_i} \left(1 - \frac{u}{l_i}\right) \cos \omega u \, du,$$

which, after integration, becomes

(A.20) $$g_i(\omega) = \frac{2\overline{n}_i a_i^2}{\pi l_i} \frac{1}{\omega^2} (1 - \cos l_i \omega),$$

or, in terms of $\lambda = 2\pi/\omega$

(A.21) $$g_i(\lambda) = \frac{a_i^2 \overline{n}_i}{\pi^2 l_i} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{\lambda} l_i\right)$$

(see Fig. 4, curve *0*).

Polytechnic Institute, Jassy

REFERENCES

1. Martindale J. G., *A new method of measuring the irregularity of yarns.* J.T.I., 1945, **35,** p. 36.
2. Townsend M. W. H., Cox D. R., *The analysis of yarn irregularity.* J.T.I., 1951, **42,** p. 107.

3. Cox D. R., Townsend M. W. H., *The use of correlograms for measuring yarn irregularity*. J.T.I., 1951, **42**, p. 145.
4. Breny H., *The calculation of the variance length curve from the length distribution of fibres*. J.T.I., 1953, **44**, p. 1.
5. Zeidman M., *Calculul unor caracteristici de structură ale amestecurilor de fibre textile*. Bul. Inst. polit. Iaşi, **VI (X)**, 3—4, 1960, p. 437.
6. Sudarsana Rao J., *A mathematical model for the sliver and its applications to the theory of roller drafting*. J.T.I., 1961, **52**.
7. Севастьанов А. Г., *Методы исследования неровноты продуктов прядения*. Ростехиздат, М., 1962.

CARACTERISTICILE BENZILOR ALEATOARE FORMATE DIN AMESTECURI DE FIBRE

(Rezumat)

În lucrarea de faţă se utilizează un model de bandă aleatoare, simplu şi sugestiv, care permite utilizarea formulelor deduse pe baza lui la cazul amestecurilor de fibre, cu deosebire la cele obţinute prin dublare. Acest model este realizat prin alăturarea unor linii de fibre şi apoi a unor benzi elementare, fiecare dintre ele reprezentînd cîte un component.

Lucrarea analizează influenţa celor mai importante însuşiri ale fibrelor (lungime şi fineţe) asupra caracteristicilor benzilor. Astfel, în formulele neregularităţii exterioare ((14) şi următoarele) apare funcţia de frecvenţă τ care depinde în mod esenţial de fineţea fibrelor (11). După elaborarea unor relaţii care generalizează pe cele ale lui H. Breny şi J. S. Rao (15)...(17), se trece la analiza unor cazuri particulare care pun în evidenţă influenţa principalelor caracteristici ale lungimii fibrelor asupra neregularităţii exterioare a benzii: lungimea medie, coeficientul de variaţie, asimetria (27).

Influenţa variaţiei lungimii de fibră şi fineţei fibrelor asupra densităţii spectrale a benzii, este pusă în evidenţă prin relaţiile (36)...(38) sau (36')...(38'). Aceste relaţii, corespunzătoare unor cazuri particulare frecvente au rezultat printr-o dezvoltare în serie Taylor.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

Д. К. 677.06

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВОЛОКНОСТОГО СОСТАВА И ОТДЕЛКИ НЕКОТОРЫХ ВИДОВ ПЛАТЬЕВЫХ ТКАНЕЙ НА ИХ ИЗНОС ОТ СТИРОК

Б. Д. СЕМАК и Г. З. БОНДЯ

1. В настоящей работе мы задались целью выяснить, какое влияние оказывает замена в тканях из вискозных комплексных нитей утка на вискозную штапельную и лавсано-вискозную пряжу, а также несминаемая отделка тканей на базе диметилолэтиленмочевины [1] на износ этих тканей от стирок.

Стирка образцов производилась в стиральной машине „Тула—2" с применением хозяйственного 60 %-ного мыла концентрацией 5 г/л и кальцинированной соды 1 г/л; время стирки 30 мин и температура стирального раствора 40...45°С. После стирки производилось троекратное полоскание образцов в стиральной машине (каждое продолжительностью 2 мин). Глажение образцов после сушки производилось электроутюгом весом 2,5 кг при температуре подошвы утюга в пределах 100...130°С.

Степень повреждения образцов в процессе стирок оценивалась по изменению приведенной прочности и разрывного удлинения, определяемых на динамометре РТ—250 разрывом малых полосок (50×25мм) по стандартной методике. Гарантийная ошибка находилась в пределах 2...3%.

Данные изменения механических свойств тканей (плюс — повышение, минус — понижение) под действием стирок приведены в таблице 1.

2. Установлено, что природа и структура волокнистого состава, а также вид отделки исследуемых тканей оказывают решающее влияние на характер изменения прочности и разрывного удлинения этих тканей в процессе стирок. Так, например, если после 20-ти стирок отбеленная ткань арт. 3426 с утком из вискозных комплексных нитей понижает свою прочность по утку на 2,5 %, а аналогичная ткань с утком из

Таблица 1

Вид ткани / Число стирок	Ткань арт. 3426 с утком из вискозных комплексных нитей				Ткань типа арт. 3426 с утком из вискозной штапельной пряжи				Ткань типа арт. 3426 с утком на лавсано-вискозной пряжи			
	отбеленная		отбеленная с несминаемой отделкой		отбеленная		отбеленная с несминаемой отделкой		отбеленная		отбеленная с несминаемой отделкой	
	основа	уток	основа	уток	основа	уток	основа	уток	основа	уток	основа	уток
Прочность на разрыв до стирок, кгс	28,9	20,2	26,0	22,2	27,5	16,5	26,5	16,3	30,0	25,3	26,8	23,5
Изменение прочности после стирок, %												
5-й	—	—	+ 10,5	+ 16,6	—	—	—	—	+ 5,5	— 12,6	+ 2,9	— 18,0
10-й	+ 2,2	+ 18,1	+ 3,9	+ 14,1	— 2,3	— 28,9	+ 11,4	— 3,6	— 1,8	— 16,0	+ 8,9	— 18,5
15-й	—	—	+ 0,4	+ 7,5	—	—	—	—	— 19,7	— 16,3	+ 6,7	— 20,5
20-й	— 24,3	— 8,7	— 2,5	+ 4,9	— 14,5	— 50,5	— 5,0	— 28,8	— 18,0	— 17,6	— 2,3	— 22,2
Разрывное удлинение до стирок, %	19,7	48,5	18,3	35,0	16,1	35,8	18,7	26,1	19,4	52,0	18,5	37,1
Разрывное удлинение после стирок, %												
5-й	—	—	20,0	29,2	—	—	—	—	33,0	45,2	24,6	32,6
10-й	36,0	36,6	20,0	38,0	33,2	34,0	26,6	32,6	40,6	48,0	30,0	36,6
15-й	—	—	26,0	38,0	—	—	—	—	34,6	52,6	26,6	38,0
20-й	35,4	39,0	28,6	37,4	34,0	28,0	26,0	26,0	33,2	52,0	30,0	37,4

*) Знаком + (плюс) показано повышение, знаком — (минус) — понижение прочности.

лавсано-вискозной нити (67 % лавсана + 33 % вискозного штапеля) 17,6 %, то понижение прочности ткани с утком из вискозной штапельной пряжи достигает 50,5 %.

Такое существенное различие в степени повреждения в уточном направлении в процессе стирок тканей с утком из вискозных комплексных нитей по сравнению с тканями с утком из вискозной штапельной пряжи следует объяснить, по-видимому, тем, что вискозные комплексные нити вследствие наличия непрерывных филаментов, менее чувствительные к действию щелочных растворов и, как отмечает Е. Г. Эйгес [2], примерно в 2 раза меньше разрушаются истиранием в мокром состоянии.

Сравнительно более интенсивное понижение прочности по утку в тканях с утком из лавсано-вискозной пряжи по сравнению с однотипными тканями с утком из вискозных комплексных нитей объясняется, по-видимому, только тем, что ослабление ткани в уточном направлении происходит главным образом за счет разрыхления структуры пряжи. При этом следует заметить, что при такой замене равнопрочность структуры ткани в направлении основы и утка практически не изменяется. Так, если после 20-ти стирок ткань типа арт. 3426 с утком из лавсано-вискозной пряжи теряет по основе 18,0 % своей прочности, то по утку соответственно 17,6 %.

Существенное различие в степени потери прочности по утку в тканях с утками из вискозной штапельной и лавсано-вискозной пряжи объясняется различной чувствительностью уточной пряжи к действию химикалий и механических воздействий в процессе стирок.

Далее установлено, что несминаемая отделка значительно замедляет интенсивность понижения прочности тканей в процессе стирок. При этом замечено, что эффективность защитного действия несминаемого аппрета в значительной мере определяется природой применяемых в тканях пряжи и нитей. Так, если необработанные ткани с утком из вискозной штапельной пряжи понижает свою прочность по утку после 20-ти стирок на 50,5 %, а обработанные на 28,8 %, то необработанные и обработанные ткани с утком из лавсано-вискозной пряжи примерно одинаково теряют по утку свою прочность. Это следует объяснить тем, что диметиолл этиленмочевина, вследствие большой компактности внутримолекулярной структуры лавсана, практически с этим волокном не связывается.

Характерно отметить, что если при введении в ткани по утку взамен матированных вискозных комплексных нитей вискозной штапельной пряжи из блестящего волокна (такая замена на внешнем виде ткани практически не отражается) светоустойчивость этих тканей по утку увеличивается более чем в 2 раза [3], то устойчивость к действию многократных стирок тканей с утком из вискозной штапельной пряжи примерно в 2...3 раза ниже, чем тканей из вискозных комплексных нитей.

3. Следовательно, в тканях из матированных нитей целесообразно применять уток из вискозной штапельной пряжи только в том ассортименте (себестоимость этих тканей заметно ниже), в износе которого решающую роль играет солнечная радиация (занавесочные, декоративные и другие ткани); и такая замена является нерациональной для тканей, на износ которых решающее влияние оказывают стирки (бельевые, сорочечные и другие ткани).

Замечено также, что несминаемая отделка приводит к понижению разрывного удлинения примерно на 20...30 %. При этом, по мере вымывания смолы разница в величине разрывного удлинения в обработанных и необработанных образцах с увеличением числа стирок последовательно сокращается.

Таким образом, заметное понижение чрезмерной растяжимости образцов в результате несминаемой отделки способствует улучшению их потребительных свойств.

Поступила 21 XII 1965 г.

Львовский торгово-экономический институт, СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Семак Б. Д., *Исследование физико-механических свойств летних платьевых тканей разного волокнистого состава.* ИВУЗ, Технология текстильной промышленности, 19[illegible]3, *6.*
2. Эйгес Е. Г., *Об улучшении прядильных и эксплуатационных свойств вискозного штапельного волокна.* Текстильная промышленность, 1965, *3.*
3. Семак Б. Д., *Светоустойчивость летних платьевых тканей из химических волокон.* Текстильная промышленность, 1963, *8.*

STUDIUL INFLUENŢEI COMPOZIŢIEI FIBRELOR ŞI A FINISĂRII UNOR ŢESĂTURI ASUPRA UZURII LOR LA SPĂLAT

(Rezumat)

Se analizează influenţa compoziţiei fibrelor şi a finisării pentru neşifonabilitatea materialului asupra uzurii ţesăturilor din fibre combinate sub acţiunea spălărilor repetate.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 667.643.54

INTENSIFICAREA PROCESULUI DE VOPSIRE PRIN CÎMPURI ELECTRICE DE ÎNALTĂ FRECVENŢĂ ŞI PRIN CÎMPURI MAGNETICE

DE

FLORIN VĂLU şi I. LUCA

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Consideraţii generale

Din literatura de specialitate este cunoscut că procesul de vopsire poate fi intensificat pe cale termică, cu electroliţi [1], [2], prin agitare cu cîmp vibrator [3], [4] şi cu cîmp ultrasonor [5].

În lucrare s-a urmărit intensificarea procesului de vopsire pe alte două căi: în cîmp electric de înaltă frecvenţă şi în cîmp magnetic, pe baza unor analogii ce se pot stabili între intensificarea prin metodele cunoscute şi intensificarea ce poate avea loc prin cîmp electric şi magnetic.

Se ştie că difuziunea colorantului în interiorul fibrei este condiţionată de faptul că în perioada iniţială a vopsirii pe suprafaţa fibrei se formează un strat de colorant de concentraţie mai ridicată. Existenţa acestui strat determină colorantul să difuzeze de la periferia fibrei spre centrul ei, dar în acelaşi timp el constituie o barieră pe care particulele de colorant din soluţie trebuie s-o învingă pentru a intra în fibră [6].

Prin aplicarea unui cîmp vibrator sau ultrasonor, stratul limită de la interfaţa material textil-soluţie este mereu modificat, subţiat sau distrus şi viteza de difuziune a colorantului în fibră creşte [7]. Totodată creşte şi gradul de dispersare al colorantului şi deci de uniformizare a soluţiei, procesul de difuziune fiind intensificat [8].

În cazul cîmpului electric de înaltă frecvenţă, materialul textil supus vopsirii se află între două plăci, care reprezintă electrozii condensatorului generatorului de înaltă frecvenţă. În această situaţie

materialul textil este supus unei acțiuni perpendiculare a cîmpului electric de înaltă frecvență ca și în cazul cîmpului ultrasonor [7]. În funcție de frecvența schimbării polarității cîmpului electric de înaltă frecvență, stratul limită de la interfața material-soluție își modifică forma și structura.

La frecvențe mari, cîmpul electric alternativ de înaltă frecvență poate exercita o acțiune de dispersare și repartizare uniformă a particulelor de colorant în soluție. Ca urmare a dispersării, se poate considera că și stratul limită de la suprafața materialului textil, — principala rezistență la difuziune —, are o structură modificată, mai puțin compactă și deci o acțiune inhibitoare mai redusă în procesul de vopsire.

În materialul textil dintre plăcile condensatorului de înaltă frecvență au loc pierderi dielectrice ca rezultat al încălzirii materialului [9]. Apariția căldurii în urma pierderilor dielectrice se explică prin schimbarea periodică a orientării ionilor, ce nu pot urma cu exactitate frecvența de schimbare a cîmpului din cauza frecării interne [10]. Căldura astfel rezultată contribuie și ea la intensificarea procesului de vopsire, atît sub forma cunoscută de intensificare termică, cît și prin eliberarea gazelor incluse în soluție și materialul textil, degazare favorizată de frecvența cîmpului electric, care are ca rezultat o mai bună pătrundere a colorantului în fibră.

Pentru a izola efectul termic al cîmpului electric de înaltă frecvență, determinările noastre au fost conduse la temperaturi mai mici decît cele uzuale în vopsirea curentă.

Micșorarea temperaturii influențează negativ procesul de difuziune al colorantului în fibră, datorită asocierii acestuia în soluție, însă adsorbția colorantului de către fibră este mai intensă [1]. Se crează astfel, la temperaturi joase, condiții favorabile asocierii particulelor de colorant atît în soluție, cît și la suprafața fibrei, ca urmare a creșterii concentrației colorantului în stratul limită ce se formează în perioada inițială a vopsirii datorită adsorbției mai intense. În această situație, din punct de vedere al difuziunii colorantului în fibră, sînt create condiții dezavantajoase datorită tendinței de asociere a colorantului și micșorării temperaturii.

În cazul cîmpului magnetic, materialul textil este așezat între piesele polare ale electromagnetului [11]. În funcție de tipul și intensitatea cîmpului, au loc probabil acțiuni de orientare și de dispersare a particulelor de colorant, modificîndu-se astfel condițiile de transfer de masă care intensifică procesul de vopsire.

2. Partea experimentală

Pentru ambele cîmpuri, electric și magnetic, determinările s-au efectuat cu trei coloranți direcți fabricați în țara noastră, Roșu direct 4A, Albastru direct FF și verde direct A, pe țesături din fibre celu-

lozice în următoarele condiții de lucru: concentrația colorantului 3% din greutatea țesăturii, hidromodulul 1/100.

Cantitatea de colorant fixată pe fibră s-a stabilit prin diferența dintre concentrația inițială și cea finală a soluției de colorant, folosind electrofotocolorimetrul Φ *3K*.

a) *Influența cîmpului electric de înaltă frecvență* s-a urmărit la temperatura de 20 °C, pe instalația din fig. 1 (în care *1* reprezintă suportul, *2* — materialul textil, *3*, *4* — plăcile condensatorului), cu parametrii: frecvența 1 000 kHz și 4 000 kHz, intensitatea 100 mA, distanța între electrozi 2,4 cm.

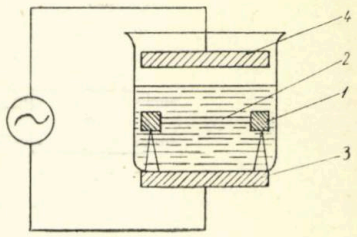


Fig. 1

Tabelul 1

Colorant pe fibră în g/100 g fibră

Nr. crt.	Colorantul	Suportul textil	Temperatura de vopsire °C	Durata vopsirii min	Fără cîmp electric	Cu cîmp electric la frecvența și intensitatea de	
						1000 kHz 100 mA	4000 kHz 100 mA
1	Roșu direct 4 A	șifon	20	20	0,092	0,16	0,24
2	Verde direct A	șifon	20	20	0,031	0,09	0,13
3	Albastru direct FF	șifon	20	20	0,044	0,14	0,19

Din datele experimentale (tabelul 1), rezultă pentru cei trei coloranți o creștere a cantității de colorant legat de fibră în cazul aplicării cîmpului electric.

De asemenea, pentru aceeași intensitate a curentului de alimentare, la frecvențe mai mari, și cantitatea de colorant legată de fibră este mai mare.

b. *Influența cîmpului magnetic* s-a urmărit la temperaturile de 50 ° și 70 °C, pe o instalație (fig. 2) formată dintr-un electromagnet *E*, prin bobinele căruia B_1 și B_2, legate în serie, au fost trecuți curenți pulsatori redresați de către un redresor *R* și curent alternativ de la rețea. În cîmpul magnetic creat între polii electromagnetului s-a așezat țesătura fixată de un suport. Intensitatea acestui cîmp s-a măsurat cu ajutorul unei bobine sondă și a unui fluxmetru.

În cursul determinărilor s-au folosit următoarele tipuri de cîmpuri: 1. cîmpuri magnetice fără întreruperi, produse de curenți redresați pulsatori; 2. cîmpuri magnetice cu întreruperi, produse de curenți

redresaţi pulsatori (notate mai jos CMPI); 3. cîmpuri magnetice fără întreruperi, produse de curentul alternativ de la reţea (notate mai jos CMA).

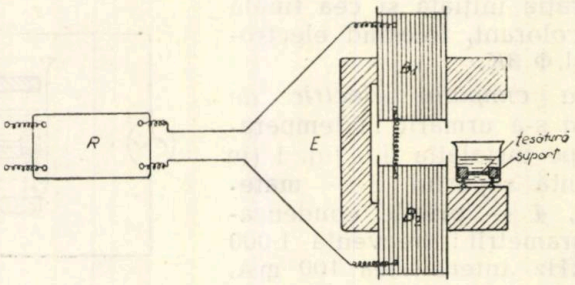


Fig. 2

Pentru redresarea curenţilor s-a folosit fie redresor cu seleniu (cîmpul fiind notat mai jos CMP_1), fie redresor cu lampă (cîmpul notat mai jos CMP_2). Au fost redresate ambele alternanţe ale curentului alternativ, aşa încît curenţii redresaţi au avut 100 pulsaţii pe secundă. Impulsurile cîmpurilor magnetice cu întreruperi au fost de cca. 3 s, iar întreruperile de cca. 1 s.

La intensităţile curenţilor redresaţi pulsatori de 0,5, 1,5, 3, 5 A, corespund cîmpuri de 100, 340, 650, 1 000 gauss, iar pentru curentul alternativ de la reţea de 3, 5 A, cîmpuri de 190, 280 gauss.

Tabelul 2

Colorant pe fibră în g/100 g fibră

Nr. crt.	Colorantul	Suportul textil	Temperatura de vopsire °C	Durata vopsirii min	Fără cîmp magnetic	Cu cîmp magnetic			
						curenţi redresaţi pulsatori			curent alternativ
						fără întreruperi		cu întreruperi	fără întreruperi
						CMP_1 3 A	CMP_2 3 A	CMPI 3 A	CMA 3 A
1	Roşu direct 4 A	şifon	50	10	0,13	0,35	0 42	0,44	0,37
2	Verde direct A	şifon	50	10	0,04	0,11	0,13	0,16	0,12
3	Albastru direct FF	şifon	50	10	0,10	0,14	0,16	0,19	0,15

Din datele tabelului 2 rezultă pentru aceeaşi intensitate a curentului o creştere a cantităţii de colorant fixat pe fibră în cazul vopsirilor efectuate cu cîmp magnetic, pentru toţi cei trei coloranţi.

Tabelul 3

Colorant pe fibră în g/100 g fibră

Nr. crt.	Colorantul	Suportul textil	Temperatura de vopsire °C	Durata vopsirii min	Fără cîmp magnetic	Cu cîmp magnetic, curenţi redresaţi pulsatori		
						fără întreruperi		cu întreruperi
						CMP_1 3 A	CMP_2 3 A	CMPI 3 A
1	Roşu direct 4 A	şifon	70	10	0,17	0,37	0,44	0,46
2	Verde direct A	şifon	70	10	0,06	0,14	0,15	0,18
3	Albastru direct FF	şifon	70	10	0,12	0,17	0,19	0,21

Tabelul 4

Colorant pe fibră în g/100 g fibră

Nr. crt.	Colorantul	Suportul textil	Temperatura de vopsire °C	Durata vopsirii min	Fără cîmp magnetic	Cu cîmp magnetic									
						curenţi redresaţi pulsatori fără întrerupere							curenţi alternativi		
													cu întrerupere	fără întrerupere	
						CMP_1				CMP_2			CMPI	CMA	
						0,5 A	1,5 A	3 A	5 A	1,5 A	3 A	5 A	3 A	3 A	5 A
1	Roşu direct 4 A	şifon	50	10	0,13	0,23	0,31	0,35	0,38	0,40	0,42	0,45	0,44	0,37	0,39
			70	10	0,17	0,26	0,35	0,37	0,39	0,42	0,44	0,46	0,46	0,40	0,43

Creşterile mai mari corespund cîmpului magnetic cu impulsuri, a cărei acţiune este probabil mai mare asupra stratului concentrat de la suprafaţa fibrei şi asupra soluţiei de colorant. Cu ridicarea temperaturii creşte cantitatea de colorant pentru ambele vopsiri, cu şi fără cîmp magnetic, aşa cum rezultă din tabelul 3.

Influenţa intensităţii curentului pentru fiecare tip de cîmp magnetic rezultă din datele tabelului 4. Cu creşterea intensităţii, respectiv a cîmpului, se măreşte şi cantitatea de colorant fixată de fibră, aşa cum se observă în cazul colorantului Roşu direct 4A pentru ambele temperaturi.

3. Concluzii

1. Cîmpul electric de înaltă frecvenţă intensifică procesul de vopsire a ţesăturilor celulozice cu coloranţii direcţi studiaţi, chiar la temperaturi mai mici decît cele uzuale de vopsire.

2. Cantitatea de colorant legată de fibră creşte cu frecvenţa cîmpului electric.

3. Procesul de vopsire este influenţat favorabil de acţiunea cîmpurilor magnetice, în cazul ţesăturilor şi coloranţilor studiaţi.

4. Dintre cîmpurile magnetice utilizate, cele cu impulsuri au acţiune mai eficace în procesul de vopsire.

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de tehnologie chimică textilă
şi
Institutul agronomic, Iaşi

BIBLIOGRAFIE

1. Викерштафф Т., *Физическая химия кращения.* Гизлегпром, М., 1958.
2. Беленький Л. И., *Теория и практика крашения.* Гизлегпром, М., 1958.
3. Ernst W., Textil Rundschau, 1954, *12*, S. 621—628.
4. Grindea M., Vălu F., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, **IX (XIII)**, *1*—2.
5. Котлярский И. Б., Лег. пром., 1953, **18**, *11*.
6. Grindea M., *Tehnologie chimică textilă*, ESDP, Buc., 1961.
7. Vălu F., Luca I., Grindea M., Bul. Inst. polit. Iaşi, 1963, **IX (XIII)**, *3*—*4*.
8. Crawford A. E., *Technique des ultrasons.* Dunod, Paris, 1959.
9. Коганов З. Г., Текст. пром., 1954, **14**, *11*.
10. Cişman A., *Fizică generală.* Ed. II, Ed. Tehn., Buc., 1960.
11. Pierce W., *Magnetochemistry.* Selwood Ed., London, 1956.

THE INTENSIFICATION OF THE DYEING PROCESS THROUGH ELECTRIC-FIELDS OF HIGH FREQUENCY AND THROUGH MAGNETIC FIELDS

(Summary)

The dyeing process is intensified by the electric field of high frequency, even at a lower temperature of dyeing than the usual. At the same time, the magnetic field influences in a favourable way the dyeing process.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 675.02

STUDII PRIVIND OBŢINEREA PIEILOR PENTRU FEŢE DE ÎNCĂLŢĂMINTE CU TERMOSTABILITATE RIDICATĂ

DE

AGLAIA CHIRIŢĂ şi GH CHIRIŢĂ

Comunicare prezentată în sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, din 5—7 februarie 1965

1. Introducere

Într-o lucrare anterioară [1] s-a arătat că pieile de tip box fabricate în ţara noastră şi folosite la producerea încălţămintei după sistemul de confecţionare prin vulcanizare se contractă cu 10...12% cînd sînt încălzite la 140°C şi de asemenea proprietăţile lor fizico-mecanice de alungire şi rezistenţă se înrăutăţesc în general.

Pentru ca pieile de feţe de încălţăminte să-şi modifice cît mai puţin proprietăţile la temperatura de vulcanizare s-au făcut numeroase studii pentru a se găsi o tehnologie de fabricaţie cît mai corespunzătoare [2]...[5]. Atenţia principală a fost îndreptată spre modul de tăbăcire, gresare şi vopsire cu coloranţi de acoperire.

Intensitatea gresării are influenţă în primul rînd asupra aderenţei tălpii de cauciuc la faţa pielii, la fixarea ei prin vulcanizare. Se recomandă ca pieile pentru feţe de încălţăminte tăbăcite complet în crom să conţină cel mult 6% materii grase pentru a avea o bună aderenţă [5].

Progrese însemnate s-au făcut şi în finisarea pieilor de feţe de încălţăminte folosite la confecţionarea prin vulcanizare. În acest scop s-au aplicat vopsele de acoperire pe bază de polimeri termoplastici rezistenţi la temperaturi înalte şi cu pigmenţi ce nu-şi modifică culoarea cu ridicarea temperaturii.

În lucrarea de faţă se studiază posibilitatea reducerii contracţiei pieilor de feţe de încălţăminte încălzite la temperatura de 140°C prin aplicarea unei metode de tăbăcire corespunzătoare. În acest scop s-a experimentat tăbăcirea în crom şi tăbăcirile combinate formol-crom şi crom-tanin.

2. Rezultatele cercetării

1. *Tăbăcirea în crom*

În scopul micşorării contracţiei pieilor de feţe de încălţăminte tăbăcite obişnuit în crom, la încălzirea la 140°C s-a experimentat intensificarea tăbăcirii prin creşterea concentraţiei în oxid de crom a solu-

țiilor tanante, raportat la greutatea pielii gelatină. S-au efectuat trei încercări de tăbăcire în crom, la care s-a folosit 2,5%, 3% și 4% Cr_2O_3.

În vederea experimentărilor s-a folosit piele gelatină-crupon din piei de viței de 3 kg bucata, conservate prin sărare, care s-au cenușerit la bazine cu var și sulfură de sodiu și apoi s-au decalcificat, sămăluit și piclat. Tăbăcirea în crom a avut loc la butoi, cu o flotă de 120% și o soluție bazică de crom de 36,5% bazicitate. Sarea bazică de crom s-a adăugat în trei porțiuni, din 30 în 30 min de la începutul tăbăcirii. Pieile s-au agitat la butoi timp de 8 ore, după care au rămas peste noapte în soluție. Cu două ore înainte de terminarea agitării s-a adăugat 0,8% carbonat de sodiu sub formă de soluție de 10%, în scopul ridicării bazicității soluțiilor de crom. După tăbăcirea în crom, pieile au stat pe boc timp de 24 ore în vederea fixării cromului nelegat din piele, apoi s-au neutralizat și gresat cu 3% ulei de ricin sulfatat și s-au supus uscării. Rezultatele analizelor chimice și fizico-mecanice ale probelor de piele tăbăcite sînt date în tabelul 1.

Tabelul 1

Analiza chimică și fizico-mecanică a probelor de piele tăbăcite în crom

Cr_2O_3 utilizat la tăbăcire %	Umiditatea %	Cenușa %	Cr_2O_3 %	Substanțe grase %	Alungirea la rupere %	Rezistența la tracțiune kgfm/mm²
2,5	0,0	7,46	6,42	2,61	35	2,52
3,0	0,0	7,88	6,79	1,57	34	2,76
4,0	0,0	9,67	8,23	2,35	38	2,75

Probele din piele tăbăcită în crom, cu procente diferite de oxid de crom, condiționate în exicatoare cu 65% umiditate relativă timp de 48 ore, la temperatura camerei, au fost încălzite în etuvă la 140°C timp de 15 min, după care li s-au determinat contracția suprafeței în raport cu suprafața inițială a probelor de piele condiționate. De asemenea s-a urmărit, după 2 și 8 zile de condiționare în exicatoare cu 65% umiditate relativă, dacă contracția suferită la 140°C se menține neschimbată. Probelor de piele tăbăcite în crom li s-au determinat temperatura de contracție, în stare umedă, imediat după tăbăcire și neutralizare. Rezultatele acestor determinări sînt trecute în tabelul 2.

Temperatura de contracție a pieilor tăbăcite crește pe măsură ce se fixează o cantitate mai mare de crom pe fibra dermică. Astfel, probele tăbăcite cu 2,5% Cr_2O_3 au o temperatură de contracție de 105°C, iar cele tăbăcite cu 4% Cr_2O_3 au temperatura de contracție 123°C. În

Tabelul 2

Variația suprafeței probelor tăbăcite în crom în urma încălzirii la 140°C

Cr_2O_3 utilizat la tăbăcire	Temperatura de contracție	Contracția după ț. 15′ min de ședere la 140°C	Contracția (%) probelor tratate la 140°C după condiționare de	
%	°C	%	2 zile	8 zile
2,5	105	14,10	12,67	11,66
3,0	113	13,46	13,07	10,28
4,0	125	11,84	11,04	10,18

schimb, contracțiile suprafeței tuturor probelor de piele în stare uscată la încălzirea lor la 140°C, timp de 15 min au valori foarte apropiate și anume cuprinse între 11,84 și 14,10%. Diferența între contracția probelor tăbăcite cu 2,5% Cr_2O_3 și a celor tăbăctie cu 4% Cr_2O_3 este numai de 2,76%. Aceasta dovedește că intensificarea tăbăcirii în crom influențează într-o mică măsură îmbunătățirea contracției suprafeței pieilor încălzite la 140°C. Din tabelul 2 se observă, de asemenea, că suprafața probelor de piele contractate tinde să se mărească cu timpul.

2. *Tăbăcirea combinată formol-crom*

Prin tăbăcirea combinată formol-crom se pot obține piei pentru fețe de încălțăminte de tip box, cu caracteristici foarte bune [6], [7]. Pe de altă parte, tăbăcirea combinată formol-crom duce la o termostabilitate ridicată a pieilor. Pe baza acestor observații s-a studiat în ce măsură tăbăcirea formol-crom influențează micșorarea contracției suprafeței pieilor încălzite la temperatura de vulcanizare de 140°C.

Probele de piele gelatină obținute din crupoane de piei de vițel de 3 kg, conservate prin sărare, cenușerite cu var și sulfură de sodiu și complet decalcificate, au fost supuse tăbăcirii în formaldehidă. Tăbăcirea cu formaldehidă a avut loc la butoi prin agitare, cu o flotă de 250%, cu cantități diferite de formol de 36% și anume 1,0%, 1,5%, 2%, 3%. S-au introdus în butoi flota, pieile și cantitatea de formol necesară, s-a adus pH-ul la valoarea de 7,0...7,3 cu ajutorul unei soluții de 10% carbonat de sodiu și apoi, după o oră de agitare, s-a coborît pH-ul cu o soluție de acid sulfuric de 2% la valoarea de 6,0...6,2, după altă oră s-a coborît la 4,0...4,2 și apoi la pH = 3,5. La pH = 3,5 pieile s-au mai agitat încă 2 ore și s-au lăsat în soluție peste noapte. Probele de piele astfel formolate au fost împărțite în trei serii și s-au supus tăbăcirii în crom cu 2,5%, 3% și 4% Cr_2O_3, urmîndu-se

același proces tehnologic menționat mai sus. Rezultatele analizelor chimice ale probelor de piele tăbăcite formol-crom sînt date în tabelul 3.

Tabelul 3

Analiza chimică și fizico-mecanică a probelor de piele tăbăcite în formol-crom

Formol de 36% utilizat la tăbăcire %	Umiditatea %	Cenușa %	Cr_2O_3 %	Substanțe grase %	Alungirea la rupere %	Rezistența la tracțiune kgf/mm²
Tăbăcire în crom cu 2,5% Cr_2O_3						
0,0	16,25	6,25	5,50	2,19	35,0	2,52
1,0	16,35	6,41	5,53	1,74	44	2,37
1,5	16,13	6,70	5,45	2,51	44	2,46
2,0	15,71	6,46	5,35	1,43	51	2,38
3,0	16,07	6,37	5,21	2,83	57	2,28
Tăbăcire în crom cu 3% Cr_2O_3						
0,0	17,43	6,51	5,61	1,30	34	2,76
1,0	17,06	6,79	5,50	2,57	36	2,44
1,5	16,95	6,53	5,48	2,30	48	2,45
2,0	17,46	6,46	5,40	2,35	49	2,23
Tăbăcire în crom cu 4% Cr_2O_3						
0,0	15,91	8,14	6,93	2,21	38	2,75
1,0	15,97	7,42	6,73	2,47	38	2,48
1,5	15,88	7,70	6,69	2,50	39	2,38
2,0	16,09	7,12	6,53	2,93	45	2,54

Ca și în cazul pieilor tăbăcite în crom, probele de piele tăbăcite în formol-crom au fost supuse încălzirii la 140°C timp de 15 min, după care s-a urmărit, după 2 zile și 8 zile de condiționare în exicatoare la 65% umiditate, în ce măsură se menține contracția suprafeței probelor în timp. De asemenea, s-a determinat temperatura de contracție în stare umedă a probelor tăbăcite formol-crom. Rezultatele determinărilor sînt trecute în tabelul 4.

Din datele tabelului 4 rezultă că o dată cu creșterea cantităților de crom și formaldehidă utilizate la tăbăcire, temperatura de contracție a pieilor crește intens ajungînd, de exemplu, la 127°C la proba tăbă-

Tabelul 4

Variația suprafeței probelor de piele tăbăcite formol-crom în urma încălzirii la 140°C

Formol de 36% utilizat la tăbăcire %	Temperatura de contracție °C	Contracția după 15 min de ședere la 140°C %	Contracția probelor (%) tratate la 140°C după o condiționare de	
			2 zile	8 zile
Tăbăcire în crom cu 2,5% Cr_2O_3				
0,0	105	14,10	12,67	11,66
1,0	110	13,80	12,66	10,59
1,5	119	13,00	12,25	10,45
2,0	124	12,88	12,61	10,43
3,0	125	12,77	12,28	10,12
Tăbăcire în crom cu 3% Cr_2O_3				
0,0	115	13,46	13,07	10,28
1,0	117	12,50	12,05	11,05
1,5	120	11,12	10,72	9,95
2,0	123	11,01	10,55	9,82
Tăbăcire în crom cu 4% Cr_2O_3				
0,0	125	11,84	11,04	10,18
1,0	125	11,35	11,05	9,29
1,5	126	11,33	11,21	9,72
2,0	127	11,34	11,04	9,23

cită cu 2% formol de 36% și 4% Cr_2O_3. Cu toate acestea, contracția suprafeței pieilor încălzite la 140°C timp de 15 min se micșorează foarte puțin o dată cu intensificarea tăbăcirii. Ca și în cazul pieilor tăbăcite în crom, contracția suprafeței tinde să se micșoreze în timp.

3. *Tăbăcirea combinată crom-tanin*

Spre deosebire de tăbăcirea cu săruri de crom, tăbăcirea vegetală s-a dovedit capabilă să confere pieilor o foarte bună rezistență la căldură în stare uscată. Aceasta a făcut ca diferiți cercetători să propună tăbăcirea combinată crom-tanin ca cea mai corespunzătoare pentru obținerea pieilor de fețe destinate încălțămintei confecționată prin vulcanizare.

MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA BUDAPEST 1848

Pentru a se urmări influența tăbăcirii vegetale asupra micșorării contracției suprafeței pielilor la încălzirea lor la 140°C s-au utilizat 5 probe de piele gelatină obținută ca și în cazurile anterioare, din care 4 probe au fost tăbăcite cu 2,5% Cr_2O_3 raportat la greutatea pielii gelatină urmînd aceiași parametri ca la § **2.1**. Proba 5 a fost supusă tăbăcirii vegetale, static, într-o floră de 500%, cu soluție de extract de quebracho, timp de 12 zile. Tăbăcirea s-a început cu o soluție de 2° Bé. Din 2 în 2 zile densitatea soluției a crescut la 3°, 4° și 5° Bé, după care a fost menținută constantă pînă la împlinirea celor 12 zile.

Probele de piele *2, 3, 4* tăbăcite în crom au fost supuse unor retăbăciri vegetale de intensități diferite. Proba *1* nu a fost supusă tăbăcirii vegetale. Proba 2, după tăbăcirea în crom, a fost introdusă într-o soluție de 3° Bé de extract de querbracho, flota fiind de 500%, unde a rămas în continuare 8 zile fără ca soluția să fie întărită. Proba 3 a fost tăbăcită vegetal la fel ca și proba 2 cu deosebirea că după 4 zile de tăbăcire, soluția a fost întărită la 4° Bé. Proba *4* de asemenea a fost tăbăcită vegetal la fel ca și proba 2 cu deosebirea că după 2 zile densitatea soluției a fost ridicată la 4° Bé, iar după alte 2 zile la 5° Bé.

După tăbăcirea vegetală, toate probele de piele au fost supuse unei spălări intense cu apă, în vederea eliminării taninului nelegat și au fost gresate prin ungere cu ulei de ricin sulfatat și apoi uscate la temperatura camerei.

Pentru a urmări în ce măsură se produce contracția suprafeței, s-au ștanțat două serii de eșantioane și s-au condiționat la 65% umiditate timp de 48 ore. O serie de eșantioane au fost încălzite după condiționare mai întîi 5 ore la 95°C și apoi 15 min la 140°C; a doua serie de eșantioane a fost încălzită direct la 140°C timp de 15 min.

Tabelul 5

Variația suprafeței probelor de piele tăbăcite combinat crom-tanin, în urma încălzirii la 140°C

Proba	Temperatura de contracție	Contracția după 15 min de ședere la 140°C	Contracția probelor (%) tratate la 140°C, după o condiționare de		Contracția după 15 min de ședere la 140°C, după ce în prealabil au stat 5 ore la 95°C	Contracția probelor (%) tratate la 140°C după o condiționare de	
			2 zile	8 zile		2 zile	8 zile
	°C	%			%		
1	104	9,07	6,54	5,53	10,76	9,36	8,89
2	104	8,62	6,22	3,47	8,88	6,33	4,43
3	104	7,82	6,85	4,04	8,52	6,05	3,55
4	105	7,16	5,17	3,67	8,01	6,01	4,07
5	68	5,81	4,44	2,64	7,88	4,94	3,56

În ambele cazuri după tratarea la 140°C s-a urmărit modul cum variază contracția probelor de piele după o condiționare de 2 zile și de 8 zile. Rezultatele determinărilor sînt trecute în tabelul 5.

Din tabelul 5 rezultă că cea mai mică contracție a suprafeței la încălzirea de 140°C se produce la proba de piele tăbăcită vegetal, iar cea mai intensă contracție se produce asupra probei de piele tăbăcită în crom. În cazul probelor de piele tăbăcite crom-tanin, contracția suprafeței scade pe măsură ce se intensifică tăbăcirea vegetală. Încălzirea probelor de piele la 140°C, după ce au fost uscate în prealabil timp de 5 ore la 95°C, pare să ducă la o contracție a suprafeței ceva mai accentuată în toate cazurile. Contracția suprafeței pieilor, după încălzirea la 140°C, pare să se micșoreze în timp.

3. Concluzii

În urma studiilor efectuate rezultă că intensificarea tăbăcirii în crom ca și tăbăcirea combinată formol-crom nu influențează decît într-o mică măsură scăderea contracției suprafeței pieilor la încălzirea la temperatura de vulcanizare de 140°C. În urma tăbăcirii combinate crom-tanin se obțin piei care se contractă puțin la 140°C. Cu cît tăbăcirea vegetală este mai intensă, cu atît contracția suprafeței este mai mică.

Rezultă că pentru încălțămintea confecționată prin vulcanizare, pieile pentru fețe tăbăcite în crom vor trebui supuse unei retăbăciri vegetale pentru ca suprafața lor să se contracte cît mai puțin la temperatura de vulcanizare.

Institutul politehnic, Iași
Catedra de confecții din piele
și
Catedra de tehnologia pielii, blănurilor
și înlocuitorilor de piele

BIBLIOGRAFIE

1. Chiriță A., Chiriță Gh., Bul. Inst. polit. Iași, 1966, **XII (XVI),** *1*—2.
2. Hough A. T., J.I.L.T.C., 1950, *34*, p. 138.
3. Lasserre R., Bul. de l'A.F.C.I.C., 1957, *9*, pp. 155—194.
4. Stather F., Herfeld H., Collegium, 1935, p. 118.
5. * * * Schuh und Leder, 1960, *10*, p. 288.
6. Alexa Gh., Chiriță Gh., Chiriță A., Bul. Inst. polit. Iași, 1960 **VI (X),** *1*—2.
7. Alexa Gh., Chiriță Gh., Chiriță A., Haas H., Nănescu V., Nănescu G., Bul. Inst. polit. Iași, 1960, **VII (XI)** *1*—2.

ÉTUDES CONCERNANT L'OBTENTION DES CUIRS Á DESSUS, RÉSISTANTS À LA TEMPÉRATURE DE 140°C, UTILISÉS DANS LA FABRICATION DES CHAUSSURES VULCANISÉES

(Résumé)

Dans le présent travail les auteurs étudient le comportement à la température de 140°C des cuirs tannés par des divers procédés de tannage: chrôme, formol-chrôme, chrôme-végétal et végétal.

Les résultats obtenus ont montré que le tannage chrôme-végétal donne des cuirs avec une contraction plus petite à 140°C. Avec l'intensification du tannage végétal, on obtient des cuirs ayant un contraction plus petite de la surface.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

C. Z. 338.07

SUR LA FORME SAKAI, UN DES PATRIMOINES DE LA CULTURE NATIONALE CORÉENNE

PAR

KIM ZONG WAN

1. Comme lieu d'émanation de la comptabilité digraphique, inconcevable sans le développement capitaliste et aussi d'un rôle inestimable dans la construction de l'économie socialiste, furent considérées depuis longtemps, seulement les villes commerciales du littoral de l'Italie du nord telles que Venise, Gênes, Florence, centres commerciaux de l'Europe du Moyen âge (IV—XV siècles) et les berceaux de la Renaissance. Au début du XIX-e siècle, la comptabilité digraphique européenne se fit connaître pour la première fois dans notre pays en même temps que la pénétration de la culture capitaliste et des forces étrangères.

On dit que la comptabilité traditionnelle dont on se servait dans le pays depuis le temps de la dynastie de Koryeu (d'ou le nom de „Corée") était la même dans ses principes que la comptabilité digraphique européenne ce qui étonna le monde et attira l'intérêt des savants tant de l'intérieur que de l'extérieur du pays.

Ainsi, il se fit largement connu que le foyer de la comptabilité digraphique est la Corée à côté de l'Italie. Selon les données de nos recherches la comptabilité digraphique paraît avoir fait son apparition plutôt en Corée qu'en Italie.

La comptabilité traditionnelle de notre pays fut connue sous le nom de *forme Sakai* (échiquier) *de la comptabilité*.

2. Le système de calcul S a k a i apparut à Kaisong, capitale sous la dynastie de Koryeu (X—XV siècles) et centre commercial du pays et d'ici il se répandit dans tout le pays. La comptabilité Sakai est issue de la comptabilité du capital usurier et s'est développée ultérieurement en la comptabilité du capital des commerçants.

La comptabilité Sakai est un calcul à quatre éléments qui reflète le mouvement du capital, d'où elle tire aussi son nom. Les

quatre éléments du calcul sont : *guoeup tcha, bong tcha, bénéfice* et *frais.*

Goueup tcha et bong tcha correspondent à peu de chose près, respectivement au passif et à l'actif de la comptabilité européenne. Guoeup tcha dans son acception large correspond entièrement au passif, mais au sens strict il signifie le capital et la créance. Bong tcha correspond aux biens (accets en anglaise) mais il ne comprend pas l'argent. Le bénéfice et les dépenses signifient chacun bénéfice et frais.

La forme Sakai, du fait qu'elle est issue de la comptabilité du capital usurier, a pour objet le mouvement du capital monétaire et surtout dans son aspect d'argent comptant. De la sorte, la forme Sakai met en lumière le déclenchement du mouvement du capital avec les conséquences qui se font sentir sur l'argent restant qui se trouve dans tous les processus de vente et d'achat et coffres-forts. Ainsi la forme Sakai de comptabilité offre systématiquement l'évidence de l'argent restant dans les coffre-forts en présentant la situation dans le mouvement du capital à l'aide des quatre éléments de cacul.

L'argent comptant restant dans les coffres-forts après l'accomplissement d'un acte de vente et d'achat se déduit suivant l'équation : (passif + bénéfices) — actif + dépenses) = l'argent comptant restant (réserve de capital monétaire).

L'équation ci-dissus permet de connaître le caractère et les relations réciproques des quatre éléments.

Le passif et le bénéfice sont deux facteurs qui font augmenter l'argent comptant (le capital monétaire) tandis que l'actif et les dépenses en apportent la diminution. En d'autres mots le passif et le bénéfice informent sur la source d'où le capital monétaire est entré dans les affaires ou les coffres-forts alors que l'actif et les dépenses informent sur la direction que le capital monétaire avait prise sortant des affaires ou des coffres-forts.

Selon la comptabilité Sakai la capital monétaire entre dans les affaires par le passif et le gain et en sort par l'actif et les dépenses. Par conséquent : (passif + gain) — (actif + dépenses) = capital monétaire (argent restant).

Dans la comptabilité Sakai on se sert de la méthode de calcul dite *djil* correspondant au compte (account), pur inscrire systématiquement les réserves et les frais, les biens et les sources du capital qui se divisent et s'expriment en passif, gain, actif et dépenses.

Djil a deux côtés s'opposant l'un à l'autre : *ip* (signifiant entrer) et *keu* (signifiant sortir). Ip et keu correspondent aux débit et crédit du compte, mais entre eux il y a aussi quelque différence.

Les deux côtés du compte sont fixes tandis que ceux du djil se trouvent opposés suivant le contenu qui entre en calcul.

Dans le djil où il s'agit du calcul du passif et du gain, ip occupe le côté droit et keu le côté gauche, tandis que dans le djil où il est question du calcul de l'actif et des dépenses, les places sont inversées. Ip et keu ne sont pas de simples signes qui ne font que distinguer la gauche de la droite comme dans le débit et le crédit, mais ils marquent l'entrée et la sortie du capital monétaire dans les coffres-forts ou les entreprises.

Djil se partage en des djils calculant passif, actif, gain et dépenses. Les djils de passif, d'actif, de gain et de dépenses se ramifient à nouveau en des djils particuliers à l'aide de certaines marques.

La vente et l'achat sont notés par deux fois dans les djils suivant le système de calcul Sakai, dans un djil ils sont notés à ip, et dans l'autre à keu. Bien sur, ces notations doubles s'effectuent en connexion réciproque.

Les notations digraphiques s'effectuent d'une façon spéciale pour ce qui est de vente et d'achat en argent comptant, du fait que le djil n'est pas établi pour l'argent comptant.

L'argent comptant n'est pas calculé selon le djil dans le système de calcul sakai mais il est calculé dans un régistre spécial dont la méthode de calcul est identique. Ce registre est le livre de caisse et le journal d'argent comptant.

Ainsi, du fait que l'argent comptant est noté dans le journal, la vente et l'achat en argent comptant sont aussi notés en forme digraphique dans le journal en même temps que leur notation, soit ip soit keu de tel ou tel djil.

Dans le journal la vente et l'achat sont enregistrés et comptés par l'ordre de leur succession. Le journal possède deux parties (première et seconde) pour la notation de l'argent comptant. La première partie est destinée pour le revenu, la seconde partie pour les frais.

Le compte est noté dans un livre de compte. Ce livre se divise en livre principal et livre supplémentaire. Le livre principal se divise à son tour en deux : livre passif et livre activ. Dans le livre passif sont marqués bénéfices et passif, dans le livre actif dépenses et actif.

Pour une partie du compte gravé dans le livre passif et le livre actif est utilisé le livre suplémentaire.

D'après le compte attesté dans les livre passif et actif on exécute la notation digraphique. Elle est faite sur la base du livre de compte du journal.

Le livre se termine lors du bilan, à la suite de quoi le solde est déterminé, ceci constituant la base du bilan. La bilan et le compte rendu ont comme point du départ le livre de compte, qui a deux parties.

Dans la première partie du livre de compte sont notés le solde et l'inventaire des biens des livres passif et actif sur la base de l'équation (passif + bénéfices) — (actif + frais) = le reste en argent comptant.

La première partie du livre de compte a pour son correspondant la feuille d'épreuve (trial sheet) de la comptabilité digraphique de l'Europe, et l'inventaire des biens y étant compris, elle est l'égale de la balance gouvernementale. La deuxième partie du livre de compte comprend bénéfices et pertes nets.

Selon le système de calcul Sakai le compte à part pour des bénéfices et pertes nets n'est pas prévu, mais c'est la deuxième partie du livre de compte qui s'y substitue. Dans cette partie on note : bénéfices — frais = bénéfices et pertes nets, la somme des bénéfices et pertes des marchandises vendues (le solde des marchandises — la somme des marchandises iventariées) de la première partie du livre de compte, le solde des bénéfices du livre passif, le solde des frais du livre actif.

Dans le système de calcul Sakai il existe un livre spécial nommé livre du bilan, ce qui correspond au tableau des bénéfices et pertes. Dans le livre du bilan, le compte des bénéfices et pertes nets est exécuté sous une forme développée, et pour vérifier l'exactitude du calcul des bénéfices et pertes nets de la deuxième partie du livre de compte, on procède à un contre-calcul, c'est-à-dire : bénéfices + pertes nets + frais = bénéfices.

3. Le calcul Sakai est analogue dans ses principes, avec la comptabilité italienne et celles de l'Europe et en particulier avec la comptabilité digraphique continentale, n'ayant qu'une simple différence formelle.

Le calcul Sakai est, dans tout l'Orient, propre à notre pays et introuvable dans les pays voisins. Ce n'est pas donc par hasard que la comptabilité digraphique ait pris naissance ici.

Notre pays a une longue histoire, et dans l'antiquité il a eu une grande influence sur les pays voisins et surtout sur le Japon. L'époque de Koryeu, où la culture féodale du Moyen-âge a pris un développement remarquable, a marqué le progrès de la typographie qui faisait l'usage des lettres métaliques, ce qui veut dire que l'invention des lettres mobiles par Guttenberg venait 200 ans après. L'époque de Koryeu a connu également le développement de l'astronomie et des mathématiques.

Kaisong, la capitale de Corée, a été non seulement le centre politique et culturel, mais aussi celui du commerce extérieur et intérieur. Outre les pays Won, Soug, Japon, Keuran, la Corée entretenait des relations commerciales actives avec la Perse ; de même les gens de ces pays fréquentèrent la Corée.

Au fur et à mesure que le commerce se développait en dehors comme en dedans, la circulation monétaire gagnait du terrain.

Une certaine accumulation fut enrégistrée par les capitaux usurier et commercial. Les habitants de Kaisong s'occupaient de commerce

presque dans l'exclusivité. Le déclin de Koryeu et l'avénement de la dynastie Ri n'empêchèrent pas la ville de Kaisong de rester longtemps la plus grande ville de Corée ; les commerçants de Kaisong, rois du commerce extérieur et intérieur de notre pays, continuèrent leur activité usurière et commerciale à l'échelle nationale, ayant partout leurs points d'appui.

Depuis longtemps, à Kaisong étaient en circulation carnets de chèque et billets de banques appelés *eu-oeum*. Le régime de prêt n'était pas inférieur à celui de crédit de nos jours.

Donc ce n'est pas par hazard que le calcul Sakai s'est développé à Kaisong, grand centre commerciel et culturel du Moyen âge. Le calcul Sakai a fait son apparition dans notre pays, dans les mêmes conditions et dans la même période ou la comptabilité digraphique a vu le jour, à l'époque de la Renaissance, à Venise, le grand centre commercial de l'Europe. Le peuple coréen éprouve une grande fierté du système de calcul Sakai comme un des patrimoines culturels de notre nation.

Reçue le 3 IV 1965

Université „Kim Ir Sen", Phénian, République Démocratique Coréene

ASUPRA FORMEI SAKAI, UNUL DIN PATRIMONIILE CULTURII NAŢIONALE COREENE

(Rezumat)

Se expun principiile contabilităţii tradiţionale coreene (forma Sakai), apărută la Kaisong, capitala Coreei sub dinastia Koryeu (sec. X—XV). Principiile sale sînt aceleaşi cu cele ale contabilităţii digrafice, dezvoltată în epoca Renaşterii în marile centre comerciale ale Europei (Veneţia, Florenţa etc.).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC
DIN IAȘI
SERIE NOUĂ
Tomul XII (XVI), Fasc. 3–4, 1966

RECENZII РЕЦЕНЗИИ
BOOK REVIEWS COMPTES RENDUS
BUCHBESPRECHUNGEN RECENSIONI
ANALISIS DE OBRAS

1. YOSIDA K., *Functional Analysis*. Vol 123 of the Set *Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1965, XI, 458 p.

Revistele internaționale de bibliografie matematică reflectă an de an creșterea extrem de pronunțată a volumului de lucrări în domeniul Analizei funcționale, atare volum ajungînd astăzi la același nivel ca și domeniile mai vîrstnice cum sînt Calculul numeric și Statistica matematică.

Ref. indică mai jos unele trăsături caracteristice ale volumului de *Analiză funcțională*, elaborat de prof. Kôsaku Yosida de la Universitatea din Tokio, subliniind totodată, paralel cu bogăția materialului inclus în volum, necesitatea de a-l traduce în alte limbi și în particular în limba română. Menționăm totodată bibliografia bogată și la zi în domeniu. Dintre lucrările românești găsim citată o lucrare relativă la semi-grupe, publicată de Ciprian Foiaș, în revista *Portugaliae Math.* (1960).

*

The present book is based on lectures given by the author at the University of Tokyo during the past ten years. It is intended as a text-book to be studied by students on their own or to be used in a course on Functional Analysis, i.e., the general theory of linear operators in function spaces together with salient features of its application to diverse fields of modern and classical analysis.

Necessary prerequisites for the reading of this book are summarized, with or without proof, in Chapter O under titles: Set Theory, Topological Spaces, Measeure Spaces and Linear Spaces. Then, starting with the chapter on Semi-norms, a general theory of Banach and Hilbert spaces is presented in connection with the theory of Banach and Hilbert spaces is presented in connection with the theory of generalized functions of S. L. Sobolev and L. Schwartz in the following chapters: II. Applications of the Baire-Hausdorff Theorem; III. The Orthogonal Projection and F. Riesz'Representation Theorem; IV. The Hahn-Banach Theorems; V. Strong Convergence and Weak Convergence; VI. Fourier Transform and Differential Equations; VII. Dual Operators; VIII. Resolvent and Spectrum; IX. Analytical Theory of Semi-groups; X. Compact Operators; XI. Normed Rings and Spectral Representation; XII. Other Representation Theorem in Linear Spaces; XIII. Ergodic Theory and Diffusion Theory; XIV. The Integration of the Equation of Evolution. A rich and very up to date Bibliography, an Index and traditionally excellent printing.

Quite immediately after its publication the book was mentioned in various research papers due to both romanian and scientists from abroad. On the Rev. mining, it is necessary to translate it in different other languages, particularly in Romanian. *D. Mangeron*

2. ISAACS R., *Differential Games. A mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization.* John Wiley and Sons, Ltd., London—New York—Sydney, 1965, XXII+384 p.

Ref. prezintă mai jos unele detalii relative la conținutul extrem de interesant și bogat în aplicații actuale deosebit de importante într-o serie de domenii (ca, de ex., Problema de urmărire, Control și Optimizare) al volumului *Jocuri diferențiale*, subliniind utilitatea traducerii volumului în alte limbi și menționînd totodată că termenul de „joc diferențial" a fost introdus pentru prima oară de matematicianul american Rufus Isaacs într-o serie de lucrări de uz intern, s-a încetățenit apoi în literatura matematică universală și constituie obiectul unor preocupări de seamă pentru numeroși specialiști de faimă mondială, ca de pildă, academicianul sovietic L. S. Pontriaghin (*К теории дифференциальных игр*, УМН, **XXI**, *4* (*130*), 1966, июль-август).

Метод динамического программирования Р. Беллмана, использованный многочисленными авторами и в частности референтом в связи с его работами по поливолновым уравнениям, был, повидимому, ранее известен американскому математику Р. Айзексу, введшему, в связи с задачей преследования, контроля и оптимизации в закрытых работах, а затем и в печати общепринятый сегодня термин „дифференциальной игры", выкристаллизованный им же, после многих лет непрестанной работы, в вышедшей в свет и освещенной здесь книги *Дифференциальные игры*. Проиллюстрируем необычайно обширную гаму современных задач включенных в книгу на схематизации *задачи преследования*. Объект называется *управляемым* если в каждый момент времени t его состояние определяется вектором некоторого, заданного векторного фазового пространства (вектор этот обозначим через x), а закон движения описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(x, u).$$

Здесь $\dot{x}$ — производная вектора x по времени, а u — управляющий параметр, представляющий собою, вообще говоря, не число, а точку некоторого векторного пространства. В задаче о преследовании рассматриваются два объекта x и y, возможности второго объекта описываются дифференциаланым уравнением

$$\dot{y} = g(y, v),$$

где v — управляющий параметр, являющийся кусочно-непрерывной функцией времени. Задача заключается в том, чтобы найти сравнительно общие условия, достаточные для осуществимости преследования, построить функцию $u(t)$, осуществляющую преследование и вычислить функцию $T(x_0, y_0)$, считающуюся оптимальной, оценивающую время преследования. 12 глав этой замечательной книги посвящены, а рамках выше схематизированной теории, обширный диапазон очень важных применений, подчеркнутых, в частности, в оригинальном углублении, Л. С. Потрягиным в УМН, **XXI**, 1966, стр. 219–274. Реф. горячо рекомендует перевод книги и на другие языки. *D. Mangeron*

3. GHEORGHIȚĂ ȘT., *Metode matematice în Hidrogazodinamica subterană*. Ed. Acad. Republicii Socialiste România, Buc., 1966, 582 p.

Ref. indică mai jos unele detalii referitoare la conținutul acestui volum deosebit de prețios pentru toți acei care se ocupă de hidrologie, geofizică, lucrări de irigații și drenaj, alimentări cu apă, exploatarea zăcămintelor de petrol și gaze ș.a.,

subliniind faptul că — dată fiind vastitatea materialului — autorul s-a mărginit la problematica mișcărilor în medii poroase și a prevăzut fiecare capitol al cărții consacrat respectiv: stabilirii și studiului ecuațiilor mișcării fluidelor prin medii poroase; mișcărilor plane; mișcărilor cu suprafață liberă; mediilor neomogene; mișcărilor tridimensionale; mișcărilor nestaționare și fluidelor neomogene, cu o bine aleasă și vastă bibliografie. Nivelul științific al volumului prezentat îl situează în linia volumelor publicate anterior de puternica Școală românească de Mecanică teoretică, ca de ex., binecunoscutele volume datorite academicienilor Elie Carafoli și Caius Iacob, traduse mai de mult și în alte limbi și laureate cu Premiul de Stat.

*

Vastissima litteratura scientifica consacrata negli ultimi decenni ai problemi di idrogasodinamica sotterranea, cristallizzata al livello mondiale in parecchi volumi e diecine di migliaia di studii sparsi nelle riviste di specialità si è giustamente arricchita col presente volume dovuto al Professore Stefano Gheorghiță e consacrato all'esposizione di alto valore matematico dell'insieme di problemi spettanti agli studi dei moti nei mezzi porosi, d'importanza difficile di sopravalutare nell'idrologia, geofisica, lavori d'irrigazione e di drenaggio, alimentazioni con aqua ed esploatazioni dei giacimenti del petrolio e dei gas sotterranei. Il Rif. raccomanda calorosamente la traduzione di esso volume, provvisto di una richissima e ben aggiornata bibliografia relativa a ciascuno dei capitoli ivi inclusi, come pure di una bibliografia generale alla fine del volume, in altre lingue, pur additando al fatto che esso si allinea ben degnamente alla già cospicua collana di libri dovuti alla Scuola Romena di Meccanica, di cui mentoviamo i ben noti libri di Caius Iacob ed Elie Carafoli, tradotti in altre lingue.

D. Mangeron

4. KUNTZMANN J., *Algèbre de Boole.* Bibliothèque de l'Ingénieur automaticien sous la direction de Pierre Naslin, Dunod, Paris, 1965, XXII + 319 p.

Referentul, așteptînd cu nerăbdare apariția în aceeași colecție a editurii Dunod a volumului *Algebra lui Boole și mașini logice* datorit prof. J. Kuntzmann și P. Naslin, subliniază faptul că volumul recenzat marchează punctul de plecare al unei vaste mulțimi de cercetări de viitor care reclamă instrumente de investigație noi, de eficacitate recunoscută. În adevăr, apariția releelor electromecanice și apoi a mașinilor de calcul a făcut din algebra lui Boole un instrument de prim ordin în aceste domenii. Progresele cercetării operaționale îi datoresc de asemenea foarte mult. Conceput din punctul de vedere al matematicianului, volumul pune în evidență proprietățile fundamentale și nu se mărginește numai la expunerea procedeelor de realizare sau de optimizare. Prevăzut cu o bibliografie recentă vastă și cu un indice alfabetic, volumul este subdivizat în următoarele opt capitole mari, împărțite respectiv în 55, 70, 21, 52, 25, 111, 29 și 54 paragrafe: I. Elemente de algebră Boole; II. Forme sistematice; III. Corpuri de resturi; Algebra lui Post; IV. Monoame prime. Baze iredondante; V. Distanțe, Simetrii; VI. Studiul detaliat al funcțiilor; VII. Ecuații și probleme învecinate; VIII. Realizarea funcțiilor booleene cu ajutorul operațiilor date.

Se recomandă cu căldură traducerea volumului în limba română.

*

Le Réf. indique ci-dessus en langue roumaine nombre de détails concernant ce beau volume et recomande très chaleureusement la traduction de celui-ci en d'autres langues.

D. Mangeron

5. POPOV V. M., *Hiperstabilitatea Sistemelor Automate*. Ed. Acad. Republicii Socialiste România, Buc., 1966, 304 p.

Ref. prezintă mai jos unele detalii relative la conținutul volumului elaborat de tov. Vasile Mihai Popov, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România, *Hiperstabilitatea sistemelor automate*, bazat în întregime pe noțiunea de hiperstabilitate, introdusă și dezvoltată de autor într-o serie de lucrări anterioare. Dată fiind deosebita importanță a problemelor tratate în volum, ref. recomandă cu deosebită căldură traducerea volumului și în alte limbi.

*

Le problème de la stabilité, d'importance fondamentale dans l'étude des phénomènes qui s'enquadrent dans le domaine de la mécanique non linéaire, a reçu, grâce à l'élaboration des critères totalement nouveaux et bien profondes dûs à l'auteur et réunis dans son livre présenté ici et consacré à l'*Hyperstabilité des systèmes automatiques*, un essor éclatante, crystallisé dorénavant dans nombre de travaux, publiés par des hommes de sciences des plus connus, basés presque exclusivement sur la notion d'hyperstabilité introduite et fondamentée par M.V.M. Popov. Le livre et divisé en 5 chapitres, à savoir : I. Introduction ; II. Classes de systèmes équivalents ; III. Systèmes positifs ; IV. Blocs et systèmes hyperstables ; V. Applications, suivis par des Annexes : A. Controlabilité, Observabilité, Nondégéneration ; B. Factorisation des matrices polynomiales ; C. Blocs principaux hyperstables continus ; D. Symboles utilisée ; E. Bibliographie.

Le Réf. recommande bien chaleureusement la traduction du volume analysé dans d'autres langues d'usage international courant.

D. Mangeron

6. TÖLKE F., *Praktische Funktionenlehre*. Band **II**, *Theta-Funktionen und spezielle Weierstrasssche Funktionen*. Springer Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1966, VII+248 S., mit 129 Abb.

Volumul recenzat, al doilea dintr-o serie consacrată expunerii sistematice a teoriei funcțiilor de variabilă complexă în vederea aplicațiilor, cuprinde date deosebit de prețioase referitoare la funcțiile θ (dintre care patru au fost introduse încă de Jacobi și alte două s-au încetățenit cu ocazia cercetărilor mai recente) și la funcțiile speciale ale lui Weierstrass. Volumul anterior apărut este consacrat funcțiilor elementare algebrice și transcendente, iar volumele aflate în curs de elaborare sînt destinate respectiv : funcțiilor eliptice ale lui Jacobi, integralelor eliptice normale ale lui Legendre, funcțiilor σ și ζ speciale ale lui Weierstrass, grupurilor eliptice integrale și funcțiilor eliptice ale lui Jacobi în domeniul complex, funcțiilor lui Weierstrass generale și derivatelor lor în raport cu un parametru, integralelor funcțiilor θ și dezvoltărilor biliniare. Volumul VI și ultimul din serie va cuprinde tabele relative la funcțiile studiate în volumele I...V.

Din punct de vedere metodologic, volumul recenzat, reflectînd nevoile tehnicienilor și inginerilor de a avea la dispoziție materialul de investigație științifică de aplicabilitate imediată în multe domenii de fizică, teoria potențialului, teoria curgerii și teoria oscilațiilor, este expus folosind la maximum prezentări intuitive și renunțînd în numeroase locuri la rigoarea matematică. Deosebit de util în practică, prezentat într-o formă tipografică impecabilă, tradițională pentru editura Springer, prevăzut cu o bibliografie bogată, volumul este subdivizat în următoarele capitole : Funcțiile Theta ; Logaritmii funcțiilor Theta ; Funcții parametrice ; Funcțiile speciale weierstrassiene **p.**

*

Rev. gives over in Romanian language some details concerning this very important for various apllications volume, devoted to Theta- and Special Weierstrass

functions, printed in a set of six volumes, in traditionally excellent form by Springer-Verlag.

L. Ciobanu

7. ANDONIE ŞT. G., *Istoria Matematicii în România.* Vol. **II,** Ed. Şt., Buc., 1966, 470 p.

Ref. indică mai jos unele detalii relative la cel de al doilea volum din opera plină de erudiţie a tov. prof. George Şt. Andonie consacrată *Istoriei Matematicii în România.* Paralel cu o altă monumentală lucrare *Focul Viu. Din Istoria invenţiilor şi descoperirilor româneşti,* datorită prof. D. Moroianu şi I. M. Ştefan, volumul recenzat, aruncînd lumină concentrată asupra rezultatelor de seamă şi de nivel, realizate în 125 de ani de cercetare matematică originală desfăşurată de Şcoala românească de Matematică, contribuie din plin la mobilizarea generală a forţelor matematicienilor din ţară pe drumul unor noi succese, în cadrul muncii ştiinţifice planificate, sub egida Consiliului Naţional al Cercetării Ştiinţifice.

*

Le fait d'avoir assisté dans ces dernières annés à la parution à l'étranger d'un nombre de thèses de doctorat consacrées à l'étude du développement de certains secteurs des Sciences mathématiques en Roumanie (v., p. ex., les dissertations récentes dues à MM. A. N. Glivici et V. P. Bâcikov) souligne la portée et l'envergure des recherches originales des mathématiciens roumaines, inaugurées par D. Asachi il y a 125 ans.

La Réf. prend la liberté d'attirer l'attention du monde mathématique international sur l'oeuvre monumentale, programmée à paraître en trois volumes, l'*Histoire des Mathématiques en Roumanie,* élaborée par M. le Prof. Georges Şt. Andonie, tout en soulignat le fait qu'elle s'aligne harmonieusement au travail érudit et très apprécié l'*Histoire des inventions et des découvertes roumaines* dû à MM. D. Moroianu et I. M. Ştefan.

D. Mangeron

8. ROY M., *Mécanique.* Vol. **II,** *Milieux continus.* Collection Science de l'Ingénieur, Dunod, Paris, 1966, XVIII + 483 p.

Autorul, apreciat de mecanicieni, pentru seria de studii originale şi pentru volumele sale consacrate respectiv *Termodinamicii macroscopice* şi *Mecanicii corpului rigid* (vol. I din seria referată), consacră acest volum cu caracter didactic expunerii mecanicii mediilor continue şi deformabile, urmărind sistematic încadrarea fenomenelor tratate în schematizări matematice în care se ţine seama nu numai de rezistenţele pasive de diferite naturi, ci şi de variaţiile mari de temperatură şi de stări fizico-chimice.

Original prin concepţie şi prin expunere, volumul prezintă mecanica modernă, luînd ca punct de plecare termodinamica şi punînd accent pe semnificaţia energetică a fenomenelor. Notaţia vectorială şi tensorială este utilizată în mod sistematic. Lectura volumului începe prin prezentarea teoriei generale a mişcărilor şi a echilibrului mediilor continue foarte diferite, începînd cu solidele deformabile obişnuite şi cu fluidele, pentru a trece apoi la elastomecanica liniară, plasticitate şi vîscoelasticitate şi, în fine, la mecanica fluidelor vîscoase sau nu, compresibile sau nu, conducătoare de electricitate şi în prezenţa cîmpurilor magnetice. O extrem de minuţioasă subdivizare a capitolelor în paragrafe şi subparagrafe, prevăzută cu numerotare adecvată, urmată de un număr de anexe şi exerciţii, ridică şi mai mult valoarea volumului re-

cenzat, prezentat în forma exterioară tradițional foarte îngrijită a Editurii Dunod din Paris.

*

Rev. gives oven in Romanian language some details concerned with various important topics devoted to *Continuous Media Mechanics*, presented by the author in a rigorous and original exposition. Very nice printing and external form.

I. Ibănescu

9. MULLER YVES, *Initiation à l'Organisation et à la Recherche Opérationnelle*. 2-e éd. revue et corrigée, Eyrolles, Paris, 1965, XIX + 365 p.; préface de A. Kaufmann.

Volumul recenzat, redactat pentru ingineri și colaboratorii lor, conține într-o redactare sistematică un ansamblu de date din domeniile statisticii, teoriei probabilității ș.a. menite a constitui aparatul matematic de investigație științifică, necesar pentru rezolvarea problemelor de organizare și cercetare operațională. Menționăm îndeosebi capitolele de valoare aplicativă deosebit de actuală, ca de ex., cap. 6. Organizarea producției într-un domeniu complex; 7. Fenomene de așteptare; 9. Studiul stocurilor; 11. Teoria deciziei. Numeroase tabele, o documentată bibliografie și un indice alfabetic îngrijit întregesc acest volum prețios pentru studiul economiei matematice de astăzi.

*

The Rev. gives oven in Romanian language some details concerned with the contents of this volume devoted to *Operational Research*.

Gh. Florea

10. LUPESCU T., ROȘU AL., CERCHEZ M., *Programarea matematică. Cu aplicații militare*. Ed. Militară, Buc., 1965, 448 p.; prefață de acad. prof. dr. Gh. Mihoc.

Ref. semnalează apariția acestei lucrări foarte meritorii, care, situînd just vasta problematică a programărilor în cadrul Statisticii matematice, este în parte consacrată și expunerii teoriei jocurilor și programărilor neliniare, stochastice și dinamice. Numeroase aplicații ale programării liniare, îndeosebi în domeniul militar, precum și o vastă bibliografie (134 titluri) întregesc volumul, ce se încadrează armonios în seria de volume de Statistică, Probabilitate și Economie matematică ale Școlii Matematice Românești, mult apreciate în țară și peste hotare.

*

Rev. expose oven in Romanian language some details concerned with the content of this volume devoted to presentation of studies, both theoretical and applied related to linear, dynamic and stochastic programming.

A. Triandaf, B. Bercovici

11. МИКЕЛАДЗЕ Ш. Е., *Решение численных уравнений*. АН Гр. ССР, ТМИ Изд. Мецниереба, Тбилиси, 1965, 270 стр.

În lucrarea *Rezolvarea ecuațiilor numerice* autorul expune metodele numerice ale rezolvării ecuațiilor și sistemelor de ecuații algebrice și transcendente. Cartea se adresează celor ce urmăresc să se specializeze în probleme de calcul numeric.

În primele trei capitole autorul indică elementele de bază ale algebrei, analizei matematice și calculului numeric care permit aprofundarea problemelor tratate în această lucrare. În același scop se dau multe exemple ce demonstrează teoria și se expune un mare număr de aplicații tehnice a căror rezolvare este dusă pînă la rezultatele numerice.

Capitolele IV și V cuprind rezolvarea efectivă a ecuațiilor cu ajutorul șirurilor. Se studiază în mod deosebit ecuația $u^m - pu^m - 9 = 0$. Capitolele VI și VII tratează rezolvarea sistemelor de ecuații.

Este de apreciat în mod deosebit claritatea expunerii și problemele interesante pe care le ridică în continuare lucrarea recenzată. Cartea este editată în condiții grafice excelente de către Ed. Metniereba din Tbilisi.

*

Rev. give oven in Romanian language some details cocnerned with this new excellent Sh. E. Mikeladze's book.

A. Triandaf, M. Bercovici

12. * * * *Dynamica Strojov.* **II,** *Sbornik Prác Z Konferencie CSAV.* Vydavatelstvo Slovenskje Akadémie Vied, Bratislava, 1966, 325 p.

Volumul recenzat este consacrat publicării lucrărilor prezentate la cea de a doua Conferință de Dinamica mașinilor, organizată sub egida Academiilor de științe Cehoslovacă și Slovacă sub conducerea Acad. Ján Gonda la Liblice (29—31 octombrie 1963). Redactat în condiții exemplare de către ing. Igor Ballo și Ladislav Pust, volumul conține textul lucrărilor prezentate în Conferință de diferiți cercetători și oameni de știință din Belgia, R.S.C., R.D.G., R.P.P. și România (N. Cristescu și D. Mangeron), consacrate celor mai variate domenii de dinamica mașinilor și mecanismelor.

În imposibilitate de a se analiza în această prezentare fondul lucrărilor, se menționează că recenziile corespunzătoare și-au găsit loc în paginile revistelor internaționale de bibliografie matematică și mecanică.

*

On indique ci-dessus en langue roumaine quelques détails concernant le second volume de travaux présentés lors de la Conférence sur la *Dynamique des machines* (Liblice, 29—31 octobre 1963), organisée sous l'égide des Académie des sciences de la R.S.C. et de l'Academie slovaque des sciences par M. Ján Gonda, membre de l'Académie.

S. Deleanu

13. SÁLYI ISTVÁN, *Müszaki Mechanika.* **II** Kötet, *A Dinamika Elemei.* Tankönivkiadó, Budapest, 1966, 398 t.

Volumul recenzat, al doilea din volumele autorului de Mecanică tehnică, este consacrat expunerii dinamicii solidelor rigide. De o claritate remarcabilă, prevăzut cu multe figuri originale, volumul se deosebește de cărțile de mecanică folosite în învățămîntul nostru superior la facultățile nemecanice printr-o dezvoltare mai accentuată a problematicii referitoare la Geometria maselor (momente de inerție, determinări sistematice ale acestora în cazul figurilor plane pe cale analitică și grafică ș.a.) și prin tratarea problemelor de dinamică pentru variate sisteme de corpuri rigide făcîndu-se apel în mod exclusiv la teoremele generale ale dinamicii. Ref. așteaptă cu deosebit interes volumul al treilea din serie, ce va fi consacrat expunerii succinte a Mecanicii analitice și a unor capitole speciale de Mecanică, ca, de ex., Mecanica ciocnirilor, Mecanica corpurilor cu masă variabilă ș.a.

*

Rev. gives over in Romanian language some details concerning Prof. Sályi István excellent volume devoted to *Technical Mechanics* and particularly to the *Solid Dynamics*.

D. Mangeron

14. LARSEN EDWIN M., *Transitional Elements*. W. A. Benjamin, Inc., New York—Amsterdam, 1965, X + 183 p.

Profesorul Edwin M. Larsen de la Universitatea din Wisconsin, profesor și cercetător cu renume mondial, reușește să prezinte în 183 de pagini (55 de figuri și 49 de tabele) *chimia elementelor tranziționale* în soluție și în stare solidă și principalele tipuri de combinații complexe. În această clasă sînt incluse elementele tranziționale propriu-zise, lantanidele și actinidele.

Materialul se împarte în cinci capitole și un Apendice, care tratează următoarele: I. Proprietățile elementelor tranziționale (31 pagini): structura atomului, configurația electronică a atomilor și a ionilor, completarea orbitalilor *d* și *f*, teoria cîmpului liganzilor, razele metalice, ionice și covalente, potențialul de ionizare, proprietățile paramagnetice și culoarea ionilor; II. Metalele și compușii lor (19 pagini): starea naturală, metode de separare, reduceri la metal, metode pentru prepararea și proprietățile chimice ale combinațiilor binare; III. Structura metalelor și a compușilor (37 pagini): împachetarea compactă a sferelor, metale, aliaje, structura compușilor binari și ternari, relații între structură și proprietățile fizice, defectul de rețea — compuși nestoechiometrici; IV. Chimia soluțiilor (15 pagini): proprietățile cationilor, precipitarea hidroxizilor, specii oxidate, asociații de ioni cation-anion, reacții de oxido-reducere; V. Chimia coordinativă (29 pagini): legătura în compușii coordinativi (teoria legăturii valențiare, teoria cîmpului cristalin, teoria orbitalilor moleculari), configurații electronice, complecși cu număr de coordinație 4 și 6, carbonili metalici și compuși organo-metalici; Apendice (12 pagini): scrierea corectă a ecuațiilor chimice, constante de echilibru, potențialul de electrod standard, nomenclatura combinațiilor complexe.

Materialul este redat în lumina ultimelor cercetări cu o mare claritate, rigurozitate științifică și cu deosebit simț didactic, avînd 55 figuri sugestive, 49 tabele și informații teoretice suficiente pentru înțelegerea problemelor ce se ridică.

Cartea recenzată se recomandă atît pentru studenți cît și pentru corpul didactic de specialitate, fiind o lucrare introductivă de bază în chimia elementelor tranziționale.

*

Rev. gives over in Romanian language some details concerning this important book *Transitional Elements* due to prof. Edwin M. Larsen.

Al. Duca

15. PLANE A. ROBERT, HESTER E. ROLAND, *Elements of Inorganic Chemistry*. W. A. Benjamin, Inc., New York—Amsterdam, 1965.

Prin conținutul său, lucrarea recenzată se adresează cititorilor familiarizați cu noțiunile fundamentale din cursurile generale de *Chimie Anorganică*; de aceea, prezentarea materialului care formează obiectul lucrării nu urmează în general linia metodică a unui curs de Chimie Anorganică.

Volumul cuprinde materialul subdivizat în 12 capitole și anume: I. Hidrogenul; II. Metalele alcaline; III. Metalele alcalino-pămîntoase; IV. Primul șir al elementelor tranziționale; V. Elementele grele de tranziție; VI. Lantanidele și actinidele; VII...X. Grupele *III...VII*; XII. Gazele inerte.

Deoarece cartea nu se adresează începătorilor, nu se insistă asupra metodelor de preparare a elementelor și compușilor lor. În schimb sînt tratate în totalitatea lor, după datele și cercetările cele mai recente din ultimii ani, elementele tranziționale precum și gazele rare. Pentru scoaterea în evidență a specificului fiecărei grupe de elemente, acestea sînt însoțite la sfîrșit de o caracterizare generală.

Conținutul volumului, bine închegat din punct de vedere al datelor de structură, de termodinamică și de cinetică a reacțiilor chimice, constituie nu numai un material informativ asupra proprietăților fizico-chimice ale elementelor și ale compușilor lor, ci și o reușită încercare de consolidare și lărgire a bazelor teoretice ale Chimiei Anorganice.

Bibliografia bogată care întovărășește fiecare capitol și permite cititorului să urmărească și să aprofundeze unele aspecte ale problemelor tratate sumar în cartea de față, se adaugă la conținutul propriu-zis și la forma grafică îngrijită a volumului recenzat.

*

Rev. gives over in Romanian language some details concerned with this new Benjamin's boock.

Julieta Linde

16. POPA C., DRIMUȘ RODICA, *Chimia produselor fitofarmaceutice*. Ed. Tehn., Buc., 1965, 426 p.

Lucrarea *Chimia produselor fitofarmaceutice* elaborată de C. Popa și Rodica Drimuș cuprinde un studiu al grupelor principale de compuși chimici folosiți în protecția agriculturii: insecticide, acaricide, insectifuge, fungicide, erbicide, rodenticide. Pentru fiecare substanță în parte se arată structura chimică, denumirea științifică și cea comercială, proprietățile fizico-chimice, metodele de sinteză, mecanismul de acțiune, domeniul de aplicare și protecția muncii.

Autorii au folosit un vast material bibliografic de specialitate, reușind să elaboreze o lucrare unitară care reflectă situația actuală pe plan mondial, din domeniul produselor fitofarmaceutice.

Fiind prima lucrare din acest domeniu apărută în țara noastră, ea este utilă cadrelor care lucrează în industria de antidăunători, în institutele de cercetări, în protecția agriculturii, precum și studenților de la secțiile de specialitate.

*

Rev. gives over in Romanian language some details concerned with C. Popa and Rodica Drimuș book *Phitopharmaceutical Chemistry*.

Gh. Botez

17. *** *Les piles à combustible*. Ouvrage collectif publié sous le patronage de la Délégation Générale à la Recherche Scientifique et Technique, Paris, 1965.

Volumul constituie o lucrare de sistematizare a unui bogat material de cercetare în domeniul pilelor de combustie, foarte utilă atît acelora care doresc să se informeze cît și celor care lucrează în acest domeniu. Modul de clasificare a materialului este judicios ales astfel că deși problemele sînt de o mare diversitate, expunerea urmează o cale logică, ceea ce face volumul accesibil și celor mai puțin inițiați.

În patru capitole sînt prezentate problemele teoretice și metodele de studiu, problemele tehnice ridicate de realizarea dispozitivelor experimentale, exemple de realizări de diferite tipuri de pile și o documentată analiză a domeniului de utilizare și a perspectivelor de viitor ale pilelor de combustie sub aspectul economic și energetic.

Principalele probleme puse de studiul pilelor de combustie se referă la procesul de electrod, la cunoașterea mecanismului de reacție și a stadiului lent al procesului care ar trebui activat în vederea obținerii unei puteri masice mai ridicate. Aceasta face apel la studii din domenii diverse cum sînt: cinetica electrochimică, cinetica de difuzie, cataliza, viteza de reacție, fizica solidului, metalurgia etc. Împreună cu problemele tehnologiei de fabricație a electrozilor și a metodelor de studiu, toate aceste aspecte sînt bine fixate în diferitele capitole ale volumului; de asemenea, sînt evidențiate principalele direcții asupra cărora trebuie concentrată atenția în studiile viitoare.

Lipsa de unitate a prezentării semnalată mai înainte și inerentă unei lucrări realizată de un număr atît de mare de autori (42), este suplinită de remarcabila expunere a fiecărui capitol în parte. Subcapitolele sînt însoțite de o amplă bibliografie, iar în final este prezentată o bibliografie a lucrărilor asupra pilelor de combustie realizate în Franța între anii 1960—1965, care reflectă o ascendență evidentă.

Cartea, realizată în condiții tehnice ireproșabile, a apărut la timpul potrivit și corespunde pe deplin scopului.

*

Rev. gives oven in Romanian language some details concerned with this important collective work devoted to studies on *Fuel Cell.*

R. Vasiliu

18. ALBERT F., IANU A., MĂRCULEȚIU V., *Tabele chimice în practica analitică.* Ed. Tehn., Buc., 1965.

Lucrarea cuprinde principalele tabele folosite la obținerea rezultatelor numerice în analiza chimică. Materialul este grupat pe capitole, cuprinzînd în special datele necesare pentru analiza gravimetrică și volumetrică, analiza gazelor etc. Se dau tabele, care conțin masele atomice și moleculare cu logaritmii respectivi, factorii analitici și stoechiometrici, produsele de solubilitate.

Capitolul privind analiza volumetrică conține o seamă de tabele cuprinzînd greutatea specifică și conținutul procentual pentru o serie de soluții apoase acide (H_2SO_4, HCl etc.) și alcaline (NaOH, KOH etc.). Se prezintă tabele pentru masele echivalente (recalculate după masele atomice internaționale din 1961) și logaritmii lor pentru titrimetrie (acidimetrie, alcalimetrie etc.), precum și tabele de indicatori, constante de disocieri etc.

Pentru calculele necesare în analiza gazelor, se prezintă tabele cu logaritmii factorilor pentru reducerea gazelor la condiții normale, densitatea gazelor etc. Lucrarea cuprinde și tabele de analiză calitativă, cu date orientative pentru determinarea principalilor cationi și anioni. Sînt prezentate și diferite date pentru transformarea unităților de concentrație și a gradelor de temperatură.

Cartea se adresează celor care lucrează în laboratoare de cercetări, tehnologice și de uzină; ea este utilă în efectuarea calculelor chimice mai rapid și mai precis.

*

Le Réf. indique ci-dessus en langue roumaine nombre de détails concernant le nouveau volume *Tables chimiques usuelles dans l'analyse chimique* édité par l'Editura Tehnică.

Iolanda Enescu

19. КААСИК П. Ю., НЕСГОВОРОВА Е. Д., *Управляемые асинхронные двигатели с беличьей клеткой на роторе в системах автоматики.* Энергия, М.-Л., 1965, 100 рис., 200 стр.

Se prezintă teoretic proprietățile principale, particularitățile specifice și parametrii motoarelor asincrone bifazate comandate, cu rotorul în scurtcircuit, folosite în schemele de automatizare. Sînt expuse metode grafo-analitice de determinare a

parametrilor relativi și a caracteristicilor acestor motoare. Pe baza metodei parametrice de calcul se fac recomandări privind alegerea parametrilor, indicilor și a proporțiilor geometrice. Cartea este destinată personalului tehnico-ingineresc preocupat de probleme de automatizare cu mașini electrice și studenților de la facultățile de electrotehnică.

*

On présente ci-dessus nombre données concernant les propriétés principales, les particularités spécifiques et les paramètres des *moteurs asynchrones biphasés commandés, à rotor en court-circuit, utilisés dans les schémas d'automatisation.*

Gh. Şerban

20. ARTOBOLEVSKII I. I., *Mechanisms for the Generation of Plane Curves.* Translated by R. D. Wills, ed. by W. Johnson. Pergamon Press, Oxford—London—Edinburgh—New York—Paris—Frankfurt, 1964, XV + 278 p.

Importanța mereu crescîndă în știința și tehnica modernă a Teoriei mecanismelor și mașinilor, exteriorizată astăzi prin apariția unei noi reviste „Journal of Mechanisms", este subliniată prin traduceri neîntîrziate în alte limbi a diferitelor volume consacrate acestei discipline.

Ref. prezintă mai jos unele detalii relative la conținutul volumului *Mecanisme pentru generarea curbelor plane*, datorit renumitului specialist sovietic acad. I. I. Artobolevski, tradus, în condiții exemplare, de către Pergamon Press.

*

Importanza vieppiù crescente della Teoria dei Meccanismi e delle Macchine, cristallizzata oggidì nell'apparizione di una nuova rivista intitolata „Journal of Mechanisms", è sottolineata dall'incessante pubblicazione delle traduzioni in altre lingue di vari trattati e volumi sintetizzanti i risultati di codesta disciplina, apparsi nelle riviste di Meccanica applicata.

Il volume *Teoria dei meccanismi per la riproduzione di curve piane*, dovuto al celebre specialista sovietico I. I. Artobolevski e tradotto tuttora in inglese, in una presentazione eccellente dovuta al Pergamon Press, è dedicato all' esposizione della teoria e della practica della generazione delle curve piane tramite vari meccanismi articolati. Qui trovano posto numerosissimi nuovi metodi e nuovi risultati concernenti la sintesi dei meccanismi, escogitati dall'A. durante i decenni di lavoro infatigabile e pieno d'ingegno. I 7 capitoli del libro sono devoti ai seguenti problemi: I. Fondamenti concernenti la generazione delle curve tramite meccanismi con coppie superiori di quarta classe; II. Principi spettanti alla teoria di generazione delle curve usandovi meccanismi con coppie inferiori di quinta classe; III. Generazione meccanica delle linee rette e dei cerchi; IV. Generazione meccanica delle ellissi, iperbole e parabole; V. Generazione meccanica delle curve di terzo ordine; VI. Generazione meccanica delle curve di quarto ordine; VII. Generazione meccanica di certe curve algebriche di ordine superiore e di alcune curve trascendenti.

Il rif. raccomanda calorosamente la traduzione di esso libro anche in altre lingue.

D. Mangeron

21. DUDIȚĂ FL., *Transmisii cardanice*. Ed. Tehn., Buc., 1966, 303 p.

Numeroase lucrări de sinteză științifică, apărute în ediții periodice și neperiodice din țară și de peste hotare (a se vedea, de ex., D. Mangeron și R. Bogdan, *Studii, cercetări și perspective de dezvoltare a Teoriei mecanismelor și mașinilor în Republica Populară Română*, publicat în 1960 în Studii și cercetări de Mecanică aplicată; F. Freudenstein and O. Bottema, *Researches on Mechanisms*, publicat în 1966 în Applied Mechanics Reviews, au scos în evidență realizări de seamă și de nivel deosebit în domeniul TMM, înfăptuite în țara noastră, începînd cu primele lucrări datorite prof. D. Mangeron și continuate apoi și în alte centre universitare. Din ansamblul subdiviziunilor TMM, cunoscute astăzi, ce se dezvoltă cu succes în Școala Românească de TMM, trebuie subliniat, în particular, studiul multilateral al transmisiilor cardanice, cultivat o vreme la Iași de tov. N. Irimiciuc și adîncit sistematic la Brașov de tov. Fl. Dudiță, autorul volumului recenzat aici.

Autorul, pe lîngă rezultatele cunoscute cristalizate de el în volum ca urmare a cercetării unei vaste bibliografii (250 titluri), prezintă o serie de cercetări personale privind analiza structurală, cinematica și cinetostatica mecanismelor policardanice, sinteza cinematică a mecanismelor policardanice sincrone și vibrațiile parametrice în transmisiile cardanice. Dată fiind utilitatea studiului elaborat, ce constituie o veritabilă monografie a transmisiilor cardanice, care, alcătuind o unitate funcțională independentă, servesc transmiterii la distanță, fără amplificare, a momentului de răsucire între diferitele părți ale aceleeași mașini sau între diferite mașini, poziția relativă fiind în general variabilă, Ref. recomandă traducerea volumului recenzat și în alte limbi.

*

Il Rif. indica qui sopra in lingue romena alcuni dettagli concernenti il pregevole libro del Prof. Fl. Dudiță consacrato ad uno studio monografico dei *giunti cardanici* mono- e polivalenti e ne addita all'incontestabile utilità della traduzione di esso volume in altre lingue.

S. Deleanu, E. Giurcă

22. BĂR FR., BOARNĂ C., CENTEA O., IVANCENCO AL., MARCU V., MICLOȘI V. POPOVICI VL., RAȚIU M., SĂLĂGEANU TR., STOIANOVICI P., *Sudarea metalelor*. Ed. Tehn., Buc., 1965, 560 p.

Apărută din necesitatea de a sprijini cunoașterea și extinderea sudării în țara noastră, cartea prezintă un real interes. În cele 9 capitole ale cărții, autorii s-au străduit și au reușit să cuprindă destul de concis și unitar, cele mai noi cunoștințe din acest domeniu, făcînd apel de numeroase ori la rezultatele cercetărilor proprii.

Lucrarea are următoarele capitole: 1. Metalurgia și tehnologia sudării electrice prin topire (Sălăgeanu Tr.); 2. Sudarea cu gaze (Boarnă C. și Bär Fr.); 3. Lipirea (Sălăgeanu Tr.); 4. Sudarea prin presiune (Miclosi V.); 5. Tensiuni remanente (Rațiu M.); 6. Utilajul pentru sudare și lipire (Ivancenco Al. și Centea O.); 7. Tăierea cu gaze (Stoianovici P. și Miclosi V.);

8. Depuneri metalice prin procedee de sudare (Stoianovici P. și Marcu V.);
9. Mecanizarea și automatizarea în ateliere (Popovici Vl.).

Lucrarea cuprinde toate problemele importante ale sudării, fundamentate din punct de vedere teoretic și însoțite de prețioase indicații de ordin practic. Cu toate acestea credem că ar fi fost bine dacă defectele sudurilor și eventual metodele de a le pune în evidență ar fi fost tratate mai dezvoltat, într-un capitol separat.

Cartea este utilă în primul rînd inginerilor din uzine și institute de cercetări care se ocupă cu tehnologia sudării, în al doilea rînd studenților care se pregătesc în acest domeniu și mai puțin proiectanților.

*

Le Réf. expose ci-dessus en langue roumaine nombre de détails concernant ce beau volume dédié à l'étude de la *Sudure des métaux*.

Gh. Iliescu

23. ЛЕБЕДЕВ П. А., *Кинематика пространственных механизмов*. **Машиностроение, М.-Л, 1966, 280 стр.**

Importanța mereu crescîndă a rolului și a posibilităților de largă folosire a mecanismelor spațiale în cele mai variate agregate de mașini menite a soluționa problema fundamentală a automatizării proceselor de producție, s-a reflectat în ultima vreme într-o serie de cercetări originale în domeniul teoriei și practicii mecanismelor spațiale publicate de numeroși specialiști din țară și de peste hotare în revistele de specialitate „Getriebetechnik", „Journal of Mechanisms", „Revue Roumaine des Sciences techniques, Série de Mécanique appliquée", **„Труды Семинара по теории машин и механизмов"** ș.a. sau prezentate la cele mai recente congrese și conferințe de Teoria mecanismelor și mașinilor (TMM), ca, de ex., Conferința de mecanică (București, sept., 1965), Conferința de mecanisme (Varna, sept., 1965), Conferința jubiliară de TMM (Dresda, sept., 1966), A 9-a Conferință de Mecanisme (Evanston, oct., 1966), Al 11-lea Congres de mecanică teoretică și aplicată (dec., 1966). Șirul acestor studii a constituit totodată baza unor monografii de deosebită actualitate, avînd ca subiect metodele de studiu a mecanismelor spațiale. Aici se încadrează, în particular, volumul recenzat *Cinematica mecanismelor spațiale*, datorită cunoscutului specialist sovietic prof. dr. P. A. Lebedev. Din punct de vedere metodologic, acest excelent volum conține în partea introductivă expuneri succinte ale aparatelor matematice de investigație științifică folosite pînă acum în studiul analitic al mecanismelor spațiale. Aici se includ de ex., date fundamentale relative la corpuri numerice hipercomplexe, matrice, tensori, afinori ș.a. Urmează apoi expunerea celor mai eficace metode analitice de studiu a mecanismelor spațiale. Aici și-au găsit loc șiruri de capitole consacrate metodelor lui V. A. Zinoviev (cap. 12), H. Wörle (cap. 13), P. A. Lebedev (cap. 14), F. M. Dimentberg (cap. 15), S. H. Kislițîn (cap. 16), G. S. Kalițin (cap. 17), J. Denavit și R. S. Hartenberg (cap. 18), D. Mangeron și C. Drăgan (cap. 19) și F. H. Raven (cap. 20). În cap. 21 se prezintă succint și metodele analitice datorite lui Iu. F. Moroșkin și R. Voinea și M. Atanasiu. Ref. subliniază în mod deosebit aportul autorului la analiza comparativă a diferitelor metode elaborate (cap. 22). Astfel de ex., comparînd volumul de lucru necesitat de metoda tensorială, elaborată de D. Mangeron

și C. Drăgan și deosebit de propice pentru folosirea MEC, și metoda lui S. G. Kisliţîn și luînd ca mecanism standard biela-manivelă spațială, autorul ajunge la concluzia că metoda tensorială necesită 7 sisteme de coordonate și reclamă în problema de înmulțire a matricelor 560 de operații, pe cînd metoda lui S. G. Kisliţîn necesită 16 sisteme de coordonate și respectiv 120 operații. Avantajele metodei tensoriale menționate sînt puse în evidență și în alte cazuri, de pildă, în comparație cu rezultatele cercetărilor prof. dr. Chang Tsy Siang, bazate de altfel pe lucrările referentului. Ultima parte a volumului recenzat este consacrată determinării parametrilor ce caracterizează mișcările diferitelor mecanisme spațiale interesînd mașini de cusut, textile, de pielărie, de scris, de calcul, automobile, tractoare, avioane, telecomenzi etc. O bogată bibliografie (158 titluri). Ref. recomandă călduros traducerea volumului recenzat și în alte limbi.

*

Rev. gives oven in Romanian languages some details concerned with the excellent volume *Kinematics of spațial Mechanisms* by Prof. P. A. Lebedev, D. Sc., and underlines the opportunity to translate it in other languages. *D. Mangeron*

24. MILTZLAFF G., *Eine Verallgemeinerung der Aufgabe von Cauchy-Kowalewski für Systeme von partiellen Differentialgleichungen beliebig hoher Ordnung und ihre Erweiterung auf nicht analytische Lösungsfunktionen. Anwendungen.* Zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) genehmigte Dissertation, Technische Hochschule „Otto von Guericke", Magdeburg, 1966, 136 S.

Ref. a urmărit cu atenție seria de lucrări a prof. Gerhard Miltzlaff consacrată în anii din urmă studiilor diferitelor sisteme diferențiale interesînd Fizica Matematica. Teza analizată constituie o contribuție de valoare în domeniul extinderii problemei lui Cauchy-Kowalewski la sisteme de ecuații cu derivate parțiale de ordin superior și la cazul soluțiilor neanalitice. Autorul ia ca punct de plecare rezultatele clasice și recente (a se vedea, de ex., seriile de lucrări ale lui V. R. Friedländer, O. A. Oleynik, I. G. Petrowski, I. M. Gul, H. Hornich, O. A. Ladyzenskaja, L. V. Gerasimenko ș.a.). Cap. I este consacrat extinderii problemei „în mic", iar cap. II aceleeași probleme „în mare". Aici și-a găsit loc formularea problemei, o extindere la funcții neanalitice a cunoscutei inegalități a lui Poincaré, o teoremă preliminară relativă la existența și unicitatea funcțiilor-soluții ale problemei formulate, o extindere a condiției lui Lipschitz și teorema generală de existență și unicitate pentru o soluție neanalitică a problemei lui Cauchy-Kowalewski. Ref., subliniind interesul, rigoarea și eficacitatea metodelor elaborate, socoate util să se completeze partea introductivă cu datele bibliografice mai complete, incluzînd într-însele și alte contribuții în domeniul studiului problemei lui Cauchy-Kowalewski (de ex., recentele extinderi ale problemei datorite prof. A. Haimovici).

*

Ref. gibt oben in Rumänischer Sprache einige Einzelheiten die die Dissertation von Prof. G. Miltzlaff betreffen. *D. Mangeron.*

25. VENKATARAMAN SRI M. K., *Boundary Layer on Rotating Bodies with and without Heat Transfer.* Thesis accepted for admission to the Degree of Doctor of Philosophy (Ph. D.), Indian Instittue of Technology, Kharagpur, 1966.

Ref., răspunzînd invitației Consiliului științific al Institutului Indian de Tehnologie din Kharagpur de a fi unul din referenții științifici oficiali la susținerea tezei de doctorat a prof. Venkataraman Sri M. K. consacrată studiului stratului limită al corpurilor în rotație cu și fără transfer de căldură, a făcut o analiză detaliată a lucrării. Aici nu se menționează decît faptul că autorul a reușit cu succes luînd ca punct de plecare întreaga bibliografie actuală în domeniu să stabilească sistemele de ecuații care schematizează fenomenul complex studiat și să dea soluția problemei în unele cazuri ce reflectă atît forma corpurilor în rotație cît și diferite rotații posibile.

*

Rev. gives oven in Romanian language some details concerned with the Thesis accepted for higher degree by prof. Sri M. K. Venkataraman. The Rev. was very glad to accept its analysis as a member of the Board of Examiners to adjudicate upon it.

Rev. underlines the interest concerned with the results elaborated in the analysed thesis reffering to mathematical schemes and its consequent resolution related both with studies of boundary layer on rotating bodies with and without heat transfer. A very complete bibliography concerning recent contributions is also given.

D. Mangeron

26. NIANG S., *Théorie des systèmes variables de particules. Applications.* Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Dakar (Doctorat d'Etat), 1964, 224 p.

Teza de doctorat a prof. Souleymane Niang constituie o fundamentată contribuție în domeniul Mecanicii teoretice, avînd la bază lucrările profesorului R. Raffin relative la studiul sistemelor care schimbă particule cu exteriorul și includ astfel clasicele rezultate din domeniul Mecanicii corpurilor cu masă variabilă, precum și lucrările prof. D. Mangeron și apoi și ale referentului privitoare la noi forme de ecuații de Mecanică analitică.

Primul capitol este consacrat expunerii noțiunilor generale (definiția jeturilor, a centrelor de transfer, a centrelor de emisie și de admisie, a vitezei de schimb, a momentelor liniare de admisie și de emisie ș.a.). Cap. al doilea cuprinde expunerea rezultatelor autorului relative la momente liniare, momente unghiulare, energie de schimb ș.a., în lumina datelor cunoscute în domeniul cineticii în această ordine de idei. Cap. al treilea este consacrat enunțării teoremelor generale de dinamica sistemelor variabile de particule (teoremele momentelor liniar și unghiular, teorema energiei ș.a.). Cap. al patrulea cuprinde date referitoare la stabilirea ecuațiilor fundamentale de Dinamică analitică pentru sistemele variabile de particule. Menționăm aici că rezultatele fructuoase din acest capitol au fost continuu adîncite, atît în lucrările apărute ulterior în revistele de specialitate și datorite autorului tezei, în colaborare cu prof. D. Mangeron, E. Tokaci și referentul, cît și în lucrările altor autori, bazate și ele pe lucrările în domeniu ale prof. Mangeron, ca de ex., recenta comunicare a academicianului bulgar Bl. Dolaptschiew, pre-

zentată la al IV-lea Congres al Uniunii Matematicienilor Balcanici (București, septembrie, 1966). Cap. al cincilea este consacrat problemelor variaționale relative la sistemele studiate. Aici și-au găsit loc și ecuațiile canonice ale mișcărilor acestor sisteme. Diferite aplicații ale poblemelor tratate (cap. VI și VII), legate de rezultatele lui Tzénoff, Novoselov ș.a., încheie conținutul tezei analizate.

*

Le réf. expose ci-dessus en langue roumain quelques détails concernant la Thèse de M. le prof. Souleymane Niang. *S. Deleanu.*

27. ТЕНЕНБАУМ М. М., *Износостойкость конструкционных материаллов и деталеи машин при образовных иэнашивании.* **Машинострение, М., 1966, 330 стр.**

Literatura tehnică s-a îmbogățit în acest an cu o valoroasă monografie din domeniul frecării și uzurii, domeniu ce prezintă un interes deosebit pentru studiul durabilității mașinilor și utilajelor ce lucrează în medii puternic abrazive (agricultură, construcții, exploatări miniere etc.).

Lucrarea este împărțită în 9 capitole și cuprinde 330 pagini, 131 figuri și 64 tabele. Munca asiduă depusă de autor pentru sistematizarea materialului cuprins în cele 317 referiri bibliografice, printre care o serie de cercetări personale realizate în cadrul VISHOM, a fost pe deplin răsplătită, în final rezultînd o lucrare unitară, de un înalt nivel științific și tehnic.

În cap. I, după ce se examinează unele aspecte ale interacțiunii ce are loc în straturile superficiale în contact, se prezintă o schemă originală a contactelor de fricțiune deosebit de importantă pentru studiul sistematic al proceselor de frecare și uzură.

Cap. II se ocupă de dinamica procesului de uzură în timp și de legătura acestuia cu capacitatea de funcționare. De asemenea se analizează problema sistematizării și eventual standardizării metodelor de încercare la uzură. Deoarece aceasta depinde de proprietățile mecanice ale stratului superficial, în cap. III se prezintă metoda sclerometrică pentru studiul rezistenței la zgîriere a straturilor superficiale ale metalelor, aliajelor și maselor plastice.

Ținînd seama că procesul de uzură abrazivă (de care se ocupă lucrarea în capitolele următoare) depinde de proprietățile particulelor abrazive, cap. IV analizează capacitatea de abraziune a rocilor miniere, cărbunelui și solului.

În cap. V se dau date privind comportarea la uzură abrazivă a diverselor materiale și în special a oțelurilor și se examinează de asemenea rezistența la uzură în cazul particulelor cu proprietăți abrazive scăzute. Cap. VI cercetează uzura organelor de mașini în cazul contactului cu o masă abrazivă (brăzdarul de plug, diverse tipuri de site etc.). Se dau scheme de instalații și mașini de laborator precum și date experimentale privind comportarea diverselor materiale (oțeluri, fonte, acoperiri cu aliaje dure, mase plastice) la uzură cînd lucrează în masa abrazivă.

Cap. VII este rezervat uzurii materialelor cînd între suprafețele în contact se interpun particule abrazive (la încărcare normală sau tangențială); se examinează acțiunea abrazivă a materialelor poroase (materiale plastice, bronzuri etc.) asupra oțelurilor și se scoate în evidență rolul straturilor abrazive în fenomenele

de interacțiune ale straturilor în contact. Cap. VIII se referă la rezistența la uzură în cazul organelor supuse unui curent de lichid sau gaze ce conține particule abrazive (uzură hidro-abrazivă și gazo-abrazivă), dînd scheme de instalații și date privind aceste genuri de uzură.

Ultimul capitol (IX) se referă la problema durabilității mașinilor ce lucrează în condiții de uzură. Se indică măsurile constructive și de exploatare ce trebuie luate în vederea creșterii duratei de exploatare a mașinilor agricole în special.

Prin prezentarea a numeroase scheme de instalații de laborator și de date experimentale și prin trimiterile bibliografice, lucrarea prezintă un mare interes pentru cercetătorii din domeniul frecării și uzurii în mașini, precum și pentru cercetătorii și inginerii proiectanți ce lucrează în domeniul construcției de mașini agricole, mașini miniere, mașini de construcții etc. Grija deosebită a editurii Mașinostroenie pentru prezentarea lucrării face ca consultarea acesteia să fie deosebit de plăcută.

*

Le Réf. donne en langue roumaine nombre de détails concernant cette riche monographie consacrée à la *Résistance à l'usure des matériaux de construction et des organes de machines pour l'usure abrasive*. Elle est d'une grande utilité pour tous les spécialistes du frottement et de l'usure et pour les constructeurs de machines agricoles, minières etc.

I. Crudu

INTREPRINDEREA
POLIGRAFICĂ
I A Ş I

cd. 158

40822